

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Statistik	3
1.1	Einführung	3
1.2	Bedingte Erwartungen	6
1.3	Punkt- und Bereichsschätzung	9
1.4	Testtheorie	14
1.5	Nichtparametrische Verfahren	16
2	Numerische Verfahren zur Berechnung von Punktschätzern	20
2.1	Lokale Optimierung	20
2.2	Automatisches Differenzieren	22
2.3	Diskrete Maximum-Likelihood-Schätzung in der Nachrichtentechnik	26
	Literaturverzeichnis	34

Kapitel 1

Mathematische Statistik

1.1 Einführung

Hat man ein Zufallsexperiment durch einen Wahrscheinlichkeitsraum modelliert, so stellt die Wahrscheinlichkeitstheorie Hilfsmittel bereit, um bei bekanntem Wahrscheinlichkeitsraum Aussagen über den Ablauf des zugrundeliegenden Zufallsexperimentes machen zu können. Die mathematische Statistik behandelt die folgende Problemstellung: Das zu modellierende Zufallsexperiment wird zunächst durch einen unvollständigen Wahrscheinlichkeitsraum beschrieben. Bei dieser Beschreibung werden die Grundmenge Ω , die σ -Algebra $\mathcal{S}$ und eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathcal{S}$ festgelegt. Dabei wird die Menge der in Frage kommenden Wahrscheinlichkeitsmaße häufig durch einen Parameter θ aus einem Parameterraum Θ dargestellt. Die Menge aller eindimensionalen Normalverteilungen kann zum Beispiel durch den Parameterraum

$$\theta = (\mu, \sigma^2)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ = \Theta$$

dargestellt werden. Um nun zu einer vollständigen mathematischen Beschreibung unseres Zufallsexperimentes zu kommen, müssen wir uns für ein Wahrscheinlichkeitsmaß P aus der Menge der in Frage kommenden Wahrscheinlichkeitsmaße entscheiden. Ein wesentliches Kriterium der mathematischen Statistik besteht nun darin, dass eine Entscheidung über die Wahl des Wahrscheinlichkeitsmaßes beziehungsweise über die Verkleinerung der Menge aller in Frage kommenden Wahrscheinlichkeitsmaße von Ergebnissen des Zufallsexperimentes abhängt. Somit kann die Problemstellung der mathematischen Statistik als Umkehrung der Problemstellung der Wahrscheinlichkeitstheorie aufgefasst werden. Dabei werden die Ergebnisse des Zufallsexperimentes häufig nicht unmittelbar für die zu treffende Entscheidung verwendet, sondern die von diesen Ergebnissen abhängigen Werte einer Zufallsvariablen X definiert auf Ω . Wir erhalten somit die folgende Ausgangssituation:

Gegeben ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{S}, \mathcal{W})$ bestehend aus einer Grundmenge Ω , einer σ -Algebra $\mathcal{S}$ und einer Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathcal{W}$ auf $\mathcal{S}$. Ist diese Menge $\mathcal{W}$ durch einen Parameter $\theta \in \Theta$ beschrieben, so schreiben wir $(\Omega, \mathcal{S}, \mathcal{W}_{\theta \in \Theta})$. Ferner sind ein Meßraum $(\Psi, \mathcal{G})$, eine Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \Psi$ und der Funktionswert $X(\hat{\omega})$ der Zufallsvariable X für mindestens ein beobachtetes Ergebnis $\hat{\omega} \in \Omega$ des

zugrundegelegten Zufallsexperimentes gegeben. Basierend auf $X(\hat{\omega})$ soll nun unter verschiedenen weiteren Vorgaben eine Entscheidung für die Wahl des Wahrscheinlichkeitsmaßes $P \in \mathcal{W}$ auf $\mathcal{S}$ ermöglicht oder zumindest vereinfacht werden. Wir werden die folgenden Problemstellungen untersuchen:

Punktschätzung

Unter der Annahme, dass unsere Menge $\mathcal{W}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen durch einen Parameter $\theta \in \Theta$ dargestellt ist, soll für eine nichtleere Menge Γ und eine vorgegebene Funktion $\gamma : \Theta \rightarrow \Gamma$ ein Funktionswert $\hat{\gamma}$ von γ ermittelt werden. Durch die Wahl von $\hat{\gamma}$ wird $\mathcal{W}_{\theta \in \Theta}$ auf $\mathcal{W}_{\theta \in \{\tau \in \Theta; \gamma(\tau) = \hat{\gamma}\}}$ reduziert. Für die Menge aller eindimensionalen Normalverteilungen mit

$$\theta = (\mu, \sigma^2)^T \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ = \Theta$$

könnte die Funktion γ zum Beispiel in der Projektion auf die erste Komponente bestehen:

$$\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} (= \Gamma), \quad (\mu, \sigma^2) \mapsto \mu.$$

Man interessiert sich also nur für die Festlegung des Erwartungswertes.

Bereichsschätzung

Im Gegensatz zur Punktschätzung begnügt man sich bei der Bereichsschätzung damit, die Menge $\mathcal{W}_{\theta \in \Theta}$ der möglichen Wahrscheinlichkeitsmaße durch die Wahl einer speziellen Teilmenge $B \subset \Gamma$ auf die Menge $\mathcal{W}_{\theta \in \{\tau \in \Theta; \gamma(\tau) \in B\}}$ zu reduzieren.

Testtheorie

In der Testtheorie betrachtet man eine Partition $\mathcal{W}_0, \mathcal{W}_1$ unserer Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathcal{W}$. Das Ergebnis eines Tests ist eine Entscheidung darüber, ob die Menge der zur Diskussion stehenden Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{W}$ auf $\mathcal{W}_0$ oder $\mathcal{W}_1$ reduziert wird.

Durch die Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \Psi$ erhalten wir zu jedem $P \in \mathcal{W}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_X auf $\mathcal{G}$, das Bildmaß von X . Die zu $\mathcal{W}$ gehörige Menge aller Bildmaße P_X auf $\mathcal{G}$ bezeichnen wir mit $P_{X, \mathcal{W}}$ beziehungsweise mit $P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in \Theta}}$, falls $\mathcal{W}$ durch einen Parameter $\theta \in \Theta$ dargestellt wird. Da wir nicht die Beobachtung $\hat{\omega} \in \Omega$ als Basis unserer Überlegungen gewählt haben, sondern $X(\hat{\omega})$, ist es sinnvoll, Aussagen über Wahrscheinlichkeitsmaße $P \in \mathcal{W}$ (auf $\mathcal{S}$) auf Aussagen über Wahrscheinlichkeitsmaße $P_X \in P_{X, \mathcal{W}}$ zu verlagern.

Definition 1.1 (Stichprobe(nraum), stat. Raum, Realisierung) Seien $(\Omega, \mathcal{S})$ ein Meßraum, $\mathcal{W}$ eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathcal{S}$ und $(\Omega, \mathcal{S}, \mathcal{W})$ die unvollständige Beschreibung eines Zufallsexperimentes gemäß der obigen Motivation. Seien ferner $\hat{\omega} \in \Omega$ ein Ergebnis dieses Zufallsexperimentes, $(\Psi, \mathcal{G})$ ein Meßraum und $X : \Omega \rightarrow \Psi$ eine Zufallsvariable (also $\mathcal{S}$ - $\mathcal{G}$ -meßbar), dann heißt die Menge Ψ Stichprobenraum, und der Wert $\bar{x} = X(\hat{\omega})$ Stichprobe oder Realisierung von X . Ist nun $P_{X, \mathcal{W}}$ die Menge aller Bildmaße von X in Abhängigkeit von $\mathcal{W}$, so heißt das Tupel $(\Psi, \mathcal{G}, P_{X, \mathcal{W}})$ statistischer Raum.

Im folgenden Beispiel sollen die bisherigen Begriffe eingeübt und dabei auch auf einen zentralen Begriff der mathematischen Statistik hingeführt werden.

Beispiel: Herstellung von Glühbirnen

Eine Firma stellt Glühbirnen her, wobei jede Glühbirne mit einer festen Wahrscheinlichkeit $\theta \in [0, 1]$ defekt ist. In einem großen Lager werden M Glühbirnen aufbewahrt. Ein Kunde bestellt K ($K < M$) Glühbirnen, die aus dem Lager entnommen und ausgeliefert werden. Bei der Verwendung jeder dieser K Glühbirnen wird vom Kunden notiert, ob sie defekt ($\hat{= 1}$) ist oder nicht ($\hat{= 0}$). Die Firma hätte gerne aufgrund der Erfahrungen des Kunden eine Schätzung, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Glühbirne defekt ist. Das im Lager befindliche M -Tupel von Glühbirnen modellieren wir durch einen binären Vektor $\omega \in \Omega = \{0, 1\}^M$, wobei wir uns die M Glühbirnen als durchnummeriert vorstellen und $\omega_i = 1$ bedeutet, dass die i -te Glühbirne defekt ist (also ist für $\omega_i = 0$ die i -te Glühbirne in Ordnung). Als σ -Algebra $\mathcal{S}$ auf $\{0, 1\}^M$ können wir die Potenzmenge $\mathcal{P}(\{0, 1\}^M)$ verwenden. Unter der Annahme, dass die Zustände der einzelnen Glühbirnen stochastisch unabhängig sind, erhalten wir als mögliche Wahrscheinlichkeitsmaße:

$$\mathcal{W}_{\theta \in [0, 1]}(\omega) = \prod_{i=1}^M \theta^{\omega_i} (1 - \theta)^{(1 - \omega_i)}.$$

Nun steht uns allerdings kein Ergebnis dieses Zufallsexperimentes unmittelbar zur Verfügung, da wir ja nur die K ausgelieferten Glühbirnen beobachten können. Seien nun $1 \leq i_1 < \dots < i_K \leq M$ die Nummern derjenigen K Glühbirnen, die ausgeliefert wurden, so können wir mit $\Psi = \{0, 1\}^K$ und $\mathcal{G} = \mathcal{P}(\{0, 1\}^K)$ die Zufallsvariable

$$X : \Omega \rightarrow \Psi, \quad \omega \mapsto (\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_K}) =: x = (x_1, \dots, x_K)$$

angeben. Für die entsprechenden Bildmaße erhalten wir:

$$P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in [0, 1]}}(x) = \prod_{i=1}^K \theta^{x_i} (1 - \theta)^{(1 - x_i)}$$

Eine Realisierung unserer Zufallsvariablen X ist somit durch einen binären Vektor $\bar{x} \in \Psi$ gegeben. Dieser Vektor ist die einzige Information, die wir zur Schätzung

von θ zur Verfügung haben. Da aber

$$P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in [0,1]}}(x) = \prod_{i=1}^K \theta^{x_i} (1-\theta)^{(1-x_i)} = \theta^{\sum_{i=1}^K x_i} (1-\theta)^{K - \sum_{i=1}^K x_i},$$

scheint es zu genügen, sich statt $x \in \{0,1\}^K$ nur die Zahl $\sum_{i=1}^K x_i$ zu merken. Die entscheidende Frage lautet nun: Sind alle Informationen, die in $x \in \{0,1\}^K$ über den unbekannten Parameter θ enthalten sind, auch in der Zahl $\sum_{i=1}^K x_i$ enthalten? In diesem Fall nennt man die Abbildung

$$T : \Psi = \{0,1\}^K \rightarrow \Omega_T = \{0,1,\dots,K\}, \quad x \mapsto \sum_{i=1}^K x_i$$

eine suffiziente Statistik für θ .

Rein intuitiv würde man einen Schätzwert $\hat{\theta}$ für θ folgendermaßen berechnen:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^K \bar{x}_i}{K}.$$

Wie könnte man nun entscheiden, ob alle Informationen über θ bereits in der Abbildung T enthalten sind? Zur Beantwortung dieser Frage stellen wir zunächst fest, dass T $\mathcal{P}(\{0,1\}^K)$ - $\mathcal{P}(\{0,1,\dots,K\})$ -meßbar ist. Somit können wir für jede Menge

$$D_t := \{x \in \{0,1\}^K; T(x) = t\}, \quad t \in \{0,1,\dots,K\},$$

die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P_{X, \mathcal{W}_{\theta}}^{D_t}(x) = \frac{P_{X, \mathcal{W}_{\theta}}(x \cap D_t)}{P_{X, \mathcal{W}_{\theta}}(D_t)}$$

für $\theta \in [0,1]$ berechnen. Es gilt:

$$P_{X, \mathcal{W}_{\theta}}^{D_t}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für alle } x \text{ mit } \sum_{i=1}^K x_i \neq t \\ \frac{\theta^t (1-\theta)^{(K-t)}}{\binom{K}{t} \theta^t (1-\theta)^{(K-t)}} = \frac{1}{\binom{K}{t}} & \text{für alle } x \text{ mit } \sum_{i=1}^K x_i = t \end{cases}.$$

Entscheidend ist nun die Tatsache, dass die verschiedenen Werte $P_{X, \mathcal{W}_{\theta}}^{D_t}(x)$ für alle $x \in \{0,1\}^K$ und alle $t \in \{0,1,\dots,K\}$ nicht mehr von θ abhängen. Diesen Sachverhalt interpretieren wir dahingehend, dass die Beobachtung $T(x)$ hinreichend (suffizient) dafür ist, jede Information über θ zu erhalten, die man aus der Stichprobe $\bar{x} = X(\hat{\omega})$ entnehmen kann. Um nun suffiziente Statistiken formal einführen zu können, benötigen wir den Begriff der bedingten Erwartung.

1.2 Bedingte Erwartungen

Ausgehend von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ betrachten wir nun eine numerische, (P) -integrierbare Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und die Abbildung

$Y : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, \omega \mapsto \mathbb{E}(X)$. Diese Abbildung ist für jede σ -Algebra $\mathcal{G}$ über Ω $\mathcal{G}$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -meßbar. Somit ist $\{\emptyset, \Omega\}$ die kleinste aller σ -Algebren $\mathcal{G}$ über Ω , für die Y $\mathcal{G}$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -meßbar ist, und es gilt:

$$\int_A Y dP = \int_A X dP \quad \text{für alle } A \in \{\emptyset, \Omega\}.$$

Ist nun X ebenfalls $\{\emptyset, \Omega\}$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -meßbar, so existiert eine (P) -Nullmenge $N \in \mathcal{S}$ mit

$$X(\omega) = \mathbb{E}(X) = Y(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in N^c.$$

Eine andere Schreibweise dafür lautet:

$$X = \mathbb{E}(X) = Y \quad (P\text{-}) \text{ fast sicher.}$$

Daher ist der Übergang von X zu Y mit keinerlei Informationsverlust (bezüglich der Verteilung von X) verbunden. Ist aber X nicht $\{\emptyset, \Omega\}$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -meßbar, so haben wir beim Übergang von X zu Y Information über die Verteilung von X verloren. Diesen Informationsverlust wollen wir folgendermaßen quantifizieren: Ist $\mathcal{F}$ die Menge aller σ -Algebren über Ω , sodass X für alle $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$ $\mathcal{C}$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -meßbar ist, so ist

$$\sigma(X) := \bigcap_{\mathcal{C} \in \mathcal{F}}$$

die kleinste σ -Algebra über Ω , für die X $\mathcal{C}$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -meßbar ist. Selbstverständlich gilt $\{\emptyset, \Omega\} \subseteq \sigma(X)$. Ist nun $\{\emptyset, \Omega\} = \sigma(X)$, so haben wir keine Information verloren. Der Informationsverlust beim Übergang von X zu Y (bezüglich der Verteilung von X) wächst mit der Anzahl der Mengen $A \in \sigma(X)$, $A \notin \{\emptyset, \Omega\}$. Wir verwenden also σ -Algebren (in unserem Beispiel $\{\emptyset, \Omega\}$ und $\sigma(X)$), um den Informationsverlust zu charakterisieren.

Im folgenden betrachten wir den umgekehrten Weg, indem wir uns einen Informationsverlust in Form einer σ -Algebra $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ über Ω vorgeben und eine $\mathcal{C}$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -meßbare numerische Zufallsvariable $Y : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ betrachten, für die gilt:

$$\int_A Y dP = \int_A X dP \quad \text{für alle } A \in \mathcal{C}.$$

Satz und Definition 1.2 (bedingte Erwartung) Seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ eine $(P-)$ integrierbare numerische Zufallsvariable, dann existiert zu jeder σ -Algebra $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ über Ω eine $\mathcal{C}$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -meßbare numerische Zufallsvariable $Y : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mit:

$$\int_A Y dP = \int_A X dP \quad \text{für alle } A \in \mathcal{C}.$$

Für zwei $\mathcal{C}$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -meßbare numerische Zufallsvariable $Y, Y_1 : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, die die obige Gleichung erfüllen, gilt

$$Y = Y_1 \quad (P-) \text{ fast sicher.}$$

Jede $\mathcal{C}$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -meßbare numerische Zufallsvariable $Z : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, für die $(P-)$ fast sicher $Z = Y$ gilt, wird mit $\mathbb{E}(X|\mathcal{C})$ bezeichnet und heißt die bedingte Erwartung von X unter $\mathcal{C}$. Daher ist die Zufallsvariable $\mathbb{E}(X|\mathcal{C})$ nicht eindeutig festgelegt. Ein fest gewähltes Z nennt man Version von $\mathbb{E}(X|\mathcal{C})$.

Ausgehend von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ und einem Meßraum $(\Omega', \mathcal{S}')$ betrachten wir eine $(P-)$ integrierbare numerische Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ und n Zufallsvariablen $Z_1, \dots, Z_n : \Omega \rightarrow \Omega'$.

Mit $\sigma(Z_1, \dots, Z_n)$ bezeichnen wir die kleinste unter allen σ -Algebren $\mathcal{C}$ über Ω , für die die Zufallsvariablen $Z_1, \dots, Z_n$ $\mathcal{C}$ - $\mathcal{S}'$ -meßbar sind. Interessiert man sich nun für die bedingte Erwartung $\mathbb{E}(X|\sigma(Z_1, \dots, Z_n))$, so schreibt man dafür $\mathbb{E}(X|Z_1, \dots, Z_n)$. Eigenschaften bedingter Erwartungen:

1. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{C})) = \mathbb{E}(X)$,
2. Ist X $\mathcal{C}$ - $\bar{\mathcal{B}}$ -meßbar, so folgt $\mathbb{E}(X|\mathcal{C}) = X$ $(P-)$ fast sicher,
3. Ist $X(\omega) = \alpha \in \mathbb{R}$ für alle $\omega \in \Omega$, so gilt $\mathbb{E}(X|\mathcal{C}) = \alpha$ $(P-)$ fast sicher.

Ist nun $Z : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ eine $(P-)$ integrierbare numerische Zufallsvariable, so erhalten wir:

1. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha X + \beta Z : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ (d.h. nicht „ $\infty - \infty$ “) gilt:

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Z|\mathcal{C}) = \alpha \mathbb{E}(X|\mathcal{C}) + \beta \mathbb{E}(Z|\mathcal{C}) \quad (P-) \text{ fast sicher,}$$

2. Sei nun $X \leq Z$ $(P-)$ fast sicher, dann gilt:

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{C}) \leq \mathbb{E}(Z|\mathcal{C}) \quad (P-) \text{ fast sicher.}$$

Besonders wichtig ist die in der folgenden Definition festgelegte Klasse von bedingten Erwartungen.

Definition 1.3 (bedingte Wahrscheinlichkeit) Seien $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A eine beliebige Menge aus der σ -Algebra $\mathcal{S}$, dann wird für jede σ -Algebra $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ die bedingte Erwartung $\mathbb{E}(I_A|\mathcal{C})$ als bedingte Wahrscheinlichkeit bezeichnet und in der Form $P(A|\mathcal{C})$ dargestellt.

Seien nun $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathcal{S}')$ ein Meßraum und $Y : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Zufallsvariable derart, dass es ein $\omega' \in \Omega'$ gibt mit $P(B) > 0$, wobei $B := \{\omega \in \Omega; Y(\omega) = \omega'\}$, so gilt für jede Menge $A \in \mathcal{S}$ und für alle reelle Versionen von $P(A|Y)$:

$$P(A|Y)(\omega) = P^B(A) \text{ für alle } \omega \in B.$$

Diese Gleichung rechtfertigt den in Definition 1.3 gewählten Namen. Zudem ist es nun prinzipiell möglich, Wahrscheinlichkeiten der Form $P^B(A)$ für Mengen $B := \{\omega \in \Omega; Y(\omega) = \omega'\}$ mit $P(B) = 0$ zu untersuchen:

$$P^B(A) := P(A|Y = \omega') := P(A|Y)(\omega) \text{ für alle } \omega \in B.$$

Analog schreiben wir für bedingte Erwartungen:

$$\mathbb{E}(A|Y = \omega') := \mathbb{E}(A|Y)(\omega) \text{ für alle } \omega \in B.$$

Diese Definitionen sind abhängig von den gewählten Versionen $P(A|Y)$ bzw. $\mathbb{E}(A|Y)$.

1.3 Punkt- und Bereichsschätzung

In diesem Abschnitt gehen wir von einem statistischen Raum $(\Psi, \mathcal{G}, P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in \Theta}})$ aus und betrachten die Aufgabe, aufgrund einer Stichprobe $\bar{x} \in \Psi$ eine Schätzung für $\gamma(\theta)$ mit $\gamma : \Theta \rightarrow \Gamma$ zu berechnen und Kriterien für die Güte dieser Schätzung anzugeben. Motiviert durch das obige Beispiel definieren wir:

Definition 1.4 ((suffiziente)Statistik) Seien $(\Psi, \mathcal{G}, P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in \Theta}})$ ein statistischer Raum, $(\Omega_T, \mathcal{S}_T)$ ein Meßraum und $T : \Psi \rightarrow \Omega_T$ eine $\mathcal{G}$ - $\mathcal{S}_T$ -meßbare Abbildung, dann wird die Abbildung T als Statistik bezeichnet. Die Statistik T heißt suffizient für $\theta \in \Theta$, falls es für jedes $A \in \mathcal{G}$ und für jedes $\theta \in \Theta$ eine Version von $P_{X, \mathcal{W}_\theta}(A|T)$ gibt, die nicht von θ abhängt. In diesem Fall heißt die von der Statistik T erzeugte σ -Algebra $\sigma(T) \in \mathcal{G}$ suffizient für $\theta \in \Theta$.

Das Auffinden suffizienter Statistiken ist im allgemeinen keine einfache Aufgabe. Im folgenden betrachten wir einen wichtigen Spezialfall:

Exponentialfamilien:

Seien $(\Psi, \mathcal{G}, P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in \Theta}})$ ein statistischer Raum, μ ein σ -endliches Maß auf $\mathcal{G}$ und $T_1, \dots, T_n : \Psi \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{G}$ - $\mathcal{B}$ -meßbare Funktionen. Seien ferner $C : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\xi_1, \dots, \xi_n : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Abbildungen und $h : \Psi \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ $\mathcal{G}$ - $\mathcal{B}$ -meßbar, dann heißt die Familie $P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in \Theta}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen eine Exponentialfamilie, wenn für jedes $\theta \in \Theta$ durch

$$f_{X, \theta} : \Psi \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto C(\theta)h(x) \exp \left(\sum_{j=1}^n \xi_j(\theta) T_j(x) \right)$$

eine μ -Dichte von $P_{X, \mathcal{W}_{\theta}}$ gegeben ist.

Entscheidend ist nun, dass bei Exponentialfamilien die Statistik

$$T : \Psi \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (T_1(x), \dots, T_n(x))^T$$

suffizient ist für $\theta \in \Theta$. Ist nun $P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in \Theta}}$ eine Exponentialfamilie mit entsprechender suffizienter Statistik T für $\theta \in \Theta$ und betrachtet man statt der Zufallsvariable X einen Meßraum $(\Psi^p, \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_p; A_i \in \mathcal{G}, i = 1, \dots, p\}))$ und eine Zufallsvariable

$$\hat{X} : \Omega \rightarrow \Psi^p, \quad \omega \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_p(\omega))^T, \quad p \in \mathbb{N},$$

wobei $X_1, \dots, X_p$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen sind mit

$$P_{X, \mathcal{W}_{\theta}} = P_{X_i, \mathcal{W}_{\theta}} \text{ für alle } \theta \in \Theta \text{ und alle } i \in \{1, \dots, p\},$$

so erhält man einen neuen statistischen Raum $(\Psi^p, \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_p; A_i \in \mathcal{G}, i = 1, \dots, p\}), P_{\hat{X}, \mathcal{W}_{\theta \in \Theta}})$ und eine suffiziente Statistik

$$\hat{T} : \Psi^p \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \hat{x} \mapsto \left(\sum_{i=1}^p T_1(\hat{x}_i), \dots, \sum_{i=1}^p T_n(\hat{x}_i) \right)^T$$

für $\theta \in \Theta$, wobei T für $i = 1, \dots, p$ die suffiziente Statistik der Exponentialfamilie $P_{X_i, \mathcal{W}_{\theta \in \Theta}} = P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in \Theta}}$ für $\theta \in \Theta$ ist.

Beispiel 1: Glühlampen

Seien $\Psi = \{0, 1\}$, $\mathcal{G} = \mathcal{P}(\{0, 1\})$ und $P_{X, \mathcal{W}_{\theta}}$ für jedes $\theta \in [0, 1]$ gegeben durch

$$P_{X, \mathcal{W}_{\theta}}(x) = f_{X, \theta}(x) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x} = (1 - \theta) \exp \left(x \ln \left(\frac{\theta}{1 - \theta} \right) \right),$$

so ist $T : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ eine suffiziente Statistik für $\theta \in [0, 1]$. Mit

$$\hat{X} : \Omega \rightarrow \Psi^K, \quad \omega \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_K(\omega))^T,$$

wobei $X_1, \dots, X_K$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen sind, für die gilt:

$$P_{X, \mathcal{W}_{\theta}} = P_{X_i, \mathcal{W}_{\theta}} \text{ für alle } \theta \in [0, 1] \text{ und alle } i \in \{1, \dots, K\},$$

erhalten wir eine suffiziente Statistik

$$\hat{T} : \{0, 1\}^K \rightarrow \mathbb{R}, \hat{x} \mapsto \sum_{i=1}^K \hat{x}_i$$

für $\theta \in [0, 1]$. Es gilt:

$$P_{\hat{X}, \mathcal{W}_\theta}(\hat{x}) = \prod_{i=1}^K \theta^{\hat{x}_i} (1 - \theta)^{(1 - \hat{x}_i)} = \theta^{\sum_{i=1}^K \hat{x}_i} (1 - \theta)^{K - \sum_{i=1}^K \hat{x}_i}.$$

Beispiel 2: Normalverteilung

Seien $\Psi = \mathbb{R}$, $\mathcal{G} = \mathcal{B}$ und $P_{X, \mathcal{W}_\theta}$ für jedes $\theta \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ gegeben durch die Lebesgue-Dichte

$$\begin{aligned} f_{X, \theta}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} \exp\left(-\frac{(x - \theta_1)^2}{2\theta_2}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} \exp\left(-\frac{\theta_1^2}{2\theta_2}\right) \exp\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}x - \frac{1}{2\theta_2}x^2\right) = \\ &= C(\theta)h(x) \exp\left(\sum_{j=1}^2 \xi_j(\theta)T_j(x)\right), \end{aligned}$$

so ist $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+, x \mapsto (x, x^2)^T$ eine suffiziente Statistik für $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Mit

$$\hat{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p, \omega \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_p(\omega))^T,$$

wobei $X_1, \dots, X_p$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen sind, für die gilt:

$$P_{X, \mathcal{W}_\theta} = P_{X_i, \mathcal{W}_\theta} \text{ für alle } \theta \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \text{ und alle } i \in \{1, \dots, p\},$$

erhalten wir eine suffiziente Statistik

$$\hat{T} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+, \hat{x} \mapsto \left(\sum_{i=1}^p \hat{x}_i, \sum_{i=1}^p \hat{x}_i^2\right)^T$$

für $\theta \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, wobei $P_{\hat{X}, \mathcal{W}_\theta}$ eine p -dimensionale $\mathcal{N}((\mu, \dots, \mu)^T, \sigma^2 E_p)$ Normalverteilung darstellt (E_p bezeichnet die p -dimensionale Einheitsmatrix). Somit muss man sich statt des p -dimensionalen reellen Vektors $\hat{x}$ nur die zwei reellen Zahlen $\left(\sum_{i=1}^p \hat{x}_i, \sum_{i=1}^p \hat{x}_i^2\right)$ merken, ohne Informationen über θ zu verlieren. Dies gilt überraschenderweise für alle $p \in \mathbb{N}$.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, ausgehend von einem statistischen Raum $(\Psi, \mathcal{G}, P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in \Theta}})$ und basierend auf einer Realisierung $\bar{x} \in \Psi$ die Aufgabe zu untersuchen, einen Schätzer $\gamma(\theta)$ für $\gamma : \Theta \rightarrow \Gamma$ anzugeben. Wir untersuchen den Spezialfall $\Gamma = \mathbb{R}$. Sei nun $g : \Psi \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{G}$ - $\mathcal{B}$ -meßbare Funktion, so nennt man g eine Schätzfunktion für $\gamma(\theta)$ und $g(\bar{x})$ einen Schätzer für $\gamma(\theta)$. Die Schätzfunktion g heißt erwartungstreu, falls

$$\mathbb{E}_\theta(g) := \int g dP_{X, \mathcal{W}_\theta} = \gamma(\theta) \text{ für alle } \theta \in \Theta.$$

Es kann passieren, dass es für $\gamma(\theta)$ keine erwartungstreue Schätzfunktion gibt; in diesem Fall wird $\gamma(\theta)$ als nicht schätzbar bezeichnet. Ansonsten heißt $\gamma(\theta)$ schätzbar. Wir gehen im folgenden immer von schätzbaren $\gamma(\theta)$ aus und wollen nun überlegen, wie man zwei gegebene erwartungstreue Schätzfunktionen g_1 und g_2 für $\gamma(\theta)$ vergleichen kann. Ein Maß für die Abweichung einer Zufallsvariable von ihrem Erwartungswert ist die Varianz dieser Zufallsvariable. Da der Erwartungswert einer erwartungstreuen Schätzfunktion gerade die zu schätzende Größe ist, ist g_1 besser als g_2 , falls die Varianz von g_1 kleiner ist als die Varianz von g_2 . Der folgende Satz beschreibt nun die Möglichkeit, mit Hilfe suffizienter Statistiken zu besseren erwartungstreuen Schätzfunktionen zu kommen.

Satz 1.5 (Rao-Blackwell) Seien $(\Psi, \mathcal{G}, P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in \Theta}})$ ein statistischer Raum, $(\Omega_T, \mathcal{S}_T)$ ein Messraum, $\gamma : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung und $g : \Psi \rightarrow \mathbb{R}$ eine erwartungstreue Schätzfunktion für $\gamma(\theta)$. Sei ferner $T : \Psi \rightarrow \Omega_T$ eine suffiziente Statistik für $\theta \in \Theta$, so ist die Schätzfunktion

$$h : \Psi \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathbb{E}_\theta(g|T = T(x))$$

ebenfalls erwartungstreu (wobei für die bedingte Erwartung $\mathbb{E}_\theta$ das Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{X, \mathcal{W}_\theta}$ herangezogen wird) und es gilt:

$$\mathbb{V}_\theta(g) \geq \mathbb{V}_\theta(h).$$

Beispiel: Glühbirnen

Kehren wir nun zu unserem Beispiel über die Herstellung von Glühbirnen mit dem statistischen Raum $(\{0, 1\}^K, \mathcal{P}(\{0, 1\}^K), P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in [0, 1]}})$ zurück und betrachten zwei Schätzfunktionen

$$g : \{0, 1\}^K \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_1$$

und mit $T : \{0, 1\}^K \rightarrow \{0, \dots, K\}$, $x \mapsto \sum_{i=1}^K x_i$:

$$h : \{0, 1\}^K \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathbb{E}_\theta(g|T = T(x))$$

Nach einfacher Rechnung erhält man:

$$h(x) = \frac{\sum_{i=1}^K x_i}{K}.$$

Für die Varianzen folgt somit:

$$\mathbb{V}_\theta(g) = \theta(1 - \theta) \geq \mathbb{V}_\theta(h) = \frac{\theta(1 - \theta)}{K}.$$

Eines der wichtigsten Verfahren zur Punktschätzung ist das Maximum-Likelihood-Verfahren. Ausgangspunkt ist ein statistischer Raum $(\Psi, \mathcal{G}, P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in \Theta}})$, eine Stichprobe $\bar{x}$, ein σ -endliches Maß μ auf $\mathcal{G}$ und die Forderung, dass $P_{X, \mathcal{W}_\theta}$ für jedes $\theta \in \Theta$

absolutstetig bezüglich μ ist mit der Dichte $f_{X,\theta} : \Psi \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Ist nun $\gamma : \Theta \rightarrow \Gamma$ bijektiv, so berechnet man ein $\hat{\theta} \in \Theta$ mit:

$$f_{X,\hat{\theta}}(\bar{x}) \geq f_{X,\theta}(\bar{x}) \text{ für alle } \theta \in \Theta$$

und verwendet den Wert $\gamma(\hat{\theta})$ als Maximum-Likelihood-Schätzer für $\gamma(\theta)$. Maximum-Likelihood-Schätzer müssen nicht existieren. Die Berechnung von $\hat{\theta}$ führt auf das Gebiet der mathematischen Optimierung (cf. Kap. 2). Die statistische Analyse von Maximum-Likelihood-Schätzern ist ein äußerst schwieriges Problem.

Beispiel 1: Glühbirnen

Für

$$f_{X,\theta}(x) = \theta^{\sum_{i=1}^K x_i} (1 - \theta)^{K - \sum_{i=1}^K x_i}$$

ergibt sich

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^K \bar{x}_i}{K}$$

Beispiel 2: Normalverteilung

Sei

$$f_{X,\theta}(x) = \prod_{i=1}^p \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \theta_1)^2}{2\theta_2}\right),$$

so ergibt sich:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^p \bar{x}_i}{p} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^p (\bar{x}_i - \hat{\theta}_1)^2}{p}.$$

Ist die zugehörige Schätzfunktion erwartungstreu?

Die Berechnung von Bereichsschätzern wollen wir an einem Beispiel demonstrieren.

Beispiel: Normalverteilung

Sei

$$f_{X,\theta}(x) = \prod_{i=1}^p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \theta)^2}{2}\right).$$

Gesucht ist ein $a \in \mathbb{R}_0^+$ derart, dass für $0 \leq c \leq 1$ gilt:

$$P_{X,\mathcal{W}_\theta} \left(\left\{ x \in \Psi; \theta \in \left[\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i - a, \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i + a \right] \right\} \right) \geq c$$

für alle $\theta \in \mathbb{R}$. Dies ist äquivalent zu

$$P_{X,\mathcal{W}_\theta} \left(\left\{ x \in \Psi; -a\sqrt{p} \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{i=1}^p x_i - \sqrt{p}\theta \leq a\sqrt{p} \right\} \right) \geq c.$$

Da aber die Zufallsvariable

$$Z_p : \Psi \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{i=1}^p x_i - \sqrt{p}\theta$$

$\mathcal{N}(0, 1)$ normalverteilt ist für alle $p \in \mathbb{N}$, erhalten wir für a :

$$\Phi(a\sqrt{p}) - \Phi(-a\sqrt{p}) \geq c$$

beziehungsweise

$$\Phi(a\sqrt{p}) \geq \frac{1+c}{2} \quad (\text{siehe Tabelle für } \Phi).$$

Es ergibt sich mit der Realisierung $\bar{x}$ und mit dem aus der obigen Ungleichung bestimmten a :

$$\theta \in \left[\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \bar{x}_i - a, \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \bar{x}_i + a \right].$$

1.4 Testtheorie

Die Testtheorie ist ein wichtiges und umfangreiches Teilgebiet der mathematischen Statistik; daher können wir nur auf Grundideen eingehen. Ausgangspunkt ist ein statistischer Raum $(\Psi, \mathcal{G}, P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in \Theta}})$ und eine Partition Θ_0, Θ_1 von Θ (also: $\Theta_0, \Theta_1 \neq \emptyset$, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ und $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$). Basierend auf einer Stichprobe $\bar{x} \in \Psi$ soll nun entschieden werden, ob Θ auf Θ_1 oder Θ_2 reduziert wird. In der Testtheorie wird diese Fragestellung durch die Entscheidung zwischen einer Nullhypothese

$$H_0 : \theta \in \Theta_0$$

und einer Gegenhypothese

$$H_1 : \theta \in \Theta_1$$

formuliert. Zu bestimmen ist also eine $\mathcal{G}$ - $\mathcal{P}(\{0, 1\})$ -meßbare Entscheidungsfunktion $\delta : \Psi \rightarrow \{0, 1\}$, die jeder möglichen Stichprobe $\bar{x}$ eine Entscheidung für Θ_0 (also: $\delta(\bar{x}) = 0$) oder für Θ_1 (also: $\delta(\bar{x}) = 1$) zuordnet. Ein Test ist natürlich dann festgelegt, wenn eine Menge $\bar{K} \subseteq \Psi$ mit

$$\bar{K} = \{x \in \Psi; \delta(x) = 1\}.$$

festgelegt ist. Um nun die Menge $\bar{K}$ bestimmen zu können, benötigt man eine Vorstellung, wie man die Güte eines Tests quantifizieren kann. Dazu betrachtet man den Fehler 1. Art

$$P_{X, \mathcal{W}_{\theta}}(\{x \in \Psi; x \in \bar{K}\}), \quad \theta \in \Theta_0,$$

und verbunden damit das Testniveau α :

$$\alpha := \sup_{\theta \in \Theta_0} P_{X, \mathcal{W}_{\theta}}(\{x \in \Psi; x \in \bar{K}\}).$$

Die Zahl $\alpha \in [0, 1]$ gibt die kleinste obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, dass man sich für Θ_1 entscheidet, obwohl $\theta \in \Theta_0$ gilt. Es ist üblich, nur Tests mit

demselben Testniveau zu vergleichen. Ein Test ϕ_1 mit dem Testniveau α ist besser als ein Test ϕ_2 mit demselben Testniveau, falls

$$P_{X, \mathcal{W}_\theta}(\{x \in \Psi; \delta_1(x) = 1\}) \geq P_{X, \mathcal{W}_\theta}(\{x \in \Psi; \delta_2(x) = 1\}) \text{ für alle } \theta \in \Theta_1.$$

Mit anderen Worten: Der Test ϕ_1 ist besser als der Test ϕ_2 , falls der Fehler 2. Art für ϕ_1 für jedes $\theta \in \Theta_1$ kleiner ist als der Fehler 2. Art für ϕ_2 :

$$P_{X, \mathcal{W}_\theta}(\{x \in \Psi; \delta_1(x) = 0\}) \leq P_{X, \mathcal{W}_\theta}(\{x \in \Psi; \delta_2(x) = 0\}) \text{ für alle } \theta \in \Theta_1.$$

Praktisch besteht nun die Vorgehensweise darin, zu einem gegebenen statistischen Raum $(\Psi, \mathcal{G}, P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in \Theta}})$ und zu einem gewählten Testniveau α unter allen Tests vom Testniveau α denjenigen Test zu finden (also die Menge $\bar{K}$), der für alle $\theta \in \Theta_1$ den kleinsten Fehler 2. Art besitzt. Diesen Test nennt man gleichmäßig besten Niveau- α -Test. Natürlich stellen sich in diesem Zusammenhang wichtige Fragen, die allerdings im Rahmen dieser Vorlesung nicht diskutiert werden können:

- Gibt es zu einem gegebenen statistischen Raum und zu einem Testniveau α überhaupt einen gleichmäßig besten Test?
- Wenn es diesen gleichmäßig besten Test gibt, wie kann man dann die entsprechende Menge $\bar{K}$ finden?

Bevor wir für einen Spezialfall diese Fragen beantworten, soll auf einen wichtigen Punkt hingewiesen werden. Bei der Suche nach einem Testverfahren wird die kleinste obere Schranke für den Fehler 1. Art gewählt, während man mit dem entsprechenden Fehler 2. Art leben muss. Hier ist also eine Asymmetrie zwischen den Hypothesen H_0 und H_1 erkennbar. Diese Asymmetrie ist gewollt, da sie häufig den praktischen Gegebenheiten entspricht. Soll zum Beispiel aufgrund von Messungen überprüft werden, ob es gefährliche Wechselwirkungen zwischen zwei Medikamenten gibt (Hypothese H_0 : Ja, Hypothese H_1 : Nein), so ist der Fehler 1. Art, also die Entscheidung, dass es diese Wechselwirkungen nicht gibt, obwohl sie existieren, viel gefährlicher als der Fehler 2. Art, also die Entscheidung, dass diese Wechselwirkungen vorhanden sind, obwohl sie nicht existieren. Doch nun zum bereits erwähnten Spezialfall:

Satz 1.6 ((gleichmäßig) beste Tests bei zweipunktigem Θ) Seien $(\Psi, \mathcal{G}, P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}}})$ ein statistischer Raum, μ ein σ -endliches Maß auf $\mathcal{G}$ und $P_{X, \mathcal{W}_{\theta_0}}$ sowie $P_{X, \mathcal{W}_{\theta_1}}$ absolutstetig bezüglich μ mit den Dichten $f_{X, \theta_0} : \Psi \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ beziehungsweise $f_{X, \theta_1} : \Psi \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, dann ist für jedes $k \in \mathbb{R}_0^+$ der Test

$$\delta : \Psi \rightarrow \{0, 1\}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für alle } x \text{ mit } f_{X, \theta_1}(x) > k f_{X, \theta_0}(x) \\ 0 & \text{für alle } x \text{ mit } f_{X, \theta_1}(x) \leq k f_{X, \theta_0}(x) \end{cases}$$

unter allen Tests vom Testniveau

$$\alpha = P_{X, \mathcal{W}_{\theta_0}}(\{x \in \Psi; f_{X, \theta_1}(x) > k f_{X, \theta_0}(x)\})$$

der (gleichmäßig) beste.

Beispiel: Glühbirnen

Kehren wir nun zu unserem Beispiel über die Herstellung von Glühbirnen mit dem statistischen Raum $(\{0, 1\}^K, \mathcal{P}(\{0, 1\}^K), P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in \{0.2, 0.8\}}})$, mit $k=1$ und mit

$$f_{X, 0.2}(x) = 0.2^{\sum_{i=1}^K x_i} (1-0.2)^{K - \sum_{i=1}^K x_i}, \quad f_{X, 0.8}(x) = 0.8^{\sum_{i=1}^K x_i} (1-0.8)^{K - \sum_{i=1}^K x_i}$$

zurück, dann ist der Test

$$\delta : \Psi \rightarrow \{0, 1\}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für alle } x \text{ mit } \sum_{i=1}^K x_i > \frac{K}{2} \\ 0 & \text{für alle } x \text{ mit } \sum_{i=1}^K x_i \leq \frac{K}{2} \end{cases}$$

bester unter allen Tests mit Testniveau

$$\alpha = P_{X, \mathcal{W}_{0.2}} \left(\left\{ x \in \Psi; \sum_{i=1}^K x_i > \frac{K}{2} \right\} \right).$$

Für $K = 10$ erhalten wir mit $\alpha = 0.00642$ den Fehler 2. Art: 0.03279.

Für $K = 20$ erhalten wir mit $\alpha = 0.00056$ den Fehler 2. Art: 0.00259.

1.5 Nichtparametrische Verfahren

Bisher war vorausgesetzt, dass die Familie $P_{X, \mathcal{W}}$ der zu betrachtenden Wahrscheinlichkeitsmaße in einem statistischen Raum $(\Psi, \mathcal{G}, P_{X, \mathcal{W}})$ in der Form $P_{X, \mathcal{W}_{\theta \in \Theta}}$ gegeben ist. Obwohl man jede Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen in dieser Form darstellen kann, unterstellt man mit der gewählten Schreibweise, dass die Art der zugrundeliegenden Verteilungen wohlbekannt ist und nur der Parameter θ unbekannt ist (zum Beispiel die Normalverteilung mit unbekanntem Erwartungsvektor). Auf der anderen Seite weiß man aber oft nicht, welcher Typ von Verteilungen vorliegt. Wir betrachten in diesem Abschnitt einen wichtigen Spezialfall: $\Psi = \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ und

jedes Wahrscheinlichkeitsmaß in $P_{X,W}$ ist durch eine reelle λ^n -Dichte $f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ in der Form

$$f_n(x) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

beschreibbar, wobei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine stetige (aber unbekannte) λ -Dichte bezeichnet. Ferner setzen wir voraus, dass eine gegebene Stichprobe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ lediglich eine Rangfolge (Benotung) repräsentiert. Wegen der Stetigkeit von f sind mit Wahrscheinlichkeit 1 alle Komponenten von $\bar{x}$ paarweise verschieden. Davon gehen wir im Folgenden aus.

Da die Stichprobe lediglich als Rangfolge interpretiert werden soll, wollen wir diese Stichprobe nun der Größe nach sortieren. Dazu verwenden wir den Begriff der Permutation auf der Menge $\{1, \dots, n\}$. Eine Permutation auf $\{1, \dots, n\}$ ist eine bijektive Abbildung $s : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Es gibt offensichtlich $n!$ verschiedene Permutationen auf $\{1, \dots, n\}$. Die Menge all dieser $n!$ Permutationen bezeichnen wir mit Π . Wendet man eine Permutation der Menge $\{1, \dots, n\}$ auf die Indizes eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ an, so bedeutet dies eine Umnummerierung der Komponenten von x . Eine Sortierung der Komponenten unserer Stichprobe $\bar{x}$ der Größe nach bedeutet also die Anwendung einer speziellen Permutation s auf die Indizes von $\bar{x}$.

Wir betrachten also eine Abbildung

$$R : \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi, \quad x \mapsto s = R(x),$$

die jeder möglichen Stichprobe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ genau die Permutation s zuordnet, für die gilt:

$$\bar{x}_{s(1)} < \dots < \bar{x}_{s(n)}.$$

Mit dem Meßraum $(\Pi, \mathcal{P}(\Pi))$ wird die Abbildung R $\mathcal{B}^n$ - $\mathcal{P}(\Pi)$ -meßbar und wird als Rangstatistik bezeichnet. Die Abbildung

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)})$$

ist $\mathcal{B}^n$ - $\mathcal{B}^n$ -meßbar und wird als Ordnungsstatistik bezeichnet.

Unter den obigen Voraussetzungen kann man nun die folgenden Eigenschaften beweisen:

- Die Zufallsvariable R ist gleichverteilt, also

$$P_X(\{x \in \mathbb{R}^n; R(x) = s\}) = \frac{1}{n!}$$

für alle $s \in \Pi$ und alle $P_X \in P_{X,W}$ (also ohne konkrete Festsetzung der λ -Dichte f).

- Die Zufallsvariablen R und T sind für alle Wahrscheinlichkeitsmaße $P_X \in P_{X,W}$ stochastisch unabhängig.

Wie diese Ergebnisse nun angewendet werden können, soll im folgenden Beispiel demonstriert werden.

Beispiel: Wilcoxon-Zweistichprobentest

Sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mathcal{W})$ gegeben. Wir betrachten zwei Zufallsvariablen $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ unter folgenden Voraussetzungen:

- X und Y sind für alle Wahrscheinlichkeitsmaße in $\mathcal{W}$ stochastisch unabhängig.
- Jedes mögliche Bildmaß $P_{X,\mathcal{W}}$ ist durch eine reelle λ^n -Dichte $f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ in der Form

$$f_n(x) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

beschreibbar, wobei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine stetige (aber unbekannte) λ -Dichte bezeichnet.

- Jedes mögliche Bildmaß $P_{Y,\mathcal{W}}$ ist durch eine reelle λ^k -Dichte $g_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ in der Form

$$g_k(x) = \prod_{i=1}^k g(x_i)$$

beschreibbar, wobei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine stetige (aber unbekannte) λ -Dichte bezeichnet.

Wir haben es also mit zwei statistischen Räumen $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_{X,\mathcal{W}})$ und $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k, P_{Y,\mathcal{W}})$ mit entsprechenden Realisierungen $\psi \in \mathbb{R}^n$ und $\xi \in \mathbb{R}^k$ zu tun.

Der Zweistichprobentest von Wilcoxon soll nun die Frage beantworten, ob die Verteilungsfunktion

$$G : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \int_{-\infty}^x g(t) dt$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ kleiner ist als die Verteilungsfunktion

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Dies würde bedeuten, dass kleinere Werte für die Komponenten von ξ zu erwarten sind als für die Komponenten von ψ . Getestet wird also die Nullhypothese

$$H_0 : G(x) = F(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gegen die Hypothese

$$H_1 : G(x) < F(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Warum gerade diese Reihenfolge der Hypothesen gewählt wurde, wird sich noch zeigen. Setzt man nun voraus, dass die $n + k$ reellen Zahlen $\psi_1, \dots, \psi_n, \xi_1, \dots, \xi_k$ wieder nur eine Rangfolge festlegen, so kann man mit Hilfe einer Permutation s auf

$\{1, 2, \dots, n+k\}$ diese Zahlen der Größe nach ordnen. Sollte die Gegenhypothese richtig sein, so würde man für $s(n+1), \dots, s(n+k)$ relativ kleine Zahlen erwarten, da die $\xi_1, \dots, \xi_k$ nach der Umsortierung relativ früh auftauchen müssten. Als Testvorschrift bietet sich somit an:

$$\sum_{i=1}^k s(n+i) < a \implies H_0 \text{ ablehnen.}$$

Die Wahl des Parameters $a \in \mathbb{N}$, $a > \frac{k(k+1)}{2}$ ergibt sich nun aus dem gewünschten Testniveau α , das ja den Fehler erster Art darstellt (die Nullhypothese wird abgelehnt, obwohl sie richtig ist). Aufgrund der Wahl unserer Hypothesen können wir diesen Fehler aber ausrechnen; wenn die Nullhypothese richtig ist, sind die zwei Stichproben ψ und ξ als eine Stichprobe ρ der Dimension $n+k$ interpretierbar. Für die entsprechenden Rang- und Ordnungsstatistiken gelten die obigen Eigenschaften; insbesondere ist dann die Rangstatistik gleichverteilt. Für jedes gewählte a kann nun die Wahrscheinlichkeit

$$\alpha = P(\{\omega \in \Omega; \sum_{i=1}^k R(X(\omega), Y(\omega))(n+i) < a\})$$

und somit das Testniveau berechnet werden, wobei mit $R(X(\omega), Y(\omega))$ die gemeinsame Rangstistik der beiden Stichproben bezeichnet wird. Umgekehrt kann zu einem gewählten Testniveau das größte a berechnet werden, sodass das Testniveau sicher unterschritten wird.

Kapitel 2

Numerische Verfahren zur Berechnung von Punktschätzern

2.1 Lokale Optimierung

Eines der wichtigsten Methoden zur Berechnung von Punktschätzern ist die Maximum-Likelihood-Schätzung. Wie bereits im letzten Abschnitt deutlich wurde, führt diese Methode zur Lösung von Optimierungsproblemen. Daher untersuchen wir im folgenden nun iterative Methoden zur lokalen Minimierung einer gegebenen Zielfunktion $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$ (analog zur Maximierung von $(-f)$). Es werden Algorithmen betrachtet, die Folgen $\{\mathbf{x}_j\}$, $\{\mathbf{s}_j\}$ und $\{\sigma_j\}$ mit $j \in \mathbb{N}_0$ derart erzeugen, dass für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{j+1} &= \mathbf{x}_j + \sigma_j \mathbf{s}_j \\ f(\mathbf{x}_{j+1}) &< f(\mathbf{x}_j),\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{x}_j, \mathbf{s}_j \in \mathbb{R}^k, \sigma_j \in \mathbb{R}^+$. Die Verwendbarkeit dieser Algorithmen entscheidet sich im wesentlichen durch die Wahl der Suchrichtung $\mathbf{s}_j$. Aufgrund der obigen Festlegung ist für jedes $j \in \mathbb{N}_0$

$$\nabla f(\mathbf{x}_j)^T \mathbf{s}_j < 0$$

($\mathbf{s}_j$ sind Abstiegsrichtungen) zu fordern. Ziel ist es, Algorithmen zu konstruieren, die entweder superlinear gegen einen lokalen Minimierer $\bar{\mathbf{x}}$ von f konvergieren, für die also gilt:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{j+1} - \bar{\mathbf{x}}\|_2}{\|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}\|_2} = 0,$$

oder Algorithmen zu konstruieren, die quadratisch gegen einen lokalen Minimierer $\bar{\mathbf{x}}$ konvergieren, für die also gilt:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{j+1} - \bar{\mathbf{x}}\|_2}{\|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}\|_2^2} \leq \alpha, \alpha \in \mathbb{R}_0^+.$$

Beim Newton-Verfahren wird die Suchrichtung $\mathbf{s}_j$ als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}_j) \mathbf{s}_j = -\nabla f(\mathbf{x}_j)$$

für alle $j \in \mathbb{N}_0$ bestimmt. Die Schrittweite σ_j wird im allgemeinen durch den folgenden Algorithmus von Armijo-Goldstein berechnet: Sei $0 < \delta < 0.5$, dann wird das kleinste $\nu \in \mathbb{N}_0$ bestimmt, sodass mit $\sigma_j := (0.5)^\nu$ gilt:

$$f(\mathbf{x}_j) + \delta \sigma_j \nabla f(\mathbf{x}_j)^T \mathbf{s}_j \geq f(\mathbf{x}_j + \sigma_j \mathbf{s}_j).$$

Befindet man sich nun in einer geeigneten Umgebung eines lokalen Minimierers $\bar{\mathbf{x}}$ von f mit positiv definiter Hessematrix, so ist das Newton-Verfahren durchführbar und die Folge $\{\mathbf{x}_j\}$ konvergiert gegen $\bar{\mathbf{x}}$, wobei nach endlich vielen Schritten stets $\nu = 0$ (Schrittweite gleich 1) gilt. Kann man zudem für die zweite Ableitung von f in dieser Umgebung eine Lipschitzbedingung nachweisen (gegebenenfalls bei $f \in C^3$), so konvergiert die vom Newton-Verfahren erzeugte Folge $\{\mathbf{x}_j\}$ quadratisch gegen $\bar{\mathbf{x}}$. Offensichtlich können mit dieser Methode im allgemeinen nur lokale Minimierer berechnet werden. Die quadratische Konvergenz wird durch einen relativ hohen Aufwand (Berechnung des Gradienten und der Hessematrix in jedem Iterationsschritt) erkauft. Daher versucht man, die Information zweiter Ordnung durch bisher berechnete Gradienten zu approximieren. Eines der wichtigsten Verfahren in diesem Zusammenhang bildet das BFGS-Verfahren (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno-Verfahren). Die Suchrichtung wird durch

$$\mathbf{s}_j = -\mathbf{H}_j \nabla f(\mathbf{x}_j)$$

für alle $j \in \mathbb{N}_0$ berechnet (mit $\mathbf{H}_0 = \mathbf{I}_n$ oder $\mathbf{H}_0$ gleich einer wählbaren, positiv definiten Matrix). Die Matrix $\mathbf{H}_{j+1}$ berechnet sich durch:

$$\mathbf{H}_{j+1} = \mathbf{H}_j + \frac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{p}_j + \mathbf{d}_j^T \mathbf{H}_j \mathbf{d}_j}{(\mathbf{d}_j^T \mathbf{p}_j)^2} \mathbf{p}_j \mathbf{p}_j^T - \frac{\mathbf{p}_j \mathbf{d}_j^T \mathbf{H}_j + \mathbf{H}_j \mathbf{d}_j \mathbf{p}_j^T}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{p}_j},$$

wobei $\mathbf{d}_j := \frac{\nabla f(\mathbf{x}_{j+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_j)}{\|\sigma_j \mathbf{s}_j\|_2}$, $\mathbf{p}_j := \frac{\mathbf{s}_j}{\|\mathbf{s}_j\|_2}$. Die Schrittweite $\sigma_j, j \in \mathbb{N}_0$, wird durch folgenden Algorithmus berechnet: Wähle γ_1 und γ_2 mit $0 < \gamma_1 < \gamma_2 \leq 0.5$ und bestimme σ_j so, dass folgendes gilt:

- $\nabla f(\mathbf{x}_{j+1})^T \mathbf{s}_j \geq \gamma_2 \nabla f(\mathbf{x}_j)^T \mathbf{s}_j$ (somit ist $\mathbf{H}_{j+1}$ positiv definit)
- $f(\mathbf{x}_{j+1}) \leq f(\mathbf{x}_j) + \gamma_1 \sigma_j \nabla f(\mathbf{x}_j)^T \mathbf{s}_j$
- $\sigma_j = 1$, falls möglich.

Ziel der BFGS-Methode ist es, in den positiv definiten Matrizen $\mathbf{H}_j$ die für die Konvergenzgeschwindigkeit relevanten Informationen der zweiten Ableitung von f durch Verwendung der Gradienten

$$\nabla f(\mathbf{x}_0), \nabla f(\mathbf{x}_1), \nabla f(\mathbf{x}_2), \dots$$

zu approximieren. Befindet man sich in einer geeigneten Umgebung eines lokalen Minimierers $\bar{\mathbf{x}}$ von f mit positiv definiter Hessematrix, so konvergiert die vom BFGS-Verfahren erzeugte Folge $\{\mathbf{x}_j\}$ superlinear gegen $\bar{\mathbf{x}}$, falls die zweite Ableitung von f in dieser Umgebung einer Lipschitzbedingung genügt. Die benötigten Auswertungen der Gradienten und Hessematrizen an den entsprechenden Iterationspunkten zur Realisierung des Newton- beziehungsweise BFGS-Verfahrens können durch Automatisches Differenzieren berechnet werden. Auf diese Möglichkeit wird nun genauer eingegangen.

2.2 Automatisches Differenzieren

Sei $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Mit

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

beziehungsweise

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k,k}$$

bezeichnen wir den Gradienten beziehungsweise die Hessematrix der Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}$. Ziel ist es nun, einen Algorithmus zu entwickeln, der für eine möglichst allgemeine Funktion f und für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ als Eingabe das Tripel $(f(\mathbf{x}), \nabla f(\mathbf{x}), \nabla^2 f(\mathbf{x}))$ als Ausgabe berechnet. Wir beginnen mit einfachen Spezialfällen. Für die konstanten Funktionen $f(\mathbf{x}) \equiv c$ erhalten wir:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$. Ist die Funktion f eine Projektion, also $f(\mathbf{x}) = x_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$, so folgt:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = i\text{-te Einheitsvektor}, \quad \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Unser gesuchter Algorithmus ist also für konstante Funktionen und für Projektionen unmittelbar gegeben und sehr einfach zu implementieren. Diese Überlegungen bilden die Basis für alles Folgende. Wir betrachten nun zwei übliche Methoden, um neue Funktionen aus gegebenen Funktionen zu erhalten, nämlich die rationale Zusammensetzung und die Zusammensetzung mit einer Bibliotheksfunktion. Seien also

$$a : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad b : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Sei ferner $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ eine der Funktionen $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ und $a : b$. Bei $a : b$ wird zudem $b > 0$ oder $b < 0$ vorausgesetzt. Somit ist f ebenfalls zweimal stetig differenzierbar und wir erhalten für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ im Falle $f = a + b$:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}) &= \nabla a(\mathbf{x}) + \nabla b(\mathbf{x}) \\ \nabla^2 f(\mathbf{x}) &= \nabla^2 a(\mathbf{x}) + \nabla^2 b(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

im Falle $f = a - b$:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}) &= \nabla a(\mathbf{x}) - \nabla b(\mathbf{x}) \\ \nabla^2 f(\mathbf{x}) &= \nabla^2 a(\mathbf{x}) - \nabla^2 b(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

im Falle $f = a \cdot b$:

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{x}) &= b(\mathbf{x}) \cdot \nabla a(\mathbf{x}) + a(\mathbf{x}) \cdot \nabla b(\mathbf{x}) \\ \nabla^2 f(\mathbf{x}) &= b(\mathbf{x}) \cdot \nabla^2 a(\mathbf{x}) + a(\mathbf{x}) \cdot \nabla^2 b(\mathbf{x}) + \nabla b(\mathbf{x}) \cdot \nabla a(\mathbf{x})^T + \nabla a(\mathbf{x}) \cdot \nabla b(\mathbf{x})^T,\end{aligned}$$

und im Falle $f = a : b$

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{x}) &= (\nabla a(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \cdot \nabla b(\mathbf{x})) : b(\mathbf{x}) \\ \nabla^2 f(\mathbf{x}) &= (\nabla^2 a(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \cdot \nabla^2 b(\mathbf{x}) - \nabla b(\mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x})^T - \\ &\quad - \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \nabla b(\mathbf{x})^T) : b(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Sind nun die Funktionen a , b konstante Funktionen oder Projektionen, so kann für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ das Tripel $(f(\mathbf{x}), \nabla f(\mathbf{x}), \nabla^2 f(\mathbf{x}))$ unmittelbar mit den obigen Rechenregeln aus den Tripeln $(a(\mathbf{x}), \nabla a(\mathbf{x}), \nabla^2 a(\mathbf{x}))$ und $(b(\mathbf{x}), \nabla b(\mathbf{x}), \nabla^2 b(\mathbf{x}))$ berechnet werden. Wir haben somit einen Algorithmus, der als Eingabe die Stelle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, die Tripel $(a(\mathbf{x}), \nabla a(\mathbf{x}), \nabla^2 a(\mathbf{x}))$, $(b(\mathbf{x}), \nabla b(\mathbf{x}), \nabla^2 b(\mathbf{x}))$ und die Operation $\eta \in \{+, -, \cdot, :\}$ benötigt und als Ausgabe das Tripel $(f(\mathbf{x}), \nabla f(\mathbf{x}), \nabla^2 f(\mathbf{x}))$ liefert. Durch wiederholte Anwendung dieses Algorithmus' lassen sich alle rationalen Funktionen behandeln.

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \frac{x_1 \cdot x_2}{x_2^2 + 1}$. Wir betrachten die folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned}f_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} &\mapsto x_1, \\ f_2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} &\mapsto x_2, \\ f_3 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} &\mapsto 1, \\ f_4 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} &\mapsto f_1 \cdot f_2, \\ f_5 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} &\mapsto f_2 \cdot f_2, \\ f_6 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} &\mapsto f_5 + f_3, \\ f_7 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} &\mapsto f_4 : f_6.\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $f = f_7$. Wendet man die oben skizzierte Vorgehensweise auf die Funktionen $f_1, \dots, f_7$ an der Stelle $\tilde{\mathbf{x}} = (0, 0)^T$ an, so erhält man:

$$\begin{aligned}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_1 \right) &\mapsto \left(0, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = (f_1, \nabla f_1, \nabla^2 f_1)(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 \right) &\mapsto \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = (f_2, \nabla f_2, \nabla^2 f_2)(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 \right) &\mapsto \left(1, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = (f_3, \nabla f_3, \nabla^2 f_3)(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \left. \begin{aligned} &\left(0, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &\left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &\{\cdot\} \end{aligned} \right\} &\mapsto \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = (f_4, \nabla f_4, \nabla^2 f_4)(\tilde{\mathbf{x}})\end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{c} \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ \{\cdot\} \end{array} \right\} \mapsto \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = (f_5, \nabla f_5, \nabla^2 f_5)(\tilde{\mathbf{x}})$$

$$\left. \begin{array}{c} \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \\ \left(1, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ \{+\} \end{array} \right\} \mapsto \left(1, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = (f_6, \nabla f_6, \nabla^2 f_6)(\tilde{\mathbf{x}})$$

$$\left. \begin{array}{c} \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ \left(1, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \\ \{:\} \end{array} \right\} \mapsto \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = (f, \nabla f, \nabla^2 f)(\tilde{\mathbf{x}})$$

Bei der Zusammensetzung mit einer Bibliotheksfunktion betrachtet man zweimal stetig differenzierbare Funktionen

$$\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sei ferner $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f = \xi \circ a$, wobei ξ eine Bibliotheksfunktion (zum Beispiel $\sin$, $\cos$, $\exp$ u.s.w.) ist und wobei a eine Funktion ist, die wir bereits automatisch differenzieren können, dann ist die Funktion f ebenfalls zweimal stetig differenzierbar und der bisher entwickelte Algorithmus ist unter der Voraussetzung erweiterbar, dass die Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Bibliotheksfunktionen an jeder Stelle algorithmisch auswertbar sind. Es gilt:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}) &= \xi'(a(\mathbf{x})) \cdot \nabla a(\mathbf{x}) \\ \nabla^2 f(\mathbf{x}) &= \xi''(a(\mathbf{x})) \cdot \nabla a(\mathbf{x}) \cdot \nabla a(\mathbf{x})^T + \xi'(a(\mathbf{x})) \cdot \nabla^2 a(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Wir erhalten somit einen erweiterten Algorithmus, der als Eingabe die Stelle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, das Tripel $(a(\mathbf{x}), \nabla a(\mathbf{x}), \nabla^2 a(\mathbf{x}))$ und die Funktion ξ benötigt und als Ausgabe das Tripel $(f(\mathbf{x}), \nabla f(\mathbf{x}), \nabla^2 f(\mathbf{x}))$ liefert. Durch wiederholte Anwendung dieses Algorithmus' lassen sich eine große Klasse von Funktionen behandeln.

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto \sin(x_1 \cdot x_2) + \exp(x_2)$. Wir betrachten die folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} &\mapsto x_1, \\ f_2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} &\mapsto x_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} &\mapsto f_1 \cdot f_2, \\ f_4 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} &\mapsto \sin(f_3), \\ f_5 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} &\mapsto \exp(f_2), \\ f_6 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} &\mapsto f_4 + f_5. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $f = f_6$. Wendet man die bisher skizzierte Vorgehensweise auf die Funktionen $f_1, \dots, f_6$ an der Stelle $\tilde{\mathbf{x}} = (\pi, 0)^T$ an, so erhält man:

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, f_1 \right) \right) \mapsto \left(\pi, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = (f_1, \nabla f_1, \nabla^2 f_1)(\tilde{\mathbf{x}}) \\
& \left(\left(\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 \right) \right) \mapsto \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = (f_2, \nabla f_2, \nabla^2 f_2)(\tilde{\mathbf{x}}) \\
& \left. \begin{aligned} & \left(\pi, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ & \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ & \{\cdot\} \end{aligned} \right\} \mapsto \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = (f_3, \nabla f_3, \nabla^2 f_3)(\tilde{\mathbf{x}}) \\
& \left. \begin{aligned} & \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ & \{\sin\} \end{aligned} \right\} \mapsto \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = (f_4, \nabla f_4, \nabla^2 f_4)(\tilde{\mathbf{x}}) \\
& \left. \begin{aligned} & \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ & \{\exp\} \end{aligned} \right\} \mapsto \left(1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (f_5, \nabla f_5, \nabla^2 f_5)(\tilde{\mathbf{x}}) \\
& \left. \begin{aligned} & \left(0, \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ & \left(1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ & \{+\} \end{aligned} \right\} \mapsto \left(1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = (f, \nabla f, \nabla^2 f)(\tilde{\mathbf{x}})
\end{aligned}$$

Hat man also die Funktion $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ durch eine charakterisierende Sequenz

$$\begin{array}{ll} f_1 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} \mapsto x_1, \\ & \dots \\ f_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} \mapsto x_k, \\ f_{k+1} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} \mapsto c_1, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\ldots & \\
f_{k+d} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} \mapsto c_d, \\
\\
f_{k+d+1} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} \mapsto f_{\alpha_i} \eta_i f_{\gamma_i}, \\
\eta_i \in \{+, -, \cdot, :\}, & \alpha_i, \gamma_i \in \{1, \dots, k+d\} \\
\text{oder} & \\
f_{k+d+1} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} \mapsto \xi(f_{\gamma_i}) \\
\xi \text{ ist eine Bibl.-Fkt.}, & \gamma_i \in \{1, \dots, k+d\} \\
\ldots & \\
f_{k+d+s} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} \mapsto f_{\alpha_i} \eta_i f_{\gamma_i}, \\
\eta_i \in \{+, -, \cdot, :\}, & \alpha_i, \gamma_i \in \{1, \dots, k+d+s-1\} \\
\text{oder} & \\
f_{k+d+s} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, & \mathbf{x} \mapsto \xi(f_{\gamma_i}) \\
\xi \text{ ist eine Bibl.-Fkt.}, & \gamma_i \in \{1, \dots, k+d+s-1\} \\
\\
f_{k+d+s} & = f
\end{array}$$

dargestellt, wobei $c_1, \dots, c_d$ reelle Konstanten bezeichnen, so ist diese Funktion f durch den eben entwickelten Algorithmus an jeder Stelle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ automatisch differenzierbar. Für die computergestützte Erstellung charakterisierender Sequenzen gibt es verschiedene Compiler mit unterschiedlichen Eingabeformaten für die Funktion f .

2.3 Diskrete Maximum-Likelihood-Schätzung in der Nachrichtentechnik

Das Ziel der Kommunikation zwischen zwei Kommunikationspartnern ist das Austauschen von Informationen. Zur Übermittlung der Information von dem einen Partner, genannt Quelle, zum anderen Partner, genannt Senke, werden Nachrichten verwendet, die über ein Medium, genannt Kanal, übermittelt werden.

Die Information einer Nachricht ist subjektiv und technisch nicht fassbar, da sie in der Regel nur im Kontext der Kommunikationspartner verständlich ist. Eine Nachricht FEUER etwa übermittelt eine andere Information zwischen den Kommunikationspartnern Brandmelder und Feuerwehr als zwischen den Kommunikationspartnern Offizier und Soldat.

Unter einer Nachricht hingegen wird im technischen Umfeld eine Zeichenfolge aus einem endlichen Zeichenvorrat verstanden, der im allgemeinen beliebig sein kann, etwa Schrift, Bilder, Symbole, Sprache, Klänge, etc.. In der digitalen Nachrichtentechnik wird ein binärer Zeichenvorrat verwendet¹.

¹Statt binären Zeichenvorräten (Alphabeten) können auch Alphabete verwendet werden, deren Elemente Wörter aus einem binären Alphabet sind. Die Konstruktion von Reed-Solomon-Codes beruht etwa auf solchen Symbolzeichensätzen, deren Elementzahl eine Zweierpotenz ist.

Bei der Übermittlung der Nachricht über einen physikalischen Kanal, etwa ein Glasfaserkabel, ein Koaxialkabel, ein Compact-Disc-Leselaser, eine Mobilfunk- oder Richtfunkstrecke, wird eine physikalische Repräsentation der Nachricht als Signal notwendig, welches während der Übermittlung physikalischen Störungen unterliegt. Daher erhält die Seite der Senke ein gestörtes Signal, aus dem sich die übertragene Nachricht je nach Störungsgrad eventuell nicht oder verfälscht rekonstruieren läßt. Aus diesem Grund wird der Nachricht gezielt Redundanz hinzugefügt (durch die sogenannte Kanalcodierung) und diese mitübertragen. Mit Hilfe der Redundanz der empfangenen Signale ist es die Aufgabe des Kanaldecodierers, die ursprüngliche Nachricht zu rekonstruieren.

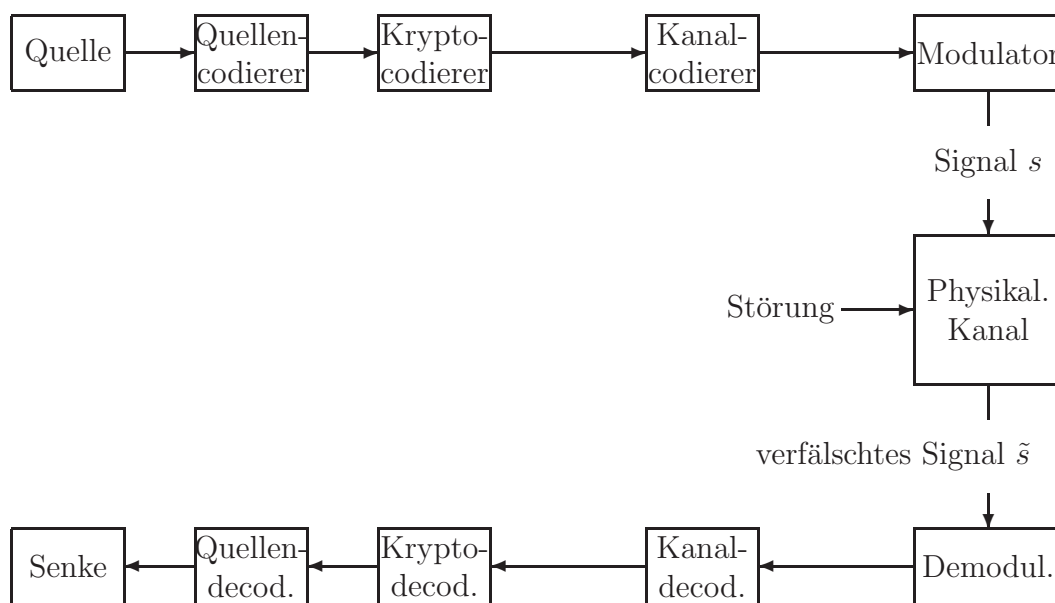


Abbildung 2.1: Digitale Nachrichtenübertragung

Die Abbildung 2.1 zeigt den schematischen Aufbau einer digitalen Nachrichtenübertragungsstrecke für Nachrichten, die mit Blockcodes codiert sind.

- **Quelle:** Von der Quelle aus sollen Nachrichten zur Senke geschickt werden. Die Darstellung der Nachricht an der Quelle ist beliebig und für die weiteren Betrachtungen nicht relevant. In Mobilfunkanwendungen kann zum Beispiel als Quelle ein Sprecher beziehungsweise Sprache angenommen werden.
- **Quellencodierer:** Der Quellencodierer hat die Aufgabe, die Nachrichten der Quelle so in digitale Wertefolgen (oder Zeichenketten im allgemeinen Fall) zu transformieren, dass weder Informationen verlorengehen noch unnötige Redundanzen codiert werden. Zur Reduktion der Datenmenge können Datenkomprimierungsalgorithmen angewendet werden.
- **Kryptocodierer:** Die optionale Komponente des Kryptocodierers verschlüsselt die vom Quellencodierer kommenden Nachrichten, um lesenden oder

schreibenden (verfälschenden) Zugriff von Unbefugten zu verhindern. Die Ausgabe des Kryptocodierers ist ein Binärwort bestehend aus Informationsbits. Ein Kryptocodierer bietet die sogenannte „perfekte Sicherheit“, wenn alle kryptocodierten Wörter mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.

- **Kanalcodierer:** Um Fehler bei der Übertragung durch einen gestörten physikalischen Kanal korrigieren zu können, fügt der Kanalcodierer den Informationsbits gezielt Redundanz hinzu. Dies kann zum Beispiel dadurch geschehen, dass einem Codewort unter festgelegten Regeln zusätzliche Komponenten hinzugefügt werden.
- **Modulator:** Die Übertragung der Nachricht über ein physikalisches Medium erfordert eine physikalische Repräsentation der Nachricht als zeitkontinuierliches Signal.
- **Physikalischer Kanal:** Der physikalische Kanal ist ein (weitestgehend beliebiges) physikalisches Medium, etwa ein Glasfaserkabel, ein Koaxialkabel, ein Compact-Disc-Leselaser, eine Mobilfunk- oder Richtfunkstrecke, etc.. Bei der Übertragung des Signals s kommt es zu Störungen, so dass der Kanalausgang ein verfälschtes Signal $\tilde{s}$ ist.
- **Demodulator:** Der Demodulator ist das Gegenstück zum Modulator und demoduliert das empfangene Signal zu einer Menge y bestehend aus reellen Zahlen. In diese Menge fließen das abgesandte kanalcodierte Wort und die Kanalstörung ein. Da jetzt keine „harten“ Bits mehr vorliegen, spricht man auch von Soft-Werten. Häufig wird im Modulator noch ein Entscheider realisiert, der die reellen Werte zu $+1$ beziehungsweise -1 rundet. Dies ermöglicht zwar die Verwendung sehr effizienter Decodierverfahren (realisiert durch Schieberegister), ist aber durch die Rundung mit einem erheblichen Informationsverlust verbunden.
- **Kanaldecodierer:** Die Aufgabe des Kanaldecodierers besteht in der Rekonstruktion der ursprünglichen Nachricht unter Verwendung der in y enthaltenen Informationen und dem Wissen über die Kanalcodierung und über die Eigenschaften des Störeinflusses. Der Ausgang des Kanaldecodierers sollte mit möglichst hoher Wahrscheinlichkeit mit der ursprünglichen Nachricht identisch sein.
- **Kryptodecodierer:** Der Kryptodecodierer ist das Gegenstück zum Kryptocodierer, das heißt, die quellencodierte Nachricht wird hier wieder entschlüsselt.
- **Quellendecodierer:** Der Quellendecodierer bereitet die empfangene Nachricht für die Verarbeitung durch die Senke auf. Im Mobilfunk erzeugt der Quellendecodierer im allgemeinen Sprache.
- **Senke:** Die Senke ist der (beliebig geartete) Empfänger der Nachricht.

Wie bereits erwähnt, fügt der Kanalcodierer jedem Codewort $\mathbf{u} \in \{\pm 1\}^k$ (Ausgabe des Kryptocodierers) gezielt Redundanz hinzu. Dies kann zum Beispiel dadurch geschehen, dass dem Codewort $\mathbf{u}$ unter festgelegten Regeln $n-k$ Komponenten hinzugefügt werden. Somit erhält man als Ausgabe des Kanalcodierers einen Vektor $\mathbf{c} \in \{\pm 1\}^n$, wobei $c_i = u_i, i = 1, \dots, k$. Für die Berechnung dieser zusätzlichen Komponenten verwendet man die durch die kommutativen Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ gegebene algebraische Körperstruktur von $\{\pm 1\}$:

$$\begin{array}{rcl} -1 \oplus -1 & = & 1 \\ 1 \oplus 1 & = & 1 \\ 1 \oplus -1 & = & -1 \\ -1 \odot -1 & = & -1 \\ 1 \odot -1 & = & 1 \\ 1 \odot 1 & = & 1 \end{array} .$$

Für jede zusätzliche Komponente $i \in \{k+1, \dots, n\}$ des zu $\mathbf{u}$ gehörigen Vektors $\mathbf{c}$ wird eine Teilmenge $J_i \subseteq \{1, \dots, k\}$ gebildet und c_i berechnet sich dann zu

$$c_i = \bigoplus_{j \in J_i} u_j, \quad i = k+1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Der Kanalcodierer ist somit durch die natürlichen Zahlen k, n und durch die $n-k$ Teilmengen $J_{k+1}, \dots, J_n \subseteq \{1, \dots, k\}$ charakterisiert. Der durch den Kanalcodierer erzeugte Code $\mathcal{C} \subseteq \{\pm 1\}^n$ ist die Menge aller Codewörter $\mathbf{c}$, die durch Anwendung von (3.1) auf alle $\mathbf{u} \in \{\pm 1\}^k$ entsteht. Als Beispiel betrachten wir einen Hamming-Code mit $k = 4, n = 7, J_5 = \{2, 3, 4\}, J_6 = \{1, 3, 4\}$, und $J_7 = \{1, 2, 4\}$. Betrachtet man die Menge $\mathcal{C}$ aller 16 Codewörter dieses Codes und zählt man für je zwei Codewörter die Anzahl der Komponenten, an denen sich diese Codewörter unterscheiden, so stellt man fest, dass sich für diesen Hamming-Code je zwei Codewörter immer an mindestens drei Komponenten unterscheiden. Diese Minimaldistanz $d_{\min}$ eines Codes ist ein wichtiges Gütekriterium. Die eben beschriebene Klasse von Codes wird als die Klasse der binären linearen systematischen Blockcodes bezeichnet, da

- alle Codewörter $\mathbf{c}$ aus der Menge $\{\pm 1\}^n$ sind (binärer Blockcode),
- die ersten k Komponenten von $\mathbf{c}$ den Vektor $\mathbf{u}$ bilden (systematisch),
- die Menge $\mathcal{C}$ aller Codewörter einen k -dimensionalen linearen Unterraum des Vektorraumes $\{\pm 1\}^n$ über $\{\pm 1\}$ bildet (linearer Blockcode).

Die Definition und Beschreibung binärer linearer systematischer Blockcodes wird im wesentlichen mit algebraischen Mitteln durchgeführt. Die wichtigsten Informationen über einen Code werden in dem Tupel (n, k) beziehungsweise in dem Tripel $(n, k, d_{\min})$ zusammengefasst. Wir werden im folgenden immer von einem binären linearen systematischen Blockcode mit bekannten Teilmengen $J_{k+1}, \dots, J_n$ ausgehen. Die Voraussetzung, dass es sich um einen systematischen Code handelt, ist dabei nicht restriktiv, da zu jedem binären linearen Blockcode ein dazu äquivalenter

binärer linearer systematischer Blockcode konstruiert werden kann. Daher wird im folgenden das Adjektiv 'systematisch' nicht mehr verwendet. Anstelle der Angabe der Teilmengen $J_{k+1}, \dots, J_n$ werden binäre lineare Blockcodes häufig durch eine Generatormatrix $\mathbf{G} \in \{\pm 1\}^{k,n}$ dargestellt. Es gilt dann

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{c} \in \{\pm 1\}^n; \mathbf{c}^T = \mathbf{u}^T \mathbf{G}, \mathbf{u} \in \{\pm 1\}^k\}$$

Für den bereits erwähnten Hamming-Code gilt:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

wobei die Operationen $\oplus$ und $\odot$ zugrundegelegt sind.

Ist ein Code durch eine Generatormatrix $\mathbf{G} := (g_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}}$ gegeben, so läßt sich folgendermaßen feststellen, ob dieser Code systematisch ist: Man betrachtet die $k \times k$ Matrix $\mathbf{A} := (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,k}$ mit $a_{i,j} = g_{i,j}$ für alle $i, j = 1, \dots, k$. Der Code ist systematisch, falls die Matrix $\mathbf{A}$ bezüglich der Operationen $\oplus$ und $\odot$ die Einheitsmatrix darstellt, also von der Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ist.

Bei stochastischen Kanalmodellen werden für die Modellierung die Elemente „Modulation“, „physikalischer Kanal + Störung“ und „Demodulator ohne Entscheider“ zu einer Einheit, dem „Kanal“ zusammengefasst (Abbildung 2.2). Wichtige Parameter des AWGN-Kanalmodells sind einerseits die Energie E_b , die man durch Division der für die Übertragung eines Codewortes $\mathbf{c} \in \{\pm 1\}^n$ verwendeten Signalenergie durch die Anzahl k der Informationsbits $\mathbf{u} \in \{\pm 1\}^k$ erhält, und andererseits die einseitige Rauschleistungsdichte N_0 der Störung im physikalischen Kanal. Ein AWGN-Kanal ist nun folgendermaßen charakterisiert:

- Die Ausgabe $\mathbf{c} \in \{\pm 1\}^n$ des Kanalcodierers wird durch eine $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \frac{N_0 n}{2E_b k} \mathbf{I}_n)$ normalverteilte Zufallsvariable additiv überlagert, wobei $\mathbf{I}_n$ die n -dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet. Das Ergebnis $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ des Demodulators ist somit eine Realisierung einer $\mathcal{N}(\mathbf{c}, \frac{N_0 n}{2E_b k} \mathbf{I}_n)$ normalverteilten Zufallsvariablen $\mathbf{Y}$.

Typisch für stochastische Kanalmodelle ist die Tatsache, dass als Ergebnis der Demodulation einem zu übertragenden Codewort eine Realisierung $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ einer speziellen Zufallsvariablen zugeordnet wird. Ein Kanal wird deswegen stochastisch modelliert, weil die Störungen im physikalischen Kanal im Einzelfall nicht vorhersehbar sind, aber in der Vielzahl dennoch gewissen Gesetzmäßigkeiten gehorchen.

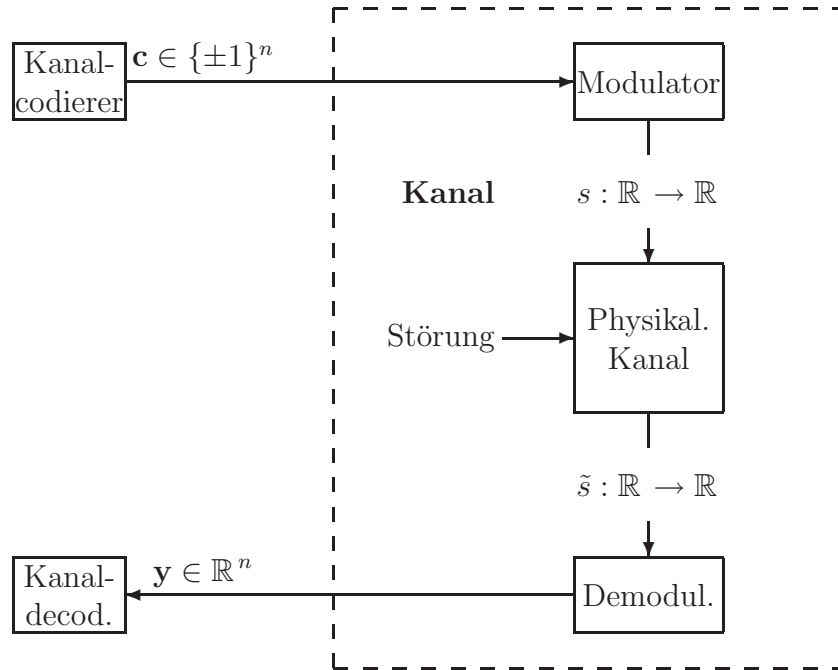


Abbildung 2.2: Kanal

Die Decodieraufgabe besteht nun mathematisch betrachtet darin, aus der gegebenen Realisierung $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ der Zufallsvariablen $\mathbf{Y}$, die in der Praxis der Empfänger liefert, die Informationsbits $\mathbf{u} \in \{\pm 1\}^k$ im noch zu definierenden Sinne „optimal“ zu rekonstruieren. Dies ist eine klassische Aufgabe der mathematischen Statistik und der mathematischen Optimierung. Zur Lösung dieser Aufgabe ist unter spezielle Rahmenbedingungen (Echtzeitanforderungen, Komplexitätsrestriktionen durch Chipdimensionierung) eine Entscheidungsfunktion

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}^n &\rightarrow \{\pm 1\}^k, \\ \mathbf{y} &\mapsto \hat{\mathbf{u}} = \delta(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

zu definieren, die jeder möglichen Realisierung $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ eine Rekonstruktion $\hat{\mathbf{u}} \in \{\pm 1\}^k$ der Informationsbits $\mathbf{u} \in \{\pm 1\}^k$ zuordnet. Dabei kann man im wesentlichen zwei verschiedene Strategien verfolgen:

- Wortfehleroptimalität: Berechne $\delta_{WO}(\mathbf{y})$ so, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich in dem rekonstruierten Wort $\hat{\mathbf{u}} \in \{\pm 1\}^k (= \delta_{WO}(\mathbf{y}))$ kein falsches Bit befindet, maximal ist.
- Bitfehleroptimalität: Berechne $\delta_{BO}(\mathbf{y})$ so, dass die Wahrscheinlichkeit für jedes einzelne Bit in $\hat{\mathbf{u}} \in \{\pm 1\}^k (= \delta_{BO}(\mathbf{y}))$, richtig zu sein, maximal ist.

Im Gegensatz zur Bitfehleroptimalität spielt bei der Wortfehleroptimalität die Anzahl der Fehler in $\hat{\mathbf{u}} \in \{\pm 1\}^k$ keine Rolle. Welches Optimalitätskriterium verwendet

wird, hängt im allgemeinen von der entsprechenden Anwendung ab. Aufgrund der Komplexität der Aufgabenstellung ist klar, dass die Funktion δ nicht explizit angegeben werden kann, sondern dass die Funktionswerte $\delta(\mathbf{y})$ für jedes im Empfänger auftretende $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ durch numerische Verfahren zu berechnen sind.

Betrachtet man die Wortfehleroptimalität, so ergibt sich $\hat{\mathbf{u}} \in \{\pm 1\}^k$ als Lösung eines diskreten Optimierungsproblems, nämlich der Maximum-Likelihood-Schätzung (mit $\|\mathbf{y}\|_2^2 := \sum_{i=1}^n y_i^2$)

$$\hat{\mathbf{u}} = \arg \min_{\mathbf{u} \in \{\pm 1\}^k} \|\mathbf{c}(\mathbf{u}) - \mathbf{y}\|_2^2 = \delta_{WO}(\mathbf{y}).$$

Zu jeder empfangenen Nachricht $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ist jeweils ein Wort $\hat{\mathbf{u}} \in \{\pm 1\}^k$ gesucht mit der Eigenschaft

$$\|\mathbf{c}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{y}\|_2^2 \leq \|\mathbf{c}(\mathbf{u}) - \mathbf{y}\|_2^2 \quad \text{für alle } \mathbf{u} \in \{\pm 1\}^k.$$

Um nicht alle 2^k möglichen Codewörter untersuchen zu müssen, was bei großen k nicht realisierbar ist, wird nun ein Branch-and-Bound Algorithmus vorgestellt, der die Zahl der zu untersuchenden Codewörter stark reduziert. Zudem kann der Algorithmus zu jeder Zeit ein bis dahin bestes Codewort als Ergebnis liefern. Der in Abbildung 2.3 dargestellte Baum entspricht einem Entscheidungsbaum für

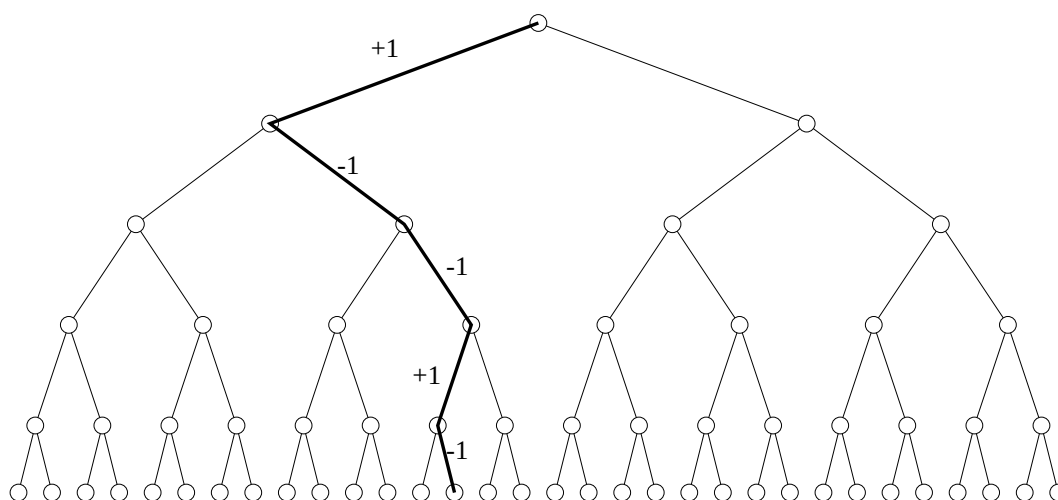


Abbildung 2.3: Branch-and-Bound auf binärem Code

$k = 5$ Informationsbits $u_1, \dots, u_5$, wobei jedes Informationsbit durch eine Ebene im Baum charakterisiert ist. Der angegebene Pfad entspricht somit der Belegung $u_1 = +1, u_2 = -1, u_3 = -1, u_4 = +1, u_5 = -1$. An jeder Verzweigung (Knoten) werden nun untere Schranken für den minimalen Wert der Funktion $\|\mathbf{c}(\mathbf{u}) - \mathbf{y}\|_2^2$ eingetragen, wobei alle Informationsbits bis zu diesem Knoten entsprechend festgelegt sind (Berechnung von Bounds). Betrachtet man zum Beispiel die Verzweigung im angegebenen Pfad der Abbildung 2.3 zwischen $u_2 = -1$ und $u_3 = -1$, so kann

die Funktion $\|\mathbf{c}(\mathbf{u}) - \mathbf{y}\|_2^2$ mit $u_1 = +1$ und $u_2 = -1$ für einen systematischen Code (also $c_i = u_i$ für $i = 1, \dots, k$) folgendermaßen nach unten abgeschätzt werden:

$$\|\mathbf{c}(u_1 = +1, u_2 = -1, u_3, u_4, u_5) - \mathbf{y}\|_2^2 \geq (1 - y_1)^2 + (-1 - y_2)^2 + \sum_{i=3}^n (|y_i| - 1)^2.$$

Bewegt man sich auf dem Pfad weiter nach unten, so kann diese Schranke nur schlechter (also größer) werden, da immer mehr Komponenten von $\mathbf{u}$ festgelegt werden. Am Ende des Baumes (also am Blatt) ist $\mathbf{u}$ festgelegt und dort wird dann der entsprechende Funktionswert notiert. Hat man nun für einen festen Wert $\tilde{\mathbf{u}} \in \{\pm 1\}^k$ den Funktionswert $f(\tilde{\mathbf{u}}) = \|\mathbf{c}(\tilde{\mathbf{u}}) - \mathbf{y}\|_2^2$ berechnet, so kann man im Baum von Abbildung 2.3 alle Teilbäume (Branch) streichen, die bei einer Verzweigung starten, deren Schranke größer ist als $f(\tilde{\mathbf{u}})$, denn nach unten werden die Schranken (und damit die Funktionswerte) ja größer. Somit muss man im allgemeinen nicht alle 2^k Möglichkeiten durchprobieren. Häufig verwendet man zur Komplexitätsreduktion des Branch-and-Bound Verfahrens noch spezielle Code-Transformationen.

Beispiel: Sei $\mathbf{y} = (1.1, -0.5, 0.3, -1.5, 0.7)$ und $\mathbf{c} = (u_1, u_2, u_3, u_1 \oplus u_2, u_2 \oplus u_3)$ und wähle $\tilde{u}_i = \text{sign}(y_i)$, $i = 1, 2, 3$, also $\tilde{u}_1 = +1, \tilde{u}_2 = -1, \tilde{u}_3 = +1$, so gilt:

$$f(\tilde{\mathbf{u}}) = (-0.1)^2 + (-0.5)^2 + 0.7^2 + 0.5^2 + (-1.7)^2 = 3.89.$$

Der Teilbaum beginnend ab $u_1 = -1$ ist wegen $((-1) - 1.1)^2 = 4.41 > 3.89$ schon nicht mehr zu untersuchen.

Manche Codes besitzen eine spezielle Struktur, die jeweils durch ein Trellis-Diagramm gegeben ist. Wendet man das Branch-and-Bound Verfahren auf dieses Trellis-Diagramm an, so nennt man dieses Verfahren Viterbi-Algorithmus. Ein Trellis-Diagramm ist einerseits nicht so komplex wie der obige Entscheidungsbaum, auf der anderen Seite kann das Branch-and-Bound Verfahren auf dem Entscheidungsbaum für alle (systematischen) Blockcodes angewendet werden.

Literaturverzeichnis

C. Bandelow, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*. B.I. Wissenschaftsverlag, 1989.

H. Bauer, *Wahrscheinlichkeitstheorie*. de Gruyter Verlag, 1991.

W. Eberl, O. Moeschlin, *Mathematische Statistik*. de Gruyter Verlag, 1982.

M. Greiner, G. Tinhofer, *Stochastik für Studienanfänger der Informatik*. Hanser Verlag, 1996.

M. Greiner, *Stochastik für Studienanfänger der Informatik. Ausgewählte Aufgaben*. CS-Press, 1998.

E. Henze, *Einführung in die Maßtheorie*. B.I. Wissenschaftsverlag, 1985.

V. Nollau, *Statistische Analysen*. Birkhäuser Verlag, 1979.

H. Witting, *Mathematische Statistik*. Teubner Verlag, 1978.