

Quantum Computation

Aufgabe 1 Es sei $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ der Körper der komplexen Zahlen mit den in der Vorlesung definierten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$. Es bezeichne

$$\tilde{\mathbb{R}} := \{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie:

- a) $(\tilde{\mathbb{R}}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
- b) $(\tilde{\mathbb{R}} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.

Aufgabe 2 Seien $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

a)

$$(i) \frac{3+i}{1+3i}, \quad (ii) i(3+2i) + \frac{1}{3+2i}, \quad (iii) \frac{4(1+i)^3(1-i)}{3(2-i)^2},$$

b)

$$(i) \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad (ii) \frac{1}{2i}(z - \bar{z}), \quad (iii) z\bar{z}.$$

Aufgabe 3 Sei $x \in \mathbb{R}$. Drücken Sie die Winkelfunktionen

$$\sin(nx) \text{ und } \cos(nx), \quad n \in \{2, 3, 4\}$$

durch $\sin(x)$ und $\cos(x)$ aus.

Hinweis Rechnen Sie in $\mathbb{C}$!

Aufgabe 4 Seien $M \neq \emptyset$ eine Menge, $(G, \circ)$ eine Gruppe, F die Menge aller Abbildungen von M in G . In F sei eine innere Verknüpfung $\star$ definiert wie folgt:

$$\star : F \times F \rightarrow F, \quad (f, g) \mapsto f \star g,$$

wobei $(f \star g)(x) := f(x) \circ g(x)$ für alle x aus M . Man zeige: Mit $\star$ als innerer Verknüpfung ist F eine Gruppe. Ist F kommutativ?

Quantum Computation

Aufgabe 5 Seien V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), ferner $v \in V$ und $w := 1 * v$, wobei $1 \in \mathbb{K}$ das neutrale Element der Multiplikation bezeichnet. Warum ist der folgende „Beweis“ des Vektorraum-Axioms (**V 2**), (iv):

$$1 * v = v$$

aus den übrigen Axiomen falsch?

„Beweis“:

$$1 * (1 * v) = (1 \odot 1) * v = 1 * v,$$

$$1 * w = w. \quad \text{q. e. d. ?}$$

Aufgabe 6 Es seien V ein Vektorraum und $\langle \bullet, \bullet \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ ein Skalarprodukt. Die zugehörige Norm sei wie in der Vorlesung definiert. Zeigen Sie, daß für alle $x, y \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ folgendes gilt:

a) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Hinweis zu c) Es gilt $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$. Zum Beweis kann man $z := \langle x, x \rangle y - \langle y, x \rangle x$ definieren und $\langle z, z \rangle$ berechnen.

Aufgabe 7 Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ über dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sowie die beiden Abbildungen

a)

$$\langle \bullet, \bullet \rangle_S: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\langle x, y \rangle_S := (2x_1 + x_2)(2y_1 + y_2) + (x_1 - x_3)(y_1 - y_3) + x_3y_3,$$

b)

$$\langle \bullet, \bullet \rangle_T: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\langle x, y \rangle_T := (2x_1 + x_2)(2y_1 + y_2) + (x_1 - x_3)(y_1 - y_3).$$

Werden durch $\langle \bullet, \bullet \rangle_S$ oder $\langle \bullet, \bullet \rangle_T$ Skalarprodukte im $\mathbb{R}^3$ definiert?

Bitte wenden

Aufgabe 8 Sei V der Vektorraum (!) über $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) der auf $[0, 1]$ stetigen Funktionen.

$$V := \{f | f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ stetig}\}$$

mit der komponentenweisen Addition

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

und der Skalarmultiplikation

$$* : \mathbb{K} \times V \rightarrow V, \quad (\lambda * f)(x) = \lambda f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in [0, 1].$$

a) Man zeige: Durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

wird auf V ein Skalarprodukt definiert. Ist V mit diesem Skalarprodukt ein Hilbertraum?

b) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir definieren $f(t) := t + i \forall t \in [0, 1]$ und $g(t) := t \forall t \in [0, 1]$. Es gilt also $f, g \in V$. Berechnen Sie den Winkel zwischen f und g .

Quantum Computation

Aufgabe 9 Man prüfe die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$ auf lineare Abhängigkeit:

a)

$$a_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad a_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad a_4 := \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$b_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad b_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b_4 := \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10 Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ über dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle \bullet, \bullet \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle x, y \rangle := (2x_1 + x_2)(2y_1 + y_2) + (x_1 - x_3)(y_1 - y_3) + x_3 y_3.$$

Untersuchen Sie, ob die folgenden drei Vektoren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bzgl. $\langle \bullet, \bullet \rangle$ bilden:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11 Man zeige: Im reellen Vektorraum V der auf dem abgeschlossenen Intervall $I := [-\pi, \pi]$ definierten stetigen reellen Funktionen sind die Funktionen f_1, f_2, f_3 linear unabhängig, wobei

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= e^x, \\ f_2(x) &:= e^{-x}, \\ f_3(x) &:= 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 12 Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$P_n := \{f|f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu x^\nu, \ a_\nu \in \mathbb{R}\}.$$

P_n ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Man gebe eine Basis und die Dimension von P_n an.

Quantum Computation

Aufgabe 13 Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Welche sind lineare Automorphismen?

- a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2) := (x_2, 0)$;
- b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2) := (x_1 + 3, x_2 - 2)$;
- c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2) := (x_1 x_2, x_1 + x_2)$;
- d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2) := (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

Aufgabe 14 Seien E die (d, d) -Einheitsmatrix und A, B zwei (d, d) -Matrizen, so daß $E - AB =: M$ invertierbar ist, also eine Inverse M^{-1} besitzt. Man ermittle die Inverse von $N := E - BA$.

Aufgabe 15 In einem Hörsaal befinden sich $n \in \mathbb{N}$ Studenten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß

- a) mindestens zwei am selben Tag,
 - b) genau zwei am selben Tag und alle anderen an verschiedenen Tagen
- Geburtstag haben, wenn Schaltjahre nicht berücksichtigt werden? Es gelte die unrealistische Annahme der Gleichverteilung.

Quantum Computation

Aufgabe 16 Betrachten Sie den $\mathbb{C}$ -Vektorraum V aus Aufgabe 8 mit dem dort erklärten Skalarprodukt $\langle \bullet, \bullet \rangle$. Seien $v_1, v_2 \in V$ gemäß $v_1(t) = \exp(-i 2\pi t)$, $v_2(t) = \exp(i 2\pi t)$ für $0 \leq t \leq 1$ und $\mathcal{H} := \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\}$.

a) Überlegen Sie sich, daß $(\mathcal{H}, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ ein Hilbertraum der Dimension 2 und daß $B := \{v_1, v_2\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ ist.

b) Welche der folgenden Vektoren aus V sind Elemente von $\mathcal{H}$, welche sind sogar q-Bits? Bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf B .

- (i) $f(t) := 1$ für $0 \leq t \leq 1$,
- (ii) $g(t) := \sin(2\pi t)$ für $0 \leq t \leq 1$,
- (iii) $h(t) := \sqrt{2}g(t)$ für $0 \leq t \leq 1$.

Aufgabe 17 Betrachten Sie den komplexen Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ mit dem kanonischen Skalarprodukt.

a) Zeigen Sie, daß $B_1 := \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, i)\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ ist.

b) Beschreiben Sie den Hilbertraum $\mathcal{H}^{\otimes 2}$ und die zu B_1 gehörige Orthonormalbasis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ von $\mathcal{H}^{\otimes 2}$ gemäß Definition 2.2. ($\mathcal{H}^{\otimes 2}$ kann in naheliegender Weise mit $\mathbb{C}^4$ identifiziert werden.)

c) Die folgenden Vektoren sind Multi-q-Bits in $\mathcal{H}^{\otimes 2}(= \mathbb{C}^4)$. Begründen Sie dies und bestimmen Sie jeweils die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf B_1^2 :

$$u := (1, 0, 0, 0); \quad v := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

d) Bearbeiten Sie die Aufgabenteile b) und c), wenn Sie in a) B_1 durch die kanonische Basis $B_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ ersetzen.

Quantum Computation

Aufgabe 18 Es gelten die Bezeichnungen von Definition 2.2.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, durch eine bijektive Abbildung $\xi : \{v_1, v_2\}^n \rightarrow \{e_1, \dots, e_{2^n}\}$ jedem Symbol $y \in \{v_1, v_2\}^n$ ein Basiselement e_i zuzuordnen?

b) Es sei $\zeta : \{v_1, v_2\}^5 \rightarrow \{e_1, \dots, e_{32}\}$ die in der Vorlesung festgelegte Abbildung. Bestimmen Sie

$$(i) \zeta(v_1, v_2, v_1, v_2, v_1), \quad (ii) \zeta(v_2, v_1, v_2, v_1, v_2).$$

c) Jedem $y \in \{v_1, v_2\}^n$ wird eine natürliche Zahl $n(y) \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ folgendermaßen zugeordnet:

$$y = (v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) \mapsto n(y) = \sum_{j=1}^n (i_j - 1)2^{n-j}, \quad i_j \in \{1, 2\}.$$

Es sei $\zeta^* : \{v_1, v_2\}^3 \rightarrow \{e_1, \dots, e_8\}$, $y \mapsto e_{n(y)+1}$. Geben Sie $\zeta^*(y)$ für alle $y \in \{v_1, v_2\}^3$ an.

Aufgabe 19 Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit einer orthonormalen Basis $\{v_1, v_2\}$. Wie üblich werden $v_1 := 0$ und $v_2 := 1$ gesetzt. Wir definieren

$$CNOT : \{v_1, v_2\}^2 \rightarrow \{v_1, v_2\}^2, \quad (x, y) \mapsto (x \bmod 2, (x + y) \bmod 2).$$

Geben Sie die zu $CNOT$ gehörende Matrixdarstellung bezüglich der gemäß Definition 2.2 gewählten Basis in $\mathcal{H}^{\otimes 2}$ an.

Aufgabe 20 Seien $M_{\text{Ha.},n}$, $n \in \mathbb{N}$, die in der Vorlesung eingeführten Hadamard-Matrizen. Offenbar ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ $M_{\text{Ha.},n}$ eine quadratische reelle Matrix mit 2^n Zeilen und 2^n Spalten. Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n , daß für alle $n \in \mathbb{N}$ $M_{\text{Ha.},n}$ orthogonal (also auch unitär) ist, d. h. $M_{\text{Ha.},n} M_{\text{Ha.},n}^T = E$ gilt; dabei bezeichnet E die Einheitsmatrix der Dimension 2^n .

Bitte wenden

Aufgabe 21 Sei $M \in \mathbb{C}^{4,4}$ gemäß

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie

- a)** M ist unitär und impliziert daher bzgl. der kanonischen Basis $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ein Gate $F : \mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^1 \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\otimes 2}}^1$.
- b)** Für $i = 1, 2, 3, 4$ ist $F(e_i)$ ein Multi-q-Bit, welches die Gleichverteilung auf B impliziert.

Quantum Computation

Aufgabe 22 Seien $\mathcal{H}$ ein zweidimensionaler Hilbertraum mit orthonormalen Basis $\{v_1, v_2\}$ und $B : \{v_1, v_2\}^n \rightarrow \{v_1, v_2\}^m$, $m, n \in \mathbb{N}$, eine n -stellige Boolesche Funktion. Überlegen Sie sich, daß die in der Vorlesung definierte zugehörige Funktion $\hat{B}$ bez. der wie üblich gewählten Basis in $\mathcal{H}^{\otimes(n+m)}$ durch eine unitäre Matrix repräsentiert wird.

Aufgabe 23 Geben Sie für die folgenden Booleschen Funktionen analog zur Vorlesung Matrixdarstellungen an sowie Multi-q-Bits, bei denen der Effekt der Quantenparallelität auftritt.

a)

$$B : \{v_1, v_2\} \rightarrow \{v_1, v_2\}, \quad b \mapsto b \hat{+} v_2;$$

b)

$$B : \{v_1, v_2\}^2 \rightarrow \{v_1, v_2\}, \quad (b_1, b_2) \mapsto b_2;$$

c)

$$B : \{v_1, v_2\} \rightarrow \{v_1, v_2\}^2, \quad b \mapsto (b \hat{+} v_1, b \hat{+} v_2).$$

Aufgabe 24 Sei $\Omega := \{e_1, \dots, e_8\}$ wie üblich eine orthonormale Basis in $\mathcal{H}^{\otimes 3}$.

a) Wählen Sie eine Partitionierung von Ω :

$$(i) \ E_1 := \{e_2, e_3\}, \ E_2 := \{e_1, e_4, e_5\}, \ E_3 := \{e_6, e_7, e_8\};$$

$$(ii) \ E_1 := \{e_2, e_3\}, \ E_2 := \{e_1, e_4, e_5\}, \ E_3 := \{e_7, e_8\};$$

$$(iii) \ E_1 := \{e_2, e_3\}, \ E_2 := \{e_1, e_4, e_5\}, \ E_3 := \{e_6, e_7, e_8\};$$

b) Seien $p := 0.6$ und $e \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}^{\otimes 3}}^1$ ein Multi-q-Bit, das auf $\mathcal{P}(\Omega)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung impliziert mit

$$P(\{e_i\}) = \binom{7}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{7-i+1}, \quad i = 1, \dots, 8.$$

Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(E_k)$, $k = 1, 2, 3$, für die in a) gewählte Partition an.

c) Das Einheitsintervall wird wie in der Vorlesung beschrieben zerlegt. Ein Zufallszahlengenerator liefert $\rho = \frac{1}{3}$. Was ist das Ergebnis der Messung, die der gewählten Partition entspricht?

Quantum Computation

Aufgabe 25 Wir betrachten den in der Vorlesung beschriebenen Algorithmus von Deutsch und Josza: Sei

$$B : \{v_1, v_2\}^2 \rightarrow \{v_1, v_2\}$$

eine Boolesche Funktion, von der bekannt ist, daß sie entweder konstant oder ausgeglichen ist. Geben Sie die einzelnen Schritte des Algorithmus explizit an.

Aufgabe 26 Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbb{C}^n$ ein Vektor in Spaltendarstellung mit $\|v\| = 1$, wobei $\|\bullet\|$ die vom kanonischen Skalarprodukt induzierte Norm bezeichne. Wir definieren

$$T := E - 2vv^*$$

mit $v_i^* = \overline{v_i}$, $i = 1, \dots, n$; v^* sei ein Vektor in Zeilendarstellung.

- a) Man zeige: $T^* = T$.
- b) Bestimmen Sie T^{-1} .
- c) T wird auch als Spiegelungsmatrix bezeichnet. Geben Sie eine geometrische Interpretation des Namens an.

Aufgabe 27 Wir betrachten den Algorithmus von Grover: Gegeben ist eine unstrukturierte Datenbank mit 2^n Einträgen, die durch die orthonormale Basis $\{e_1, \dots, e_{2^n}\}$ des Hilbertraums $\mathcal{H}^{\otimes n}$ repräsentiert werden. Gesucht wird der Eintrag, der e_j entspricht. Seien

$$\alpha := \frac{1}{\sqrt{2^n - 1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{2^n} e_k, \quad \beta := e_j.$$

- a) Schreiben Sie x_1 als Linearkombination von α und β .
- b) Berechnen Sie $M(a\alpha + b\beta)$ für $a, b \in \mathbb{R}$.
- c) Veranschaulichen Sie die Wirkung der Grover-Iteration in der $\alpha - \beta$ -Ebene.
- d) Überlegen Sie sich, nach wievielen Iterationen des Algorithmus die gesuchte Komponente eine große Wahrscheinlichkeit darstellt.

Aufgabe 28 Gegeben sei eine unstrukturierte Datenbank mit 16 Einträgen, die durch die orthonormale Basis $\{e_1, \dots, e_{16}\}$ des $\mathcal{H}^{\otimes 4}$ repräsentiert werden. Gesucht sei der Eintrag e_3 . Berechnen Sie die ersten 5 Iterationen des Algorithmus von Grover.