
Skript zur Vorlesung

Physik II

im Bereich Elektrotechnik

Inhaltsverzeichnis

1 Begriff der Schwingungen

2 Mechanische harmonische Schwingungen

- 2.1 Gleichgewicht und Rückstellkraft
- 2.2 Ungedämpfte Schwingungen
- 2.3 Gedämpfte Schwingung
- 2.4 Aperiodische Bewegung
- 2.5 Erzwungene Schwingung

3 Wellen

- 3.1 Gekoppelte Pendel
- 3.2 Mechanische Wellen
- 3.3 Wellen in verschiedenen Medien
- 3.4 Wellenausbreitung im Raum
 - 3.4.1 Schallwellen und Dopplereffekt
 - 3.4.2 Lautstärken
 - 3.4.3 Stehende Wellen

- 3.4.4 Schwebung
- 3.4.5 Brechung und Reflexion
- 3.4.6 Beugung und Huygens'sches Prinzip
- 3.4.7 Die Interferenz des Lichtes
- 3.4.8 Die Energie elektromagnetischer Wellen
- 3.5 Elemente der geometrischen Optik
 - 3.5.1 Die Sammellinse
 - 3.5.2 Die Zerstreuungslinse
 - 3.5.3 Das Fernglas

4 Ergebnisse der Quantenmechanik

- 4.1 Aufbau der Atome
- 4.2 Der schwarze Körper
- 4.3 Heisenbergsche Unschärferelation

1 Begriff der Schwingungen

In der Mechanik werden vor allem zwei Arten der Bewegung von Massenpunkten ausführlich behandelt, die geradlinige und die kreisförmige Bewegung. Eine dritte wichtige Gruppe sind die periodisch hin- und hergehenden Bewegungen, die Schwingungen. Zu den Schwingungen gehören aber auch periodisch wechselnde Zustände von elektrischen Systemen, wobei keine Bewegung von Massenpunkten auftritt. Allgemein kann in einem schwingungsfähigen System die Energie zwei verschiedene Formen annehmen. Die Schwingung besteht darin, daß eine dem System von außen zugeführte Energie periodisch zwischen diesen möglichen Formen hin und her pendelt.

2 Mechanische harmonische Schwingungen

Mechanische Schwingungen kommen durch die Einwirkung einer Rückstellkraft auf einen Körper mit träger Masse zustande. Zur quantitativen Beschreibung solcher Schwingungsvorgänge verwendet man folgende Größen:

Die **Schwingungsdauer T**: Sie ist die Zeit, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden, gleichsinnigen Durchgängen des Körpers durch einen beliebigen Punkt P seiner Bahn verstreicht.

Die **Frequenz f**: Sie gibt die Zahl der in einer Sekunde erfolgten Schwingungen an. $f = 1/T$. Die Einheit der Frequenz ist s^{-1} und wird auch "Hertz" genannt.

Die **Winkelgeschwindigkeit ω** : Sie gibt an, welcher Winkel $d\varphi$ in einem Zeitintervall dt überstrichen wird, also $\omega = d\varphi/dt$. Wählt man für $d\varphi$ eine volle Umdrehung, also 2π , so ist dt die Zeit für diese volle Umdrehung, also die Schwingungsdauer T . Damit wird $\omega = 2\pi/T$ bzw. $\omega = 2\pi f$.

Die Auslenkung oder **Elongation s**: Sie gibt die sich ständig ändernde Entfernung des Körpers von der stabilen Gleichgewichtslage an, die als Nullpunkt der Messung der Elongation dient.

Die **Amplitude s_m** : Sie ist die größte Auslenkung, d. h. das Wegstück, das der Körper von der Gleichgewichtslage bis zum Umkehrpunkt durchläuft. Die Amplitude ist bei ungedämpften Schwingungen eine Konstante, Bei Dämpfung durch Reibung nimmt sie jedoch ab.

Die **Rückstellkraft F_e** : Sie ist die Kraft, die auf den ausgelenkten Körper jeweils in Richtung auf die Gleichgewichtslage hin wirkt.

2.1 Gleichgewicht und Rückstellkraft

Die Rückstellkraft F_e ist bei schwingungsfähigen Körpern i. a. nicht konstant, sondern von der jeweiligen Auslenkung abhängig. Wir wollen nun die Gesetze für eine Schwingung finden, bei denen F proportional zur Auslenkung s ist (harmonische Schwingung, Lineares Kraftgesetz):

$$F_e = - D s \text{ mit } D = \text{Richtgröße} \\ \text{oder } D = \text{Federkonstante}$$

Beim Federpendel ist dies sicher erfüllt (Hooksche Feder), gilt dieses Kraftgesetz aber auch für das mathematische Pendel (Pendel mit

vernachlässigbarer Fadenmasse und vernachlässigbarem Massendurchmesser)?

2.2 Ungedämpfte Schwingung

Die Pendellänge l ist die Strecke vom Aufhängepunkt zum Schwerpunkt, die Bahn des Körpers beschreibt einen Kreisbogen mit dem Radius l . Der Auslenkwinkel α ist der Winkel zwischen der Senkrechten und dem Pendelfaden. Die Elongation s ist der Abstand zwischen Schwerpunkt und der Senkrechten. Wir bestimmen die Rückstellkraft F_e als Komponente der Gewichtskraft $m \cdot g$ der Pendelmasse m in Richtung von s :

$$F_e = -m \cdot g \cdot \tan \alpha$$

bzw.

$$F_e = -m \cdot g \cdot s / l \cdot \cos \alpha$$

mit m = Masse des Pendelkörpers
 g = Erdbeschleunigung

Die Rückstellkraft F_e gehorcht offensichtlich nicht dem linearen Kraftgesetz! Für kleine Winkel α dürfen wir jedoch näherungsweise $\cos \alpha$ durch 1 ersetzen:

$$F_e = -m g s / l \quad \text{bzw.} \quad F_e = -D s$$

mit $D = m g / l$.
 D = Richtgröße

Zur Beschleunigung der Masse m muss die Trägheitskraft $F_{tr} = -m \cdot a$ aufgebracht werden. Mit der Forderung, dass in einem abgeschlossenen System die Summe der Kräfte gleich Null sein muss (oder $F_e = -D \cdot s = m \cdot a$), erhält man die Schwingungsgleichung des mathematischen Pendels:

$$F_{tr} + F_e = 0 \quad \text{bzw.} \quad m \ddot{s} + D s = 0.$$

Als Lösungsansatz für die o. g. homogene Differentialgleichung wählen wir:

$$s(t) = s_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

mit $\omega = 2\pi \cdot f$
 φ_0 = Nullphasenwinkel
 s_m = Amplitude

Damit wird:

$$\dot{s}(t) = s_m \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{und}$$

$$\ddot{s}(t) = -s_m \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Eingesetzt in o. g. Dgl. erhalten wir den Zusammenhang:

$$m [-s_m \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)] + D [s_m \sin(\omega t + \varphi_0)] = 0$$

bzw. $(D - m\omega^2) s_m \sin(\omega t + \varphi_0) = 0$.

Letztgenannte Gleichung muss für jeden Augenblick erfüllt sein, was nichts anderes bedeutet, als daß $(D - m\omega^2) = 0$ sein muss. Dieser Forderung wird nur eine ganz bestimmte Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega_0$ gerecht:

$$D - m \omega_0^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Wegen $\omega = 2\pi \cdot f$ bzw. $\omega_0 = 2\pi \cdot f_0$ und $T = \frac{1}{f}$

bzw. $\omega_0 = \frac{1}{T_0}$ gilt dann auch

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{bzw.} \quad T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Für das Fadenpendel gilt bei genügend kleiner Amplitude die Beziehung $D = \frac{mg}{l}$.

Damit lässt sich letztgenannter

Gleichung auch darstellen durch:

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Die Schwingungsdauer ist offensichtlich bei kleinen Amplituden unabhängig von der Pendelmasse. Sind Pendellänge und Schwingungsdauer bekannt, lässt sich die Erdbeschleunigung bestimmen.

Für Drehschwingungen erhält man formal die gleichen Ergebnisse, es tritt lediglich an die Stelle der Masse m das Massenträgheitsmoment J und an die Stelle der linearen Federkonstante D die entsprechende Drehgröße, die Winkelrichtgröße D^* (statt $F = -D \cdot s$ gilt dann auch $M = -D^* \cdot \varphi$). Die Schwingungsdauer der Drehschwingung berechnet sich dann zu:

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D^*}}$$

2.3 Gedämpfte Schwingung

Infolge von Reibung kommt jede Schwingung im Laufe der Zeit zur Ruhe. Der Quotient zweier aufeinander folgender, positiver Amplituden erweist sich als ungefähr konstant. Wir nennen ihn **Dämpfungsverhältnis** K . Die Amplituden bilden daher eine fallende geometrische Folge:

$$K = a_{n+1} / a_n$$

Somit klingt die Amplitude gegen Null ab. Die Frequenz hingegen wird durch diese Dämpfung meist nur unwesentlich beeinflusst.

Ist die Reibungskraft F_R proportional zur Geschwindigkeit, kann sie durch folgenden Ausdruck dargestellt werden:

$$F_R = -b \cdot v$$

Die homogene Dgl. für die gedämpfte mechanische Schwingung lautet infolgedessen:

$$F_{tr} + F_e + F_R = 0$$

$$\text{bzw.} \quad m\ddot{s} + Ds + bs = 0.$$

Als Lösungsansatz für die o. g. Dgl. wählen wir:

$$s(t) = s_m \exp[-\delta t] \sin(\omega_d t + \varphi)$$

mit $\delta = \text{Abklingkonstante}$.

Damit wird

$$\dot{s}(t) = -s_m \delta \exp[-\delta t] \sin(\omega_d t + \varphi) + s_m \exp[-\delta t] \omega_d \cos(\omega_d t + \varphi)$$

und

$$\begin{aligned} \ddot{s}(t) = & -s_m \delta^2 \exp[-\delta t] \sin(\omega_d t + \varphi) \\ & - s_m \delta \omega_d \exp[-\delta t] \cos(\omega_d t + \varphi) \\ & - s_m \delta \omega_d \exp[-\delta t] \cos(\omega_d t + \varphi) \\ & - s_m \omega_d^2 \exp[-\delta t] \sin(\omega_d t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\ddot{s}(t) = (\delta^2 - \omega_d^2) s_m \exp[-\delta t] \sin(\omega_d t + \varphi) - 2s_m \delta \omega_d \exp[-\delta t] \cos(\omega_d t + \varphi)$$

Eingesetzt in die Dgl. der gedämpften Schwingung ergibt:

$$\begin{aligned} m \cdot s_m \cdot [(\delta^2 - \omega_d^2) \exp[-\delta t] \sin(\omega_d t + \varphi) - \\ 2 \cdot s_m \cdot \omega_d \cdot \delta \cdot \exp[-\delta t] \cos(\omega_d t + \varphi)] + \\ D [s_m \exp[-\delta t] \sin(\omega_d t + \varphi)] + \\ b [-s_m \delta \exp[-\delta t] \sin(\omega_d t + \varphi) + \\ s_m \cdot T_d \cdot \exp[-\delta t] \cos(\omega_d t + \varphi)] = 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 1 [(\delta^2 - \omega_d^2) \sin(\omega_d t + \varphi) - 2\delta \omega_d \cos(\omega_d t + \varphi)] + \\ D/m [\sin(\omega_d t + \varphi)] + \\ b/m [-\delta \sin(\omega_d t + \varphi) + \omega_d \cos(\omega_d t + \varphi)] = 0 \end{aligned}$$

Werden jeweils die Sinus- und Kosinuskomponenten zusammengefasst, erhalten wir:

$$(\delta^2 - \omega_d^2 + D/m - \delta b/m) \sin(\omega_d t + \varphi) +$$

$$(b/m - 2\delta) \omega_d \cos(\omega_d t + \varphi) = 0.$$

Obige Gleichung ist nur dann für alle Zeiten t erfüllt, wenn die Koeffizienten von $\sin(\omega_d t + \varphi)$ und $\cos(\omega_d t + \varphi)$ jeweils gleich Null sind:

$$\begin{aligned} (\delta^2 - \omega_d^2 + D/m - \delta b/m) &= 0 \quad \text{und} \\ (b/m - 2\delta) &= 0. \end{aligned}$$

Der letztgenannten Beziehung entnehmen wir den Zusammenhang zwischen Abklingkonstante δ , Dämpfungskonstante b und Masse m :

$$\delta = \frac{b}{2m}.$$

Der zuvor genannten Beziehung entnehmen wir wegen $D/m = \omega_0^2$ und $b/m = 2\delta$ den Zusammenhang:

$$(\delta^2 - \omega_d^2 + \omega_0^2 - 2\delta^2) = 0 \quad \text{bzw.} \quad (-\delta^2 - \omega_d^2 + \omega_0^2) = 0$$

$$\text{und letztlich:} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Wir erkennen, daß der gewählte Lösungsansatz zum Erfolg führte. Die Amplitude der gedämpften Schwingung nimmt exponentiell mit der Zeit ab. Die Eigenfrequenz T_d der gedämpften Schwingung ist kleiner als die des ungedämpften aber sonst gleichen Systems.

Unser Lösungsansatz $s(t) = s_m \exp[-\varphi t] \cdot \sin(\omega_d t + \varphi)$ gibt auch die durch das Experiment gemachte Erfahrung wieder, daß das Verhältnis aufeinanderfolgender Amplituden konstant ist:

$$\begin{aligned} s_{m,i} / s_{m,i+1} &= \exp[-\delta t_i] / \exp[-\delta t_{i+1}] \\ &= \exp[-\delta t_i] \exp[\delta t_{i+1}] \end{aligned}$$

$$s_{m,i} / s_{m,i+1} = \exp[\delta t_{i+1} - \delta t_i] = \exp[\delta (t_{i+1} - t_i)].$$

Da der zeitliche Abstand $(t_{i+1} - t_i)$ zweier aufeinanderfolgender Amplituden die

Schwingungsdauer T_d ist, gilt auch:

$$s_{m,i} / s_{m,i+1} = \exp[\delta T_d].$$

Den Exponenten δT_d nennt man **logarithmisches Dekrement Lambda**:

$$\Lambda = \delta T_d = \ln[s_{m,i} / s_{m,i+1}].$$

2.4 Aperiodische Bewegung

Vergrößert man die Dämpfung, z. B. indem man die Schwingung in immer zäherem Medium ablaufen läßt, so erreicht man schließlich eine Grenze, von der ab keine eigentliche Schwingung mehr zustande kommt. Das System geht nach dem Anstoß asymptotisch in die Ruhelage zurück. Die genannte Grenze ist erreicht, wenn $\omega_d = [\omega_0^2 - \delta^2]^{-1/2}$ Null wird, d. h. wenn $\omega_0^2 = \delta^2$, oder mit $\omega_0^2 = D/m$ und $\delta = b/2m$, wenn

$$\omega_0^2 = \delta^2 = D/m = [b/2m]^2 \quad \text{also}$$

$$b^2 = 4Dm \quad \text{wird.}$$

Man nennt dies den aperiodischen Grenzfall. Für noch größere Dämpfungskonstanten b wird die Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung imaginär. Man spricht dann vom Kriechfall.

2.5 Erzwungene Schwingung

Von erzwungener Schwingung spricht man, wenn auf ein schwingungsfähiges System von außen eine periodisch veränderliche Erregerkraft F_E einwirkt und das System zum Mitschwingen zwingt. Nun ist die Summe der Trägheitskraft F_{tr} , der rückstellenden Kraft F_e und der Reibungskraft F_R nicht mehr gleich Null, sondern gleich der von außen einwirkenden Erregerkraft $F_E = F_{E,m} \sin(\omega t)$:

$$F_{tr} + F_e + F_R = F_{E,m} \sin(\omega t) \text{ bzw.}$$

$$m \ddot{s} + b \dot{s} + D s = F_{E,m} \sin(\omega t).$$

Für die Lösung des stationären Falls machen wir den Ansatz:

$$s(t) = s_s \sin(\omega t - \varphi_{0S})$$

mit φ_{0S} = Systemnullphasenwinkel
 s_s = **Systemamplitude**

$$\text{Damit wird } \dot{s}(t) = \omega \cdot s_s \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi_{0S})$$

$$\ddot{s}(t) = -\omega^2 \cdot s_s \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_{0S})$$

Eingesetzt in die Dgl. der gedämpften erzwungenen Schwingung ergibt:

$$\begin{aligned} & -m \cdot \omega^2 \cdot s_s \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_{0S}) \\ + & b \cdot \omega \cdot s_s \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi_{0S}) \\ + & D \cdot s_s \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_{0S}) \\ = & F_{E,m} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \text{bzw.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \cdot s_s \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_{0S}) \\ + & \frac{b}{m} \cdot \omega \cdot s_s \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi_{0S}) \\ + & \frac{D}{m} \cdot s_s \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_{0S}) \\ = & \frac{F_{E,m}}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Beziehungen $D/m = \omega_0^2$ und $b/m = 2\delta$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & -\omega^2 \cdot s_s \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_{0S}) \\ + & 2\delta \cdot \omega \cdot s_s \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi_{0S}) \\ + & \omega_0^2 \cdot s_s \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_{0S}) \\ = & \frac{F_{E,m}}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} & (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot s_s \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi_{0S}) \\ + & 2\delta \cdot \omega \cdot s_s \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi_{0S}) \\ = & \frac{F_{E,m}}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t). \end{aligned}$$

Nach Pythagoras müssen die Quadrate der Amplituden folgende Bedingung erfüllen:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 s_s^2 + (2\delta \cdot \omega s_s)^2 = (F_{E,m}/m)^2.$$

Daraus ergibt sich die Systemamplitude s_s zu:

$$s_s = \frac{F_{E,m} / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}.$$

Sie ist abhängig von der Erregerkreisfrequenz ω . Maximale Systemamplitude s_r erhält man bei der Resonanzkreisfrequenz ω_r , die sich durch Differenzieren des Radikanden nach ω und Nullsetzen ermitteln lässt:

$$\frac{d}{d\omega} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2] =$$

$$2 \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot (-2\omega) + 8\delta^2 \omega = 0$$

$$\Rightarrow \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Die Höhe des Resonanzmaximums, die Resonanzamplitude $s_{r,m}$, erhält man aus der Gleichung für s_s mit $\omega = \omega_r$:

$$s_{r,m} = \frac{F_{E,m}}{m \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_r^2)^2 + 4\delta^2 \omega_r^2}}$$

und nach einigen Umformungen mit $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ folgt:

$$s_{r,m} = \frac{F_{E,m}}{2m \cdot \omega_0 \delta \sqrt{1 - \left[\frac{\delta}{\omega_0} \right]^2}}.$$

Bei der Anfangskreisfrequenz $\omega_a = 0$ wird die Anfangsamplitude $s_{a,m}$ nur durch das lineare Kraftgesetz $F = -D \cdot s$ bestimmt. Wegen $F_E = F_{e,m} \sin(\omega t)$ gilt dann:

$$s_{a,m} = \frac{F_{E,m}}{D}.$$

Mit $D = \omega_0^2 \cdot m$ wird dann: $s_{a,m} = \frac{F_{E,m}}{\omega_0^2 \cdot m}.$

$$s_{r,m} = \frac{F_{E,m}}{2m \cdot \omega_0 \delta \sqrt{1 - \left[\frac{\delta}{\omega_0} \right]^2}}.$$

Eingesetzt erhalten wir:

$$s_{r,m} = \frac{s_{a,m} \cdot \omega_0}{2\delta \cdot \sqrt{1 - \left[\frac{\delta}{\omega_0} \right]^2}}$$

und als Verhältnis der Resonanzamplitude zur Anfangsamplitude, die sogenannte Resonanzüberhöhung:

$$\frac{s_{r,m}}{s_{a,m}} = \frac{\omega_0}{2\delta \cdot \sqrt{1 - \left[\frac{\delta}{\omega_0} \right]^2}}$$

Bei geringer Dämpfung ist $\delta^2 \ll \omega_0^2$, also $\delta^2 / \omega_0^2 \ll 1$ und die Resonanzüberhöhung wird:

$$\frac{s_{r,m}}{s_{a,m}} = \frac{\omega_0}{2\delta}.$$

Der "Gütefaktor" Q eines Schwingkreises

bestimmt sich zu:

$$Q = \pi / \Lambda$$

mit $\Lambda = \delta \cdot T_d$ und $T_d = 2\pi / \omega_d$ wird:

$$Q = \pi / \delta \cdot T_d = \pi / (\delta \cdot 2\pi / \omega_d) = \omega_d / 2\delta.$$

Ist $\delta^2 \ll \omega_0^2$ (geringe Dämpfung), so ist $\omega_d^2 = (\omega_0^2 - \delta^2) \approx \omega_0^2$ und der Gütefaktor Q läßt sich bestimmen durch:

$$Q = \omega_0 / 2\delta.$$

Der Skizze (im nächsten Update) kann man für den Systemnullphasenwinkel φ_{0S} die Beziehung entnehmen:

$$\varphi_{0S} = \arctan\left(\frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\right)$$

3 Wellen

3.1 Gekoppelte Pendel

Zwei Schwerependel 1 und 2 mit gleichen Eigenfrequenzen f_0 werden über eine schwache Schraubenfeder 3 elastisch miteinander gekoppelt. Die Stärke der Kopplung hängt von der Härte der Feder 3 und von der Lage ihrer Befestigung entlang der Pendellänge ab. Die Masse der Feder 3 soll klein sein gegen die Massen der Pendel 1 und 2. Stärkere Kopplung bewirkt einen schnelleren Energiefluß.

Versuch: Pendel 1 werde angestoßen. Es überträgt vollständig seine Energie an das 2. Pendel und kommt selbst zu Ruhe, dann beginnt der Energiefluß in umgekehrter Richtung. Haben die Pendel etwas verschiedene Eigenfrequenzen f_1 und f_2 , dann erfolgt der Energieaustausch nicht ganz

vollständig. Je stärker die Kopplung ist, um so geringer wirken sich kleine Eigenfrequenzunterschiede in dieser Beziehung aus.

Definition: Schwingungen von gekoppelten Systemen, bei denen keine Energie zwischen den Einzelsystemen ausgetauscht wird, nennt man Fundamental-schwingungen. Im Fall der mechanisch gekoppelten Pendel müssen die Pendel dann in Phase mit der Frequenz f_1 bzw. in Gegenphase mit der Frequenz f_2 schwingen und die gleichen Eigenfrequenz f_0 aufweisen. Die Frequenz der 1. Fundamentalschwingung ist die der Einzelschwingung, die Frequenz der 2. Fundamentalschwingung ist wegen der zusätzlichen Rückstellkraft etwas größer als f_0 .

Der **Kopplungsgrad K** zweier gleicher schwingungsfähiger Systeme wird definiert durch:

$$K = 2 (W_1 - W_2) / (W_1 + W_2)$$
$$= 2 (f_1^2 - f_2^2) / (f_1^2 + f_2^2)$$

Koppelt man nicht 2 sondern N schwingungsfähige Einzelsysteme gleicher Eigenfrequenz f_0 miteinander, so gibt es für das Gesamtsystem N Fundamental-schwingungen (Normalschwingungen, Fundamentalmoden). Sind zwei oder mehrere Fundamentalschwingungen in ihren Frequenzen identisch, so nennt man das System **entartet**.

3.2 Mechanische Wellen

Die eindimensionale Welle ist eine Störung des Gleichgewichts in einem eindimensionalen Träger, dessen Masseteilchen elastisch gekoppelt sind. Die Störung wandert auf dem Träger mit

konstanter

Ausbreitungsgeschwindigkeit c weiter. Für das einzelne Teilchen des Trägers bedeutet diese Störung eine Auslenkung aus seiner bisherigen Gleichgewichtslage quer zum Träger, und zwar in dem Augenblick, in dem er von der Welle erfaßt wird. Ist die Welle über das Teilchen hinweggegangen, ist es in seiner neuen Lage wieder im Gleichgewicht.

Der Erreger verrichtet Spann- und Beschleunigungsarbeit. Mit der Welle wandern Spannungs- und Beschleunigungsenergie längs des Trägers weiter. Diese Energien stecken jeweils in den Teilchen des Wellenträgers, die gerade von der Störung erfaßt sind. Dieser Energietransport ist für fortschreitende Wellen charakteristisch.

Wegen $F = m \cdot a$ und $F = D \cdot s$ dürfen wir annehmen, dass die Auslenkung um so rascher erfolgt, je stärker die elastische Kopplung und je kleiner die Masse ist. Die Wanderungsgeschwindigkeit c der Störung wird demnach um so größer sein, je härter die Kopplungen und je kleiner die Massen sind.

Reflexion mechanischer Störungen

Gedankenmodell: Träge Körperchen bilden eine gerade Kette. Jedes Teilchen ist mit seinen Nachbarn durch Federchen gekoppelt. Die Teilchen seien so geführt, daß sie sich nur senkrecht zur Richtung der Kette bewegen können. Das letzte Teilchen möge entweder in seiner Querverführung frei beweglich (freies Ende) oder unverrückbar fest (festes Ende) sein:

Am festen Ende wird ein Berg als Tal, am freien Ende ein Berg als Berg reflektiert.

Anders ausgedrückt: Am festen Ende tritt ein Phasensprung um π auf (verg. Kap. 3.8.4).

Die sinusförmige Querwelle

Der Erreger möge ununterbrochen sinusförmig auf und ab schwingen. Auf dem Träger sehen wir eine ununterbrochen fortschreitende Querwelle (keine Reflexion am Ende da Träger unendlich lang). Es sind erzwungene Auslenkungen, deren Frequenz stets mit der Erregerfrequenz übereinstimmt. Je weiter das Teilchen vom Erreger entfernt ist, desto größer ist der Phasenunterschied zwischen seiner Schwingung und der des Erregers, desto mehr schwingt er gegen den Erreger verspätet.

Definition: Bei einer Welle bezeichnet man als **Phasengeschwindigkeit c** den Quotienten aus dem Weg, den eine bestimmte Phase der Schwingung - z. B. ein Maximum oder ein Minimum - zurücklegt, und der Zeit, die dazu benötigt wird.

Definition: Der zeitlich und räumlich konstante Abstand zwischen zwei benachbarten gleichen Schwingungszuständen heißt **Wellenlänge λ** .

Zwischen Phasengeschwindigkeit c , Frequenz f , Periodendauer T und Wellenlänge λ gelten die Beziehungen:

$$c = \lambda / T = \lambda f.$$

3.3 Wellen in verschiedenen Medien

Ein Gitter von Massepunkten diene uns als Modell für einen festen Körper, dessen Masseteilchen allseitig elastisch gekoppelt sind. Nun lenken wir einen Punkt seitlich (horizontal) nach rechts schnell aus. Damit werden in horizontaler Richtung zwei auseinanderlaufende Längsstörungen erregt, nach links eine Unterdruck- und

nach rechts eine Überdruckstörung. In vertikaler Richtung laufen zwei Querwellen vom Ort der Erregung fort. In waagrechter Richtung sind Verformungen größer als in der senkrechten. In der Waagrechten wird sich daher wegen der größeren Beschleunigung der Massenzentren die Störung rascher übertragen als in der Senkrechten: **Die Längsstörung wandert im ausgedehnten elastischen Stoff schneller als die Querstörung.** Diese spielt unter anderem in der Erdbebenforschung eine Rolle. Aus der Laufzeit von Erdbebenwellen ermittelt man die Entfernung des Herdes. Ist dieser z. B. 2.000 km entfernt, so trifft die Querwelle 3 min 19 s später als die Längswelle ein.

Flüssigkeiten und besonders Gase entsprechen dem o. g. Modell nicht. Sie haben nur Volumenelastizität, keine Gestaltelastizität. D. h. sie sind bestrebt, eine erlittene Volumen-, nicht aber eine Gestaltsänderung rückgängig zu machen. Im Innern von Flüssigkeiten und Gasen können deshalb keine Querwellen sondern nur Längswellen auftreten. **Schall** breitet sich deshalb in Luft als **Längswelle** aus. Da Flüssigkeiten bestrebt sind waagrechte Oberflächen zu bilden, also an der Oberfläche eine Gestaltelastizität zeigen, können dort durch eine Störung **Querwellen** (Oberflächenwellen) entstehen. **Wasserwellen** sind solche Oberflächenwellen.

Definition: Ist die Schwingungsgröße einer Welle ein Vektor konstanter Richtung, so nennt man die Welle polarisiert und die Richtung des Vektors Polarisationsrichtung. Wellen, bei denen die Polarisationsrichtung senkrecht zur Richtung der Phasengeschwindigkeit ist, heißen **Transversalwellen (Querwellen)**; solche, bei denen diese beiden Richtungen parallel sind, heißen

Longitudinalwellen (Längswellen); solche, bei denen Drehschwingungen auftreten, werden zirkular polarisierte Wellen genannt.

Energietransport in der mechanischen Welle

Die Auslenkung einer Sinuswelle ist eine periodische Funktion von x und t .

Sei $x_A = 0$, dann ist $s_A(t) = s_m \cdot \sin(2\pi \cdot t/T)$. Teilchen B hat die Abzisse $x_B = x$ und hinkt daher dem Teilchen A in der Phase um φ nach:

$$s_B(t) = s_m \cdot \sin((2\pi \cdot t/T - \varphi)).$$

Nun gehört zur Abzisse λ der Phasenunterschied 2π , zur Abzisse x daher der Phasenunterschied $= 2\pi x/\lambda$. Damit wird die Wellengleichung:

$$s(x, t) = s_m \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

Die **Wellengleichung** ist in mehreren Schreibweisen geläufig. Wegen $1/\lambda = f/c$ und $1/T = f$ gilt ebenfalls

$$s(x, t) = s_m \cdot \sin\left(2\pi \cdot f \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

oder wegen

$$2\pi f = \omega \text{ und } 2\pi \cdot f / c = 2\pi / \lambda = k$$

$$s(x, t) = s_m \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

mit **k = Kreiswellenzahl**

Hierin drückt sich also die sinusförmige Abhängigkeit der Auslenkung s von der Zeit t und vom Weg x in einem verlustfreien eindimensionalen Medium aus.

Die Teilchengeschwindigkeit v erhalten wir aus der Auslenkung, indem wir obige Gleichung nach t ableiten:

$$\begin{aligned} v(t, x) &= s_m \cdot (2\pi/T) \cdot \cos[2\pi(t/T - x/\lambda)] \\ &= v_m \cdot \cos[2\pi(t/T - x/\lambda)]. \end{aligned}$$

Die maximale Kinetische Energie eines Teilchens der Masse Δm ist daher:

$$\Delta E_{\text{kin}} = (1/2) \cdot \Delta m \cdot v_m^2 = 2\pi^2 \cdot f^2 \cdot s_m^2 \cdot \Delta m$$

oder

$$\Delta E_{\text{kin}} \sim f^2 \cdot s_m^2.$$

Dies ist zugleich die Summe aus kinetischer und potentieller Energie des schwingenden Teilchens in jedem beliebigen Augenblick. Diese Energie ist offenbar sowohl dem Quadrat der Frequenz als auch dem Quadrat der Amplitude proportional.

3.4 Wellenausbreitung im Raum

3.4.1 Schallwellen und Doppler-Effekt

Ist c die Schallgeschwindigkeit (in Luft bei 20°C ca. 340 m/s), f_s die Sendefrequenz, f_E die Empfangsfrequenz und v die Geschwindigkeit des Wellenerregers (Sender) bzw. Empfängers (Beobachter), so gelten folgende acht Zusammenhänge

1. Bewegter Sender kommt auf ruhenden Beobachter zu

Bewegt sich ein Wellenerreger mit gleichförmiger Geschwindigkeit v_s zu einem ruhenden Beobachter (Empfänger) hin, so stellt dieser eine höhere Frequenz, also eine Abnahme der Wellenlänge gegenüber den Verhältnissen bei ruhendem Erreger, fest. Es gilt dann:

$$f_E = f_s \cdot c / (c - v_s)$$

2. Bewegter Sender entfernt sich vom ruhenden Beobachter

Bewegt sich ein Wellenerreger mit gleichförmiger Geschwindigkeit v_s von einem ruhenden Beobachter fort, so stellt dieser eine niedrigere Frequenz, also eine Zunahme der Wellenlänge gegenüber den Verhältnissen bei ruhendem Erreger, fest. Es gilt dann:

$$f_E = f_S \cdot c / (c + v_s)$$

3. Bewegter Beobachter kommt auf ruhenden Sender zu

Bewegt sich ein Beobachter mit gleichförmiger Geschwindigkeit v_e zu einem ruhenden Wellenerreger hin, so stellt dieser eine höhere Frequenz, also eine Abnahme der Wellenlänge gegenüber den Verhältnissen bei ruhendem Beobachter, fest. Es gilt dann:

$$f_E = f_S \cdot (c + v_e) / c$$

4. Bewegter Beobachter entfernt sich vom ruhenden Sender

Bewegt sich ein Beobachter mit gleichförmiger Geschwindigkeit v_e von einem ruhenden Wellenerreger fort, so stellt dieser eine niedrigere Frequenz, also eine Zunahme der Wellenlänge gegenüber den Verhältnissen bei ruhendem Beobachter, fest. Es gilt dann:

$$f_E = f_S \cdot (c - v_e) / c$$

5. Beobachter und Sender kommen aufeinander zu

Bewegen sich der Wellenerreger mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_s und der Beobachter mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_e aufeinander zu, so stellt dieser folgende Frequenz fest:

$$f_E = f_S \cdot (c + v_e) / (c - v_s)$$

6. Beobachter und Sender entfernen sich voneinander

Bewegen sich der Wellenerreger mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_s und der Beobachter mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_e voneinander weg, so stellt dieser folgende Frequenz fest:

$$f_E = f_S \cdot (c - v_e) / (c + v_s)$$

7. Sender bewegt sich auf den Beobachter zu, dieser vom Sender weg

Bewegt sich ein Wellenerreger mit gleichförmiger Geschwindigkeit v_s auf einen Beobachter hin und dieser sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit v_e vom Wellenerreger fort, so stellt dieser folgende Frequenz fest:

$$f_E = f_S \cdot (c - v_e) / (c - v_s)$$

8. Sender bewegt sich vom Beobachter weg, dieser auf den Sender zu

Bewegt sich ein Wellenerreger mit gleichförmiger Geschwindigkeit v_s von einem Beobachter weg und dieser sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit v_e auf den Wellenerreger zu, so stellt dieser folgende Frequenz fest:

$$f_E = f_S \cdot (c + v_e) / (c + v_s)$$

3.4.2 Lautstärken

Die Lautstärke Λ bzw. der Lautstärkepegel Λ ist die von einem Schall bewirkte Schallempfindung. Sie ist keine rein physikalische Größe, sondern eine Schalleigenschaft, bei der auch physiologische Einflüsse eine Rolle spielen. Man mißt die Lautstärke nicht absolut, sondern verwendet zu ihrer Definition den dekadischen Logarithmus des Quotienten aus Schallstärke J und Bezugsschallstärke J_0 :

$$\Lambda = 10 \cdot \lg\left(\frac{J}{J_0}\right) \text{ Phon}$$

Die Schallstärke J ist das Maß für den physikalischen Reiz, gemessen in Watt/m².

Lautstärkepegel

Hörschwelle Schallstärke J_0
0 Phon = $1 \cdot 10^{-12}$ Watt/m²

Normales Sprechen Schallstärke J
40 Phon = $10.000 \cdot 10^{-12}$ Watt/m²

Schmerzschwelle Schallstärke J
120 Phon = $1 \cdot 10^0$ Watt/m²

Eine Umrechnung in Schalldruck ergibt für die Hörschwelle einen Schalldruck von $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ N/m², für die Schmerzgrenze $2 \cdot 10^1$ N/m² und für den Schalldruckpegel

$$L_p = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right),$$

der bei 1.000 Hz dem Lautstärkepegel in Phon gleichgesetzt wird.

In der Elektronik wird häufig eine logarithmische Größe A^* für das Spannungsverhältnis $A = U_a/U_e$ angegeben. Der Zusammenhang lautet:

$$A^* = 10 \cdot \lg\left(\frac{U_a^2}{U_e^2}\right) \text{ dB} = 20 \cdot \lg\left(\frac{U_a}{U_e}\right) \text{ dB}$$

Tonleiter mit gleichschwebender Temperatur

Eine Tonleiter ist eine nach der Tonhöhe geordnete Aufeinanderfolge von Tönen innerhalb einer Oktave, deren Frequenzverhältnisse bestimmten Bedingungen genügen.

Bei der gleichschwebenden Tonleiter wird die Oktave in 12 genau gleich große Intervalle eingeteilt:

Frequenzverhältnisse

c	1,00000	cis oder
des	$1,05946 = \sqrt[12]{2}$	
d	1,12246	dis oder
es	1,18921	

e	1,25992
f	1,33484
fis oder ges	1,41421
g	1,49831
gis oder as	1,58740
a	1,68179
b	1,78180
h	1,88775
c'	$2,00000 = 2 \cdot f_c$

Zwei Festlegungen für die absoluten Frequenzen sind üblich:

Physikalische Stimmung:

$$f_{c'} = 2^8 \text{ Hz} = 256 \text{ Hz} \Rightarrow$$

$f_{c''} = 512 \text{ Hz}$ oder die Internationale Stimmung:

$$f_{a'} = 440 \text{ Hz (Kammerton)} \Rightarrow$$

$$f_{c''} = 523 \text{ Hz.}$$

3.4.3 Stehende Wellen

Sei $s_+(x, t) = s_m \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$ eine

Sinuswelle, die sich nach rechts bewegt,

$s_-(x, t) = s_m \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right)$ eine

Sinuswelle, die sich nach links bewegt.

Ihre Überlagerung ergibt:

$$s_+(x, t) + s_-(x, t) = s(x, t) =$$

$$s_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + s_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

Mit $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$ folgt

$$s(x, t) = s_m \cdot \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right) + \\ \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right) + \\ \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right) - \\ \cos\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right) \end{bmatrix}.$$

Also

$$s(x, t) = 2s_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right).$$

Dies ist keine laufende Welle mehr. Jeder Punkt schwingt phasengleich mit der gleichen Zeitfunktion $\sin(\omega \cdot t)$, nur ist die Amplitude von Ort zu Ort verschieden, die Amplitude ist eine Kosinusfunktion des Ortes. Die Auslenkung wandert nicht mehr längs des Weges x , vielmehr bleibt jeder Schwingungsvorgang stationär an seinem Ort „stehen“. Darum nennt man dies Erscheinung auch **stehende Welle**. Eine stehende Welle entsteht durch Überlagerung zweier gegenläufiger harmonischer Wellen gleicher Frequenz und Amplitude. Dabei ist es im Grund gleichgültig ob die zweite Welle, die mit der ersten zur Überlagerung kommt, durch Reflexion entstand oder durch irgend einen externen Wellenerreger. An den Stellen, an denen die Kosinusfunktion den Wert Null annimmt, findet überhaupt keine Schwingung statt. Diese Stellen nennt man Schwingungsknoten. An den Stellen, an denen die Kosinusfunktion den Wert ± 1 annimmt, erfolgt die Schwingung mit maximaler Amplitude, nämlich mit dem doppelten Wert der Amplitude der beiden gegenläufigen Wellen. Diese Stellen nennt man Schwingungsbäuche. Der Abstand zwischen zwei Bäuchen ist gerade gleich $\lambda/2$.

3.4.4 Schwebung

Setzen wir einen Schwinger gleichzeitig zwei periodischen Erregern mit den Frequenzen f_1 und f_2 aus, beobachten wir eine Schwebung mit der Frequenz f , sofern es sich um eine erzwungene Schwingung ohne Resonanz handelt. Die **Schwebungsfrequenz f** ist gleich dem Frequenzunterschied der beiden Einzelschwingungen f_1 und f_2 :

$$f = f_1 - f_2$$

3.4.5 Brechung und Reflexion

Die Lichtgeschwindigkeit c ist abhängig vom Medium, durch das sich das Licht ausbreitet. Infolgedessen kommt es zu einer Änderung der Ausbreitungsrichtung bzw. zu einer Brechungserscheinung, wenn das Licht von einem Medium A in ein anderes Medium B übergeht und beide Medien verschiedene Lichtgeschwindigkeiten aufweisen. Nach Newton (1643-1727) kommt es zu einer Brechung zum Lot hin, wenn Lichtteilchen vom optisch dünneren ins optisch dichtere Medium übergehen und die Lichtgeschwindigkeit im optisch dichteren Medium größer ist als im optisch dünneren.

Nach Huygens (1629-1695) kommt es zu einer Brechung zum Lot hin, wenn die einfallende ebene Welle vom optisch dünneren ins optisch dichtere Medium übergeht und die Lichtgeschwindigkeit im optisch dichteren Medium kleiner ist als im optisch dünneren.

Die Messung der Lichtgeschwindigkeit in den verschiedenen Medien hätte die Entscheidung für bzw. gegen das eine oder andere Modell bringen können.

Messung der Lichtgeschwindigkeit

Die erste Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit führte 1675 der dänische Astronom Ole Römer (1644 - 1710) im Weltraum, d. h. im Vakuum durch. Er stellte die Umlaufzeit eines Jupitermondes fest, das ist die Zeit, die von einem Austritt des Mondes aus dem Schatten des Planeten bis zum nächsten vergeht. Das sind rund 42,5 Stunden, wenn die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne minimalen Abstand zum Planeten Jupiter hat. Bei mittlerem Abstand beobachtete Römer das Wiederauftauchen des Mondes um 15 s verspätet. Römer erklärte diese Zeitdifferenz damit, dass sich der Lichtweg vergrößert, wenn sich die Erde vom Jupiter fortbewegt bzw. verkürzt, wenn sich die Erde zum Jupiter hinbewegt. Die Erde bewegt sich auf ihrer Bahn mit der Geschwindigkeit von 30 km/s. In 42,5 h hat sie 4.500.000 km zurückgelegt. Für diese Strecke braucht das Licht 15 Sekunden. Daraus berechnet sich die Lichtgeschwindigkeit zu $c = ds/dt = \mathbf{300.000 \text{ km/s}}$.

Noch bevor man die Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Medien messen konnte, gelang der Durchbruch des Wellenmodells durch die Analyse von Interferenzerscheinungen (vergl. Kapitel 3.).

Das Brechungsgesetz, nach dem schon Ptolemäus und Kepler vergeblich gesucht hatten, wurde erst 1621 von Willibrord Snell van Royen, latinisiert Snellius (1591-1626), gefunden und 1632 in verbesserter Form von dem Mathematiker und Philosophen René Descartes, latinisiert Cartesius (1596-1650), in seiner „Dioptrik“ veröffentlicht.

Fällt unter dem Einfallswinkel α Licht aus einem optisch dünneren Medium A auf die Grenzfläche gegen ein optisch dichteres Medium B, so wird ein Teil des

Licht unter dem Brechungswinkel β zum Lot hin gebrochen, ein Teil unter dem Reflexionswinkel α reflektiert. Die Intensität des reflektierten Anteils wächst mit zunehmendem Einfallswinkel.

Das Brechungsgesetz lautet (unabhängig vom verwendeten Lichtmodell!):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_A}{c_B} = \frac{n_B}{n_A}, \text{ mit}$$

c_A = Lichtgeschwindigkeit in Medium A

n_A = Brechungsindex des Mediums A

c_B = Lichtgeschwindigkeit in Medium B

n_B = Brechungsindex des Mediums B

Einfallender Strahl, gebrochener Strahl und Einfallslot liegen in einer Ebene. n_A und n_B sind abhängig von der Frequenz des Lichtes (**Dispersion**). Der Brechungsindex für das Vakuum wird gleich 1 gesetzt. Nur er ist unabhängig von der Frequenz des Lichtes.

3.4.6 Beugung und Huygens'sches Prinzip

Eine Welle auf einem wellentragenden Medium wird meist angeregt, indem man einen Punkt des Mediums in Schwingung versetzt. Die Erregung führt dazu, dass nacheinander auch allen anderen Punkte des Mediums in Schwingung geraten. Irgendein beliebiger Punkt des Mediums schwingt also genau so wie der Erregerpunkt, nur eben zeitversetzt. Wieso sollte dann der Erregerpunkt, der auch nichts anderes ist als ein schwingender Punkt im Wellenfeld, vor allen anderen schwingenden Punkten ausgezeichnet sein? Offensichtlich kann jeder schwingende Punkt als Ausgangspunkt einer Welle verstanden werden. Dies ist der Inhalt des von

Christian Huygens (1629-1695) formulierten und nach ihm genannten **Huygens'schen Prinzips: Jeder Punkt eines Wellenfeldes ist Erregerpunkt, Ausgangspunkt einer sogenannten Elementarwelle. Das Wellenfeld insgesamt ergibt sich als Überlagerung aller Elementarwellen.**

Fotometrische Grundbegriffe

Die Fotometrie interessiert sich nicht für die physikalischen Eigenschaften des Strahlungsfeldes allgemein, sondern nur für den Teil davon, den unser Auge wahrnimmt. Die Beziehung zwischen den physikalischen und den physiologischen Größen stiftet die spektrale Empfindlichkeitskurve des Auges. Das Auge ist demnach erstaunlicherweise für Karminrot (750 nm) 10.000 mal weniger empfindlich als für zitronengelb (550 nm). Wie eine bestimmte physikalische Strahlungsmenge physiologisch bewertet wird, hängt also entscheidend von ihrer spektralen Zusammensetzung ab. Eine Fläche von 1 m² z. B., auf die 1 Watt monochromatischen gelbgrünen Lichts (genauer von 550 nm) auftrifft, wird als Beleuchtungsstärke von 680 Lux empfunden, die gleiche Bestrahlungsstärke im Roten (750 nm) nur als etwa 0,1 Lux). Jede der physikalischen Strahlungsgrößen hat ihr physiologisches Gegenstück. Alle diese physiologisch-fotometrischen Größen lassen sich auf eine Grundgröße, das Candela (cd) zurückführen.

Physikalisch Strahlung	Physiologisch Licht
Strahlungsleistung 1 Watt	Lichtstrom 1 Lumen
Strahlungsenergie 1 Joule	Lichtmenge 1 Lumenstunde
Strahlungsstärke	Lichtstärke

1 Watt/sterad

1 Candela

Intensität
1 W/m²

Beleuchtungsstärke
1 lm/m² = 1 Lux

Emissionsdichte
1 W/(sterad·m²)

Leuchtdichte
1 cd/m²

Das Steradian ist die Einheit für den Raumwinkel. Dieser ist gegeben durch das Verhältnis des über ihm aufgespannten Kugelflächenteils zum Quadrat des Radius der Kugel. Der volle Raumwinkel Ω berechnet sich demzufolge zu

$$\Omega = \frac{4\pi \cdot r^2}{r^2} = 4\pi$$

Das Fermatsche Prinzip

Man kann das Brechungsgesetz auch aus einem Extremalprinzip herleiten: Das Licht verläuft zwischen den Punkte A und B so, dass es dazu möglichst kurze Zeit braucht:

Von A bis O ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_1 , von O bis B ist sie c_2 . Also ist die Gesamtlaufzeit $T = AO/c_1 + OB/c_2$. Der Durchtrittspunkt O, gekennzeichnet durch die Koordinate x, soll so liegen, dass die Größe

$$T = \frac{AO}{c_1} + \frac{OB}{c_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{c_2}$$

minimal ist: $\frac{dT(x)}{dx} = 0$.

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{x}{c_1 \cdot \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{c_2 \cdot \sqrt{(d-x)^2 + b^2}} =$$

$$\frac{x}{c_1 \cdot AO} - \frac{d-x}{c_2 \cdot OB} = 0. \text{ Also}$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{c_1} - \frac{\sin(\alpha_2)}{c_2} = 0 \text{ bzw.}$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Auch das Reflexionsgesetz erfüllt die Forderung, dass der Lichtstrahl von A nach B über den Spiegel in möglichst kurzer Zeit - und weil es im gleichen Medium bleibt, auch auf möglichst kurzem Weg - gelangt. Bei einer Abbildung, bei der ein Bündel von Lichtstrahlen von einem Punkt ausgeht und nach Reflexion und Brechung wieder in einem Punkt (dem Bildpunkt) vereinigt wird, müssen nach dem Fermatschen Prinzip alle Strahlen des Bündels zum Durchlaufen ihres Weges die gleiche Zeit brauchen oder muss die Länge ihres Lichtweges die gleiche sein. Auf jedem Strahl liegt also die gleiche Zahl von Wellenlängen, also besitzen alle Wellen, die im Bild zusammentreffen, die gleiche Phase.

Totalreflexion

Tritt Licht von einem optisch dichteren in ein dünneres Medium, so wird es vom Einfallswinkel fort gebrochen. Folglich gibt es einen Einfallswinkel α_T , zu dem ein Brechungswinkel von 90° gehört. Das Brechungsgesetz fordert, dass

$$\frac{\sin \alpha_T}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1} \text{ gilt bzw. } \sin \alpha_T = \frac{n_2}{n_1}.$$

Wenn dieser Grenzwinkel α_T überschritten wird, ist ein Übergang in das dünnere Medium nicht mehr möglich, vielmehr wird alles Licht an der Grenzfläche reflektiert.

Brewster Winkel

Bedenkt man, dass eine linear schwingende Ladung (Hertzscher Dipol) in ihrer Schwingungsrichtung nicht

emittiert, so ergibt sich, dass keine reflektierte Welle zustande kommt, wenn ihre Richtung in Schwingungsrichtung stünde. Das ist beim Einfall einer Welle, die in der Einfallsebene polarisiert ist, genau dann der Fall, wenn der gebrochene und der reflektierte Strahl aufeinander senkrecht stehen würden.

Dann ist $\beta = 90^\circ - \alpha$, also $\sin \beta = \cos \alpha$.

Aus dem Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_B}{n_A} \text{ wird in}$$

diesem Fall

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{n_B}{n_A}$$

Physikalisch Strahlung

Physiologisch Licht

Strahlungsleistung
1 Watt

Lichtstrom
1 Lumen

Strahlungsenergie
1 Joule

Lichtmenge
1 Lumenstunde

Strahlungsstärke
1 Watt/sterad

Lichtstärke
1 Candela

Intensität
1 W/m²

Beleuchtungsstärke
1 lm/m² = 1 Lux

Emissionsdichte
1 W/(sterad·m²)

Leuchtdichte
1 cd/m²

Das Steradian ist die Einheit für den Raumwinkel. Dieser ist gegeben durch das Verhältnis des über ihm aufgespannten Kugelflächenteils zum Quadrat des Radius der Kugel. Der volle Raumwinkel Ω berechnet sich demzufolge zu

$$\Omega = \frac{4\pi \cdot r^2}{r^2} = 4\pi$$

3.4.7 Die Interferenz des Lichtes

O. Wiener (1862-1927) brachte 1889 schräg vor einen Metallspiegel (Winkel α) einen fotografischen Film von nur $2 \cdot 10^{-5}$ mm Dicke und ließ einfarbiges, paralleles Licht, d. h. ebene Wellenflächen, durch den Film senkrecht auf den Spiegel fallen. Auf dem entwickelten Film zeigte sich eine Folge heller und dunkler Streifen.

Erklärung: Die ankommenden fortschreitenden Wellen und die entgegenlaufenden reflektierten Wellen bilden stehende Wellen aus. Die Wellenbäuche schwärzen die fotografische Schicht am stärksten, die in Ruhe bleibenden Knotenebenen werden auf dem Film als helle Streifen angezeigt. Am Spiegel selbst liegt eine Knotenebene (Reflexion am dichteren Mittel). Wie bei der Reflexion mechanischer Wellen am festen Ende des Trägers tritt auch bei der Reflexion des Lichtes am optisch dichteren Mittel ein **Phasensprung um π** auf (vergl. Kap. 3.2).

Der Wienersche Versuch gelingt nur, wenn der Winkel zwischen Film und Spiegel sehr klein ist. Daraus kann man schließen, dass die Wellenlänge des Lichtes ebenfalls äußerst klein ist. Die Wellenlänge kann man aus dem Streifenabstand d und dem Winkel α berechnen:

$$\frac{\lambda}{2} = d \cdot \sin \alpha.$$

Der Fresnelsche Spiegelversuch

Da die von verschiedenen Atomen derselben Lichtquelle ausgehenden Wellen unabhängig voneinander schwingen, besteht zwischen ihnen keine feste Phasenbeziehung. Erfahrungsgemäß erhält man hierbei keine Interferenzerscheinungen. Voraussetzung für Interferenzerscheinungen ist die Kohärenz (cohaerere. lat.; zusammenhängen) der Strahlung. Laser

sind Lichtquellen, bei der alle Atome kohärent Licht ausstrahlen.

Fresnel dagegen nutzte einen genialen Kunstgriff. Er ließ in seinem Versuch das Licht von einem hell beleuchteten Spalt auf zwei, nur wenige Winkelminuten gegeneinander geneigte, ebene Spiegel fallen. Die Wellen scheinen dann von den beiden sehr nahe benachbarten Punkten L_1 und L_2 herzukommen. Da sie aber in Wirklichkeit von der selben physikalischen Lichtquelle, nämlich von dem rückwärts beleuchteten Spalt. Herrühren, sind sie kohärent. Auf einem Schirm sehen wir daher - sofern der Versuch mit einfarbigem Licht ausgeführt wird - helle und dunkle Streifen.

Sei P ein Punkt auf dem Schirm. Der Abstand L_1P sei gleich x , der Abstand L_2P gleich y und der Abstand der beiden Lichtquellen voneinander sei gleich l . Der Schirm habe den Abstand a von der Ebene der beiden Lichtquellen und d ist der Abstand des m -ten linken und des m -ten rechten hellen Streifens. Ist im Punkt p die Wegdifferenz $x - y = m \cdot \lambda$ ($m = 1, 2, 3 \dots$), so herrscht dort Helligkeit. Wenn wir von P auf L_1L_2 das Lot fällen, gilt nach Pythagoras:

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{d+l}{2}\right)^2 \quad \text{und}$$

$$y^2 = a^2 + \left(\frac{d-l}{2}\right)^2. \text{ Also}$$

$$x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y) = d \cdot l.$$

$x + y$ dürfen wir mit guter Näherung gleich $2a$ setzen, weil d und l sehr klein gegen a sind. Für helle Streifen gilt also wegen $x - y = m \cdot \lambda$:

$$m \cdot \lambda \cdot 2a = d \cdot l, \text{ mit } m = 1, 2, 3, \dots$$

bzw.

$$\lambda = \frac{d \cdot l}{m \cdot 2a}.$$

Für die ersten beiden hellen Streifen links und rechts von der hellen Mitte gilt ($m = 1$) deshalb:

$$\lambda = \frac{d \cdot l}{2a}.$$

Wird der Fresnelsche Spiegelversuch mit weißem Glühlicht durchgeführt, so beobachtet man bei den Interferenzstreifen Farberscheinungen. Ist z. B. für einen Punkt P der Gangunterschied gleich 350 nm, so wird das entsprechende Rot völlig ausgelöscht. Die übrigen Farben addieren sich zu dem komplementären Grün.

Die Interferenz des Lichtes an dünnen Schichten

Fällt Licht mit parallelen Wellenflächen in Richtung 1 nahezu senkrecht auf die Oberfläche einer sehr dünnen, planparallelen, durchsichtigen Platte, so wird ein Teil in Richtung 1' reflektiert, während der Rest in Richtung 2 in die Platte eintritt. Dieser Teil spaltet sich an der unteren Grenzfläche wieder auf. Ein Teil tritt in Richtung 3 aus, der Rest wird in die Platte zurückgeworfen und bei seinem Auftreffen auf die obere Fläche erneut aufgespalten. Der eine Teil verlässt die Platte in Richtung 2', der andere wird reflektiert und verlässt die Platte in Richtung 4. Die jeweils in der gleichen Richtung verlaufenden Lichtbündel überlagern sich und interferieren. Beschränkt man sich auf einen nahezu senkrechten Lichteinfall, so hängt die Interferenzerscheinung von der Dicke der lichtdurchlässigen Schicht ab.

Die Schichtdicke sei zunächst sehr klein gegenüber der Wellenlänge des Lichts. Dies ist z. B. bei Seifenhäutchen kurz vor dem Zerreißen der Fall. Dann erwartet

man zunächst, dass bei der Beobachtung im reflektiertem Licht, da beide Anteile 1' und 2' praktisch keinen Laufwegunterschied besitzen, die reflektierten Schicht hell erscheint. Tatsächlich beobachtet man Dunkelheit. Man muss nämlich beachten, dass das Licht bei seiner Reflexion an dichteren Mittel (das ist in diesem Fall die obere Oberfläche) einen Phasensprung von π erfährt. Der Gangunterschied der beiden Wellen ist als gleich $\lambda/2$; Berg fällt auf Tal, die Schicht erscheint dunkel.

Beugung am Spalt

Beleuchtet man in einer Versuchsanordnung einen engen Spalt von links, kann dieser Spalt als schmale Lichtquelle betrachtet werden. Ein Rotfilter sorgt für einfarbiges Licht, eine Sammellinse dafür, dass die Lichtstrahlen parallel gemacht werden. Dieses Licht, also ebene Wellenfronten einfarbigen Lichts, treffe auf einen zweiten (beugenden) Spalt, dessen Breite sich verändern lässt. Mit einer zweiten Sammellinse wird dieses Licht auf einen Schirm fokussiert.

Solange der zweite Spalt mehrere Millimeter breit ist (**Spaltbreite b**), sieht man auf dem Schirm ein helles Spaltbild. Verkleinert man die Spaltbreite auf unter 1 mm, dann wird das helle Bild breiter, die Schattengrenzen unschärfer und im beidseitigen Schattenraum treten helle Streifen auf.

Beugung und Interferenz am einfachen Spalt

Wenn die Strahlen senkrecht auf die Spaltebene treffen, gilt:

Intensitätsminima liegen in den Richtungen α_n , für die

$$\sin(\alpha_n) = \frac{n \cdot \lambda}{b}$$

ist.

Die Beugungsstreifen liegen also um so

weiter auseinander, je enger der Spalt und je größer die Wellenlänge des benutzten Lichtes ist.

Beugung und Interferenz am Doppelspalt

Bei einem Doppelspalt überlagern sich die Beugungsbilder der einzelnen Spalte. Wenn es sich um zwei parallele Spalte mit der gleichen Breite handelt und die Strahlen senkrecht auf die Spaltebene treffen, so liegen **Intensitätsmaxima** in den Richtungen α_n , für die

$$\sin \alpha = n \cdot \frac{\lambda}{d}$$

ist.

Dabei ist d der Abstand zweier homologer (homolog = gleichliegend) Spaltpunkte.

Beugung und Interferenz am Gitter

Bei einem optischen Gitter aus einer großen Zahl schmaler Spalte, die im gleichen Abstand parallel nebeneinander liegen, entstehen Beugungsbilder, deren Intensitätsmaxima in den Richtungen α_n liegen, für die

$$\sin \alpha = n \cdot \frac{\lambda}{g}$$

ist.

Dabei ist g die Gitterkonstante, also der Abstand zweier benachbarter homologer Gitterpunkte.

3.4.8 Die Energie elektromagnetischer Wellen

Die Energie einer elektromagnetischen Welle steckt zur Hälfte im elektrischen, zur Hälfte im magnetischen Feld. Räumlich ist die Energie in plattenförmigen Bündeln konzentriert, dort wo E und H maximal sind. Dazwischen liegen energiearme Zonen. Die Energiebündel wandern mit der

Geschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \mu \cdot \mu_0}} .$$

Mit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}}$$

folgt

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \cdot \mu}}$$

[Zur Erinnerung: Die Kapazität C eines Plattenkondensators mit der Plattenfläche A und dem Plattenabstand d berechnet sich zu

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d} .$$

Die magnetische Flussdichte B einer langgestreckten Spule der Länge L in welchem der Strom I durch n Windungen fließt, berechnet sich zu

$$B = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot I \cdot \frac{n}{L} .]$$

Das bedeutet einen Energiestrom mit der Dichte

$$S = \eta \cdot v = E \cdot H .$$

Darin ist η die Energiedichte Energie/Volumen.

Diese Strömung zeigt senkrecht zu E und H , die beider ihrerseits senkrecht aufeinander stehen.

3.5 Elemente der geometrische Optik

Linsen sind lichtdurchlässige, meist aus Glas oder Kunststoff bestehende Körper, die eine Brechung der hindurchgehenden Lichtstrahlen bewirken und deshalb optische Abbildungen hervorbringen können. Man unterscheidet zwischen sphärischen und asphärischen Linsen. Sphärische Linsen werden von zwei

Kugelflächen oder einer Kugelfläche und einer Ebene begrenzt, alle anderen Linsen sind asphärische Linsen.

3.5.1 Die Sammellinse

Unter dem **Brennpunkt F** einer Sammellinse versteht man denjenigen Punkt, in dem parallel zur optischen Achse auf die Linse fallende Strahlen vereinigt werden. Der Abstand des Brennpunktes von der Linsenebene wird als **Brennweite f** bezeichnet. Die durch den Brennpunkt gehende, zur optischen Achse senkrechte Ebene wird als Brennebene bezeichnet. Jede Linse hat zwei Brennpunkte, die man je nach ihrer Lage gegenstandsseitigen Brennpunkt F oder bildseitigen Brennpunkt F' nennt. Analog spricht man von der gegenstandsseitigen Brennweite f und der gegenstandsseitigen Brennebene bzw. der bildseitigen Brennweite f' und der bildseitigen Brennebene.

Zur Bildkonstruktion kann man drei ausgezeichnete Strahlen verwenden:

1. den Parallelstrahl, der nach der Brechung durch F' geht,
2. den Mittelpunktstrahl, der ungebrochen durch den Linsenmittelpunkt M geht,
3. den Brennstrahl, der nach der Brechung parallel zur optischen Achse verläuft.

Zwischen der Gegenstandsgröße G, der Gegenstandsweite g, der Bildgröße B und der Bildweite b besteht der Zusammenhang:

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}.$$

Die Größe β wird als Abbildungsmaßstab bezeichnet.

Die Abbildungsgleichung lautet:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Der reziproke Wert der Brennweite, d. h. die Größe $1/f$, wird als **Brechkraft** der Linse bezeichnet. Sie wird in der Einheit 1 Dioptrie (dpt) gemessen.

Die Lupe

Liegt der betrachtete Gegenstand innerhalb der Brennweite einer Sammellinse, entsteht von diesem Gegenstand ein virtuelles, aufrechtes und vergrößertes Bild. Es tritt eine Vergrößerung des Sehwinkels ε ein, unter dem der betrachtete Gegenstand erscheint.

3.5.2 Die Zerstreuungslinse

Unter dem Brennpunkt einer Zerstreuungslinse versteht man denjenigen Punkt, von dem parallel zur optischen Achse auf die Linse fallende Strahlen nach dem Durchgang durch die Linse zu kommen scheinen.

Während das auf dem Kopf stehende Bild einer Sammellinse real ist (und mit einem Bildschirm aufgefangen werden kann), ist das aufrecht stehende Bild einer Zerstreuungslinse virtuell (wie z. B. auch ein Spiegelbild).

3.5.3 Das Fernrohr

Das astronomische oder Kepler-Fernrohr besteht aus zwei Sammellinsen. Das dem betrachteten Gegenstand zugewendete Objektiv hat eine große Brennweite und ist so angeordnet, dass sein Brennpunkt F'ob mit dem Brennpunkt Fok des dem Auge zugewandten Okulars zusammenfällt. Für die Länge L des Fernrohres gilt daher

$$L = f_{ob} + f_{ok}.$$

Das Objektiv entwirft von dem entfernten Gegenstand ein in der gemeinsamen Brennebene von Objektiv und Okular gelegenes reelles Bild, das mit dem Okular als Lupe betrachtet wird.
Für die Vergrößerung v gilt:

$$v = f_{\text{ob}} / f_{\text{ok}}.$$

Das Kepler-Fernrohr liefert ein umgekehrtes Bild, was bei astronomischen Beobachtungen nicht stört. Wenn man irdische Gegenstände beobachten will, muss man mit Hilfe einer dritten Sammellinse oder durch Prismenkombinationen (Totalreflexion) eine Bildumkehr herbeiführen.

Das holländische oder Galilei-Fernrohr besitzt als Objektiv eine Sammellinse mit großer Brennweite und als Okular eine Zerstreuungslinse mit kleiner Brennweite. Die Linsen sind so angeordnet, dass der Brennpunkt F'_{ob} des Objektivs mit dem Brennpunkt F_{ok} des Okulars zusammenfällt. Für die Länge L des Fernrohres gilt daher

$$L = f_{\text{ob}} - f_{\text{ok}}.$$

Die von einem fernen Gegenstand kommenden Strahlen treffen nach dem Durchgang durch das Objektiv bereits auf das Okular, bevor sie sich zu einem reellen Bild vereinigen können.

Für die Vergrößerung v gilt ebenfalls:

$$v = f_{\text{ob}} / f_{\text{ok}}.$$

4 Ergebnisse der Quanten-mechanik

4.1 Aufbau der Atome

Der englische Physiker Rutherford (1871 bis 1937) machte Streuversuche mit α -Strahlen, die aus positiv geladenen Heliumionen bestehen, welche von radioaktiven Stoffen mit hoher Geschwindigkeit ausgeschleudert werden. Bei diesen Streuversuchen stellte er fest, dass die meisten α -Teilchen die streuende Goldfolie ungestört durchdringen. Die in einem Atom enthaltene Masse kann daher nicht das gesamte vom Atom eingenommene Volumen ausfüllen. Einige α -Teilchen erfahren aber beim Durchgang durch die Folie starke Ablenkungen. Da aber die Masse der α -Teilchen etwa 8.000mal größer ist als die der Elektronen, erleiden sie beim Zusammenstoß mit einem Elektron keine merkliche Ablenkung. Die beobachteten starken Ablenkungen von einigen α -Teilchen mit ihren positiven Ladungen können also nur von anderen positiven Ladungen hervorgerufen werden, die mit einer großen Masse verbunden sind. Die positive Ladung und die Masse müssen also in einem Kern vereinigt sein, dessen Durchmesser von Rutherford zu 10^{-12} bis 10^{-13} m, also etwa dem 10^4 ten Teil des gesamten Atomdurchmessers, bestimmt wurde. Bei einer billionenfachen Vergrößerung würde das ganze Atom einen Durchmesser von etwa 100 m, der Kern aber nur die Größe eines Kirschkernes erhalten. Im übrigen Raum des Atomvolumens befinden sich nur die Elektronen, deren Gesamtheit die Elektronenhülle bildet.

Das Modell von Rutherford hat folgende Mängel:

Nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik stellt jedes auf einer kreisförmigen oder elliptischen Bahn sich bewegendes Elektron einen Hertz-Oszillator dar, der ständig Energie abstrahlt. Eine solche Energieabstrahlung wird aber bei normalen Atomen nicht beobachtet.

Da die Energie des Elektrons wegen der Abstrahlung laufend abnehmen müsste, würde es sich auf einer Spiralbahn um den Kern bewegen und schließlich in ihn hineinfallen. Das Rutherfordsche Atommodell ist also mit der Existenz stabiler Atome nicht vereinbar. Die nach Gesetzen der klassischen Physik berechnete Lebensdauer der Atome würde weniger als 1 Sekunde betragen.

Bohr machte deshalb die Annahme, dass die Elektronen nur auf solchen Bahnen den Kern stabil umkreisen können, auf denen das Produkt aus ihrem Impuls $m \cdot v$ und dem Bahnumfang $2r \cdot \pi$ ein ganzzahliges Vielfaches des Wirkungsquantums h ist:

$$m \cdot v \cdot 2\pi \cdot r = n \cdot h$$

$$\text{mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

Beim Wasserstoff ergibt sich aus dieser Bedingung als Radius der innersten Bahn mit $n = 1$ ein Radius von $r = 0,53 \cdot 10^{-10}$ m. Die folgenden Bahnen haben vom Kern den 4-, 9-, 19-, ... fachen Abstand. Weil die Bahndurchmesser für große n rasch anwachsen, werden die Elektronen mit großem n leicht von außen gestört, deshalb treten meist nur Bahnen mit kleinen Werten von n auf.

Diese Vorstellung vom Bau eines Atoms mit dem Atomkern in der Mitte, um den auf wenigen stabilen Bahnen ein oder mehrere Elektronen umlaufen, ist das Bohrsche Atommodell. Es fand eine gute Bestätigung, weil mit ihm die Vorgänge

bei der Lichtaussendung und die Entstehung der Spektrallinien erklärt werden konnten: Durch einen Stoß von außen kann ein Elektron von seiner normalen Bahn auf eine weiter außen verlaufende gehoben werden. Wegen der elektrischen Anziehung zum Kern fällt es sofort wieder auf die tiefere Bahn zurück und sendet dabei die beim Stoß aufgenommene Differenz der Energien beider Bahnen als Licht aus.

Nach der Quantentheorie und der Gleichung $\lambda \cdot f = c$ muss das ausgesandte Lichtquant eine ganz bestimmte Frequenz bzw. Wellenlänge besitzen, die man aus der Gleichung

$$f = \frac{\Delta W}{h}$$

erhält. Dabei ist ΔW die Energie, die beim Übergang des Elektrons von der äußeren zur inneren Bahn frei wird. Die so berechneten Wellenlängen des Wasserstoffs stimmen mit der Beobachtung aufs genaueste überein.

Alle anderen Atome besitzen mehr als ein Elektron. Das Bohrsche Atommodell reicht hier nicht mehr aus, um die Elektronenanordnung zu erklären. Erst ein anderes Modell, das **wellenmechanische Modell** von Schrödinger und Heisenberg beseitigt schon beim Wasserstoff manche willkürliche Annahme und brachte die Möglichkeit, auch bei Atomen mit mehreren Elektronen Aussagen über den Zustand der Elektronen zu machen.

Materiewellen

Die Relativitätstheorie Einsteins stellt einen wichtigen Zusammenhang zwischen Masse und Energie fest. Damit fallen die Erhaltungssätze für beide in einem zusammen und die physikalischen Grundprinzipien vereinfachen sich bedeutend.

Die Beziehung zwischen Masse und Energie gibt die **Einsteinsche Gleichung**

$$E = m \cdot c^2$$

wieder, in der c die Lichtgeschwindigkeit darstellt.

Nach dieser Gleichung kommt dem Lichtteilchen (Photon) die Masse

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h \cdot f}{c^2}$$

zu. Entsprechend darf man ihm auch einen Impuls zuschreiben

$$p = m \cdot c = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Eine Ruhemasse besitzt das Photon nicht (weil es gegenüber keinem denkbaren Inertialsystem in Ruhe ist).

Fallen die Photonen während der Zeit Δt auf eine Fläche A auf, so erfährt jedes bei völliger Absorption eine Impulsänderung

$$\Delta p = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{E}{c}.$$

Die Impulsänderung aller Photonen beträgt also

$$\Delta p_g = \frac{E_g}{c}.$$

Dabei stellt E_g die Energie aller Photonen dar, die während der Zeit Δt einfallen. Dann wirkt auf den Körper die Kraft

$$F = \frac{\Delta p_g}{\Delta t} = \frac{E_g}{c \cdot \Delta t}.$$

Daraus berechnet sich der Strahlungsdruck (nicht Impuls!)

$$p = \frac{\Delta E_g}{A \cdot c \cdot \Delta t}.$$

De Brogliesche Materiewellen

Der französische Physiker de Broglie (1892-1987) verallgemeinerte die Aussagen zum Dualismus des Lichtes 1924 und ordnete jedem Teilchen eine Welle, die sogenannte Materiewelle, zu.

Aus $p = \frac{h}{\lambda}$ folgt für die Wellenlänge λ

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Nimmt man an, diese Gleichung sei allgemein gültig, so bekommt man die von de Broglie angegebene Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}.$$

Sie besagt, dass jedem Körper der Masse m und der Geschwindigkeit v eine Welle mit der angegebenen Wellenlänge zuzuordnen ist.

Das von Niels Bohr aufgestellte Postulat für stabile Elektronenbahnen um den Atomkern

$$m \cdot v \cdot 2\pi r = n \cdot h \text{ bzw.}$$

$$2\pi \cdot r = n \cdot \frac{h}{m \cdot v} = n \cdot \lambda$$

bekommt dadurch eine einfache Erklärung: Die Elektronenbahnen sind dann stabil, wenn der Umfang der Kreisbahn ($2\pi \cdot r$) genau dem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge der Materiewelle des Elektrons entspricht.

Massenspektroskopie

Wenn die Kerne sich ausschließlich aus Protonen und Neutronen zusammensetzen, deren Massen sich nur um etwa 1% unterscheiden, so sollte man erwarten, dass die relativen Atommassenzahlen durchweg nahezu ganzzahlige Vielfache der relativen Atommassenzahl des H-Atoms wären. Tatsächlich treten aber erhebliche Abweichungen auf. Die Ursache ist die, dass die Bestimmung der relativen Atommassenzahlen zwar an chemisch reinen Elementen durchgeführt werden, dass man aber mit physikalischen Methoden feststellen kann, dass diese sich in den meisten Fällen aus verschiedenen Komponenten zusammensetzen, so das Chlor aus zwei Komponenten, deren relative Atommassenzahlen sich um weniger als 0,07% von den ganzen Zahlen 35 und 37 unterscheiden. Aus der chemischen Ununterscheidbarkeit folgt, dass diese beiden Isotope die gleiche Elektronenzahl- und Konfiguration und somit die gleiche Ordnungszahl besitzen. Sie können sich also nur in der Neutronenzahl und somit in der Kernmasse unterscheiden.

Das genaueste Verfahren zur Trennung von Isotopen und Bestimmung ihrer relativen Atommassen ist das **Massenspektrometer**. Die zu untersuchenden Atom werden zuerst mittels einer elektrischen Entladung ionisiert und treten als Kanalstrahlen in ein homogenes elektrischen Feld ein. Dort werden die Ionen je nach ihrer Geschwindigkeit stärker oder schwächer abgelenkt. Dann tritt der aufgefächerte Strahl in ein magnetischen Feld ein, wo die Ionen wieder je nach ihrer Geschwindigkeit abgelenkt werden, aber in umgekehrter Richtung. Durch geeignete Dimensionierung kann man erreichen, dass alle Ionen gleicher spezifischer Ladung trotz verschiedener

Geschwindigkeiten wieder durch einen Punkt laufen, und dass all diese Punkte auf einer Geraden liegen. Eine Fotoplatte, deren Ebene diese Gerade enthält, zeichnet also eine Reihe von Punkten oder – bei spaltförmiger Eingangsblende – von haarscharfen Linien auf, aus deren Lage man die Relativwerte der spezifischen Ladungen mit außerordentlicher Genauigkeit (auf 6 Dezimalstellen) entnehmen kann. Da die Ladungen der Ionen nur niedrige ganze Vielfache der Elementarladung sein können, sind damit die Teilchenmassen mit der gleichen Genauigkeit gegeben.

4.2 Der schwarze Körper

Jeder Körper tauscht mit seiner Umgebung Wärme aus. Dieser Austausch erfolgt auch, wenn er sich in einem evakuierten Raum befindet, so dass gewöhnliche Wärmeleitung ausgeschaltet ist. Die Energieabgabe oder -aufnahme erfolgt dann durch Emission oder Absorption von Strahlung, die je nach der Temperatur des Körpers oder seiner Umgebung ultrarotes, sichtbares und ultraviolettes Licht enthält. Man fasst diese Strahlung unter dem Namen Wärmestrahlung zusammen.

Wärmestrahlung erfolgt (im Gegensatz zur Wärmeleitung) auch dann, wenn der Körper die gleiche Temperatur hat wie seine Umgebung. Wie viel ein Körper überhaupt abstrahlt ist unabhängig von der Temperatur seiner Umgebung. Umgekehrt erhält der Körper immer Strahlung von der Umgebung, selbst wenn diese kälter ist. Allerdings strahlt dann die Umgebung dem Körper weniger zu als umgekehrt und der Körper kühlt ab. Thermisches Gleichgewicht herrscht, wenn die ausgestrahlte Leistung gleich der aus der Umgebung aufgenommenen ist. Das ist dann der Fall, wenn beide Temperaturen gleich sind.

Die Strahlung hängt von der Temperatur des Strahlers und auch von der Beschaffenheit seiner Oberfläche ab. Die Ausstrahlung eines Körpers beschreibt man durch sein **Emissionsvermögen** E . E ist die von der Flächeneinheit seiner Oberfläche in den Halbraum pro Zeiteinheit ausgestrahlte Energie. Das Emissionsvermögen der blanken Fläche ist bei gleicher Temperatur kleiner als das der schwarzen. Das **Absorptionsvermögen** A ist das Verhältnis der absorbierten zur auffallenden Strahlung. Je größer das Absorptionsvermögen eines Körpers ist, desto größer ist auch sein Emissionsvermögen. Das Verhältnis des Emissionsvermögens zum Absorptionsvermögen ist konstant.

Körper, die das Absorptionsvermögen 1 besitzen, die also die gesamte auffallende Strahlung absorbieren und vollständig in Wärme verwandeln, bezeichnet man als absolut **schwarze Körper**. Berußte oder mit schwarzem Samt überzogene Körper erfüllen diese Bedingung nur unvollkommen. Sehr gut wird diese Bedingung jedoch von der kleinen Öffnung eines Hohlkörpers erfüllt. Die durch die Öffnung von außen eintretenden Strahlen werden im Innern des Hohlraumes vielfach reflektiert oder gestreut und erleiden bei jeder Reflexion oder Streuung eine Absorption, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein merklicher Bruchteil wieder zur Öffnung herauskommt, außerordentlich gering ist. Die durch die Öffnung eines solchen Hohlraumes austretende Strahlung ist mit der Strahlung des absolut schwarzen Körpers gleicher Temperatur identisch. Man bezeichnet daher die schwarze Strahlung auch als Hohlraumstrahlung.

Strahlungsgesetze

Die spektrale Strahlungsdichte $\rho(f, T)$ als Funktion der Frequenz beginnt auf der „roten“ Seite als Parabel. Diese

Gesetzmäßigkeit ist als Rayleigh-Jeansches Gesetz bekannt. Ginge es so weiter, so würde für große Frequenzen die Strahlungsdichte unendlich werden (Ultraviolett-Katastrophe), was natürlich absurd ist. Die spektrale Strahlungsdichte $\rho(f, T)$ hat ein Maximum, das dessen Frequenz f um so größer ist, je höher die Temperatur T ist. Die Abhängigkeit dieses Maximums von der Temperatur wird durch das Wiensche Strahlungsgesetz beschrieben.

Beide Strahlungsgesetze konnte Max Planck im Jahr 1900 als Grenzfälle des nach ihm benannten **Planckschen Strahlungsgesetzes** deuten.

Zur Herleitung führte Planck eine bis dahin grundsätzlich fremde Annahme ein: Die

Quantenhypothese.:

Ein strahlendes System kann Energie nicht in beliebigen Portionen mit dem Strahlungsfeld austauschen, sondern nur in ganzzahligen Vielfachen des Energiequantums $h \cdot f$, wo f die Frequenz der Strahlung und h eine neue Naturkonstante ist:

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Die klassische Elektrodynamik kennt keine derartige Beschränkung für den Energieaustausch zwischen einem Ladungssystem und einer elektromagnetischen Welle. Die Quantenhypothese rechtfertigt sich durch ihren Erfolg. Sie liefert in guter Näherung die gemessene Energieverteilung $\rho(f, T)$ der schwarzen Strahlung. Die folgende Herleitung basiert auf Gedankengängen von Einstein, die mit weniger Mathematik auskommt als die ursprüngliche Ableitung von Max Planck.

Die Teilchen der Materie, die mit der Strahlung im Gleichgewicht steht, z. B. die Wände des Hohlraumes, müssen aller in Frage kommenden Schwingungsfrequenzen fähig sein, sonst würden ja Lücken im Spektrum der Strahlung auftreten. Wir betrachten eine Gruppe von Teilchen, die Strahlung der Frequenz f aufnehmen und abgeben können. Da solche Strahlung nach der Quantenhypothese nur in der Mindestmenge $h \cdot f$ aufgenommen werden kann, müssen die Atome, die gerade einen solchen Absorptionsakt hinter sich haben, eine um $h \cdot f$ höhere Energie besitzen, „um $h \cdot f$ angeregt sein“. Sei n^* die Teilchenzahldichte der angeregten, n_0 die der unangeregten Atome. Im thermischen Gleichgewicht, das uns hier interessiert, ist das Verhältnis der Anzahlen energiereicher und energieärmerer Teilchen durch die Boltzmann-Verteilung gegeben:

$$\frac{n^*}{n_0} = e^{-\frac{E}{kT}} = e^{-\frac{h \cdot f}{kT}}.$$

Nun stellen wir die verschiedenen Möglichkeiten des Energieaustausches zwischen Teilchen und Strahlung zusammen und geben die Häufigkeit der entsprechenden Ereignisse an:

1. Teilchen absorbieren Strahlung vom Betrag $h \cdot f$. Die Häufigkeit ist proportional zur Konzentration der unangeregten Teilchen und zur Intensität der Strahlung im entsprechenden Frequenzbereich:
Anzahl der Absorptionen/cm³·s =

$$\alpha \cdot \rho(f, T) \cdot n_0 \cdot df$$

Dabei ist $\rho(f, T) \cdot df$ die Strahlungsenergie, die in einem cm³ auf den Frequenzbereich $[f, f+df]$ entfällt, wenn der Hohlraum mit den Wänden von der Temperatur T im Gleichgewicht steht. Damit das der Fall ist, müssen

die Wände ebensoviel Energie emittieren wie absorbieren.

2. Atome emittieren Strahlung vom Betrag $h \cdot f$. Für die Häufigkeit dieser sogenannten spontanen Emission ist die Konzentration angeregter Teilchen maßgebend:

Anzahl spontaner Emissionen/cm³·s =

$$\beta \cdot n^*.$$

3. Atome emittieren Strahlung vom Betrag $h \cdot f$ durch Anregung. Die Anregung erfolgt Strahlung, die die Teilchen durchschütteln. Diesen Prozess hat Einstein ad hoc eingeführt. Viele Jahre später hat er sich als Grundlage für die Nichtgleichgewichtsemission von Lasern erwiesen. Die erzwungene Emission ist der direkte Umkehrprozess zur Absorption und hat daher die gleiche kinetische Konstante α :

Anzahl erzwungener Emissionen/cm³·s =

$$\alpha \cdot \rho(f, T) \cdot n^* \cdot df$$

Im Gleichgewicht muss die Häufigkeit der Absorption gleich der der Emissionen sein:

$$\alpha \cdot \rho(f, T) \cdot n_0 \cdot df = \beta \cdot n^* + \alpha \cdot \rho(f, T) \cdot n^* \cdot df$$

Wegen $\frac{n^*}{n_0} = e^{-\frac{E}{kT}} = e^{-\frac{h \cdot f}{kT}}$ (mit der

Boltzmann-Konstanten $k = 1,3804 \cdot 10^{-23}$ Js/K, siehe Grundgleichung der kinetischen Gastheorie: $p = n \cdot k \cdot T$) lässt sich die letzte Gleichung auch wie folgt schreiben:

$$\alpha \cdot \rho(f, T) \cdot n_0 \cdot df = \beta \cdot n_0 \cdot e^{-\frac{h \cdot f}{kT}} +$$

$$\alpha \cdot \rho(f, T) \cdot n_0 \cdot e^{-\frac{h \cdot f}{kT}} \cdot df.$$

Die Teilchenkonzentration n_0 fällt heraus (darauf darf es ja auch nicht ankommen). Dann ergibt sich die spektrale Strahlungsdichte zu

$$\rho(f, T) \cdot df = \frac{\beta \cdot e^{-\frac{h \cdot f}{kT}}}{\alpha \cdot (1 - e^{-\frac{h \cdot f}{kT}})} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \cdot f}{kT}} - 1}.$$

Dies ist das Plancksche Gesetz, das die experimentellen Ergebnisse in sehr guter Näherung wiedergibt. Für sehr kleine Frequenzen ($h \cdot f \ll kT$) geht obige

Gleichung wegen $e^{\frac{h \cdot f}{kT}} \approx 1 + \frac{h \cdot f}{kT}$ über in

$\rho(f, T) \approx \frac{\beta}{\alpha \cdot h \cdot f} \cdot kT \cdot df$. Dies ist gerade das Rayleigh-Jeanssche Gesetz.

Aus dem Planckschen Strahlungsgesetz ergibt sich durch Nullsetzen der Ableitung sofort die Frequenz, bei der die Strahlungsdichte maximal ist:

$$f_m = \frac{2,82k}{h} \cdot T = 5,88 \cdot 10^{10} T$$

mit f in Herz und T in Kelvin.

Die maximale Strahlungsdichte der Sonne liegt bei $f = 3,4 \cdot 10^{14}$ Hz. Daraus ergibt sich sofort die Temperatur ihrer sichtbaren Oberfläche zu 5.800 K. Flüssiger Stahl strahlt selbst bei einer Temperatur von 2.000 K mit einer maximalen Strahlungsdichte bei $1,2 \cdot 10^{14}$ Hz, also noch weit im Infraroten. Dass er trotzdem gelbweiß erscheint liegt an der spektralen Empfindlichkeit unseres Auges. Das wahrgenommene Licht hat sein Maximum tatsächlich im Gelben. Dazu kommt noch ein rein

physiologischer Netzhautprozess (Rückzug der farbempfindlichen Zäpfchen aus der Fovea), der jeden hellen Gegenstand weißer erscheinen lässt als er ist.

4.3 Heisenbergsche Unschärferelation

Oben genannten Zusammenhang wurde durch folgendes Experiment überprüft:

Ein Elektron fliegt durch einen engen Spalt der Spaltbreite Δx auf einen Schirm zu. Infolge der endlichen Größe von Δx ist die Abzisse des Ortes des Elektrons beim Durchgang durch die Blende nur ungenau angebar. Macht man Δx kleiner um größere Genauigkeit in der Ortsangabe zu erzielen, so lässt sich dafür eine andere, den Vorgang kennzeichnende Größe ungenauer messen, denn das Elektron erfährt eine stärkere Beugung, seine Auftreffstelle auf dem Schirm ist in einem größeren Bereich zu suchen. Diese zweite kennzeichnende Größe ist offenbar seine Geschwindigkeit in der x-Richtung. Will man den Betrag von Δv_x klein machen, so muss man dafür sorgen, dass der Beugungsfleck, aus dessen Breite sich Δv_x berechnet, schmal wird. Das aber bedeutet, dass die Spaltbreite Δx vergrößert werden muss. Dadurch wird aber die Ungenauigkeit der Ortsangabe vergrößert. Wir können sogar eine Aussage über den Grad der Ungenauigkeit machen.

Nach der de Broglieschen Beziehung ist für das Elektron die Wellenlänge der zugehörigen Materiewelle

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v_y} .$$

Ist die halbe Breite des Beugungsflecks b und der Abstand vom Spalt bis zum Schirm l , so gilt wegen

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + l^2}} \approx \frac{b}{l} \quad \text{und}$$

$$\sin \alpha = \frac{m \cdot \lambda}{\Delta x}$$

(Bedingung für dunkle Streifen bei der Beugung am Spalt)

auch

$$\frac{b}{l} = \frac{\lambda}{\Delta x} = \frac{h}{m \cdot v_y \cdot \Delta x} .$$

Braucht das Elektron zum Durchfliegen der Strecke l die Zeit Δt , so ist $b = \Delta v_x \cdot \Delta t$ und $l = v_y \cdot \Delta t$. Damit wird aus

$$\frac{b}{l} = \frac{\Delta v_x \cdot \Delta t}{v_y \cdot \Delta t} = \frac{\Delta v_x}{v_y} = \frac{h}{m \cdot v_y \cdot \Delta x} .$$

Durch Multiplikation mit $m \cdot v_y \cdot \Delta x$ erhält man

$$m \cdot \Delta v_x \cdot \Delta x = h \quad \text{oder}$$

$$\Delta p_x \cdot \Delta x = h .$$

Der Rechnung wurde der zentrale Beugungsfleck zugrunde gelegt. Tatsächlich gibt es noch mehr weiter außen liegende Beugungsstreifen, in denen das Elektronen auftreten kann. Deshalb gilt

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq h .$$

Heisenberg konnte zeigen, dass diese Beziehung nicht nur für diesen Versuch, sondern für jeden nur möglichen gilt, und zwar für alle drei Dimensionen des Raumes. Sie heißt deshalb **Heisenbergsche Unschärferelation**. Sie besagt, dass man aus Versuchen nie

den Ort und den Impuls eines Teilchens zugleich genau bestimmen kann, und gibt das Maß der Ungenauigkeit an. Sie ist eine unmittelbare Folge des Dualismus Welle-Korpuskel und hat mit den allbekannten Messungenauigkeiten nichts zu tun. **Die Natur stellt keine bestimmte Ausgangslage zur Verfügung, die Welt ist also gar nicht determiniert!**

Damit wird die Frage angerührt, ob das Kausalitätsprinzip im Bereich des Atomaren anwendbar ist. Da man offenbar den genauen Zustand auch nur eines Teilchens nach Ort und Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitpunkt nicht angeben kann, ist es sinnlos, mit Hilfe der bekannten Naturgesetze einen solchen für einen früheren oder späteren Zeitpunkt berechnen zu wollen: Das Kausalitätsprinzip ist in einer indeterminierten Welt nicht anwendbar. Es lassen sich nur statistische Aussagen über das Verhalten einer großen Zahl von Teilchen machen.

Entsprechende Gleichungen fand Heisenberg für alle Zustandsgrößen, deren Produkt die Dimension einer Wirkung (Energie·Zeit) hat. Für die Unschärfe der Energie ΔE und der Zeit Δt gilt z. B.:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2 \cdot \pi},$$

was hier aber nicht hergeleitet werden soll.

Die Unschärferelation gilt auch für makroskopische Körper, doch fällt die zu erwartende Unschärfe im Messergebnis bei Impuls und Ortskoordinaten weit unter jede erreichbare Messgenauigkeit.

5 Übungsaufgaben

- 1 Eine horizontale ebene Platte schwingt vertikal sinusförmig mit der Amplitude $s = 1\text{mm}$. Wie groß darf die Frequenz $f_{\max}$ dieser Schwingung höchstens sein, damit ein Körper, der frei auf der Platte liegt, nicht von ihr abhebt?

Lösung: $s = s_m \cdot \sin(2\pi f_{\max} t)$

$v = s_m 2\pi f_{\max} \cdot \cos(2\pi f_{\max} t)$

$a = -s_m 4\pi^2 f_{\max}^2 \sin(2\pi f_{\max} t)$

Mit $s_m = 1\text{mm}$ und $a = g = 9,81 \text{ m/s}^2$ folgt $f_{\max} = 15,76 \text{ Hz}$

- 2 Ein Kraftfahrzeug hat die Masse $M = 760 \text{ kg}$, die sich auf die Vorder- bzw. Hinterachse wie 2:3 verteilt. Bei ausgebauten Stoßdämpfern kann man Schwingungen anregen. Man misst für je 5 Schwingungen vorn 5 Sekunden, hinten 6 Sekunden.

- a Wie groß sind die 4 Federkonstanten D_1, D_2, D_3 und D_4 ?

Lösung: $m_1 = m_2 = (2/10) \cdot M$ und $m_3 = m_4 = (3/10) \cdot M$. $f_1 = 1 \text{ Hz}$, $f_3 = 5/6 \text{ Hz}$. Mit $T = 2\pi [m/D]^{1/2}$ bzw. $f = 1/T = 1 / 2\pi [m / D]^{1/2}$ folgt $D = 4\pi^2 m \cdot f^2$. Also $D_1 = 4\pi^2 m_1 f_1^2$ bzw. $D_3 = 4\pi^2 m_3 f_3^2$. Somit ist $D_1 = D_2 = 6.001 \text{ N/m}$ (vorn), und $D_3 = D_4 = 6.251 \text{ N/m}$ (hinten).

- b Welche Dämpfungskonstanten b_1, b_2, b_3 und b_4 müssen die 4 Stoßdämpfer haben, damit sich die Federung des Aufbaus gegen das Fahrgestell gerade aperiodisch verhält?

Lösung: Für die gedämpfte Schwingung gilt $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ (δ = Abklingkonstante). Für die aperiodische Schwingung ist $\omega_0^2 = \delta^2$. Mit $\omega_0 = [D/m]^{1/2}$ wird $D/m = \delta^2$. Mit $\delta = b/2m$ wird schließlich $b^2 = 4Dm$ (b = Dämpfungskonstante). Also $b_1 = b_2$ (vorn) $= 2 \cdot (D_1 m_1)^{1/2} = 1.910 \text{ Ns/m}$ (vorn) und $b_3 = b_4 = 2 \cdot (D_3 m_3)^{1/2} = 2.388 \text{ Ns/m}$ (hinten).

- c Wie ändert sich dieses Verhalten,

wenn das Fahrzeug beladen wird?

Lösung: Mit $\omega_0^2 = D / m$ und $\delta = b / 2m$ bzw. $\delta^2 = b^2 / 4m^2$ wird $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = [D / m - b^2 / 4m^2]^{1/2}$. Da m^2 schneller wächst als m , wird bei größerer Masse m die Winkelgeschwindigkeit ω_0 weniger stark abnehmen als die Abklingkonstante δ^2 und damit $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} > 0$ werden. Es kommt folglich zu einer gedämpften Schwingung, nicht zum Kriechfall.

- 3 Der Ausschlag s eines Fadenpendels mit der Eigenfrequenz f_0 hängt sinusförmig von der Zeit ab. Mit welcher Frequenz ändert sich die kinetische Energie des Pendels mit der Zeit?

Lösung: Mit $2f_0$

- 4 Eine Uhr mit Schwerependel (z. B. mathematisches Pendel) geht am Äquator genau richtig. Wie ändert sich ihre Zeitanzeige gegenüber dem mittleren Sonnentag, wenn sie nach Norden transportiert wird?

Lösung: Die Periodendauer T des Schwerependels berechnet sich zu $T = 2\pi (l / g)^{1/2}$. Am Nordpol ist g größer als am Äquator und deshalb die Periodendauer des Pendels kleiner. Die Uhr geht also vor.

- 5 Ein Schwerependel ist 1 m lang. Es schwingt in einem Raum, der sich senkrecht zur Erdoberfläche in deren Nähe gleichmäßig beschleunigt bewegt, mit einer Schwingungsdauer T von $T = 4 \text{ s}$. Mit welcher Beschleunigung a bewegt sich besagter Raum?

Lösung: Die auf das Pendel wirkende Gesamtbeschleunigung a_{ges} berechnet sich wegen $T = 2\pi (l / a_{\text{ges}})^{1/2}$ zu $a_{\text{ges}} = 4\pi^2 \cdot l / T^2 = (1/4)\pi^2 \text{ m/s}^2$. Diese Gesamt-beschleunigung

- a_{ges} setzt sich aus der Erdbeschleunigung g ($g = 9,807 \text{ m/s}^2$) und der Beschleunigung a zusammen: $a_{\text{ges}} = a + g$. Also $a = a_{\text{ges}} - g = -7,34 \text{ m/s}^2$. Es erfolgt somit eine Beschleunigung in Richtung zum Erdmittelpunkt.
- 6 Berechnen Sie die Leistung P als Funktion der Zeit, die einem erzwungenen schwingenden System bei Phasenresonanz zugeführt wird. Welche Konsequenzen ergeben sich daraus?
Lösung: Bei Phasenresonanz ist $\varphi_{0s} = \pi/2$. Mit $\varphi_0 = 0$ und $F_E = F_{E,m} \cos(\omega t)$ folgt $s = s_{S,m} \sin(\omega t)$, $v = \omega s_{S,m} \cos(\omega t)$ und $P = F_E \cdot v = \omega s_{S,m} F_{E,m} \cos^2(\omega t) \geq 0$. Dem System wird folglich fast immer Energie zugeführt, nie entzogen.
- 7 Ein Pendel wird mit der Maximalamplitude $s_{m,0} = \pi/2$ angestoßen. Nach 3 Schwingungen ist die Amplitude $s_{m,3}$ nur noch der e-te Teil von $s_{m,0}$.
- a Wie groß ist das logarithmische Dekrement Λ ?
Lösung: Wegen $\Lambda = \delta \cdot T_d = \ln[s_{m,i} / s_{m,i+1}]$ ist auch $s_{m,i} / s_{m,i+1} = \exp(\delta \cdot T_d)$. Somit gilt auch $s_{i,m} / s_{m,i+n} = \exp(\delta \cdot T_d)^n$. Mit $\ln[s_{m,i} / s_{m,i+n}] = \ln[\exp(\delta \cdot T_d)^n] = n \cdot \ln[\exp(\delta \cdot T_d)] = n \cdot \delta \cdot T_d$ folgt dann auch $\Lambda = (1/n) \cdot \ln(s_{m,i} / s_{m,i+n})$. Also $\Lambda = (1/3) \cdot \ln(s_{m,0} / (s_{m,0} / e)) = (1/3) \cdot \ln(e) = 1/3$.
- b Wie groß ist die zweite Amplitude $s_{m,1}$?
Lösung: $s_{m,i} / s_{m,i+1} = \exp(\delta \cdot T_d) = \exp(\Lambda)$. Also $s_{m,1} = s_{m,0} / \exp(\Lambda) = 1,13$.
-
- 8 An einem Kraftmesser, der durch 1 N um 1 cm gedehnt wird, hängt ein Körper mit 0,5 kg Masse.
- a Welches ist die Gleichgewichtslage?
Lösung: Wegen $F = D \cdot s$ bzw. $D = F / s$ hat die Feder die Federkonstante $D = 1 \text{ N} / 0,01 \text{ m} = 100,0 \text{ N/m}$. Wegen $F = m \cdot g$ wirkt der Körper mit einer Gewichtskraft von $F = 0,5 \text{ kg} \cdot 9,807 \text{ m/s}^2 = 4,904 \text{ N}$ auf die Feder. Daraus berechnet sich die Gleichgewichtslage zu $s = F/D = 4,904 \text{ N} / 100,0 \text{ N/m} = 0,04904 \text{ m} = 4,90 \text{ cm}$.
- b Wie groß ist die Rückstellkraft, wenn man um 3 cm nach oben auslenkt?
Lösung: Um die Gewichtskraft des Körpers zu kompensieren, müssen 4,904 N aufgebracht werden. Um die Feder zusätzlich um 3 cm nach oben ausulenken müssen weitere $F = D \Delta s = 100 \text{ N/m} \cdot 0,03 \text{ m} = 3,000 \text{ N}$ in entgegengesetzte Richtung zur Nulllage aufgebracht werden. Insgesamt wirkt eine Rückstellkraft von $F = 4,904 \text{ N} + 3,000 \text{ N} = 7,90 \text{ N}$.
- c Wie ist sie gerichtet?
Lösung: Aufgrund der Gewichtskraft F_g würde die Feder um $s = 4,90 \text{ cm}$ gedehnt werden. Für eine Auslenkung von nur 1 cm bedarf es einer unterstützenden Kraft $F_{\text{Ü}}$ von $F_{\text{Ü}} = F_g - D \cdot s = 4,904 \text{ N} - 100 \text{ N/m} \cdot 0,01 \text{ m} = 3,90 \text{ N}$ in Richtung zur Nulllage. D. h. die Rückstellkraft ist negativ: $F = -3,90 \text{ N}$.
- 9 Welche Masse muss ein schwingender Körper haben, wenn er an einer Feder der Richtgröße $D = 100 \text{ N/m}$ mit der Schwingungsdauer $T = 0,5 \text{ s}$ schwingen soll?
Lösung:
- 10 Am 50 m langen Seil eines Krans hängt eine Last von 10 t. Sie schwingt mit einer Amplitude s_m von 5 m. Wie groß sind Schwingungsdauer T und

Schwingungsenergie W ?

Lösung:

- 11 Bei einer Schwingung ging die Amplitude nach 8 Perioden auf $9/10$ zurück. Wie groß ist das Dämpfungsverhältnis?

Lösung:

- 12 Welche Schwebungsfrequenz bewirken die Töne a^1 und b^1 miteinander?

Lösung:

- 13 In einer Wasserwellenwanne werden durch einen Erreger der Frequenz $f = 6$ Hz Oberflächenwellen paralleler Fronten mit einer Wellenlänge $\lambda = 3,3$ cm ausgesandt. Mit welcher Geschwindigkeit schreiten die Wellenfronten vor?

Lösung:

- 14 Wie groß ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Querverwelle in einer a_1 -Seite der Länge $32,5$ cm (440 Hz)? Wie groß muss die Spannkraft sein, wenn eine Saite von $0,5$ m Länge $1,6$ g wiegt?

Lösung:

- 15 In einer Kundtschen Röhre (Röhre, in der durch einen longitudinal schwingenden Stab und einem

Abstimmkolben stehende Schallwellen erzeugt werden, die durch Korkmehl sichtbar gemacht werden) wurde für Luft ein Abstand zweier benachbarter Knoten von $9,1$ cm gemessen, in CO_2 von $7,1$ cm. Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit c_K in CO_2 , wenn sie in der Luft $c_L = 331$ m/s ist?

Lösung: Die Frequenz f der Wellen sind identisch (durch schwingenden Stab vorgegeben). Also ist $f = c_L / \lambda_L$ und $c_K = \lambda_K \cdot f = \lambda_K \cdot c_L / \lambda_L = 0,142 \text{ m} \cdot 331 \text{ m/s} / 0,182 \text{ m} = 258 \text{ m/s}$.

- 16 Eine gedeckte Lippenpfeife (festes Ende: Druckbauch) gibt angeblasen den Grundton $a = 220$ Hz. Wie ändert sich die Frequenz, wenn ihr Ende geöffnet wird?

Lösung: Bei einer gedeckten Pfeife ist die Länge der schwingenden Luftsäule für den Grundton gleich $\lambda/4$, für die offene Pfeife gleich $\lambda/2$. Die Frequenz verdoppelt sich folglich: $a^1 = 440$ Hz

- 17 Ein Zwirnsfaden von $3,5$ m Länge wird mit etwa 10 N gespannt. Dann wird er durch Anstreichen mit einem Kollophoniumstück in Längsrichtung zu longitudinalen Eigenschwingungen der Frequenz $f = 620$ Hz erregt. Mit welcher Geschwindigkeit breitet sich die Längswelle im Faden fort?

Lösung: 4.340 m/s

- 18 Wie groß ist der Brechungswinkel β , wenn der Einfallswinkel $\alpha = 30^\circ$ und die Brechungszahl $n = 1,53$ sind?

Lösung: 19°

- 19 Um welche Strecke s wird ein Lichtstrahl beim Durchgang durch eine planparallele Platte seitlich verschoben (Einfallswinkel α , Brechungszahl n , Plattendicke d)?

Lösung:

$$s = d \cos \alpha (\tan \alpha - \tan(\arcsin(\sin \alpha / n)))$$

- 20 Ein Körper unterliegt einer Rückstellkraft, die dem linearen Kraftgesetz gehorcht. Skizzieren Sie in **einem** Graph Auslenkung s , Geschwindigkeit v und Kraft F als Funktion der Zeit ($t = 0$ bis T).
- 21 Die Vermutung, dass Licht zu seiner Ausbreitung eines gasförmigen oder flüssigen Trägers (Äther) bedarf, veranlasste die Begründer der Wellentheorie des Lichtes, Licht nicht als Transversalwelle sondern als Longitudinalwelle aufzufassen. Begründen Sie die Auffassung.
Lösung:

- 22 Welche Beobachtung beweist, dass es sich beim Licht nicht um Longitudinalwellen handeln kann? Begründen Sie Ihre Behauptung.
Lösung:

- 23 Einem Beobachter in einem fahrenden Zug kommt auf einer geraden Bahnstrecke eine pfeifende Lokomotive entgegen. Beide bewegen sich mit der gleichen Geschwindigkeit $v = 30 \text{ m/s}$. Der Pfeifton hat die Frequenz $f = 500 \text{ Hz}$. Um wie viel Hertz ändert sich die Frequenz des Tones im Augenblick der Begegnung?
Lösung: Schallgeschwindigkeit in ruhender Luft: 340 m/s

- 24 Ein Gummifaden wird durch die Kraft $F_1 = 0,6 \text{ N}$ auf die Länge $l_1 = 40 \text{ cm}$ gedehnt. Dann wird er angezupft und läßt den Ton $G_1 = 47 \text{ Hz}$ hören. Welche Masse hat der Faden?
Lösung:

- 25 Die Kraft $F_2 = 1,2 \text{ N}$ dehnt einen Gummifaden der Masse $m = 0,17 \text{ g}$

auf $l_2 = 80 \text{ cm}$. Welcher Ton ist zu erwarten?

Lösung:

- 26 Eine Schnur zeigt bei einer Erregung mit der Frequenz f_r und abgeglicherer Spannkraft F im ersten Teil die abgebildete stehende Welle. Von der Mitte bis zum festen Ende ist die Schnur vierfach gelegt.
- a Skizzieren Sie die stehende Welle im 2. Teil der Schnur
- b Skizzieren Sie die komplette stehende Welle für die vierfache Spannkraft
Lösung:

- 27 Unter welchem Winkel muss ein Lichtstrahl auf eine Quarzglasplatte einfallen (Brechzahl für Quarzglas: $n = 1,46$), wenn der an der Glasoberfläche reflektierte Strahl und der in die Glasplatte hineingebrochene Strahl senkrecht aufeinander stehen sollen?
Lösung:

- 28 In einer Wasserwellenwanne werden durch einen Erreger der Frequenz $f = 6 \text{ Hz}$ Oberflächenwellen paralleler Fronten mit einer Wellenlänge $\lambda = 3,3 \text{ cm}$ ausgesandt. Mit welcher Geschwindigkeit schreiten die Wellenfronten vor?
Lösung: Wegen der Beziehung: Wellengeschwindigkeit c gleich Wellenlänge λ mal Frequenz f , kurz $c = \lambda f$ folgt $c = 0,033 \text{ cm} \cdot 6 \text{ Hz} = 0,198 \text{ m/s}$

- 29 Welche Masse muss ein schwingender Körper haben, wenn er an einer Feder mit der Federkonstanten $D = 100 \text{ N/m}$ mit der Schwingungsdauer $T = 0,5 \text{ s}$ schwingen soll?

Lösung: Die Schwingungsdauer T_0 des Systems berechnet sich zu $T_0 = 2\pi \cdot [m/D]^{1/2}$. Nach m aufgelöst ergibt sich: $m = D \cdot T_0^2 / 4\pi^2 = 100 \text{ N/m} \cdot 0,2500 \text{ s}^2 / 39,48 = 0,633 \text{ kg}$.

- 30 Bei der vierten Periode ist die Amplitude einer Schwingung auf 3 cm gesunken. Das logarithmische Dekrement Λ habe den Wert $\Lambda = 0,5$. Wie groß war die Amplitude bei der ersten Periode?

Lösung: Für die Amplituden s_i und s_{i+1} gilt die Beziehung $\Lambda = \ln(s_i/s_{i+1})$ bzw. $s_i/s_{i+1} = e^\Lambda$ und deshalb $s_i/s_{i+n} = (e^\Lambda)^n$. Also $s_i = (e^\Lambda)^n \cdot s_{i+n}$. Folglich ist $s_1 = (e^{0,5})^3 \cdot 3 \text{ cm} = 13,4 \text{ cm}$.

- 31 Um wie viel Hertz ist ein Tonerzeuger gegen die a^1 -Stimmgabel (440 Hz) verstimmt, wenn 10 Schwebungen 7 s dauern?

Lösung: Für die Schwebungsfrequenz gilt $10 \cdot T_S = 7 \text{ s}$, also $T_S = 0,7 \text{ s}$ bzw. wegen $f_S = 1/T_S = 1,43 \text{ Hz}$. Der Tonerzeuger ist folglich um 1,43 Hz gegen die a^1 -Stimmgabel verstimmt.