

Lehrinhalte

1 Einleitung

- 1.1 Überblick
- 1.2 Physikalische Größen und Maßeinheiten
physikalische Größen, Größengleichungen, Internationales Einheitensystem
- 1.3 Mathematische Hilfsmittel
Funktionen, Ableitung einer Funktion, Skalar, Vektoren (Addition/Subtraktion, Betrag, Ortsvektor, Einheitsvektor), Ableitung eines Vektors nach einem Parameter

2 Kinematik des Massenpunktes

- Mechanik, Kinematik, Begriff des Massenpunktes
- 2.1 Begriffe
Mechanik, Kinematik, Begriff des Massenpunktes, Ruhe und Bewegung
- 2.2 Gleichförmige und geradlinige Bewegung
Definitionen, Geschwindigkeit, Superpositionsprinzip . . .
- 2.3 Ungleichförmige geradlinige Bewegung
 - 2.3.1 Die Beschleunigung
 - 2.3.2 Beispiele - senkrechter Wurf nach oben / unten
- 2.4 Nicht geradlinige Bewegung
 - 2.4.1 Der Ortsvektor und seine Ableitungen
Ortsvektor, Bahnkurve, Geschwindigkeitsvektor, Beschleunigungsvektor
 - 2.4.2 Schiefer Wurf
 - 2.4.3 Kreisbewegung
Radial- und Tangentialbeschleunigung, Bahn- und Winkelgeschwindigkeit, gleichförmige und gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung

3 Dynamik des Massenpunktes

- 3.1 Die NEWTONSchen Axiome
Impuls, die NEWTONSchen Axiome; Masse, Kraft, Kräftegleichgewicht, Beispiele verschiedener Kräfte
- 3.2 Dynamik in bewegten Bezugssystemen
 - 3.2.1 Das D'ALEMBERTSche Prinzip
Trägheitskräfte, dynamisches Gleichgewicht, Beispiel Atwood-Fallmaschine
 - 3.2.2 Bewegte Bezugssysteme
Bezugssysteme, Inertialsysteme, Galilei-Transformation, beschleunigte Bezugssysteme
- 3.3 Arbeit, Energie, Leistung, Wirkung
 - 3.3.1 Mechanische Arbeit
 - 3.3.2 Energie, Energieerhaltung
Potentielle Energie, kinetische Energie, nichtmechanische Energien
 - 3.3.3 Leistung
mittlere und momentane Leistung, Wirkungsgrad

4 Mechanik eines Systems von Massenpunkten

- 4.1 Impuls
 - 4.1.1 Impuls eines Massenpunktes, Kraftstoß
 - 4.1.2 Impulssatz
 - 4.1.3 Schwerpunktsatz
 - 4.1.4 Impulserhaltungssatz
 - 4.1.5 Beispiele - ballistisches Pendel, Rakete
- 4.2 Stoßgesetze
 - 4.2.1 Gerader zentraler elastischer Stoß
 - 4.2.2 Gerader zentraler inelastischer Stoß
 - 4.2.3 Schiefer zentraler elastischer Stoß
- 4.3 Dynamik der Drehbewegungen
 - 4.3.1 Drehmoment, Drehimpuls, Massenträgheitsmoment

- 4.3.2 Dynamische Grundgesetz der Rotation
- 4.3.3 Drehimpulserhaltungssatz
- 4.4 Dynamik starrer Körper
- 4.4.1 Kräfte am starren Körper, Gleichgewichtsbedingung
- 4.4.2 Schwerpunkt
- 4.4.3 Potentielle und kinetische Energie
- 4.4.4 Massenträgheitsmomente starrer Körper, STEINERScher Satz

5 Gravitation

- 5.1 Das Gravitationsgesetz
- 5.2 Feldstärke und Potential
einschl. Analogien zu elektr. Punktladung

6 Schwingungen

- 6.1 Begriffe
- 6.2 Freie ungedämpfte harmonische Schwingungen
 - 6.2.1 Mechanische Schwingungen
Differentialgleichung der Bewegung, Beispiele: Masse-Feder-System, Torsionsschwinger, mathem. Pendel, physisches Pendel, Flüssigkeitssäule
 - 6.2.2 Elektromagnetische Schwingungen
- 6.3 Freie gedämpfte Schwingungen
 - 6.3.1 Mechanische Schwingungen
 - a. Reibungskraft unabhängig von der Geschwindigkeit

- b. Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit (viskose Dämpfung),
Differentialgleichung,
Schwingfall, Kriechfall, aperiodischer Grenzfall

6.3.2 Elektromagnetische Schwingungen

- 6.4 Erzwungene Schwingungen
Amplituden- und Phasenresonanzfunktion, Resonanzüberhöhung, Güte

7 Wärmelehre

- 7.1 Temperaturbegriff und Temperaturskala
- 7.2 Die Temperaturabhängigkeit des Volumens von Gasen
- 7.3 Die Temperaturabhängigkeit der Länge und des Volumens fester und flüssiger Körper
- 7.4 Zusammenhang zwischen Druck und Volumen von Gasen
- 7.5 Die Temperaturabhängigkeit des Druckes von Gasen
- 7.6 Die Zustandsgleichung der idealen Gase
- 7.7 Die universelle Gaskonstante R
- 7.8 Die kinetische Gastheorie
- 7.9 Die Boltzmann-Konstante
- 7.10 Die spezifische Wärme
- 7.11 Unterschied zwischen C_p und C_v
- 7.12 Der Gleichverteilungssatz

8 Übungsaufgaben

1 Einleitung

Was ist Physik?

Physik ist die Lehre von solchen Naturvorgängen, die der experimentellen Erforschung und mathematischen Beschreibung zugänglich sind.

1.1 Überblick

Die Vorlesung Physik I für Studierende des Bereichs Feinwerktechnik umfasst die Kinematik als auch die Dynamik des Massenpunktes, die Mechanik eines Systems von Massenpunkten, die Gravitations- als auch die Schwingungs- und Wärmelehre.

1.2 Physikalische Größen und Maßeinheiten

Die experimentelle Erforschung beinhaltet sowohl die qualitative Beschreibung als auch die quantitative Erfassung, die durch Messungen erfolgt. Das Wesen des Messens wiederum ist einerseits durch das Erfassen und Darstellen von physikalischen Größen, andererseits durch das Normieren, also das Zuordnen einer Maßzahl, gekennzeichnet.

Dabei wird der **Meßgröße X** die **Maßzahl x** als Vielfaches der **Einheitsgröße N** zugeordnet. N wird durch das Messnormal verkörpert:

$$X = x \cdot N$$

Um diese Operation durchführen zu können, müssen zwei Fundamentalaussetzungen erfüllt sein:

1. Die zu messende Größe muss qualitativ eindeutig definiert und quantitativ bestimmbar sein.
2. Das Messnormal muss durch eine Konvention festgelegt sein.

Die voneinander unabhängig definierten

Normale werden Grundnormale genannt. Durch die Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM) sind 7 Grundnormale definiert worden: dasjenige der Länge, der Masse, der Zeit, der Temperatur, des elektrischen Stromes, der Lichtstärke und der atomphysikalischen Stoffmenge.

Länge

Die Längeneinheit Meter wurde anlässlich der 17. Generalkonferenz (1983) der CGPM neu definiert als die Länge der Wegstrecke, welche Licht im Vakuum während der Dauer von $\frac{1}{299\,794\,458}$ Sekunden durchläuft.

Masse

Das Grundnormal der Masse wird durch den in Sèvres/Frankreich aufbewahrten Platin-Iridium-Zylinder, das sogenannte internationale Kilogramm, repräsentiert. In den einzelnen Ländern werden aus praktischen Gründen Ersatznormale aufbewahrt. Diese werden durch Balkenwaagen auf einige Teile von 10^{-9} genau geeicht.

Zeit

1967 wurde die Sekunde (s) als Grundnormal neu definiert:

$$1\text{ s} = 9.192.631.770 \cdot t_0$$

Darin ist t_0 die Schwingungsdauer der Resonanzschwingung des Atoms ^{133}Cs (Caesium). Caesium-Strahlresonatoren reproduzieren die entsprechende Frequenz mit einer Genauigkeit besser als 10^{-12}

Temperatur

Die Einheit 1 K (1 Grad Kelvin) ist definiert als der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes von Wasser. Im weiteren gilt die Einheitengleichung 1°C (Celsius) = 1 K. Der Nullpunkt der Celsius-Skala liegt 0,01 K unter dem

Tripelpunkt von Wasser. Damit gilt die nachstehende Beziehung zwischen der Kelvin- und der Celsius-Skala:

$$\vartheta [^{\circ}\text{C}] = T[\text{K}] - 273,15 [\text{K}]$$

Die Internationale Praktische Temperaturskala (ITS-68), die von der 13. Generalkonferenz für Maß und Gewicht (CGPM) verabschiedet wurde, beruht auf 12 reproduzierbaren Gleichgewichtstemperaturen, den sogenannten Fixpunkten. Die Zwischenwerte basieren auf der Anzeige bestimmter Temperaturmessgeräte und werden nach vorgeschriebenen Interpolationsformeln bzw. -Verfahren errechnet.

Fixpunkt	T_{68}	ϑ_{68}	$p [\text{N/m}^2]$
Tripelpunkt von H_2	13,81	-259,34	
Siedepunkt von H_2	17,042	-256,108	33.330,6
Tripelpunkt von Neon	-	-	
Siedepunkt von Neon	27,102	-246,048	101.325
Tripelpunkt von O_2	54,361	-218,789	
Siedepunkt von O_2	90,19	-182,96	101.325
Tripelpunkt von Wasser	273,16	0,01	611,8
Siedepunkt von Wasser	373,15	100,00	101.325
Erstarrungspunkt von Zinn	505,118	231,968	101.325
Erstarrungspunkt von Zink	692,73	419,58	101.325
Erstarrungspunkt von Silber	1.235,08	961,93	101.325
Erstarrungspunkt von Gold	1.337,58	1064,43	101.325

Als Messgerät für den Bereich 13,81 K bis 903,89 K wird das Platin-Widerstandsthermometer mit bestimmten Spezifikationen vorgeschrieben. Der genannte Temperaturbereich wird in 5 Unterbereiche aufgeteilt, für die je eigene Interpolationsformeln in Form von Polynomen bis 4. Grades definiert sind.

Für den Pt 100 im Temperaturbereich von

-200 °C bis 0 °C gilt z. B folgende Zahlenwertgleichung:

$$R(\vartheta) = 100 \cdot [1 + 3,90802 \cdot 10^{-3} \vartheta - 0,580295 \cdot 10^{-6} \vartheta^2 - 4,27350 \cdot 10^{-12} \vartheta^3] \Omega$$

Für den Pt100 im Temperaturbereich von 0 °C bis 850 °C gilt dagegen:

$$R(\vartheta) = 100 \cdot [1 + 3,90802 \cdot 10^{-3} \vartheta - 0,580195 \cdot 10^{-6} \vartheta^2] \Omega$$

Im Bereich 903,89 K bis 1.337,58 K dient das Platin-10% Rhodium/Platin-Thermoelement als Messgerät. Die Beziehung zwischen Thermospannung und Temperatur wird durch eine quadratische Gleichung dargestellt.

⁻⁶ N hervorrufen würde.

Lichtstärke

Die Einheit der Lichtstärke Candela wurde anlässlich der 16. Generalkonferenz (1979) der CGPM neu definiert als die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}$ Hz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung $\frac{1}{683}$ Watt/Steradian be-

trägt.

Stoffmenge

1 Mol ist die Stoffmenge eines Systems bestimmter Zusammensetzung, das aus ebensovielen Teilchen besteht wie Atome in 12 g des Nuklids ^{12}C enthalten sind. Dabei müssen die Teilchen spezifiziert sein: Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen usw. Ihre Anzahl beträgt $6,023 \cdot 10^{23}$ Teilchen / mol (Avogadro Konstante N_A).

Abgeleitete Größenarten

Für unsere Untersuchung der bewegten Materie werden wir viele weitere Größen definieren müssen. Wir brauchen aber die meisten dieser Größen nicht als Grundgrößen betrachten, da sie aus den anderen Größen abgeleitet werden können. Fläche, Geschwindigkeit und Beschleunigung sind Beispiele für abgeleitete Größen.

2 Kinematik des Massenpunktes

2.1 Basiseinheiten der Mechanik

Basiseinheiten der Mechanik sind das Meter und die Sekunde.

2.2 Kinematik (Bewegungslehre)

Die Kinematik beschreibt die Bewegungen der Körper, ohne dabei auf die Kräfte als die Ursachen für die verschiedenen Bewegungsarten einzugehen. Das bleibt der Dynamik vorbehalten.

Zur Beschreibung von Bewegungen bedarf es eines bestimmten Punktes, auf den man den Weg beziehen kann. Von diesem Punkt wird angenommen, daß er in Ruhe sei. Seine Wahl ist willkürlich, da es eine absolute Ruhe nicht gibt. Wenn nichts anderes vereinbart ist, beziehen wir alle Bewegungen auf die ruhend gedachte

Erdoberfläche, obwohl auch sie recht komplizierte Bewegungen im Raum, z. B. in Bezug auf die Sonne, macht.

Zur Einführung in die Kinematik sollen zunächst nur geradlinige Bewegungen erfasst werden.

2.3 Gleichförmige und geradlinige Bewegung

Definitionen, Geschwindigkeit, Superpositionsprinzip . . .

2.4 Ungleichförmige geradlinige Bewegung

2.4.1 Die Beschleunigung

2.4.2 Beispiele - senkrechter Wurf nach oben / unten

2.5 Nicht geradlinige Bewegung

2.5.1 Der Ortsvektor und seine Ableitungen

Ortsvektor, Bahnkurve, Geschwindigkeitsvektor, Beschleunigungsvektor

2.5.2 Schiefer Wurf

2.5.3 Kreisbewegung

Radial- und Tangentialbeschleunigung, Bahn- und Winkelgeschwindigkeit, gleichförmige und gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung

3 Dynamik des Massenpunktes

3.1 Die NEWTONschen Axiome

Impuls, die NEWTONschen Axiome; Masse, Kraft, Kräftegleichgewicht, Beispiele verschiedener Kräfte

3.2 Dynamik in bewegten Bezugssystemen

3.2.1 Das D'ALEMBERTSche Prinzip Trägheitskräfte, dynamisches Gleichgewicht, Beispiel Atwood-Fallmaschine

3.2.2 Bewegte Bezugssysteme Bezugssysteme, Inertialsysteme, Galilei-Transformation, beschleunigte Bezugssysteme

3.3 Arbeit, Energie, Leistung, Wirkung

3.3.1 Mechanische Arbeit

3.3.2 Energie, Energieerhaltung Potentielle Energie, kinetische Energie, nichtmechanische Energien

3.3.3 Leistung mittlere und momentane Leistung, Wirkungsgrad

4 Mechanik eines Systems von Massenpunkten

4.1 Impuls

4.1.1 Impuls eines Massenpunktes, Kraftstoß

4.1.2 Impulssatz

4.1.3 Schwerpunktsatz

4.1.4 Impulserhaltungssatz

4.1.5 Beispiele - ballistisches Pendel, Rakete

4.2 Stoßgesetze

4.2.1 Gerader zentraler elastischer Stoß

4.2.2 Gerader zentraler inelastischer Stoß

4.2.3 Schiefer zentraler elastischer Stoß

4.3 Dynamik der Drehbewegungen

4.3.1 Drehmoment, Drehimpuls, Massenträgheitsmoment

4.3.2 Dynamische Grundgesetz der Rotation

4.3.3 Drehimpulserhaltungssatz

4.4 Dynamik starrer Körper

4.4.1 Kräfte am starren Körper, Gleichgewichtsbedingung

4.4.2 Schwerpunkt

4.4.3 Potentielle und kinetische Energie

4.4.4 Massenträgheitsmomente starrer Körper, STEINERScher Satz

5 Gravitation

5.1 Das Gravitationsgesetz

5.2 Feldstärke und Potential einschließlich der Analogie zur elektrischen Punktladung

6 Schwingungen

6.1 Begriffe

6.2 Freie ungedämpfte harmonische Schwingungen

6.2.1 Mechanische Schwingungen Differentialgleichung der Bewegung, Beispiele: Masse-Feder-System,

Torsionsschwinger, mathem. Pendel, physisches Pendel, Flüssigkeitssäule

6.2.2 Elektromagnetische Schwingungen

6.3 Freie gedämpfte Schwingungen

6.3.1 Mechanische Schwingungen

- a. Reibungskraft unabhängig von der Geschwindigkeit
- b. Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit (viskose Dämpfung), Differentialgleichung, Schwingfall, Kriechfall, aperiodischer Grenzfall

6.3.2 Elektromagnetische Schwingungen

6.4 Erzwungene Schwingungen Amplituden- und Phasenresonanzfunktion, Resonanzüberhöhung, Güte

7 Wärmelehre

7.1 Temperaturbegriff und Temperaturskala

Die Temperatur des bei 1 Atmosphäre (1 at = 1.013 mbar) schmelzenden Eises und die Temperatur des bei dem gleichen Druck siedenden Wassers wurden anfangs für die Temperaturskala „Celsius“ mit 0°C und 100°C festgelegt. Zwischenwerte wurden durch die Temperaturabhängigkeit des Volumens von Flüssigkeiten (Quecksilber) bestimmt:

An eine dünnwandige Glaskugel ist eine enge Kapillare mit überall gleichem Querschnitt angeschmolzen, die Kugel und ein Teil der Kapillare sind mit Quecksilber gefüllt. Die Lage des Meniskus des Quecksilbers werde auf einer Skala angezeigt.

Der Abstand der Markierungen für 0°C und 100°C wird durch Teilstriche in 100 gleiche Teile geteilt.

Ein linearer Zusammenhang zwischen der Temperatur in °C und dem Volumen von Quecksilber hat infolgedessen zunächst keinen physikalischen Hintergrund sondern lediglich einen messtechnischen.

7.2 Die Temperaturabhängigkeit des Volumens von Gasen

Sorgen wird bei der Erwärmung eines Gases dafür, dass der Druck p konstant bleibt, z. B. in dem wir das Gas in einem Zylinder erwärmen, der mit einem verschiebbaren Kolben abgeschlossen ist, so erweist sich das Volumen V als linear abhängig von der Temperatur ϑ . Das Volumen $V(\vartheta)$ lässt sich deshalb durch die Temperatur ϑ und einen Ausdehnungskoeffizienten α darstellen, der die Bedeutung eines kubischen Ausdehnungskoeffizienten hat:

$$V(\vartheta) = V(0^\circ\text{C}) \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta)$$

oder einfacher

$$V(\vartheta) = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta).$$

Dies ist das Gesetz von Gay-Lussac.

α ist erheblich größer als der kubische Ausdehnungskoeffizient von festen oder flüssigen Körpern und hat für alle Gase nahezu den gleichen Wert:

$$\alpha = \frac{1}{273,2^\circ\text{C}}$$

Dieser Zusammenhang legt es nahe, eine neue Temperaturskala einzuführen, da offenbar Temperaturen unter $-273,2^\circ\text{C}$ nicht möglich sind. Diese neue absolute

Temperaturskala beginnt bei 0 Kelvin (0 K), hat aber ansonsten die gleiche Skalenteilung, so dass sich die Dimensionen °C und K kürzen können.

Mit dieser neuen Temperaturskala lautet der Zusammenhang zwischen dem Volumen $V(T)$ eines Gases und seiner Temperatur T :

$$V(T) = V(\vartheta = 0^\circ\text{C}) \cdot \frac{T}{273,2 \text{ K}}$$

oder einfacher

$$V(T) = V_0 \cdot \frac{T}{273,2 \text{ K}}.$$

Hier müssen wir etwas vorsichtig sein. $V(\vartheta=0^\circ\text{C})$ oder einfacher V_0 ist das Volumen bei 0°C , nicht bei 0 K. T ist aber die Temperatur in Kelvin.

7.3 Die Temperaturabhängigkeit der Länge und des Volumens fester und flüssiger Körper

Die Länge eines Festkörpers nimmt mit wachsender Temperatur zu. In einem mehr oder minder großen Temperaturbereich hängt die Länge $l(\vartheta)$ des Festkörpers linear von der Temperatur ab:

$$l(\vartheta) = l(\vartheta = 0^\circ\text{C}) \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta)$$

oder einfacher

$$l(\vartheta) = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta).$$

α bezeichnet man als linearen Ausdehnungskoeffizienten. Er ist keine Werkstoffkonstante sondern genau genommen selbst wieder temperaturabhängig. Für Temperaturen in der Nähe der Raumtem-

peratur kann dies jedoch oftmals vernachlässigt werden.

Werkstoff	α
Quarzglas	$0,51 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}$
Eisen	$12,0 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}$
Beton	$13,0 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}$
Kupfer	$16,7 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}$

Die Abhängigkeit des Volumens von der Temperatur ϑ wird durch

$$V(\vartheta) = V(\vartheta = 0^\circ\text{C}) \cdot (1 + \beta \cdot \vartheta)$$

oder einfacher

$$V(\vartheta) = V_0 \cdot (1 + \beta \cdot \vartheta)$$

beschrieben. β ist der kubische Ausdehnungskoeffizient.

Für einen Würfel mit der Kantenlänge $l(\vartheta)$ gilt:

$$V(\vartheta) = l_g^3 = l_0^3 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta)^3 =$$

$$l_0^3 \cdot [1 + 3\alpha \cdot \vartheta + 3(\alpha \cdot \vartheta)^2 + (\alpha \cdot \vartheta)^3].$$

$\alpha^2 \cdot \vartheta^2$ und erst recht $\alpha^3 \cdot \vartheta^3$ sind für die erreichbaren Temperaturen sehr klein gegen $\alpha \cdot \vartheta$. Daher gilt mit sehr guter Näherung:

$$V(\vartheta) = l_0^3 \cdot (1 + 3\alpha \cdot \vartheta) = V_0 \cdot (1 + 3\alpha \cdot \vartheta)$$

bzw.

$$V_0 \cdot (1 + \beta \cdot \vartheta) = V_0 \cdot (1 + 3\alpha \cdot \vartheta).$$

Der kubische Ausdehnungskoeffizient β ist also näherungsweise gleich dem Dreifachen des linearen Ausdehnungskoeffizienten α .

Die thermische Ausdehnung von Flüssigkeiten wird stets durch kubische Ausdehnungskoeffizienten beschrieben. Sie sind im allgemeinen größer als diejenigen von festen Körpern.

7.4 Zusammenhang zwischen Druck und Volumen von Gasen

Verringern wir das Volumen V eines Gases, vergrößert sich der Druck p . Bei vielen Gasen stellt man fest, dass das Produkt aus Volumen V und Druck p konstant bleibt (bei konstanter Temperatur!):

$$p \cdot V = \text{Konstante oder auch}$$

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

Dies ist das Gesetz von Boyle-Mariotte. Der Wert der Konstante hängt von der Art, der Masse und der Temperatur des Gases ab. Ein Gas, das o. g. Gesetz gehorcht, wobei die Konstante proportional zur absoluten Temperatur ist, heißt ideales Gas.

7.5 Die Temperaturabhängigkeit des Druckes von Gasen

Sorgen wird bei der Erwärmung eines Gases dafür, dass das Volumen V konstant bleibt, so erweist sich der Druck p als linear abhängig von der Temperatur ϑ . Der Druck $p(\vartheta)$ lässt sich deshalb durch die Temperatur ϑ und einen Spannungskoeffizienten γ darstellen::

$$p(\vartheta) = p(0^\circ\text{C}) \cdot (1 + \gamma \cdot \vartheta)$$

oder einfacher

$$p(\vartheta) = p_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \vartheta)$$

Dies ist das Gesetz von Charles, oft ebenfalls als Gesetz von Gay-Lussac bezeichnet.

Nun wollen wir versuchen, einen einfachen Zusammenhang zwischen γ und α herzuleiten:

Ein Gas, das bei 0°C den Druck p_0 besitzt, werde unter Konstanthaltung dieses Druckes auf die Temperatur ϑ erwärmt. Sein Volumen ist dann

$$V(\vartheta) = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta) \quad \text{mit } p = p_0$$

Nun werde es auf das ursprüngliche Volumen V_0 unter Konstanthaltung der Temperatur komprimiert. Dann gilt wegen

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad \text{hier}$$

$$V(\vartheta) \cdot p_0 = V_0 \cdot p(\vartheta) \quad \text{also}$$

$$V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta) \cdot p_0 = V_0 \cdot p(\vartheta) \quad \text{bzw.}$$

$$p(\vartheta) = p_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta).$$

Wir sehen, dass der Spannungskoeffizient γ identischen sein muss mit dem Ausdehnungskoeffizienten α .

7.6 Die Zustandsgleichung der idealen Gase

Als Zustandsgleichung bezeichnet man eine Gleichung, die eine Beziehung zwischen den Variablen herstellt, welche den Zustand bestimmen. Als Zustandsvariable wählen wir den Druck p , das Volumen V und die Temperatur T . Eine Beziehung

zwischen ihnen lässt sich aus dem Vorhergehenden wie folgt ableiten:

Gegeben ist der Zustand p_1, V_1, T_1 . ER soll in den Zustand p_2, V_2, T_2 übergeführt werden.

1. Wir bringen den Druck auf p_2 , halten die Temperatur T_1 aber zunächst fest. Dann muss sich das Volumen auf V^* ändern. Den Zusammenhang liefert das Gesetz von Boyle-Mariotte:

$$V^* = \frac{p_1 V_1}{p_2}.$$

2. Nun bringen wir die Temperatur auf T_2 , wobei der Druck p_2 konstant bleibt. Nach Gay-Lussac wird dabei das Volumen

$$V_2 = V^* \cdot \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_1 V_1}{p_2} \cdot \frac{T_2}{T_1}.$$

Zusammenfassen der entsprechenden Größen liefert die gesuchte Zustandsgleichung:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \text{Konstante } C$$

oder allgemein

$$pV = C \cdot T.$$

7.7 Die universelle Gaskonstante R

Bei allen Änderungen der drei Zustandsgrößen p, V und T muss obiger Zusammenhang für eine bestimmte Menge eines Gases gewahrt sein. Die Größe C ist der Masse m des Gases proportional, denn ein Gas beansprucht bei Verdoppelung seiner Masse ein doppeltes Volumen, sofern Druck und Temperatur unverändert bleiben. Wir können also schreiben:

$$C = m \cdot C^*.$$

Die Erfahrung lehrt, dass Gasmengen, deren Masse m sich wie ihre relativen Molekularmassen M verhalten, die also die gleiche Anzahl von Molekülen enthalten, bei gleichen Drucken und Temperaturen das gleiche Volumen besitzen.

Eine Gasmenge, die M Gramm des Gases enthält, bezeichnet man als 1 Mol. Ihr Volumen, das natürlich von Druck und Temperatur abhängt, ist das Molvolumen V_{mol} (Dimension: Volumen/Mol). Bei einem bestimmten Druck p und einer bestimmten Temperatur T muss sich also stets der gleiche Wert für das Molvolumen ergeben. Nimmt man eine solche Messung an irgend einem Gas bei $p = 10 \text{ N/cm}^2$ (also 1.000 mbar) und $T = 273,2 \text{ K}$ (gleich 0°C) vor, so erhält man immer 22.414 cm^3 . Setzt man diesen Wert ein, so erhält man den für die Messung an 1 Mol des Gases gültigen Wert der Konstanten C , der allgemein mit dem Buchstaben R und dem Namen „universelle Gaskonstante“ bezeichnet wird. Aus $p \cdot V = C \cdot T$ wird dann die für „ideale“ Gase allgemein gültige Zustandsgleichung:

$$p \cdot V_{\text{mol}} = R \cdot T$$

$$\text{mit } R = 8,3166 \frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{Mol} \cdot \text{K}}.$$

Sind im Versuchsgefäß n Mole des Gases enthalten, so ist das Volumen $V = n \cdot V_{\text{mol}}$ und die Zustandsgleichung lautet:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T.$$

7.8 Die kinetische Gastheorie

Die kinetische Gastheorie leitet die Eigenschaften der Gase aus mechanischen Bewegungsvorgängen der einzelnen Moleküle ab. Dazu schreibt sie diesen folgende Eigenschaften zu: Ihre Masse sei m , sie verhalten sich wie vollkommen elastische Kugeln, die keine Kräfte aufeinander ausüben, solange sie sich nicht berühren. Sie bewegen sich voneinander unabhängig ohne irgendeine Richtung im Raum zu bevorzugen, mit der Geschwindigkeit v . Beim Zusammenstoß, der den Gesetzen des elastischen Stoßes gehorcht, tauschen sie Energie und Impuls aus. Dabei ändern sie im allgemeinen ihre Geschwindigkeit. Wenn wir trotzdem zunächst von einer Geschwindigkeit v sprechen, kann sie daher nur die Bedeutung eines Mittelwertes haben. Er hängt von der Masse der Moleküle und der Temperatur des Gases ab.

Die von dem Gas auf die Wand ausgeübte Kraft führen wir auf Stöße der Moleküle gegen die Wand zurück. Dabei wird Impuls auf die Wand übertragen. Nach dem Grundgesetz der Mechanik ist die Kraft auf die Wand gleich dem in der Zeiteinheit durch die Stöße auf die Wand übertragenen Impuls. Der Druck ist der auf die Flächeneinheit in der Zeiteinheit übertragene Impuls:

$$\text{Druck} = \frac{\text{an die Wand abgegebener Impuls}}{\text{Wandfläche} \cdot \text{Zeit}}.$$

Als Molekülzahldichte n bezeichnen wir das Verhältnis der Anzahl N aller Moleküle zum Gasvolumen V , d. h. die Anzahl der Moleküle je Volumeneinheit:

$$n = \frac{N}{V}.$$

Die ungeordnete Bewegung der Moleküle denken wir uns so geordnet, dass ein Drit-

tel aller Moleküle eine Flugrichtung senkrecht zur Wand hat. Von ihnen bewegt sich die Hälfte, also ein Sechstel, in Richtung zur Wand hin. Alle Moleküle mit dieser Flugrichtung, die in einer Säule vom Querschnitt 1 und der Länge $v \cdot 1 \text{ s}$ enthalten sind, erreichen in der Zeiteinheit 1 s die Wand. Also ist die Stoßzahl pro Flächeneinheit und Zeiteinheit:

$$z = \frac{n}{6} \cdot v.$$

Jedes einzelne Molekül überträgt beim Aufprall und nachfolgender Reflexion den Impuls $2mv$ auf die Wand. Also wird durch alle in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit der Wand erfolgenden Stöße auf diese der Impuls

$$z \cdot 2mv = \frac{n}{6} \cdot v \cdot 2mv = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m \cdot v^2$$

übertragen. Für den Druck p ergibt sich daher

$$p = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m \cdot v^2.$$

Berücksichtigt man die Tatsache, dass die Geschwindigkeiten der Gasmoleküle nicht alle gleich sind, muss man v^2 durch den Mittelwert der Quadrate aller vorkommenden Geschwindigkeiten ersetzen.

7.9 Die Boltzmann-Konstante

Wir gehen von der Beziehung

$$p = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m \cdot v^2$$

aus. Die Multiplikation mit dem Molvolumen V_{mol} ergibt

$$p \cdot V_{mol} = \frac{1}{3} \cdot n \cdot V_{mol} \cdot m \cdot v^2 = \frac{2}{3} \cdot N_A \cdot \frac{m}{2} \cdot v^2.$$

Hier wurde die universelle Avogadro-Konstante $n \cdot V_{mol} = N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ eingeführt, die Zahl der Moleküle pro Mol.

$mv^2/2$ ist der Mittelwert der kinetischen Energie ε_{kin} der Translation eines Gasmoleküls, also

$$p \cdot V_{mol} = \frac{2}{3} \cdot N_A \cdot \varepsilon_{kin}.$$

Hiermit vergleichen wir

$$p \cdot V_{mol} = R \cdot T$$

und folgern $\frac{2}{3} \cdot N_A \cdot \varepsilon_{kin} = R \cdot T$ oder

$$N_A \cdot \varepsilon_{kin} = \frac{3}{2} \cdot R \cdot T.$$

Die kinetische Energie der Translation aller Moleküle in 1 Mol beträgt $3/2 RT$. Sie ist unabhängig von der Natur des Gases.

Für das einzelne Molekül folgt

$$\varepsilon_{kin} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N_A} \cdot T = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$$

$$\text{mit } k = 1,3804 \cdot 10^{-23} \frac{W \cdot s}{K}.$$

k heißt Boltzmann-Konstante. Sie ist neben dem Planckschen Wirkungsquantum h die wichtigste Fundamentalkonstante der Physik.

Also lässt sich die Grundgleichung der kinetischen Gastheorie

$$p = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m \cdot v^2 \text{ mit}$$

$$\varepsilon_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$$

auch schreiben als:

$$p = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m \cdot v^2 = \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{2}{3} \cdot n \cdot \varepsilon_{kin}$$

und weiter

$$p = \frac{2}{3} \cdot n \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot T = n \cdot k \cdot T.$$

7.10 Die spezifische Wärme

Um die Temperatur eines Körpers zu erhöhen oder zu verringern, muss man ihm eine Wärmemenge zuführen oder entziehen. Häufig geschieht das dadurch, dass man ihn mit einem anderen Körper von höherer oder tieferer Temperatur in Berührung bringt. Beide ändern dann ihre Temperatur, indem Wärme vom wärmeren zum kälteren übergeht. Dieser Vorgang endet mit dem Erreichen des thermischen Gleichgewichtes, das hier Temperaturgleichheit bedeutet.

Man nannte früher die Wärmemenge, die 1 Gramm Wasser um 1°C (genau genommen von $14,5^\circ\text{C}$ auf $15,5^\circ\text{C}$) erwärmt, eine Kalorie (1 cal).

Die Erwärmung von m Gramm eines homogenen Stoffes um $\Delta t = t_2 - t_1$ erfordert die Wärmemenge Q mit

$$Q = c \cdot m \cdot (t_2 - t_1) = c \cdot m \cdot \Delta t.$$

c heißt **spezifische Wärme** des Stoffes:

$$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta t}.$$

Mit der Einheit Kalorie für die Energie ist die spezifische Wärme von Wasser gleich 1 cal/g·K. Mit der Einheit Joule für die Energie ist die spezifische Wärme c_{Wasser} von Wasser gleich 4,184 J/g·K. Der Proportionalitätsfaktor zwischen Kalorie und Joule lässt sich nicht herleiten (so wie der zwischen PS und Ws), er lässt sich „lediglich“ experimentell ermitteln.

Das Produkt aus spezifischer Wärme und Masse bezeichnet man als Wärmekapazität W . Dieser Begriff hat auch für Körper, die aus verschiedenen Bestandteilen zusammengesetzt sind, einen Sinn.

Die bei der Berührung von einem warmen Körper an einen kälteren abgegebene Wärmemenge Q_1 ist gleich der Wärmemenge Q_2 , die vom kälteren Körper aufgenommen wird. Beim Wärmeaustausch geht also keine Wärme verloren, ebenso wird keine Wärme gewonnen. Wie Wärmemenge C , die man benötigt, um ein Mol mit der relativen Molekularmasse M um 1°C zu erwärmen, bezeichnet man als Molwärme:

$$C = c \cdot M.$$

7.11 Unterschied zwischen C_p und C_v

Die spezifische Wärme der Gase hängt von den Bedingungen ab, denen das Gas während der Erwärmung unterworfen ist. Man kann dafür sorgen, dass dabei entweder das Volumen oder der Druck des Gases konstant bleibt. Die Molwärme C_v bei konstantem Volumen V ist kleiner als die Molwärme C_p bei konstantem Druck p . Denn bei konstant gehaltenem Druck

muss die zugeführte Wärmemenge nicht nur die Temperatur um ΔT steigen lassen, sondern auch für die dann eintretende Volumenvergrößerung ΔV aufkommen. Die dazu notwendige Arbeit pro Mol des Gases ist $p \cdot \Delta V_{\text{mol}}$ (Arbeit = Kraft · Weg = Kraft/Fläche · Volumenänderung).

Wegen $p \cdot V_{\text{mol}} = R \cdot T$ gilt jetzt entsprechend

$$p \cdot (V_{\text{mol}} + \Delta V_{\text{mol}}) = R \cdot (T + \Delta T).$$

Also
$$p \cdot \Delta V_{\text{mol}} = R \cdot \Delta T.$$

Pro Grad muss also zur Erwärmung eines Mols bei konstantem Druck die Arbeit $p \cdot \Delta V / \Delta T = R$ geleistet werden (Vorsicht: Einheit von R : Joule pro Mol pro Kelvin, multipliziert mit 1 Mol und 1 K ergibt sich tatsächlich die Einheit Joule). Es liegt nahe, dieser Arbeit die Differenz der Molwärmen zuzuschreiben. Die Erfahrung lehrt tatsächlich, dass für alle Gase, soweit sie der Zustandsgleichung des idealen Gases gehorchen, gilt:

$$C_p - C_v = R.$$

7.12 Der Gleichverteilungssatz

Aus

$$N_A \cdot \varepsilon_{\text{kin}} = \frac{3}{2} \cdot R \cdot T$$

muss gefolgert werden, dass die Energie, die erforderlich ist, um ein Mol eines Gases um ein Grad zu erwärmen, d. h. die Molwärme eines jeden Gases bei konstantem Volumen, gerade $3/2 R$ sein müsste. Messungen zeigen nun aber, dass dieser Wert nur für einatomige Gase erzielt wird. Für zweiatomige Gase liegt er höher, für dreiatomige noch höher. Die Deutung die-

ses Unterschiedes gibt der Gleichverteilungssatz wieder.

Einatomige Gase besitzen nur 3 Freiheitsgrade der Bewegung: Translationen in x-, y- und z-Richtung. Außer den Freiheitsgraden der Translation kann ein starrer Körper aber auch noch drei Freiheitsgrade der Rotation um drei zueinander senkrechte Achsen besitzen. Der Gleichverteilungssatz sagt nun aus, dass im statistischen Gleichgewicht die Energie pro Mol für jeden Freiheitsgrad $\frac{1}{2} RT$ ist. Bei einem zweiatomigen Molekül (starres Hantelmodell) tauschen nur die Rotationen um die beiden Achsen senkrecht zur Verbindungsachse der Atome Energie mit der Translation aus. Die Zahl der Freiheitsgrade beträgt also $3+2$. Erst bei einem dreiatomigen Molekül, dessen Atome nicht auf einer Achse liegen, tritt der dritte Rotationsfreiheitsgrad hinzu. Abweichungen sind darauf zurückzuführen, dass neben den Rotationen von zwei oder mehratomigen Molekülen auch Schwingungen der Atome im Molekül gegeneinander vorkommen können, die bei Zusammenstößen der Moleküle mit der Translations- oder Rotationsbewegung Energie austauschen können.

Im festen Körper schwingen die Atome im Kristallgitter um eine feste Gleichgewichtslage. Bei jeder elastischen Schwingung ist aber neben kinetischer Energie auch potentielle Energie vorhanden, deren Mittelwert gleich dem der kinetischen Energie ist. Dem einzelnen Atom sind daher $2 \cdot 3$ Freiheitsgrade zuzuschreiben. Die Gesamtenergie pro Mol beträgt also $3RT$.

8 Übungsaufgaben

- 1 Wie lang müsste ein Katapult sein, wenn es eine bemannte Raumfähre auf die Umlaufgeschwindigkeit von 8 km/s beschleunigen soll und die Beschleunigung auf das 6-fache der Erdbeschleunigung beschränkt werden müsste?

Lösung: $v = a \cdot t$, also $t = v/a$. Mit $s = (1/2) a t^2$ folgt $s = (1/2) a (v^2/a^2) = (1/2) v^2 / a$.

Also $s = (1/2) \cdot 8.000^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 / (6 \cdot 9,807 \text{ m/s}^2) = \mathbf{544 \text{ km}}$.

- 2 Wie weit kann man aus 1,3 m Höhe mit einem waagrechten Wasserstrahl spritzen, der senkrecht 21 m höher als die Austrittsöffnung aufsteigen würde?

Lösung: $h_{\max} = s = (1/2)gt^2 = (1/2) g^2 t^2 / g$. Mit $v = gt$ folgt $h_{\max} = (1/2)v^2/g$ bzw. $v = [2gh_{\max}]^{1/2}$.

Ebenso gilt $h = (1/2)gt^2$ bzw. $t = [2h/g]^{1/2}$. Zusammengefasst: $s_{\text{wei}} t = v \cdot t = 2 \cdot [h_{\max} h]^{1/2} = \mathbf{10,44 \text{ m}}$.

- 3 Mittelgroße Regentropfen fallen lotrecht mit der konstanten Geschwindigkeit 8 m/s. Wie schnell fährt ein Zug, wenn die Tropfen auf den Wagenfenstern Spuren erzeugen, die um $\varphi = 65^\circ$ gegen die Senkrechte geneigt sind?

Lösung: $\tan \varphi = v_{\text{Zug}}/v_{\text{Tr}}$. Also $v_{\text{Zug}} = v_{\text{Tr}} \cdot \tan \varphi = 8 \text{ m/s} \cdot \tan(65^\circ) = 8 \text{ m/s} \cdot 2,14 = 17,16 \text{ m/s} = \mathbf{61,76 \text{ km/h}}$.

- 4 Eine Fähre mit der Geschwindigkeit $v = 20 \text{ km/h}$ (gegenüber dem umgebenden Wasser) soll einen Fluss senkrecht zu dessen Strömungsrichtung überqueren. Der Fluß strömt mit 4 km/h. In welcher Richtung muss die Fähre fahren? Wie lange braucht sie bis zum 300 m entfernten anderen

Ufer?

Lösung: Die Geschwindigkeitskomponente der Fähre senkrecht zum Ufer berechnet sich aus $a^2 + b^2 = c^2$ bzw. $c^2 - a^2 = b^2$ zu $[(20 \text{ km/h})^2 - (4 \text{ km/h})^2]^{1/2} = 19,60 \text{ km/h}$. Wegen $t = s/v$ folgt $t = 0,3 \text{ km} / 19,60 \text{ km/h} = 0,0153 \text{ h} = 0,0153 \text{ h} \cdot 3.600 \text{ s/h} = 55,11 \text{ s}$. Dem rechtwinkligen Dreieck der Geschwindigkeitskomponenten ließt man ebenfalls ab: $\sin \varphi = b / c$. Also $\arcsin(b/c) = \varphi$. Hier $\arcsin(4 \text{ km/h} / 20 \text{ km/h}) = \arcsin(0,2) = 11,54^\circ$. Die Fahrrichtung muss folglich um $(90^\circ - 11,54^\circ) = \mathbf{78,46^\circ}$ gegen das Ufer geneigt sein.

- 5 Warum wird ein senkrecht nach unten aus dem Hahn ausfließender Wasserstrahl nach unten immer dünner?

Lösung: Die Strömungsgeschwindigkeit v nimmt zu, da das Wasser beschleunigt fällt. Der Querschnitt A muss abnehmen, da der Wasserstrom (Volumen pro Zeit) konstant gleich $A \cdot v$ ist.

- 6 Ein Förderband, das nach oben um $\varphi = 25^\circ$ gegen die Horizontale geneigt ist, soll Kohle in Loren werfen. Hierbei soll die Kohle um $h_0 = 0,3 \text{ m}$ höher als das Förderbandende und waagrecht um $x_0 = 1,5 \text{ m}$ weit von diesem entfernt von oben in der Lorenmitte auftreffen. Wie groß muss die Geschwindigkeit v_0 des Förderbandes sein?

Lösung: Ohne Berücksichtigung der Erdanziehungskraft würde sich die Kohle auf einer Geraden bewegen und hätte nach der Wurfdauer T den höchsten Punkt y_0 erreicht. Aus $\tan(\varphi) = y_0 / x_0$ folgt $y_0 = x_0 \cdot \tan(\varphi)$. Die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y zum Zeitpunkt t_0 berechnen sich daraus zu $v_x = x_0 / T$ bzw. $v_y = y_0 / T$ und der Betrag von v_0 zu $v_0 = [v_x^2 + v_y^2]^{1/2}$.

Nun berücksichtigen wir noch die Fallstrecke s . Während die Kohle in waagrechter Richtung den Weg x_0 zurücklegt, muss sie um $s = y_0 - h_0$ fallen. Also $s = x_0 \cdot \tan(\varphi) - h_0$. Wegen $s = (1/2) g t^2$ ist hier $s = (1/2) g T^2$ bzw. $T = [2s/g]^{1/2} = [2 \cdot (x_0 \cdot \tan(\varphi) - h_0) / g]^{1/2}$. Jetzt kann der Betrag von v_0 berechnet werden:

$$v_0 = [v_x^2 + v_y^2]^{1/2} = [(x_0/T)^2 + (y_0/T)^2]^{1/2} = [(x_0^2 + y_0^2)/T^2]^{1/2} = [(x_0^2 + x_0^2 \cdot \tan^2(\varphi))/T^2]^{1/2} = [(x_0^2 + x_0^2 \cdot \tan^2(\varphi)) / (2s/g)]^{1/2} = [(x_0^2 + x_0^2 \cdot \tan^2(\varphi)) / (2 \cdot (x_0 \cdot \tan(\varphi) - h_0) / g)]^{1/2} = [(x_0^2 \cdot (1 + \tan^2(\varphi)) / (2 \cdot (x_0 \cdot \tan(\varphi) - h_0) / g)]^{1/2} = [(g \cdot x_0^2 \cdot (1 + \tan^2(\varphi)) / (2 \cdot (x_0 \cdot \tan(\varphi) - h_0))]^{1/2}.$$

Mit $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ folgt $\sin^2(x) / \cos^2(x) + 1 = 1 / \cos^2(x)$ bzw.

$$\tan^2(x) + 1 = 1 / \cos^2(x) \text{ und deshalb}$$

$$v_0 = [x_0^2 g / (2 \cdot (x_0 \cdot \tan(\varphi) - h_0) \cdot \cos^2(\varphi))]^{1/2} = \mathbf{5,80 \text{ m/s}}.$$

- 7 Ein Geschoss wird in einem 0,8 m langen "gezogenen" Lauf ein halbes Mal um sich selbst gedreht ($N = 1/2$). Es tritt mit 600 m/s aus. Wie groß ist seine Drehzahl n ?

Lösung: Mit $v = 600 \text{ m/s}$ und $s = 0,8 \text{ m}$ berechnet sich die Laufzeit t zu $t = s / v$. Mit $n = N / t$ folgt $n = N \cdot v / s = (0,5 \cdot 600 \text{ m/s}) / 0,8 \text{ m} = \mathbf{375 \text{ U/s}}$.

- 8 Ein Flugzeug fliegt einen Looping mit dem Radius $r = 250 \text{ m}$. Wie schnell muss es im höchsten Punkt seiner Bahn sein?

Lösung: Im höchsten Punkt seiner Bahn ist das Flugzeug "schwerelos", Erdbeschleunigung g und Radialbeschleunigung a_r müssen sich hier also gegenseitig aufheben. $a_r = v^2 / r = g$ bzw. $v = [g \cdot r]^{1/2} = 49,52 \text{ m/s} = \mathbf{178,28 \text{ km/h}}$.

- 9 Ein Auto mit der Masse $m = 1.075 \text{ kg}$ erreicht aus dem Stand in $t = 10 \text{ s}$ die Geschwindigkeit $v_{10} = 100 \text{ km/h}$. Wie groß ist bei vernachlässigten Reibungskräften die mittlere Antriebskraft F ?

Lösung: Die Antriebskraft F berechnet sich nach dem zweiten Newtonschen Axiom zu $F = m \cdot a$. Die Beschleunigung a berechnet sich aus der Beziehung $v = a \cdot t$, die für geradlinige Bewegungen bei konstanter Beschleunigung gültig ist. Also $v = a \cdot t$ bzw. $a = v / t = 100 \text{ km/h} / 10 \text{ s} = 27,78 \text{ m/s} / 10 \text{ s} = 2,778 \text{ m/s}^2$. Mit $F = m \cdot a$ folgt $F = 1.075 \text{ kg} \cdot 2,778 \text{ m/s}^2 = \mathbf{2.986 \text{ N}}$.

- 10 Um auf horizontaler Unterlage einen Körper mit der Gewichtskraft $F_G = 30 \text{ N}$ mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen, benötigt man die Zugkraft $F = 2,4 \text{ N}$. Wie groß ist die Gleitreibungszahl μ_{GR} ?

Lösung: Für die Gleitreibungskraft F_{GR} gilt: $F_{GR} = \mu \cdot F_N$ bzw. $\mu = F_{GR} / F_N$. Bei horizontaler Unterlage ist $F_G = F_N$. Die Zugkraft F entspricht der Gleitreibungskraft F_{GR} . Also: $\mu = 2,4 \text{ N} / 30 \text{ N} = \mathbf{0,08}$.

- 11 Die Haftreibungszahl μ_{HR} für Stahl auf Holz sei gleich 0,5. Wie stark dürfen Wagen mit Holzboden maximal beschleunigen, damit darauf stehende Maschinen aus Stahl gerade nicht rutschen.

Lösung: Für die Haftreibungskraft F_{HR} gilt $F_{HR} = \mu_{HR} \cdot F_N$. Bei horizontalem Holzboden ist die Normalkraft F_N identisch mit der Gewichtskraft $F_G = mg$. Also $F_{HR} = \mu_{HR} F_G = \mu_{HR} mg$. Die Beschleunigungskraft $F_a = ma$ darf nicht größer werden als die Haftreibungskraft F_{HR} . Also $F_a < \mu_{HR} F_{HR}$ bzw.

$ma < \mu_{HR} mg$ bzw. $a < \mu_{HR} g$ bzw. $a < 0,5 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = \mathbf{4,905 \text{ m/s}^2}$.

- 12 Die Luftreibungskraft wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit. Welche Leistung müsste ein Kfz-Motor für eine Geschwindigkeit von 150 km/h haben, wenn diesem Motor bei einer Geschwindigkeit von 110 km/h eine Leistung von 22,1 kW abverlangt wird?

Lösung: $F_{LR} = c \cdot v^2$, also $F_{1LR}/F_{2LR} = v_1^2/v_2^2$. Mit $v = s/t$ ist $t_1/t_2 = v_2/v_1$. Wegen $P = F \cdot s/t$ wird schließlich $P_1/P_2 = (F_1/t_1) / (F_2/t_2) = (F_1/F_2) \cdot (t_2/t_1) = (v_1/v_2)^2 \cdot (v_1/v_2) = (v_1/v_2)^3$. Also $P_1 = P_2 \cdot (v_1/v_2)^3 = 22,1 \text{ kW} \cdot (150 \text{ km/h} / 110 \text{ km/h})^3 = \mathbf{56 \text{ kW}}$.

- 13 Ein Körper bleibt auf einer 43° geneigten schiefen Ebene gerade noch liegen. Wie groß ist die Haftreibungszahl μ_{HR} ?

Lösung: Die Haftreibungskraft $F'_{Rmax} = \mu_{HR} \cdot F_N = \mu_{HR} \cdot F_G \cdot \cos(\alpha) = \mu_{HR} \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$ muss betragsmäßig gleich der Hangkraft $F_H = F_G \cdot \sin(\alpha) = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$ sein. Also: $\mu_{HR} \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha) = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$ bzw. $\mu_{HR} = \sin(\alpha) / \cos(\alpha) = \tan(43^\circ)$, also $\mu_{HR} = \mathbf{0,93}$.

- 14 Eine 2-Zylinder-Kolbenmaschine leistet 150 kW bei einer Drehzahl von 120 U/min. Welche mittlere Kraft drückt beim Hin- und Hergang auf den Kolben, wenn dessen Weg $h=30 \text{ cm}$ ist.

Lösung: Kraft = Leistung · Zeit / Weg bzw. $F = P \cdot t / s$. Mit $P_{Kolben} = P_{Ges}/2 = 75 \text{ kW}$, $n = 1/T$ bzw. $T = 1/n = 0,5 \text{ s}$ und $s = 2h = 0,6 \text{ m}$ folgt: $F = 75.000 \text{ W} \cdot 0,5 \text{ s} / 0,6 \text{ m}$, also $\mathbf{F = 62.500 \text{ N}}$.

- 15 Die Leistung einer Kaplan turbine beträgt 11.000 kW. Wieviel Kubikmeter Wasser werden bei einem nutzbaren Gefälle von 8 m und einem Wirkungs-

grad η von 93% pro Sekunde zugeführt?

Lösung: $P_N = \eta \cdot m \cdot g \cdot h / t$. Mit $m = \rho \cdot V$ folgt $V / t = (P_{ges}) / (\eta \cdot \rho \cdot g \cdot h) = (11.000.000 \text{ Ws}) / (0,93 \cdot 1.000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 8 \text{ m})$, also $\mathbf{V/t = 151 \text{ m}^3/\text{s}}$.

- 16 Welche mittlere Leistung hat ein Flugzeugmotor bei einem Gesamtwirkungsgrad von $\eta = 20\%$, wenn es ein Flugzeug mit der Masse $m = 5.000 \text{ kg}$ in $t = 5$ Minuten auf die Höhe $h = 10 \text{ km}$ und die Geschwindigkeit $v = 720 \text{ km/h}$ bringen kann?

Lösung: Der Motor hat sowohl kinetische als auch potentielle Energie aufzubringen: $W_{kin} = (1/2) m v^2$. $W_{pot} = m g h$. $P = (W_{kin} + W_{pot}) / (\eta t) = [2.500 \text{ kg} \cdot 200^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 5.000 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 10.000 \text{ m}] / (0,2 \cdot 300 \text{ s}) = (1 \cdot 10^8 \text{ Nm} + 4,9 \cdot 10^8 \text{ Nm}) / 60 \text{ s} = 9,85 \cdot 10^6 \text{ Nm/s}$, also $\mathbf{P = 9,85 \cdot 10^3 \text{ kW}}$.

- 17 Eine Lore der Masse $m_1 = 600 \text{ kg}$ fährt horizontal mit der Geschwindigkeit $v_1 = 1,2 \text{ m/s}$. Wie schnell fährt sie weiter, nachdem senkrecht von oben $\Delta m = 400 \text{ kg}$ Erz hineingefallen sind?

Lösung: Impulserhaltungssatz: $p_1 + p_2 = \text{const}$. Wegen $p_2 = 0$ folgt $p_1 = p = m_1 \cdot v_1 = \text{const}$. Also $m_1 v_1 = (m_1 + \Delta m) \cdot v_2$ bzw. $v_2 = m_1 v_1 / (m_1 + \Delta m)$, also $\mathbf{v_2 = 0,72 \text{ m/s}}$.

- 18 Wie groß ist die Spitzenleistung eines Hochspringers mit der Masse 75 kg , der seinen Schwerpunkt während des Absprun ges um $h_1 = 0,4 \text{ m}$ hoch hebt und ihm dabei eine solche Absprunggeschwindigkeit v erteilt, dass er noch weitere $0,6 \text{ m}$ hoch (h_2) fliegt?

Lösung: Während des Fluges wirkt die Erdbeschleunigung. Folglich gilt dann $h_2 = (1/2) g t_2^2$. Mit $v = g t_2$ bzw. $t_2 = v / g$ folgt $v = [2 g h_2]^{1/2}$. Diese Ge-

schwindigkeit wurde auf der Beschleunigungsstrecke h_1 erzielt. Also $h_1 = (1/2)at_1^2$. Mit $v = at_1$ bzw. $a = v / t_1$ folgt $h_1 = (1/2) (v / t_1) \cdot t_1^2 = (1/2) v \cdot t_1 = (1/2)[2 \cdot g \cdot h_2]^{1/2} t_1$ bzw. $t_1 = 2h_1 / [2gh_2]^{1/2}$.

In der Zeit t_1 wurde die kinetische Arbeit $W_{\text{kin}} = (1/2)mv^2 = (1/2)m \cdot (2gh_2) = mgh_2$ als auch potentielle Arbeit $W_{\text{pot}} = mgh_1$ aufgebracht. Die Gesamtleistung berechnet sich daraus zu $P = mg(h_1+h_2)/t_1 = mg(h_1+h_2) \cdot [2gh_2]^{1/2} / 2h_1 = 75 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (0,4 \text{ m} + 0,6 \text{ m}) \cdot [2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,6 \text{ m}]^{1/2} / (2 \cdot 0,4 \text{ m})$, also **$P = 3,16 \text{ kW}$** .

- 19 Ein Fliehkraftregler mit den Stangenlängen $l_1 = l_2 = 20 \text{ cm}$ und Endgewichten der Massen $m_1 = m_2 = 100 \text{ g}$ soll in der Winkelposition $\varphi = 30^\circ$ verbleiben. Welche Drehzahl n ist dafür notwendig ($g = 9,807 \text{ m/s}^2$)?

Lösung: Die Endgewichte bewegen sie auf einem Kreis mit dem Radius r . Es gilt: $\sin(\varphi) = r / l$ bzw. $r = l \cdot \sin(\varphi)$.

Die Gewichtskraft F_g berechnet sich zu $F_g = m \cdot g$, sie steht senkrecht zur Zentrifugalkraft F_Z .

Der resultierende Kraftvektor F_R bildet mit dem Vektor F_g einen Winkel von 30° . $\tan(\varphi) = F_Z / F_g$ bzw. $F_Z = F_g \cdot \tan(\varphi) = m \cdot g \cdot \tan(\varphi)$.

Die Zentrifugalkraft F_Z berechnet sich zu

$$F_Z = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot r$$

$$\text{bzw. } f = \sqrt{\frac{F_Z}{m \cdot 4\pi^2 \cdot r}} = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot \tan \varphi}{m \cdot 4\pi^2 \cdot r}} =$$

$$\sqrt{\frac{g \cdot \tan \varphi}{4\pi^2 \cdot l \cdot \sin \varphi}} =$$

$[9,807 \text{ m/s}^2 \cdot 0,5774 / 3,948 \text{ m}]^{1/2} = 1,20 \text{ Hz} = 1,20 \text{ U/s}$. Also ist eine Drehzahl von **$n = 71,9 \text{ U/min}$** notwendig, insbesondere ist die Drehzahl von den Massen der Endgewichte unabhängig.

- 20 Rad und Radfahrer haben eine Gesamtmasse von $m_g = 80 \text{ kg}$, davon entfallen auf eine Felge und einen Mantel zusammen $m_{\text{rot}} = 0,6 \text{ kg}$. Der Umfang eines Laufrades sei $2,00 \text{ m}$, Höhe von Felge und Mantel als auch die Speichen- und Nabenmassen werden vernachlässigt.

- 20.1 Welche Höhe kann der Fahrradfahrer ohne Antriebskraft überwinden, wenn die Anfangsgeschwindigkeit 72 km/h beträgt? Reibungskräfte sind bei der Berechnung zu vernachlässigen.

Lösung: Sei v die Geschwindigkeit des Rades, h der erzielbare Höhe, r der Radius, ω die Winkelgeschwindigkeit, n die Drehzahl, U der Umfang und J_G das Trägheitsmoment beider Laufräder. Es ist $W_g = W_{\text{kin}} + W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m_g \cdot v^2 + \frac{1}{2} J_g \cdot \omega^2$. $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot 80 \text{ kg} \cdot 400 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 16.000 \text{ J}$.

Mit $J_G = 2 \cdot m_{\text{rot}} \cdot r^2$ und $U = 2\pi \cdot r$ erhält man $J_G = 2m_{\text{rot}}U^2/4\pi^2$.

Mit $\omega = 2\pi \cdot n$ und $n = v / U$ erhält man $\omega^2 = 4\pi^2 v^2 / U^2$.

Somit ist $W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J_g \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m_{\text{rot}} \cdot \frac{U^2}{4\pi^2} \cdot \frac{4\pi^2 v^2}{U^2} = m_{\text{rot}} v^2 = 0,6 \text{ kg} \cdot 400 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 240 \text{ J}$ und $W_g = 16.240 \text{ J}$. Diese Energie kann in potentielle Energie $W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$ umgewandelt werden. Also ist $h = W_g / m \cdot g$ bzw. **$h = 20,69 \text{ m}$** .

- 20.2 Die Rollreibungszahl μ_{RR} betrage für Fahrrad auf Asphalt $\mu_{\text{RR}} = 0,025$. Wie weit rollt das Rad antriebslos auf einer ebenen Straße bei o. g. Anfangsgeschwindigkeit?

Lösung: Die Rollreibungskraft F_{RR} , die für das antriebslose Rollen aufgebracht werden muss berechnet sich zu

$F_{RR} = \mu_{RR} \cdot F_N$. Die Arbeit W , die dann längs des Weges s aufgebracht wird ist $W = F_{RR} \cdot s = \mu_{RR} \cdot F_N \cdot s = \mu_{RR} \cdot m_g \cdot g \cdot s$ bzw. $s = W / (\mu_{RR} \cdot m_g \cdot g)$. Die Arbeit wird von der gespeicherten Gesamtenergie $W_g = 16.240 \text{ J}$ zur Verfügung gestellt. Also $s = 16.240 \text{ J} / (0,025 \cdot 80 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2)$. bzw. **$s = 828 \text{ m}$** .

- 20.3 Berechnen Sie, was einem Radsprinter wichtiger wäre, die Reduzierung der nicht rotierenden Fahrradmasse um $0,1 \text{ kg}$ oder die Reduzierung der Felgen- und Mantelmassen um insgesamt $0,1 \text{ kg}$?

Lösung: Sei $dm_{tr\ddot{a}}$ die Massenreduktion der nichtrotierenden Masse, dJ die Reduktion des Massenträgheitsmoments und dm_{rot} die Massenreduktion der rotierenden Masse. Je kleiner die Massenträgheit und das Massenträgheitsmoment des Fahrrades sind, desto höher ist die erzielbare Endgeschwindigkeit, konstante Leistung des Radfahrers vorausgesetzt.

$$dW_{kin} = \frac{1}{2} dm_{tr\ddot{a}} \cdot v^2 \quad \text{und} \quad dW_{rot} = \frac{1}{2} dJ \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} dm_{rot} \cdot r^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} dm_{rot} \cdot \frac{U^2}{4\pi^2} \cdot \frac{4\pi^2 \cdot v^2}{U^2}.$$

Also

$$dW_{rot} = \frac{1}{2} dm_{rot} \cdot v^2.$$

Der Vergleich zeigt, dass beide Maßnahmen genau die gleiche Auswirkung hätten. Da jedoch die Reduktion der rotierenden Masse gleichzeitig die Reduktion der Gesamtmasse zur Folge hat, ist die Reduktion der rotierenden Masse energetisch günstiger.

- 21 Beim Abbrennen einer Spielzeugrakete wird in der Zeit $\Delta t = 5 \text{ s}$ Treibstoff der Masse $m = 10 \text{ g}$ mit der Geschwindigkeit v_x ausgestoßen. Die

Schubkraft F beträgt 1 N .

- 21.1 Berechnen Sie die Impulszunahme Δp in der Zeit Δt .

Lösung: Bei konstanter Kraft F , die während der Zeit Δt wirkt, ist der Kraftstoß Δp bzw. die Impulszunahme Δp einfach gleich $F \cdot \Delta t$. Also **$\Delta p = 5 \text{ N} \cdot \text{s}$** .

- 21.2 Wie groß ist die Ausströmgeschwindigkeit v_x des Treibstoffs?

Lösung: Dem Endimpuls p der Rakete entspricht ein betragsmäßig gleich großer Impuls p der Treibstoffgase. Also $p = m \cdot v_x$ bzw. $v_x = p / m$. Also **$v_x = 500 \text{ m/s}$** .

- 22 In einem Thermosgefäß befinden sich $m_1 = 200 \text{ g}$ Wasser bei einer Temperatur ϑ_1 von 18°C . Die spezifische Wärme c_{Wasser} von Wasser beträgt $4,184 \text{ J/g} \cdot \text{K}$. Es werden $m_2 = 300 \text{ g}$ Bleischrot mit einer Temperatur von $\vartheta_2 = 100^\circ\text{C}$ hinzugeschüttet. Die spezifische Wärme c_{Blei} von Blei beträgt $0,1297 \text{ J/g} \cdot \text{K}$. Wie hoch ist die Mischtemperatur ϑ ?

Lösung: Aus der Gleichheit von abgegebener und aufgenommener Wärmemenge ($Q_1 = Q_2$) ergibt sich:

$$Q_1 = c_{\text{Wasser}} \cdot m_1 \cdot (\vartheta - \vartheta_1) \quad \text{und}$$

$$Q_2 = c_{\text{Blei}} \cdot m_2 \cdot (\vartheta_2 - \vartheta). \quad \text{Also}$$

$$c_{\text{Wasser}} \cdot m_1 \cdot (\vartheta - \vartheta_1) = c_{\text{Blei}} \cdot m_2 \cdot (\vartheta_2 - \vartheta).$$

Aufgelöst nach ϑ erhalten wir:

$$\vartheta = \frac{c_{\text{Blei}} \cdot m_2 \cdot \vartheta_2 + c_{\text{Wasser}} \cdot m_1 \cdot \vartheta_1}{c_{\text{Wasser}} \cdot m_1 + c_{\text{Blei}} \cdot m_2}.$$

Mit o. g. Zahlenwerten ergibt sich schließlich ϑ zu $21,6^\circ\text{C}$.

- 23 Ein Zimmer hat einen Rauminhalt $V = 100 \text{ m}^3$ und abends bei $p_1 = 1.000 \text{ mbar}$ eine Temperatur von 25°C ($T_1 = 298,2 \text{ K}$). Da nicht geheizt wurde, sind es am nächsten Morgen bei $p_2 = 1.020 \text{ mbar}$ nur 5°C ($T_2 = 278,2 \text{ K}$). Wie viel kg Luft sind zugeströmt?

Lösung: Zunächst bestimmen wir die Luftmasse im Raum unter Normalbedingungen ($\vartheta_0 = 0^\circ\text{C}$, $p_0 = 1.013 \text{ mbar}$). Dann wird die Luftmasse m auf die herrschenden Drücke p_1 bzw. p_2 und die herrschenden Temperaturen T_1 bzw. T_2 umgerechnet. Die Differenz $m_2 - m_1$ ergibt die Masse der zugeströmt Luft.

1 Mol Luft, d. h. 22,4 Liter Luft, hat bei $\vartheta_1 = 0^\circ\text{C}$ ($T_0 = 273,2 \text{ K}$) und bei $p_0 = 1.013 \text{ mbar}$, eine Masse von 28,8 g. In $V_0 = 100 \text{ m}^3$ passen $100/0,0224 = 4.464 \text{ Mol}$ Luft. Das sind $m_0 = 128,6 \text{ kg}$. Diese Luftmasse hat bei einem anderen Druck $p_1 = 1.000 \text{ mbar}$ und einer anderen Temperatur ϑ_1 ($T_1 = 298,2 \text{ K}$) ein anderes Volumen V_1 . Wegen

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{const. folgt}$$

$$\frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1}.$$

Aufgelöst nach V_1 ergibt sich:

$$V_1 = \frac{p_0 \cdot V_0 \cdot T_1}{T_0 \cdot p_1} = 110,6 \text{ m}^3.$$

Die Masse blieb selbstverständlich erhalten. Da die 128,6 kg Luft unter den Anfangsbedingungen p_1 und T_1 (nicht den Normalbedingungen p_0 und T_0) ein Volumen von $110,6 \text{ m}^3$ einnehmen, ist die Luftmasse im Raum geringer als 128,6 kg, nämlich

$$m_1 = \frac{100}{110,6} \cdot 128,6 \text{ kg} = 116,3 \text{ kg}.$$

Diese Rechnung führen wir jetzt noch einmal für den Druck p_2 und der Temperatur T_2 durch:

$$V_2 = \frac{p_0 \cdot V_0 \cdot T_2}{T_0 \cdot p_2} = 101,1 \text{ m}^3.$$

Das entspricht jetzt einer Masse m_2 von:

$$m_2 = \frac{100}{101,1} \cdot 128,6 \text{ kg} = 127,2 \text{ kg}.$$

Die Differenz $m_2 - m_1 = 10,9 \text{ kg}$ ist zugeströmt.