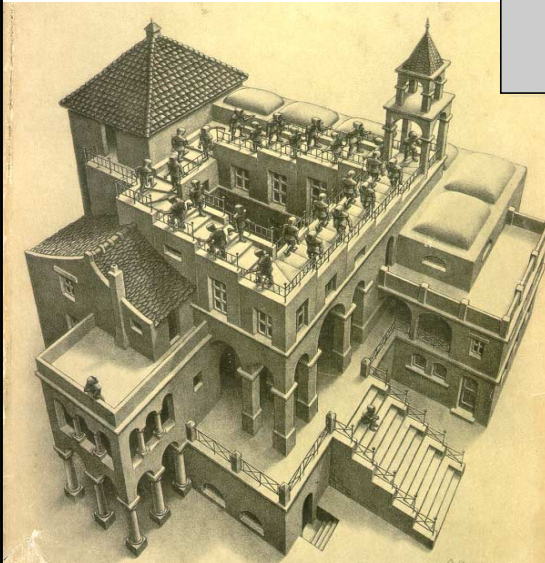


Nachrichtenverkehrstheorie Kap.2.2

- M/M/m/n - Systeme -



Universität Hannover
Institut für Allgemeine Nachrichtentechnik
Kommunikationsnetze
Prof. Dr.-Ing. K. Jobmann

Verkehrstheorie I 2.1.1

Literatur:

[schw88] Mischa Schwartz, Telecommunication Networks, Protocols, Modelling and Analysis, Addison Wesley Publishing Company, 1988, ISBN 0-201-16423-X

[Klei75] Leonard Kleinrock, Queuing Systems, Volume I, Volume II, John Wiley & Sons, New York..., 1975, ISBN 0-471-49110-1

Kendall-Notation für Wartesysteme

⇒ $A|B|m|n$

- A := Verteilung der Zwischenankunftszeiten
- B := Verteilung der Bediendauern
- m := Anzahl der Bedieneinheiten
- n := Anzahl der Warteplätze

⇒ Parameter für A, B

- M := exponentielle Verteilung (Markov)
- E := r -stufige Erlangverteilung
- H := r -stufige hyperexponentielle Verteilung
- D := deterministisch
- G := allgemeine Verteilung

⇒ Beispiel: $M|D|4|10$

Verkehrstheorie I 2.1.2

Wiederholung /
Rekapitulation

Interpretation des Beispiels $M|D|4|10$

- ⇒ exponentielle Verteilung der Zwischenankunftszeiten
- ⇒ Deterministische Bearbeitungszeiten
- ⇒ vier Bedieneinheiten
- ⇒ zehn Warteplätze

Anmerkung

- ⇒ Als Erweiterung der Kendall'schen Notation wird oft die Abfertigungsstrategie mit angegeben
- ⇒ $A | B | m | n$ - Warteschlagendisziplin , z. B. : $M | M | 1 | 1$ - FCFS

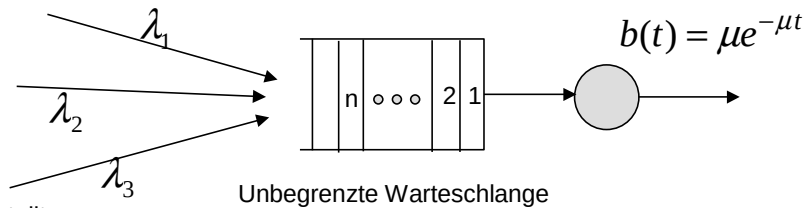
Gliederung

- **M/M/1-System**
- M/M/1/N-System
 - ⇒ Verlust
 - ⇒ Durchsatz
- M/M/m-Systeme (Wartesysteme)
- M/M/m/N-Systeme (Verlustsysteme)

Verkehrstheorie I 2.1.3

M/M/1-Queue

Exponentiell verteilte Bediendauern mit der mittleren Dauer μ :



Exponentiell verteilte
Ankunftsabstände:

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Mit der mittleren Ankunftsfallrate $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

Gesuchte Größen:

Mittlere Belegung der Warteschlange,
Verlustwahrscheinlichkeit der endlichen Warteschlange
mittlerer Durchsatz,...

Verkehrstheorie I 2.1.4

Am Eingang des Systems können mehrere Quellen mit exponentiell verteilten Einfallabständen zu einer einzigen zusammengefasst werden. Der Nachweis, dass sich die mittlere Einfallrate dabei einfach addiert, wurde bei der Beschäftigung mit dem Poissonprozess erbracht.

Die Warteschlange soll für die ersten Überlegungen eine unbegrenzte Länge haben und damit keine Verluste erzeugen. Die Serviceeinheit soll mit exponentiell verteilten Bediendauern mit der mittleren Bedienrate μ betrieben werden.

Die Raten haben die Dimension [1/sek].

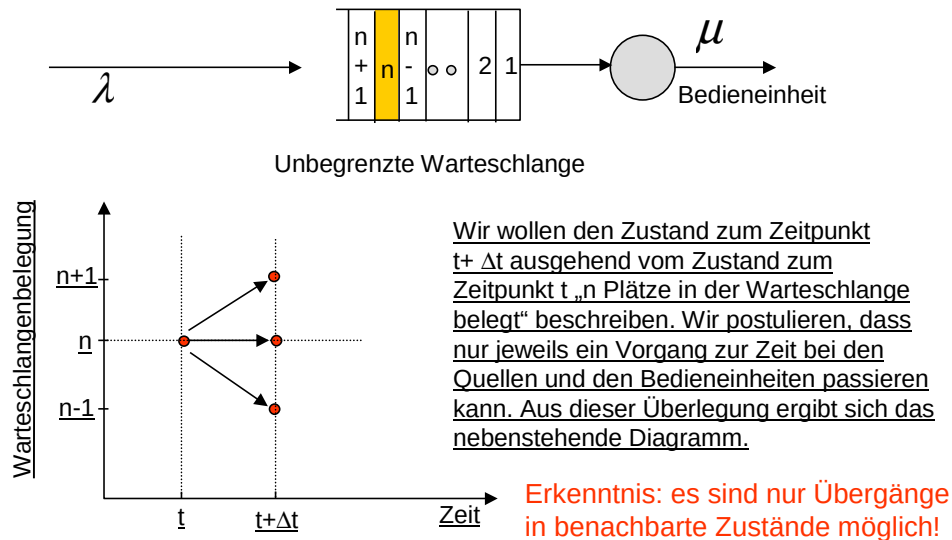
Das Modell sieht vor, dass unmittelbar, nachdem die Bedieneinheit frei geworden ist, der Kunde an Platz 1 der Warteschlange in die Bedieneinheit wechselt und der Bedienprozess sofort beginnt. Das bedeutet auch, dass ein Kunde, der eine leere Warteschlange vorfindet, sofort bedient wird.

Die exponentielle Verteilung kommt dadurch zustande, dass

- ⇒ die Quellprozesse voneinander unabhängig sind und die Wahrscheinlichkeit zum Auftreten eines Ereignisses zu jedem Zeitpunkt gleich groß ist
- ⇒ die Serviceprozesse voneinander unabhängig sind und die Wahrscheinlichkeit zur Beendigung zu jedem Zeitpunkt gleich wahrscheinlich sind

Wenn der Einfallprozess und der Serviceprozess das Verhalten großer Teilnehmerkollektive widerspiegelt, gibt es kein Problem mit diesen Annahmen. Wenn der Serviceprozess von einer Maschine (einem Rechner) gestaltet wird, ist diese Gleichverteilung der Wahrscheinlichkeit im Detail nicht gegeben. Trotzdem wird häufig mit dieser Näherung gerechnet. Die Zulässigkeit ist im Einzelfall zu prüfen.

Zustandsübergänge in der M/M/1-Queue



Verkehrstheorie I 2.1.5

Von n nach $n - 1$ gelangen wir durch Freiwerden der Bedieneinheit und Nachrücken eines Auftrages aus der Warteschlange in die Bedieneinheit.

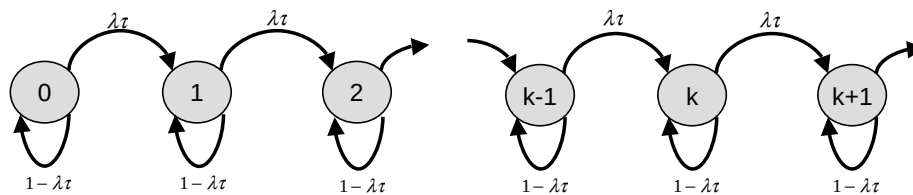
Von n nach n gelangen wir durch Ankunft eines neuen Kunden und gleichzeitiges Freiwerden der Bedieneinheit. Wenn wir mit zeitdiskreten Modellen arbeiten, kann dieser Fall auch bedeuten, dass weder ein Kunde angekommen noch einer abgefertigt wurde und somit alles beim Alten bleibt

Von n nach $n+1$ gelangen wir durch alleinige Ankunft eines neuen Kunden.

Anstatt von Kunden werden wir im folgenden auch von Bedienwunsch sprechen. Das entspricht der Terminologie, die häufig in Zusammenhang mit Kommunikationssystemen verwendet wird

Bilden Sie die Markov-Kette für die M/M/1-Queue

Wir suchen die Markov-Kette in der zeitdiskreten Darstellung. Hinweis: Betrachten Sie die zeitdiskrete Modellierung für den Poisson-Prozess.



$$P\{A(t+\tau) - A(t) = 1\} = \lambda\tau + o(\tau)$$

$$P\{A(t+\tau) - A(t) = 0\} = 1 - \lambda\tau + o(\tau)$$

$$P\{A(t+\tau) - A(t) \geq 2\} = o(\tau)$$

$$\text{mit } \lim_{\tau \rightarrow 0} o(\tau) = 0$$

Verkehrstheorie I 2.1.6

Der Grund, warum wir eine Markov-Kette zur Modellierung verwenden, wird sofort offensichtlich, wenn wir zur Lösung der Kette kommen. Bis dahin müssen wir uns noch ein wenig gedulden.

Auf jeden Fall jedoch ist die Verwendung einer Markov-Kette zulässig. Erinnern wir uns: Ein Markov-Kette hat Zustände, die sich durch Ganze positive Zahlen beschreiben lassen. Die Zustände bei uns ist die Anzahl Kunden im System. Eine zweite Voraussetzung für Markov-Ketten ist die exponentiell verteilte Aufenthaltsdauer in den Zuständen. Auch das ist durch den Poisson-Ankunfts und –Bedienprozess gegeben.

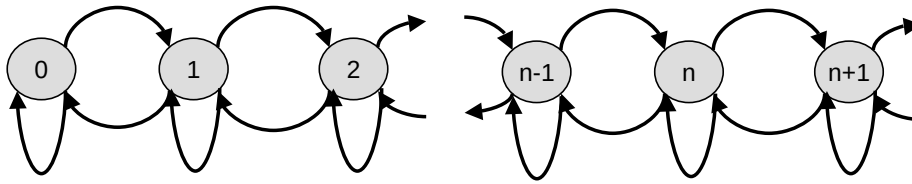
Das obige Bild zeigt die Markov-Kette, die wir für die Herleitung des Poisson-Prozesses verwendet haben. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind unten angegeben. Wir suchen nun nach diesem Vorbild die Markov-Kette für den M/M/1-Prozess

1. Schritt: Struktur der Markov-Kette



Verkehrstheorie I 2.1.7

2. Schritt: Übergangswahrscheinlichkeiten



$$P_{n,n+1} =$$

$$P_{n,n-1} =$$

$$P_{00} =$$

$$P_{nn} =$$

$$P_{ij} =$$

Verkehrstheorie I 2.1.8

Die oben angegebenen Wahrscheinlichkeiten sind folgendermaßen zu interpretieren:

$P_{00} = P(\text{kein Kunde kommt an})$ (gilt für für Zustand $n=0$)

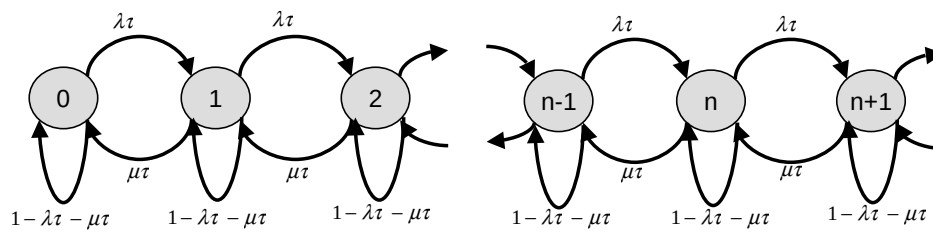
$P_{nn} = P(\text{kein Kunde kommt an und keiner geht})$

$P_{n,n+1} = P(1 \text{ Kunde kommt an und keiner geht})$

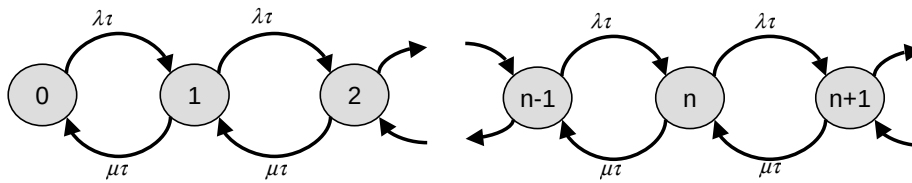
$P_{n+1,n} = P(\text{kein Kunde kommt an und 1 geht})$

Das Ankommen wird durch Ankunftsprozess, das Verlassen eines Zustands durch den Bedienprozess modelliert. Der Ankunftsprozess hat die Ankunftsrate λ , der Bedienprozess die Rate μ .

Lösung

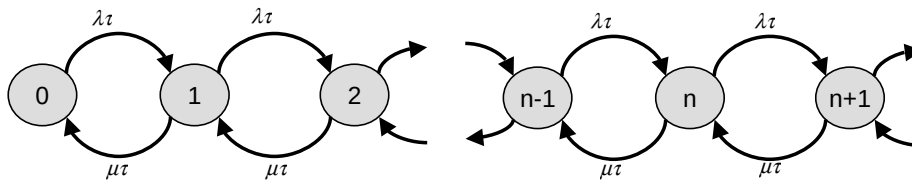


Wir haben es also mit einem Geburts-Sterbeprozess zu tun! Dafür existieren, wie wir wissen, die detaillierten Gleichgewichtsgleichungen!

Stellen Sie die detaillierten Gleichgewichtsgleichungen der M/M/1-Queue auf

$$P_{n,n+1} = \lambda\tau + o(\tau)$$

$$P_{n,n-1} = \mu\tau + o(\tau)$$

Detaillierte Gleichgewichtsgleichungen der M/M/1-Queue

Die detaillierte Gleichgewichtsgleichung lautet:

$$p_n \lambda \tau + o(\tau) = p_{n+1} \mu \tau + o(\tau)$$

Im Grenzübergang $\tau \rightarrow 0$:

$$p_n \lambda = p_{n+1} \mu$$

Mit $\rho = \lambda / \mu$:

$$p_{n+1} = \rho \cdot p_n$$

Verkehrstheorie | 2.1.11

Ableitung der Wahrscheinlichkeitsdichte der M/M/1- Queue

Durch Induktion ergibt sich:

$$p_n = \rho^n p_0$$

Nun brauchen wir nur noch p_0 zu bestimmen. Dazu nehmen wir die Summe aller Wahrscheinlichkeiten, die sich zu 1 summieren müssen:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n p_0 = \frac{p_0}{1-\rho}$$

$$\Rightarrow p_0 = 1 - \rho$$

$$\Rightarrow p_n = \rho^n (1 - \rho)$$

p_n ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass n Kunden im System sind. Damit ist auch die Wahrscheinlichkeitsdichte des M/M/1-Prozesses gegeben!

Verkehrstheorie | 2.1.12

Voraussetzung für λ und μ

Lassen Sie uns annehmen, dass p_n einem stabilen konstanten Wert zustreben soll.
Welche Einschränkung ist bezüglich λ und μ gegeben?

$$\lambda < \mu \Leftrightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

Wenn die Bedienrate größer ist, als die Ankunftsrate, dann wird der Warteschlangeninhalt nicht über alle Grenzen wachsen, was er tun muss, falls $\lambda > \mu$ ist.

Existiert p_n für $\lambda = \mu$?

Nein, denn

$$p_n = \rho^n (1 - \rho) = 0$$

Verkehrstheorie | 2.1.13

Stabilität der unendlichen M/M/1-Queue

Nach dem wir die Beziehung der Zustandswahrscheinlichkeiten gelöst haben zu:

$$p_n = (1 - \rho) \rho^n$$

können wir noch einmal die Frage nach der Stabilität stellen. Die M/M/1-Queue ist stabil, wenn sich nach einem Einschwingvorgang endliche Werte, die größer sind als null, für die Zustandswahrscheinlichkeiten einstellen:

1.) $\rho < 1 \Rightarrow p_n > 0$ und endlich

2.) $\rho = 1 \Rightarrow p_n = 0$ siehe Herleitung auf der Notizenseite

3.) $\rho > 1 \Rightarrow p_n = p_0 \rho^n$ strebt keinem Grenzwert zu und ist somit undefiniert

Damit ist bewiesen, dass nur für $\rho < 1$, d.h. $\lambda < \mu$ ein stabiler, endlicher Zustand der M/M/1-Queue vorliegt.

Verkehrstheorie | 2.1.14

1.) $\rho < 1 \Rightarrow p_n > 0$ und endlich

2.) $\rho = 1$ dürfen wir nicht in $p_n = (1 - \rho) \rho^n$ einsetzen, da die geometrische Reihe, mit der wir diese Formel gewonnen haben, für $\rho = 1$ nicht mehr definiert ist. Deshalb verwenden wir $p_n = p_0 \rho^n$, mit $\rho = 1$ wird $p_n = p_0$. Nun summieren wir über allen Zuständen und lassen die Summe den Wert eins annehmen:

$$\sum p_n = \sum p_0 = 1$$

$p_n = p_0$ heißt, dass alle p_n gleich groß sind:

$$\sum p_n = n \cdot p_n = 1, \text{ woraus folgt, dass } p_n = \frac{1}{n} \text{ und für}$$

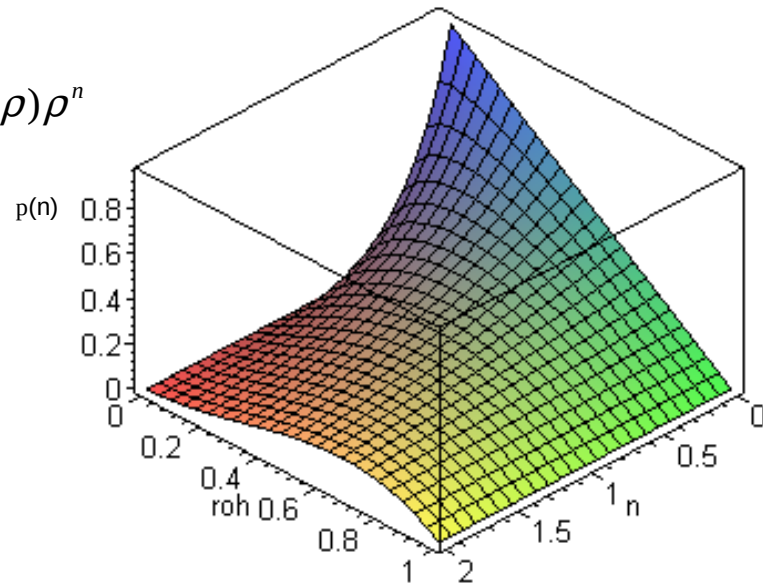
$$n \Rightarrow \infty \text{ wird } p_n = 0$$

3.) $\rho > 1$ gilt dieselbe Überlegung wie zu 2.). Es gilt:

$p_n = p_0 \rho^n$, für $\rho > 1$ konvergiert p_n nicht, die Warteschlange kann also keinen stabilen Zustand mehr einnehmen.

Zustandswahrscheinlichkeiten der unendlichen M/M/1-Queue

$$p_n = (1 - \rho) \rho^n$$



Beachte:
 n kann nur
ganzzahlige Werte
annehmen

Diskussion, wie plausibel ist diese Kurve?

Verkehrstheorie I 2.1.15

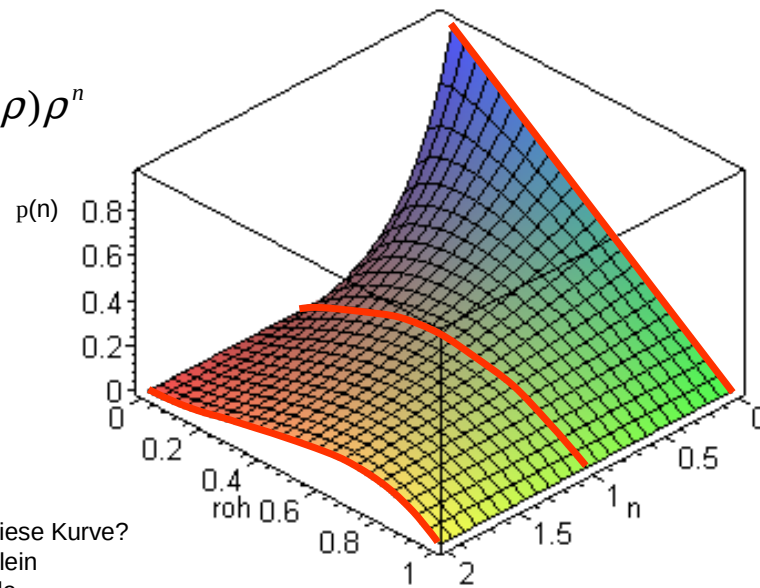
Maple-Befehle:

```
> with(plots):
```

```
> P1:=plot3d((1-r)*(r)^n,n=0..10,r=0..1):display3d(P1,axes=boxed,title='Zustandswahrscheinlichkeiten der  
M/M/1-Queue');
```

Zustandswahrscheinlichkeiten der unendlichen M/M/1-Queue

$$p_n = (1 - \rho) \rho^n$$



Diskussion:

wie plausibel ist diese Kurve?

- p_n wird schnell klein
- p_0 ist eine Gerade
- $\rho=0 \Rightarrow p_n=0$, außer bei $n=0$
- $\rho=1 \Rightarrow p_n=0$, **wohin gehen denn die Zustandswahrscheinlichkeiten?**
Natürlich ins Unendliche!!!

Verkehrstheorie | 2.1.16

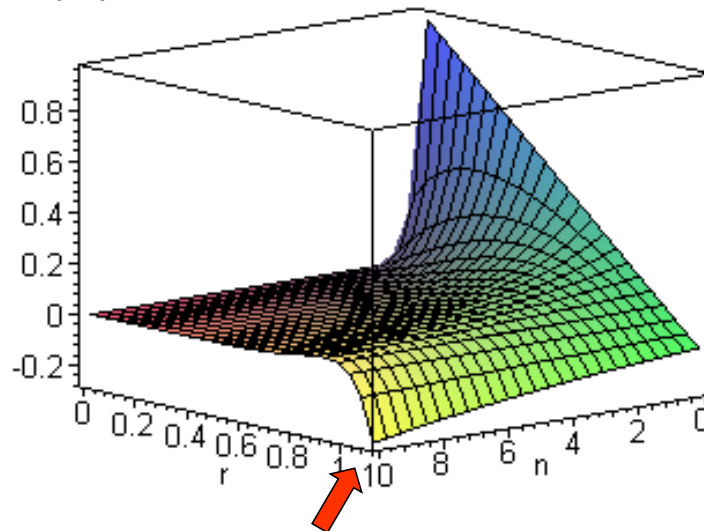
Maple-Befehle:

> with(plots):

> P1:=plot3d((1-r)*(r)^n,n=0..10,r=0..1):display3d(P1,axes=boxed,title='Zustandswahrscheinlichkeiten der M/M/1-Queue');

Zustandswahrscheinlichkeiten der M/M/1-Queue (unendlich)

$$p_n = (1 - \rho) \rho^n$$



In diesem Graphen ist $\rho > 1$ und damit die Zustandswahrscheinlichkeit negativ!!!! Dafür sind die Zustandswahrscheinlichkeiten nicht definiert.

Verkehrstheorie I 2.1.17

Durchschnittliche Zahl Kunden im System

Die Durchschnittliche Anzahl Kunden im System, N , ist gegeben durch:

Verkehrstheorie | 2.1.18

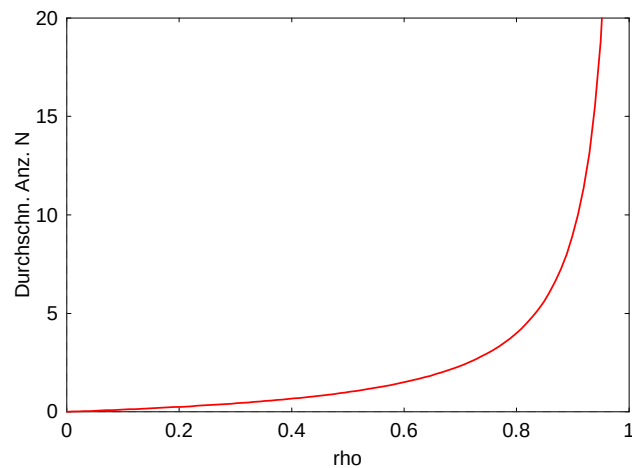
Durchschnittliche Zahl Kunden im System

Die Durchschnittliche Anzahl Kunden im System, N , ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} N &= \lim_{t \rightarrow \infty} E\{N(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^n (1 - \rho) = \\ &= \rho(1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \rho^{n-1} = \rho(1 - \rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \right) = \\ &= \rho(1 - \rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{1 - \rho} \right) = \rho(1 - \rho) \frac{1}{(1 - \rho)^2} \\ &= \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \end{aligned}$$

Verkehrstheorie | 2.1.19

Graph für N im M/M/1-System



Es ist sinnvoll, ρ als Nutzungsfaktor des Systems zu betrachten, d.h. ρ ist gleich dem Langzeit-Anteil, während dessen die Bedieneinheit belegt ist. Damit ist auch klar, dass $\rho = 1 - p_0$ (also gleich der Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kunde im System ist).

Verkehrstheorie | 2.1.20

Durchschnittliche Wartedauer

Die Durchschnittliche Wartedauer im System T ist gegeben durch (Little's Theorem):

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Die Durchschnittliche Wartedauer in der Schlange W ist gegeben durch (Little's Theorem):

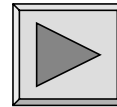
$$W = T - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

Schließlich ist die durchschnittliche Anzahl Kunden in der Schlange N_Q :

$$N_Q = \lambda W = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

Beispiel 1

Betrachten wir ein Paketvermittlungssystem mit der Ankunftsrate λ und der Bedienrate μ . Nun erhöhen wir λ und μ jeweils um den Faktor K . Wie verändert sich die Anzahl Kunden und die verbrachte Zeit im System?



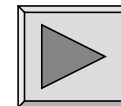
Verkehrstheorie | 2.1.22

Beispiel 2: statistisches Multiplexen versus durchgeschaltete Kanäle

m unabhängige Quellen generieren Poisson-Verkehr mit der jeweiligen Ankunftsrate λ/m Pakete/sec, der im ersten Fall über eine Leitung mit der Bedienrate μ Pakete/sec gesendet wird. Wenn der Strom auf eine einzige Leitung gegeben wird, können die m Quellen durch eine Quelle mit der Ankunftsrate λ modelliert werden.

Im zweiten Fall wird die Übertragungskapazität in m gleiche Anteile geteilt, wobei jeder Quelle ein Anteil zugeordnet wird.

Wie verhalten sich die durchschnittliche Anzahl Kunden im System und die Verzögerung?



Verkehrstheorie | 2.1.23

Das Ergebnis zeigt, dass ein durchgeschaltetes System für Datenverkehr ziemlich ineffizient ist. Solch ein System sind beispielsweise Modem-Verbindungen zum Datenaustausch über das Telefonnetz. Ein weiteres Beispiel ist das Mobiltelefon als Modem. Hier wurde vor kurzer Zeit GPRS eingeführt, das statistisches Multiplexen (bis zu einem gewissen Grade) erlaubt).

Für Datenverkehr wurden daher auch Techniken wie das Ethernet eingeführt, wo allen Quellen eine einzige breite Leitung zur Verfügung steht. Für Sprachverkehr, wo die Ankünfte keine Poisson-Prozesse, sondern vollkommen regulär sind, eignet sich hingegen das Multiplexen auf verschiedene Leitungen sehr wohl, da dort keine Gewinne durch statistisches Multiplexen zu erwarten sind.