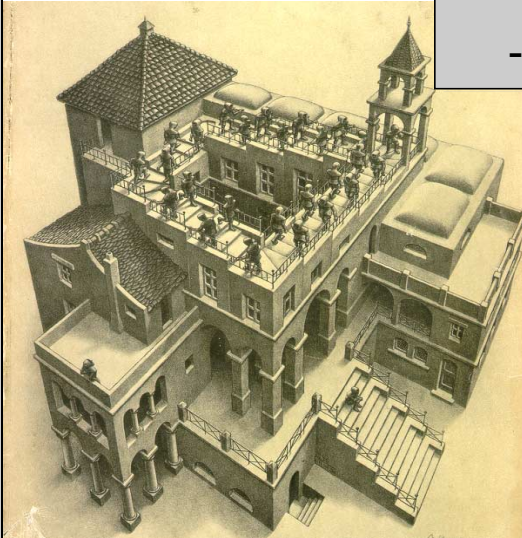


Nachrichtenverkehrstheorie Kap.1.2 - einige Verteilungen -



**Universität Hannover
Institut für Allgemeine Nachrichtentechnik
Kommunikationsnetze
Prof. Dr.-Ing. K. Jobmann**

Verkehrstheorie I.1.2.1

[Pap65] Papoulis, "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", MacGraw Hill, 1965

Gliederung

- Binomialverteilung
- Poisson-Verteilung
- **Poisson-Prozess**
- Weitere Verteilungen
- Markov-Ketten

Der Poisson-Prozess

Ein stochastischer Prozess wird mit mehr als einer Variablen beschrieben. Im einfachsten Fall hat der stochastische Prozess zwei Variable. Häufig ist die zweite Variable die Zeit. So ist der Poissonprozess über seine diskrete Zufallsvariable $x=k$ und die zeitliche Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit $p(x=k,t)$ beschrieben. Eine plausible Beschreibung ergibt sich direkt aus der poissonischen Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Nun nehmen wir an, dass die mittlere Anzahl der Versuche bei gleichmäßiger Versuchsdurchführung mit der Zeit linear wächst, und ersetzen deshalb den Mittelwert λ durch den mit der Zeit wachsenden Mittelwert λt :

$$f(k,t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Was beschreiben wir mit dem Poisson-Prozess?

- Ankunftsprozess $A(t)$, wobei $A(t)$ die Anzahl Ankünfte im Zeitraum $[0, t]$ bezeichnet (d.h. die Zahl Ankünfte im Zeitraum $[t, t + \tau]$ ist $A(t + \tau) - A(t)$)

$$P\{A(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

- k – Anzahl eingetroffener Kunden
- λ – Mittlere Ankunftsrate (Kunden/Zeit)

Bei einem Poisson-Prozess als Ankunftsprozess gilt:

$$P\{A(t + \tau) - A(t) = k\} = \frac{(\lambda \tau)^k}{k!} e^{-\lambda \tau}$$

Hierbei ist k die Anzahl der Ankünfte im Zeitintervall $[t, t + \tau]$

Begründung des Poisson-Prozesses

Wir zerlegen die Zeitachse in kleine Abschnitte mit Dauer τ .

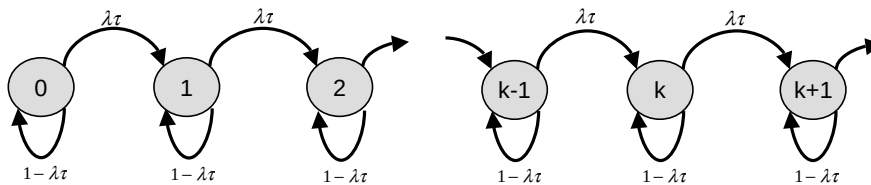
$$P\{A(t+\tau) - A(t) = 1\} = \lambda\tau + o(\tau)$$

$$P\{A(t+\tau) - A(t) = 0\} = 1 - \lambda\tau + o(\tau)$$

$$P\{A(t+\tau) - A(t) \geq 2\} = o(\tau)$$

$$\text{mit } \lim_{\tau \rightarrow 0} o(\tau) = 0$$

- Die Anzahl der Ankünfte k seit der Zeit $t=0$ ist der Zustand des Systems.
- Die Zustandsübergänge lassen sich als Zustands-Kette darstellen



Verkehrstheorie I.1.2.5

Wir wählen $o(\tau)$ sehr klein, so dass es verschwindet. Beachten Sie, dass die Kette eine Einbahnstraße hin zu größeren Zahlen k ist! Die Herleitung findet hier statt.

Die Wahrscheinlichkeit für den Zustand k zum Zeitpunkt $t + \tau$ ist gegeben durch die Wahrscheinlichkeit, dass das System im letzten Zeitabschnitt im Zustand $(k-1)$ war und eine Ankunft im Zeitraum $[t - \tau, t]$ stattgefunden hat, plus die Wahrscheinlichkeit, dass das System im Zustand k war und im Zeitraum $[t - \tau, t]$ keine Ankunft stattgefunden hat:

$$P\{A(t+\tau) = k\} = P\{A(t) = k-1\} \cdot \lambda\tau + P\{A(t) = k\} \cdot (1-\lambda\tau) = p_{k-1}(t) \cdot \lambda\tau + p_k(t) \cdot (1-\lambda\tau)$$

Für den Zustand $k=0$ gilt:

$$p_0(t+\tau) = p_0(t) \cdot (1-\lambda\tau)$$

Ausmultiplizieren und Umformen ergibt:

$$\frac{p_k(t+\tau) - p_k(t)}{\tau} = -\lambda \cdot p_k(t) + \lambda \cdot p_{k-1}(t),$$

$$\frac{p_0(t+\tau) - p_0(t)}{\tau} = -\lambda \cdot p_0(t)$$

Wenn wir $\tau \rightarrow 0$ gehen lassen, erhalten wir einen Satz Differentialgleichungen:

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_k(t) + \lambda \cdot p_{k-1}(t),$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_0(t)$$

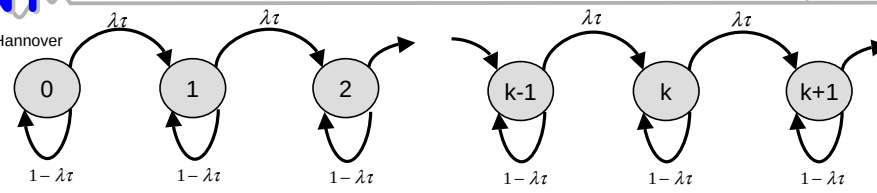
Die Lösung der zweiten Gleichung ist $p_0(t) = e^{-\lambda t}$

Für $k=1$ ergibt sich: $\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_1(t) + \lambda \cdot e^{-\lambda t} \Leftrightarrow p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$

Und für $k=2$: $\frac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda \cdot p_2(t) + \lambda^2 t \cdot e^{-\lambda t} \Leftrightarrow p_2(t) = \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\lambda t}$

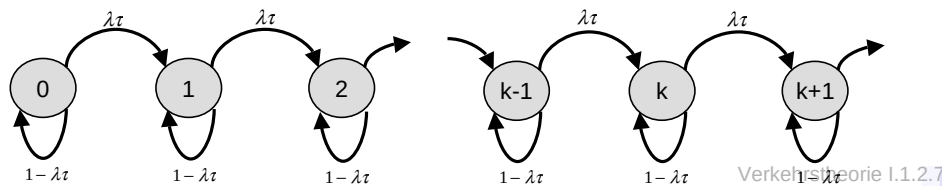
Durch Induktion ergibt sich:

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$



Gedächtnislosigkeit

- In der letzten Folie haben wir die Wahrscheinlichkeitsdichte für einen Prozess gesucht und gefunden, bei dem der Zustand zum Zeitpunkt t nur und ausschließlich vom Zustand zum Zeitpunkt $t-\tau$ abhängt!
 - ⇒ Der Prozess hängt also nicht von der ganzen Vorgeschichte, sondern nur vom aktuellen Zustand ab.
 - ⇒ Wie ist das dann mit den Zeiten zwischen Ankünften? Hängt die restliche Dauer bis zur nächsten Ankunft von der bereits abgelaufenen Dauer seit der letzten Ankunft ab?
 - ⇒ Die Herleitung über die Zustands-Kette verbietet das!



Verkehrstheorie I.1.2.7

Die Zustands-Kette besagt, dass in jedem beliebigen Zeitraum τ die Wahrscheinlichkeit für eine Ankunft $\lambda\tau$ ist. Das bedeutet, dass es egal ist, ob in einem der vorigen Zeitabschnitte τ eine Ankunft stattgefunden hat oder nicht. Das bedeutet aber auch, dass es völlig egal ist, wie lange die letzte Ankunft her war, die restliche Wartedauer ist also immer die Gleiche, egal wie lange die letzte Ankunft her ist!

Eigenschaften Poisson-Prozess

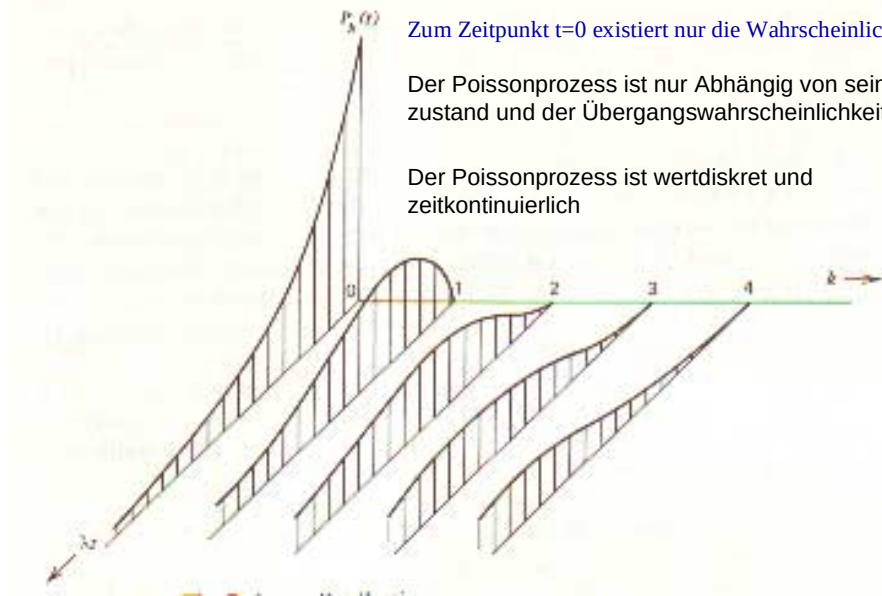
- Mittelwert: $\bar{n} = \lambda t$
- Varianz: $\sigma_n^2 = \lambda t$
- Herleitung siehe Poisson-Verteilung
- Die Gedächtnislosigkeit des Poisson-Prozesses wird auch Markov-Eigenschaft genannt.
(Er wird daher auch Markov-Prozess genannt)

Verkehrstheorie I.1.2.8

Die Herleitung des Mittelwerts und der Varianz für die Poisson-Verteilung wurde bereits im Rahmen der Vorlesung gezeigt. Die Berechnung für den Poisson-Prozess erfolgt analog.

Die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit lässt sich auch leicht aus der zeitdiskreten Formulierung des Poisson-Prozesses gewinnen.

Eigenschaften des Poisson-Prozesses



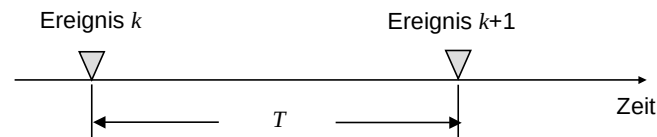
Zum Zeitpunkt $t=0$ existiert nur die Wahrscheinlichkeit $p_0(t)$

Der Poissonprozess ist nur Abhängig von seinem Vorzustand und der Übergangswahrscheinlichkeit

Der Poissonprozess ist wertdiskret und zeitkontinuierlich

Verkehrstheorie I.1.2.9

Dichte der Zwischenankunftszeiten



Sei T die Zwischenankunftszeit. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, dass $T \leq t$ ist:

$$P(T \leq t) = 1 - P(T > t)$$

$P(T > t)$ ist aber genau die Wahrscheinlichkeit des Zustands $k=0$, $P\{A(t)=0\}$, des Poisson-Prozesses ($P(T > t)$ beschreibt genau die Tatsache, dass zur Zeit t noch kein Paket angekommen ist):

$$P(T \leq t) = 1 - P\{A(t) = 0\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

$P(T \leq t)$ ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung $F(t)$ der Zwischenankunftszeiten. Damit ist die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d(1 - e^{-\lambda t})}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$$

Verkehrstheorie I.1.2.10

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(t)$ gehört zu einer Exponentialverteilung. Die eigenschaften der Exponentialverteilung schauen wir uns auf den kommenden Folien an.

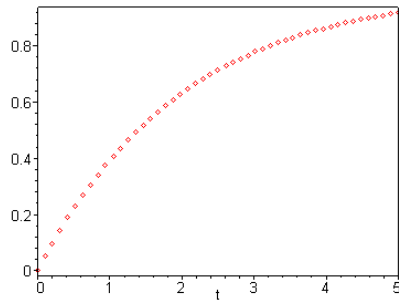
Mittelwert, Varianz der Exponentialverteilung

$$\Gamma\{n+1\} = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

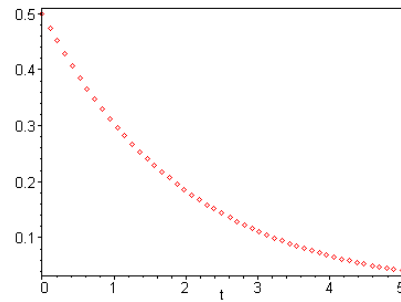
$$\Rightarrow E\{t^n\} = \int_0^{\infty} t^n e^{-\lambda t} dt = \frac{n!}{\lambda^n}$$

- Mittelwert: $E\{t\} = \frac{1}{\lambda}$
- 2. Moment: $E\{t^2\} = \frac{2}{\lambda^2}$
- Varianz: $\sigma^2 = E\{t^2\} - E^2\{t\} = \frac{1}{\lambda^2}$

Exponentielle Verteilung der Zwischenankunftszeiten



Wahrscheinlichkeitsverteilung



Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\lambda=0,5$$

Poisson-Prozess Zusammenfassung

- Der Poisson-Prozess hat die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P\{A(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

- Der Poisson-Prozess ist der einzige gedächtnislose Prozess!
Diese Eigenschaft wird auch Markov-Eigenschaft genannt
- Mittelwert und Varianz des Poisson-Prozesses sind identisch:

$$E\{k\} = \sigma^2 = \lambda$$

- Die Zwischenankunftszeiten gehorchen einer Exponentialverteilung mit Dichte:

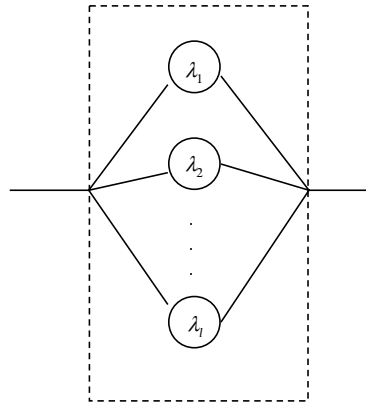
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Gliederung

- Binomialverteilung
- Poisson-Verteilung
- Poisson-Prozess
- Weitere Verteilungen
- Markov-Ketten

Hyperexponentialverteilung

H_l



- l : Anzahl der parallelen Stufen
- Nachbildung der gewünschten Verteilung durch Parallelschalten von exponentiell verteilten Einzelprozessen (Phasen)
- Ein Auftrag wird mit der Wahrscheinlichkeit p_j von der Phase j bedient
- es ist nur eine Phase zur Zeit aktiv
- Verteilung der Zwischenankunftszeiten:

$$F_T(t) = \sum_{j=1}^l p_j \cdot (1 - e^{-\lambda_j t}), \quad t \geq 0$$

Verkehrstheorie I.1.2.15

Bei l parallelen Prozessen, bei denen die i -te Zufallsvariable x_i mit der Wahrscheinlichkeit p_i auftritt, gilt für den Mittelwert und die Varianz der sich ergebenden Zufallsvariablen x :

$$E\{x\} = \sum_{i=1}^l p_i E\{x_i\} \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^l p_i = 1$$

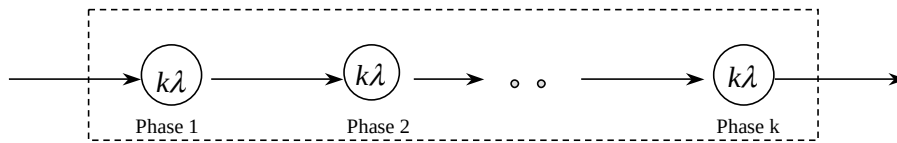
$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^l p_i E\{x_i^2\} - E^2\{x\}$$

Für die Verteilungsfunktion gilt:

$$F(x) = \sum_{i=1}^l p_i F_i(x)$$

Anwendung dieser allgemeinen Sätze ergibt die Verteilungsfunktion in der Folie

Erlang-k-Verteilung



- Serienschaltung von k identischen Stufen (Phasen)
- jede Stufe für sich ist exponentiell verteilt (mit Rate λ)

$$F_T(t) = e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}; \quad \lambda > 0, t \geq 0, k = 1, 2, \dots$$

$$f_T(t) = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda e^{-\lambda t}$$

Verkehrstheorie I.1.2.16

Die Serienschaltung von „Zufallsgeneratoren“, die Zeitintervalle generieren, entspricht der Summation der Zeitintervalle. In diesem Falle ist die Fragestellung „Wie ist die Zeit zwischen der n -ten und der $(n+k)$ -ten Ankunft verteilt. Bei der Erlang- k Verteilung wir davon ausgegangen, dass die Zwischenankunftszeiten der einzelnen Ankünfte exponentiell verteilt sind mit jeweils identischen Parametern.

Allgemein ergibt sich bei der Summation von k unabhängigen zufälligen Zeitintervallen die Zufallsvariable durch Faltung der k Zufallsvariablen. Wenn m der Mittelwert und σ^2 die Varianz des Gesamtprozesse ist und $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$, bzw. $\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2\}$ die Mittelwerte, bzw. Varianzen der Einzelprozesse sind, gilt:

$$m = \sum_{i=1}^k m_i \quad \text{ sowie } \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2$$

Für die Verteilungsdichte der Summe der Zeitintervalle gilt, dass sie sich aus der Faltung der Einzelverteilungsdichten ergibt:

$$F(t) = F_1(t) \otimes F_2(t) \otimes \dots \otimes F_k(t)$$

Erlang-k Verteilung Grafik

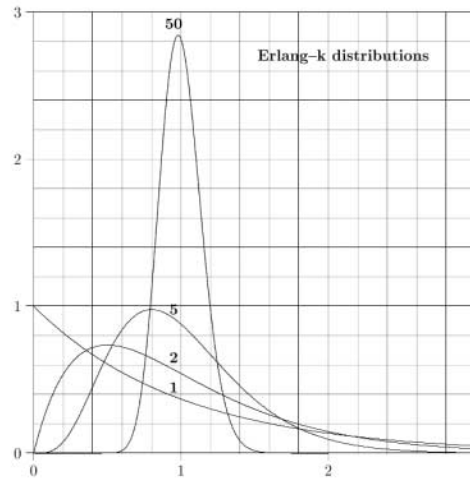
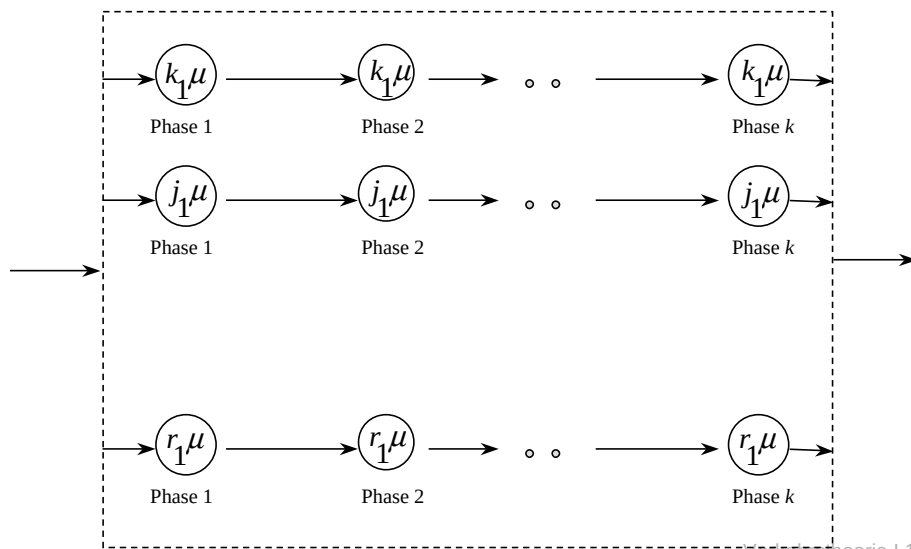


Figure 4.3: Erlang- k distributions with mean value equal to one. The case $k = 1$ corresponds to an exponential distribution (density functions).

Verkehrstheorie I.1.2.17

Aus: ITU-D Study group 2, „Handbook „Teletraffic Engineering“, Genf, Dez. 2002
(<http://www.tele.dtu.dk/teletraffic/>)

Hypoexponentialverteilung



Verkehrstheorie I.1.2.18

Durch Kombination der Hyperexponential- und der Erlang-k-Verteilung können beliebig komplexe Strukturen erzeugt werden

Die Hypoexponentialverteilung wird üblicherweise dann eingesetzt, wenn die Exponentialverteilung nicht ausreicht, um die betrachteten Zeitintervalle genau genug anzunähern. Dann kann man mehrere Exponentialverteilungen so kombinieren, dass sie das Teilnehmerverhalten ausreichend genau beschreiben.

Zusammenfassung: Eigenschaften der Zufallsprozesse zu Zeitintervallen

Verteilung	Parameter	Mittelwert $\bar{X}$	Varianz $\text{var}(X)$	Formfaktor ε
Exponential	λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	2
Erlang k	λ, l $l = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{l\lambda^2}$	$1 < 1 + \frac{1}{k} \leq 2$
Hyperexponential	l, λ_i, p_i	$\sum_{i=1}^l \frac{p_i}{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda}$	$2 \cdot \sum_{i=1}^l \frac{p_i}{\lambda_i^2} - \frac{1}{\lambda^2}$	$2 \frac{\sum_{i=1}^l \frac{p_i}{\lambda_i^2}}{\left(\sum_{i=1}^l \frac{p_i}{\lambda_i}\right)^2} \geq 2$

Verkehrstheorie I 1.1.2.19

Der Formfaktor ε ist ein Maß für die relative Breite der Verteilung:

$$\varepsilon = \frac{E\{x^2\}}{E^2\{x\}} = 1 + \left(\frac{\sigma}{E\{x\}} \right)^2$$

Es gilt:

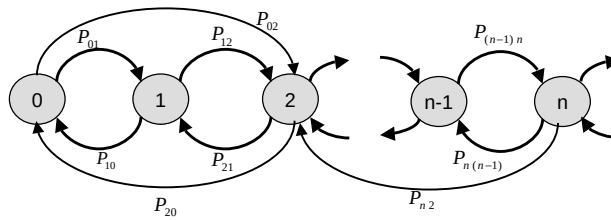
$$\varepsilon \geq 1$$

Wenn $1 \leq \varepsilon \leq 2$, dann sprechen wir von einer steilen, für $\varepsilon > 2$ von einer flachen Verteilung.

Gliederung

- Binomialverteilung
- (Weitere Verteilungen)
- Poisson-Verteilung
- Poisson-Prozess
- **Markov-Ketten**

Markov-Ketten



- Beschreibt einen zeitdiskreten oder zeitkontinuierlichen stochastischen Prozess, der positive Integerzahlen annehmen kann
- Die Aufenthaltsdauer in Zustand i ist exponentiell verteilt (im zeitkontinuierlichen Fall)
- Wenn der Prozess in Zustand i ist, gibt es eine feste Wahrscheinlichkeit P_{ij} dafür, dass er als nächstes im Zustand j ist.
- $\sum_j P_{ij} = 1$ und $p_j = \sum_i p_i P_{ij}$

Verkehrstheorie I.1.2.21

Die Aufenthaltsdauer im zeitkontinuierlichen Fall ist durch die Exponentialverteilung gegeben (Der Aufenthalt kann auch so interpretiert werden, dass nach einem Zustandsübergang das System im Zustand k ist und die Zeit bis zum nächsten Zustandsübergang exponentiell verteilt ist).

Im zeitdiskreten Fall ist es so, dass in jedem Zeitintervall $\delta \tau$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Übergang in Zustand i aus Zustand j oder von Zustand i in den Zustand k passiert, gegeben ist durch P_{ji} , bzw. durch P_{ik} . Wenn die Wahrscheinlichkeiten unabhängig sind, entsprechen die Aufenthaltsdauern in den Zuständen einer Exponentialverteilung (siehe Herleitung Poisson-Prozess).

Eigenschaften von Markov-Ketten

- Nicht-reduzierbare Markov-Kette: Man kann in endlichen Schritten von jedem Zustand in jeden anderen Zustand übergehen
- Reguläre Markov-Kette: Endliche Anzahl Zustandsübergänge in jedem endlichen Zeitintervall
- Aperiodische Markov-Kette: Es gibt keinen Zustand, der nur nach gleichen Perioden wieder erreicht werden kann

→ $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = j \mid X(0) = i\}$ existiert, ist stationär und unabhängig vom Anfangszustand i

(d.h. man kann eine Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnen, bei der es egal ist, wann man auf den Prozess schaut“)

Verkehrstheorie I.1.2.22

Hier ist wieder die Gedächtnislosigkeit der Verweildauer in einem Zustand wichtig. Der Markov-Prozess ist der einzige gedächtnislose stochastische Prozess. Dies bedeutet, dass man nicht darauf achten muß, wie lange der gerade in Bedienung befindliche Kunde bereits bedient wird, da die restliche Bedienzeit immer die gleiche statistische Verteilung hat, unabhängig vom Zeitpunkt des Draufschauens. Wir werden bei M/G/1-Systemen sehen, dass dort diese Voraussetzung nicht gilt und damit die mathematische Lösung des Problems ungleich schwerer ist.

Die Existenz einer Wahrscheinlichkeitsdichte ist eindeutig, wenn sie existiert. Dann spricht man von einer stationären Verteilung. Wenn sie nicht existiert, sind alle $p_j = 0$ und die Markov-Kette hat keine stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte. Ein Beispiel für eine Markov-Kette ohne stationäre Dichte ist der Poisson-Prozess nach Folie 35 (Lassen Sie dazu $t \rightarrow \infty$ gehen!). Allerdings ist die Markov-Kette zum Poisson-Prozess auch nicht nicht-reduzierbar, da man nicht von jedem Zustand in jeden anderen Zustand gelangen kann. Wir werden später Markov-Ketten kennen lernen, bei denen eine stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte existiert.

Globale Gleichgewichtsgleichungen

Erinnerung: $\sum_j P_{ij} = 1$ und $p_j = \sum_i p_i P_{ij}$

Wenn man $\sum_j P_{ij} = 1$ mit p_j multipliziert und die Indizes vertauscht, erhält man:

$$p_j \sum_i P_{ji} = \sum_i p_i P_{ij}$$

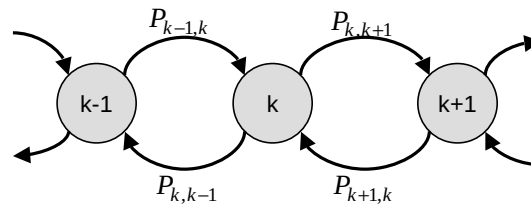
Diese Gleichung nennt man die globale Gleichgewichtsgleichung. Sie gilt, wenn die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte existiert.

Interpretation: $p_i P_{ij}$ kann als die Langzeit-Wahrscheinlichkeit für den Übergang aus Zustand i in Zustand j interpretiert werden. Die globale Gleichgewichtsgleichung sagt also, dass die Rate der Übergänge aus Zustand j heraus (linke Seite) gleich der Rate der Übergänge in Zustand j hinein (rechte Seite) ist.

Typischerweise kann die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte durch Lösung der globalen Gleichgewichtsgleichung gefunden werden. Eine Verteilung, die ihr genügt, ist die einzige existierende Wahrscheinlichkeitsdichte.

Geburts-Sterbeprozess

- Der Zustand k kann nur vom Vorgänger $k-1$ und Nachfolger $k+1$ erreicht werden und der Zustand k kann nur zum Vorgänger $k-1$ und Nachfolger $k+1$ verlassen werden
- Die Übergangswahrscheinlichkeiten können zustandsabhängig sein



Verkehrstheorie I.1.2.24

Detaillierte Gleichgewichtsgleichungen

Für Geburts-Sterbeprozesse muss im stationären Fall die Übergangsraten von Zustand k in den Zustand $k+1$ gleich der Übergangsrate von Zustand $k+1$ in Zustand k sein. Die Gleichgewichtsgleichung dazu ist:

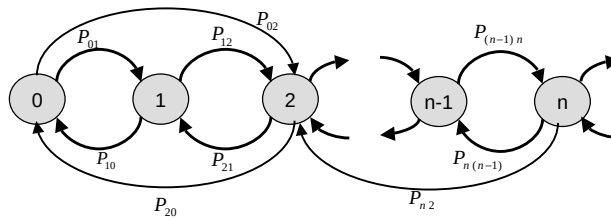
$$p_k P_{k,k+1} = p_{k+1} P_{k+1,k}$$

Diese Gleichung ist ein Spezialfall der detaillierten Gleichgewichtsgleichung:

$$p_j P_{ji} = p_i P_{ij}$$

Die detaillierten Gleichgewichtsgleichungen sind ein Spezialfall der globalen Gleichgewichtsgleichungen, gelten aber nicht für jede Markov-Kette. Wenn sie jedoch gelten, dann erleichtern sie die Berechnung der stationären Wahrscheinlichkeitsdichte enorm.

Noch einmal: Was ist eine Markov-Kette



- Beschreibt einen zeitdiskreten oder zeitkontinuierlichen stochastischen Prozess, der positive Integerzahlen annehmen kann
- Die Aufenthaltsdauer in Zustand i ist exponentiell verteilt (im zeitkontinuierlichen Fall)
- Wenn der Prozess in Zustand i ist, gibt es eine feste Wahrscheinlichkeit P_{ij} dafür, dass er als nächstes im Zustand j ist.
- Markov-Ketten sind gedächtnislose Prozesse!

Verkehrstheorie I.1.2.26

Die Aufenthaltsdauer im zeitkontinuierlichen Fall ist durch die Exponentialverteilung gegeben (Der Aufenthalt kann auch so interpretiert werden, dass nach einer Ankunft das System im Zustand k ist und die Zeit bis zur nächsten Ankunft/dem nächsten Verlassen des Zustands exponentiell verteilt ist).

Im zeitdiskreten Fall ist es so, dass in jedem Zeitintervall δt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde im Zustand i aus Zustand j ankommt oder den Zustand i in den Zustand k verlässt, gegeben ist durch P_{ji} , bzw. durch P_{ik} . Wenn die Wahrscheinlichkeiten unabhängig sind, entsprechen die Aufenthaltsdauern in den Zuständen einer Exponentialverteilung (siehe Herleitung Poisson-Prozess).