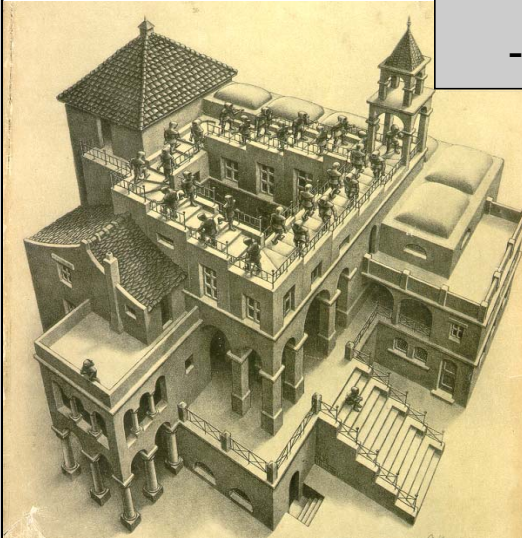


Nachrichtenverkehrstheorie Kap.1.2 - einige Verteilungen -



**Universität Hannover
Institut für Allgemeine Nachrichtentechnik
Kommunikationsnetze
Prof. Dr.-Ing. K. Jobmann**

Verkehrstheorie I.1.2.1

[Pap65] Papoulis, "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", MacGraw Hill, 1965

Häufig eingesetzte Dichte- und Verteilungsfunktionen

- Diskrete Ereignisse
 - ⇒ Gleichmäßige Verteilung
 - ⇒ Binomialverteilung
 - ⇒ Hypergeometrische Verteilung
 - ⇒ Poissonverteilung
- Kontinuierliche Ereignisse
 - ⇒ Gleichverteilung
 - ⇒ Normalverteilung
 - ⇒ logarithmische Normalverteilung
 - ⇒ Exponentialverteilung
 - ⇒ Hyperexponentialverteilung
 - ⇒ Erlang-k-Verteilung
 - ⇒ Weibullverteilung
 - ⇒ χ^2 -Verteilung
 - ⇒ Fischer-Verteilung
 - ⇒ STUDENT-Verteilung

Verkehrstheorie I.1.2.2

Es ist etwas inkonsequent hier sowohl im diskreten, wie auch im kontinuierlichen Fall von Verteilung zu sprechen. Im vorangegangenen Kapitel haben wir überlegt, dass die Verteilung für die Beschreibung der diskreten Vorgänge besser geeignet ist; für die kontinuierlichen Vorgänge ist vielmehr die Dichte geeignet. Im umgangssprachlichen Bereich wird darauf jedoch keine Rücksicht genommen.

In der Verkehrstheorie spielen die Poisson-, Exponential-, die Hyperexponential- und die Erlang-k-Verteilung eine herausgehobene Rolle. Die Poissonverteilung ist ein Spezialfall der Binomialverteilung, deshalb betrachten wir die Binomialverteilung als erste.

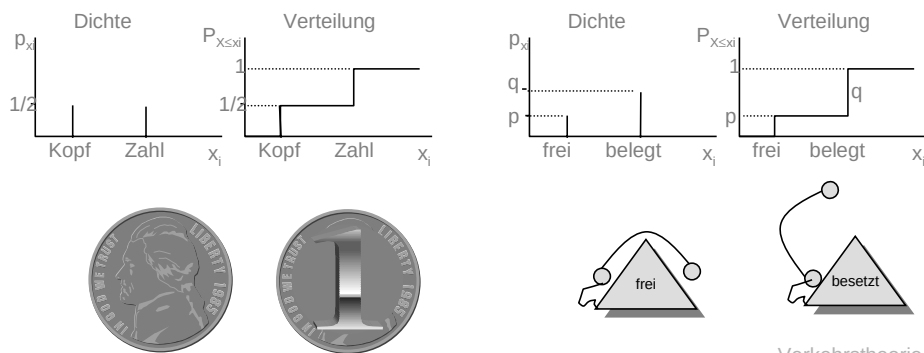
Die Normal-, Weibull-, χ^2 -, Fischer- und Studentverteilung wird in unterschiedlichen Testverfahren eingesetzt, die jeweils aus der Literatur zu entnehmen sind [Pap65].

Gliederung

- **Binomialverteilung**
- Poisson-Verteilung
- Poisson-Prozess
- Weitere Verteilungen
- Markov-Ketten

Ausgangssituation der Binomial-Verteilung

- Münzwurf oder Frei-/Belegtprüfung eines Telefones
 $p(\text{Kopf})=p$; $p(\text{Zahl})=q=1-p$
oder
 $p(\text{frei})=p$; $p(\text{belegt})=q=1-p$



Verkehrstheorie I.1.2.4

Die Bernoulli-Verteilung gibt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines von zwei möglichen Elementarereignissen an. Als Beispiel kann der Münzwurf oder in der Nachrichtentechnik die Frei-/Belegt-Prüfung einer Telekommunikationsquelle gesehen werden. In der Literatur findet man für die Bernoulli-Verteilung auch häufig den Begriff der Binomial-Verteilung. Der Begriff Bernoulli-Verteilung geht auf den Physiker J. Bernoulli zurück, der die zugehörigen Versuche erstmalig für uns zugänglich dokumentiert hat. J. Bernoulli war der Vater von D. Bernoulli, der die Gasgesetze weiterentwickelt hat. Der Begriff Binomial-Verteilung erklärt sich aus der folgenden Ableitung von selbst.

Voraussetzung für die Binomialverteilung ist, dass Ergebnisse wiederholter zufälliger Versuche statistisch unabhängig sind!

Binomial-Verteilung , Ableitung, 1.Schritt

- Erweiterung der Fragestellung:

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das k-malige Auftreten eines der beiden Elementarereignisse bei n Versuchen, also im zweiten Beispiel die Wahrscheinlichkeit für k mal belegt gefundenes Telefon bei n Versuchen.

- Wir nähern uns der Lösung schrittweise 1.Schritt :

- ⇒ Zunächst betrachten wir $n=2$ Versuche, also ein Telefon, das zweimal auf frei oder belegt geprüft wird. Dabei können vier unterschiedliche Versuchsergebnisse auftreten:
frei, frei; frei, belegt; belegt, frei; belegt, belegt;
- ⇒ die Wahrscheinlichkeit für ein freies Telefon ist $P(\text{frei}) = p$ und für ein belegtes Telefon $P(\text{belegt}) = q$
- ⇒ Da die Ereignisse unabhängig voneinander sind, errechnen sich die Wahrscheinlichkeiten für die vier Versuchsergebnisse durch Multiplikation der Einzelwahrscheinlichkeiten:

Versuchsergebnis	frei, frei	frei, belegt	belegt, frei	belegt, belegt
Wahrscheinlichkeit	$p \cdot p$	$p \cdot q$	$q \cdot p$	$q \cdot q$

Verkehrstheorie I.1.2.5

Binomial-Verteilung , Ableitung, 1.Schritt

- nun können wir die Wahrscheinlichkeit für keinmal $P(X=0)$, einmal $P(X=1)$ und zweimal $P(X=2)$ belegt gefundenes Telefon angeben:

Versuchsergebnis	frei, frei	frei, belegt	belegt, frei	belegt, belegt
Wahrscheinlichkeit	$p \cdot p$	$p \cdot q$	$q \cdot p$	$q \cdot q$
	↓	↓	↓	
x	0	1	2	
p(x)	$p \cdot p$	$2 \cdot p \cdot q$	$q \cdot q$	

Binomial-Verteilung, Ableitung, 2.Schritt

2.Schritt

- nun erweitern wir auf $n=3$ Versuche. Dabei können acht unterschiedliche Versuchsergebnisse auftreten, f=frei, b=belegt:
f, f, f; f, f, b; f, b, f; b, f, f; f, b, b; b, b, f; b, f, b; b, b, b;
- Die Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten der Versuchsergebnisse erweitert sich zu:

Versuchsergebnis	f,f,f	f,f,b	f,b,f	b,f,f	f,b,b	b,b,f	b,f,b	b,b,b		
Wahrscheinlichkeit	p^3	$3p^2q$	$3pq^2$	q^3	p^2q	pq^2	q^2p	q^3		
x	3	2	1	0						
p(x)	p^3	$3p^2q$	$3pq^2$	q^3						

- Dabei gilt wieder, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten das sichere Ereignis repräsentieren muss:

$$\sum_{k=0}^3 P(X = k) = (p + q)^3 = 1$$

Wir erkennen, dass die einzelnen Wahrscheinlichkeiten sich gemäß dem binomischen Satz verhalten!

Verkehrstheorie I.1.2.7

Binomial-Verteilung, Ableitung, m.Schritt

m.Schritt

- nun erweitern wir auf n Versuche und wenden die Erkenntnis über das Verhalten der Wahrscheinlichkeiten $P(X=k)$, $k \in \mathbb{N}$ nach dem binomischen Satz an ($X=k$ ist das Ereignis, dass das Element mit p k -Mal auftritt):

$$P(X = n) = p^n$$

$$P(X = n-1) = n \cdot p^{n-1} q = \frac{n}{1} p^{n-1} q = \binom{n}{1} p^{n-1} q$$

$$P(X = n-2) = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p^{n-2} q^2 = \binom{n}{2} p^{n-2} q^2$$

...

$$P(X = n-k) = \binom{n}{k} p^{n-k} q^k$$

...

$$P(X = 0) = q^n$$

Wahrscheinlichkeitsdichte
der Binomialverteilung

$$P(X = k) = \binom{n}{k} q^{n-k} p^k$$

Verkehrstheorie I.1.2.8

Die Dichte, auch Wahrscheinlichkeitsverteilung genannt der Binomialverteilung ist plausibel, denn:

k Belegtfälle treten mit der Wahrscheinlichkeit q^k auf,

dann gibt es bei n Versuchen die Wahrscheinlichkeit für die freien Fälle mit p^{n-k} ,

aus den Betrachtungen zur Kombinatorik kennen wir bereits, dass es n über k unterschiedliche Möglichkeiten zur Anordnung, und damit unterschiedliche Fälle für k belegte Zustände gibt.

Binomiale Verteilungsfunktion

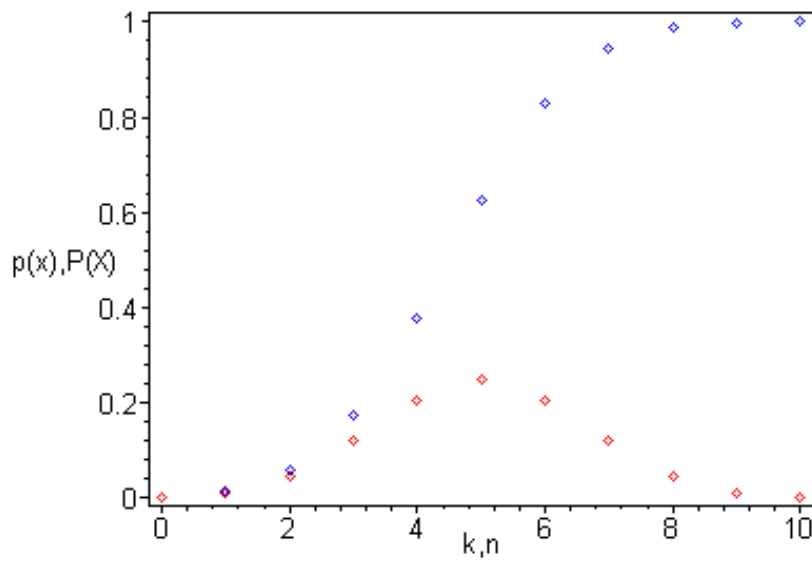
Die Verteilungsfunktion $F(x \leq k)$ ergibt sich wie gewohnt aus der Summation aller Wahrscheinlichkeiten, bis k erreicht ist:

$$F(k) = P(X \leq k) = \begin{cases} 0 & \text{für } X \leq 0 \\ \sum_{x=0}^k \binom{n}{x} q^{n-x} p^x & \text{für } 0 < X \leq n \\ 1 & \text{für } X > n \end{cases}$$

$$n, k \in \mathbb{N}$$

Grafische Darstellung der Binomialverteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion, $p=0,5$



Verkehrstheorie I.1.2.10

Erwartungswert der Binomialverteilung

Der Erwartungswert errechnet sich aus dem Produkt des Ereignisses und seiner Wahrscheinlichkeit, summiert über alle Ereignisse:

$$\mu = E(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot p_k = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Der erste Wert für $k=0$ liefert keinen Beitrag, da auch $0 \leq p(x=k) \leq 1$ diese null nicht eliminiert, folglich reicht es aus, wenn die Summe nur von $k=1$ bis n läuft :

$$\mu = E(X) = \sum_{k=1}^n k \cdot p_k = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Durch Kürzen von k und Ausklammern von n und p ergibt sich eine Form, bei der np vor die Summe gezogen werden kann:

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n np \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = \\ &np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} \end{aligned}$$

Erwartungswert der Binomialverteilung

Mit $k'=k-1$ und Änderung der Laufvariablen in der oberen Grenze auf $n-1$ verändert sich die Beziehung zu:

$$\mu = np \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k'!((n-1)-k')!} p^{k'} q^{(n-1)-k'}$$

Der Term unter der Summe stellt nun wieder eine binomiale Dichtefunktion dar, deren Summe über alle Zustände wieder gleich 1 sein muß:

$$\sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k'!((n-1)-k')!} p^{k'} q^{(n-1)-k'} = 1$$

somit wird der Erwartungswert zu:

$$\mu = np$$

Varianz der Binomialverteilung

Die Varianz ist das zweite zentrale Moment:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu_x^2$$

Mit den Werten der Binomialverteilung und der Verschiebung um den Mittelwert:

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^n k^2 p_k - (np)^2$$

Mit $k^2 = k \cdot k = k(k-1+1) = k(k-1) + k$:

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^n k(k-1)p_k + \sum_{k=0}^n k p_k - (np)^2$$

Die zweite Summe entspricht dem Erwartungswert der Binomialverteilung:

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^n k(k-1)p_k + np - (np)^2$$

$$S = \sum_{k=0}^n k(k-1)p_k = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Für $k=0$ und $k=1$ werden die Terme unter der Summe wieder 0, so dass die Laufvariable an der unteren Grenze wieder geändert werden kann:

$$S = \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Durch Kürzen von $k(k-1)$ und Ausklammern von $n(n-1)$ und von p^2 :

$$S = \sum_{k=2}^n n(n-1)p^2 \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} q^{n-k}$$

Nach Einführung einer neuen Laufvariablen $k'=k-2$:

$$S = \sum_{k'=0}^{n-2} n(n-1)p^2 \frac{(n-2)!}{k'!(n-(k'+2))!} p^{k'} q^{n-(k'+2)} = \sum_{k'=0}^{n-2} p^2 n(n-1) \binom{n-2}{k'} p^{k'} q^{(n-2)-k'}$$

Wird nun $n(n-1)p^2$ ausgeklammert, verbleibt die Summe wieder als das sichere Ereignis mit dem Wert 1:

$$S = n(n-1)p^2$$

Varianz der Binomialverteilung

Dies Zwischenergebnis setzen wir wieder in die Formel für die Varianz ein:

$$\sigma^2 = S + np - (np)^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2$$

$$= (np)^2 - np^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$$

$$\sigma^2 = npq = \mu q = \mu(1-p)$$

Eigenschaften der Binomialverteilung

- Diskrete Verteilung
- Einsatzgebiet:
 - ⇒ Stichprobenverteilung für die Wareneingangskontrolle (eine Ware ist gut oder fehlerhaft)
- für große n kann die Binomialverteilung durch die Normalverteilung mit den Parametern $\mu_x = E(X_n)$ und $\sigma^2 = E(X_n^2)$ ersetzt werden (Satz von DeMoivre-Laplace)
- Sind X_n und X_m mit den Parametern n, p und m, p binomialverteilte Zufallsvariablen, so ist die Zufallsvariable $X = X_n + X_m$ auch binomialverteilt, und zwar mit den Parametern $m+n$ und p .
- Für $p=0,5$ ist die Binomialverteilung symmetrisch
- Rekursionsformel:

$$P_p^n(X = k+1) = \frac{n-k}{k+1} \frac{p}{1-p} P_p^n(X = k)$$

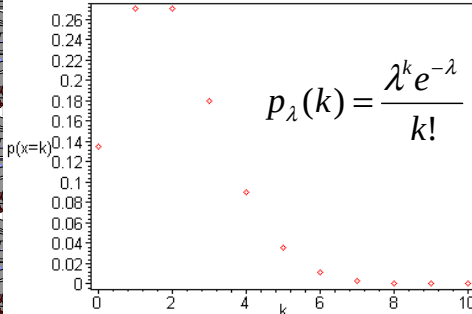
Verkehrstheorie I.1.2.16

Gliederung

- Binomialverteilung
- **Poisson-Verteilung**
- Poisson-Prozess
- Weitere Verteilungen
- Markov-Ketten

Poissonverteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte der Poissonverteilung für Lambda = 2



Motivation

Die Poissonverteilung hat in der Verkehrstheorie eine große Bedeutung erlangt, da sich der Verkehr einer unendlich großen Teilnehmergruppe, wenn keine koordinierenden Ereignisse vorliegen; gemäß der Poissonverteilung verhält. Keine koordinierenden Ereignisse heißt, dass die einfallenden Verkehrswünsche der unendlich vielen Teilnehmer unabhängig voneinander sind und dass auch die Auslöseereignisse unabhängig voneinander sind. Für praktische Zwecke muß natürlich nicht mit unendlich vielen Teilnehmern gerechnet werden, stattdessen reicht es aus, wenn die Teilnehmerzahl mindestens zehn mal größer ist, als die Kanalzahl.

Aufruf der Poissonverteilung in Maple:

```
with(plots):
> setoptions(title=' Wahrscheinlichkeitsdichte der Poissonverteilung ', style=POINT, axes=BOXED);
>
>
> poissondensity:=[[k,stats[statevalf,pf,poisson[k]](2)]$k=0..10];
> P2:=plot(poissondensity,color=red):display(P2,labels=["k","p(x=k)"]);
```

Wahrscheinlichkeitsdichte der Poissonverteilung

Die Binomialverteilung hatten wir abgeleitet zu:

$$p(x = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Sie gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass bei n statistisch unabhängigen Versuchen ein binäres Elementarereignis mit der Wahrscheinlichkeit p (das Gegenereignis tritt mit der Wahrscheinlichkeit $q=1-p$ auf) genau k mal auftritt.

Bei der Poissonverteilung lassen wir die Zahl der Versuche gegen unendlich gehen und die Wahrscheinlichkeit p für das Einzelereignis gegen null:

$$n \rightarrow \infty, \quad p \rightarrow 0 \quad \text{und zwar derart, dass} \quad n \cdot p = \lambda$$

Die Grenzwertbildung können wir in zwei Schritten vornehmen; p^k muss bei der Grenzwertbildung wegen seiner Unabhängigkeit von n nicht berücksichtigt werden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X = k) = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \right] \cdot [p^k] \cdot \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (1-p)^{n-k} \right]$$

Verkehrstheorie I.1.2.19

Ableitung/
Derivation

Die Poissonverteilung wird in der Literatur üblicherweise aus der Binomialverteilung abgeleitet.

Wahrscheinlichkeitsdichte der Poissonverteilung

Betrachten wir zunächst den ersten Term:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Das Kürzen von $(n-k)!$ führt auf:

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1)}{k!}$$

Wenn n gegen unendlich geht, dann ist $n=(n-1)=(n-2)=\dots=(n-k+1)$ und auf dem Bruchstrich stehen k Terme. Somit wird der erste Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!}$$

Verkehrstheorie I.1.2.20

Ableitung/
 Derivation

Wahrscheinlichkeitsdichte der Poissonverteilung

Nun wenden wir uns dem zweiten Term zu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1-p)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}$$

Damit kann der Grenzwert der Binomialverteilung für $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ und $\lambda \rightarrow n \cdot p$ angegeben werden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X = k) = \frac{n^k}{k!} p^k e^{-\lambda} = \frac{(np)^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Dieser Grenzwert stellt die Wahrscheinlichkeitsdichte der Poisson-Verteilung dar:

$$f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Verkehrstheorie I.1.2.21

Ableitung/Derivation

Der Übergang

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}$$

könnte durchaus Schwierigkeiten machen, deshalb gebe ich einige Hinweise:

Es ist bekannt, dass die Folge $(1+1/n)^n$ für $n \rightarrow \infty$ gegen die Euler'sche Zahl e strebt..

Wenn $n \rightarrow \infty$, dann strebt $n-k$ gegen n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

Nun stellen wir den Bruch in der Klammer um und klammern ein $-\lambda$ aus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{-\lambda}}\right)^{-\lambda}$$

Mit $z = n/(-\lambda)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{-\lambda}}\right)^{-\lambda} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e^{-\lambda}$$

Das wäre so nun in Ordnung, wenn nicht Euler seine Euler'sche Zahl mit n aus dem Bereich der natürlichen Zahlen entwickelt hätte. Hier ist z aber aus dem Bereich der reellen Zahlen.

Mittelwert und Varianz der Poissonverteilung

Konventionelle Herleitung, Mittelwert = Summe der mit der Wahrscheinlichkeit gewichteten Werte der Ereignisse ($p_k = f(k)$):

$$\mu = E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Für $k=0$ ist der Summenbeitrag null, daher kann die Summation bei $k=1$ starten. Wie schon bei der Ableitung des Mittelwertes der Binomialverteilung kann wieder λ und $e^{-\lambda}$ ausgeklammert werden:

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

Jetzt ersetzen wir $k-1=k_1$ und können sehen, dass die Summe wieder der Taylor-Reihe der Exponentialfunktion entspricht :

$$\mu = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k_1}}{(k_1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Verkehrstheorie I.1.2.22

Ableitung / Derivation

Die konventionelle Herleitung der Varianz werde ich nicht vortragen, sondern lediglich für das Selbststudium hier angeben:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu_x^2$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_{(k)} - \mu^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) - \lambda^2 \\ &= \lambda e^{-\lambda} \left(\lambda \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{\lambda} \right) - \lambda \\ &= \lambda e^{-\lambda} (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) - \lambda = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = \lambda = \mu$$

Variance of the Poisson Distribution

$$\sigma^2 = E\{X^2\} - E^2\{X\}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_{(k)} - \mu^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) - \lambda^2 \\ &= \lambda e^{-\lambda} \left(\lambda \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{\lambda} \right) - \lambda^2 \\ &= \lambda e^{-\lambda} (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ \sigma^2 &= \lambda = \mu\end{aligned}$$

Berechnung der z-Transformierten der Poisson-Verteilung

Die z-Transformation der Poissonverteilung berechnet sich zu:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k$$

Mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)^k}{k!} = e^{-a}$$

Ergibt sich:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}$$

Verkehrstheorie I.1.2.24

example

Zum Nachweis der Berechnung der Momente berechnen wir jetzt die z-Transformierte der Wahrscheinlichkeitsdichte der Poissonverteilung. Diese Berechnung kann durchaus etwas Geschick erfordern. In vielen Fällen sind diese Transformationen schon durchgeführt und können der Literatur entnommen werden. Das Ergebnis für die Poissonverteilung ist z.B. im [Bolch 1989, S.26]. Die hier verwendeten Tabellen für die z-Transformation sind in [Klei75I, S.330/331] zu finden.

**Berechnung von Mittelwert und
Varianz der Poisson-Verteilung**Erstes Moment $\equiv$ Mittelwert:

$$\left. \frac{dG(z)}{dz} \right|_{z=1} = \lambda e^{\lambda(z-1)} = \lambda e^{\lambda(1-1)} = \lambda$$

zweites Moment als Vorstufe zur Varianz:

$$\left. \frac{d^2 G(z)}{dz^2} \right|_{z=1} = E\{k^2\} - E\{k\} = \lambda^2 e^{\lambda(z-1)} \Big|_{z=1} = \lambda^2$$

Varianz:

$$\sigma^2 = E\{k^2\} - E\{k\}^2$$

$$E\{k^2\} = E\{k^2\} - E\{k\} + E\{k\} = \lambda^2 + \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Verkehrstheorie I.1.2.25

example

Die erste und zweite Ableitung der z-Transformierten zur Bestimmung des ersten und zweiten Momentes ist sehr einfach durchzuführen. Lediglich beim zweiten Moment ist zu beachten, dass für die Formulierung der Varianz noch eine kleine Umformung nötig ist. Für diese Umformung wird aber nur der bereits berechnete Erwartungswert (Mittelwert) der Zufallsvariablen k benötigt.

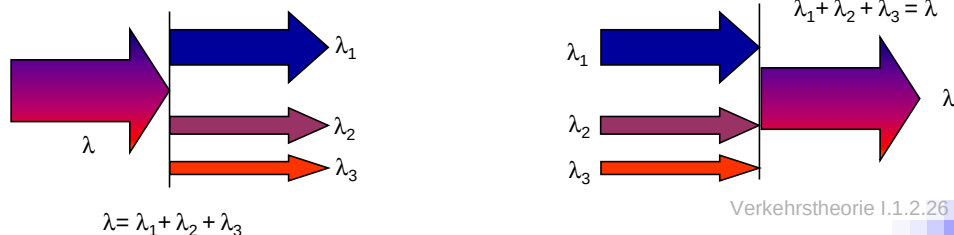
Eigenschaften der Poissonverteilung

Varianz und Mittelwert der poissonverteilten Zufallsvariablen sind gleich:

$$E\{k\} = \sigma^2 = \lambda$$

Wenn also poissonverteilter Verkehr vorliegt, dann kann ausschließlich mit dem Mittelwert gerechnet werden. Die Varianz ist nicht erforderlich, da sie gleich groß ist. Das ist der Grund, warum wir in der Verkehrstheorie immer versuchen für unsere Berechnungen in erster Näherung mit Poissonverkehr zu rechnen.

Da beim Poissonverkehr die Ereignisse voneinander unabhängig sind, können Poissonverteilungen aufgesplittet oder addiert werden, ohne ihre Eigenschaft als Poissonverkehr zu verlieren, es ändern sich lediglich die Mittelwerte:



Fakten/facts

Auch die zweite Eigenschaft des Poissonverkehrs, nämlich die Möglichkeit der Trennbarkeit von Verkehrsströmen oder der Addition von Verkehrsströmen ist für Überslagsrechnungen in der Anwendung der Verkehrstheorie sehr willkommen. Die Gültigkeit solcher Überslagsrechnungen ist jedoch im Einzelfall zu prüfen. Wenn eine unendliche Quellenzahl mit voneinander unabhängigen Belegungs- und Auslöseereignissen vorliegt, können wir exakt behaupten, dass Poissonverkehr vorliegt. Aber wann beginnt unendlich? Eine gute Näherung liegt vor, wenn die Quellenzahl größer 10 mal der Kanalzahl, über die der Verkehr abgewickelt werden soll, ist.

Des weiteren ist zu prüfen, ob der Verkehr tatsächlich ohne statistische Abhängigkeiten untereinander getrennt worden ist, denn nur dann bleibt bei der Trennung die Poisson-Eigenschaft erhalten. Wenn ein Leitungsbündel mit begrenzter Leitungszahl benutzt wird, um den Verkehrswert des Angebotes in einen der Belastung und einen Rest zu trennen, dann wird über den Belegungszustand des Bündels die statistische Abhängigkeit eingeführt. Damit ist weder beim Verkehrswert der Belastung Y noch beim Verkehrsrest R die Varianz gleich dem Mittelwert. Wieder stellt sich die Frage, wie groß darf die Ungenauigkeit sein. Dabei ist nicht nur die Ungenauigkeit der aktuellen Berechnung zu hinterfragen, sondern auch die Ungenauigkeit der Annahmen über das angebotenen Verkehrsvolumen. Wenn das Angebot mit einer Unschärfe von 10% geschätzt wurde, macht es mit Sicherheit keinen Sinn, den Mittelwert und die Varianz mit einer Akuratesse von 1% zu bestimmen und diese „angenommene“ Genauigkeit in der Rechnung „mitzuschleppen“. Ein solcher „ungenauer“ Fall liegt sehr häufig vor, wenn ein Fernmeldenetz neu aufgebaut wird und keinerlei Messungen über den tatsächlichen Verkehrsfluss vorliegen. Alle Verkehrsannahmen sind nur ungenaue Schätzungen. Es gibt also überhaupt keinen Grund mit etwas anderem zu rechnen als Poissonverkehr.

Ganz anders ist die Situation z.B. in der Bemessung eines Koppelfeldes zur reproduzierten Fertigung einer Fernmeldeanlage. Hier liegen exakte Maximalwerte des geforderten Verkehrsflusses vor. Hier kann die vernachlässigte Varianz zu fatalen Fehlern in der Dimensionierung des Maximalwertes führen.