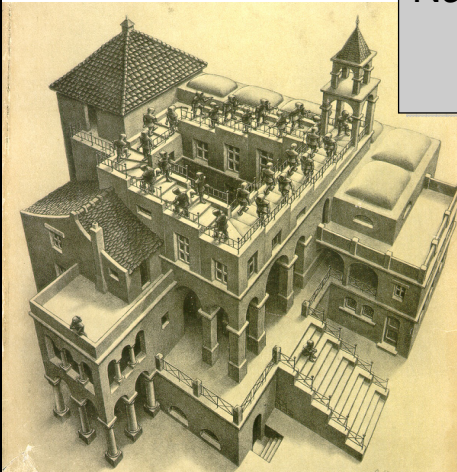


Nachrichtenverkehrstheorie Kap.:1.1 - eine Einführung -



Universität Hannover
Institut für Allgemeine Nachrichtentechnik
Kommunikationsnetze
Prof. Dr.-Ing. K. Jobmann

Verkehrstheorie 1.1.1.1

Inhalt

- Einführung
- Wiederholung der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ereignisse, Wahrscheinlichkeiten, Verteilungen, Dichten, Momente, Transformationen)
- Prozesse (Markoff, Geburts- und Sterbeprozesse, Poisson, Erlang, Erlang-k)
- Modellierung von Nachrichtensystemen aus Sicht der Verkehrstheorie
- M/M/1-Systeme
- M/M/m-Systeme (Wartesysteme)
- M/M/m/N-Systeme (Verlustsysteme)
- M/G/1- und M/G/M-Systeme

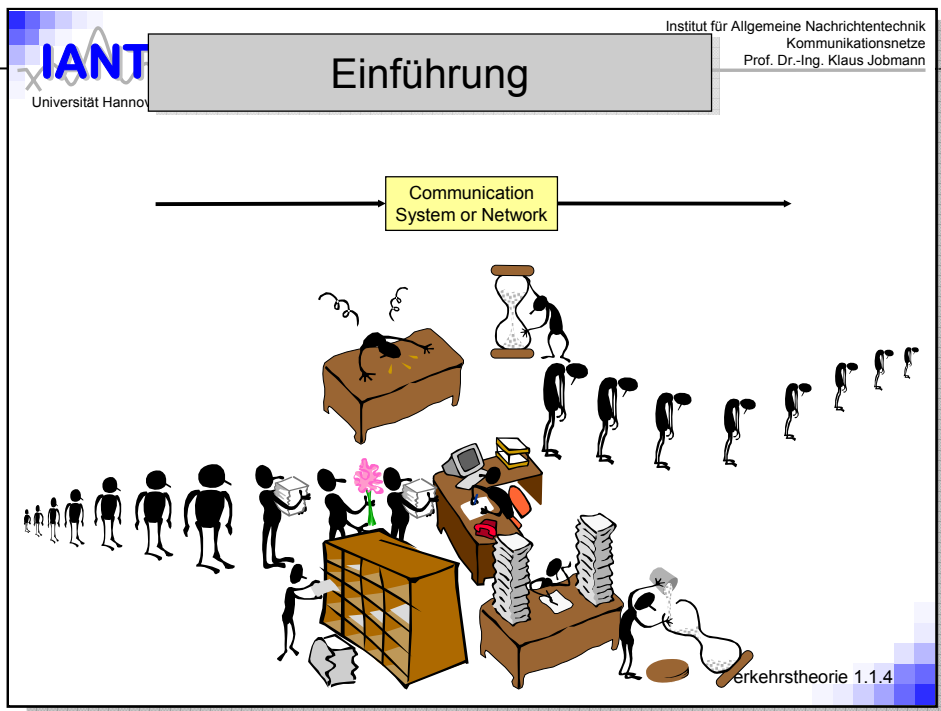
Verkehrstheorie 1.1.2

Motivation

Motivation:

Die Nachrichtenverkehrstheorie hat ihren Ursprung in der Dimensionierung der Leitungszahlen in Fernmeldenetzen und in der Dimensionierung von Wahlstufen in Vermittlungssystemen. Es handelte sich samt und sonders um Probleme der Dimensionierung von Verlustsystemen. Frühe Arbeiten wurden von Erlang, Engset, Lotze, Sysky und anderen geleistet. Schon in diesen Arbeiten wurden die Basis für die Verwendung von statistischen Momenten gelegt. Markoff legte mit den Markoff-Ketten wesentliche Grundlagen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung für dies Fachgebiet. Arbeiten von Kolmogoroff, Gauß und Poisson dürfen nicht unberücksichtigt bleiben. Im Bereich der „frei“ dimensionierbaren Koppelfelder, den Link-Anordnungen hat Cloß und Bennet Grundlagen-Beiträge geliefert. Die Autoren Kleinrock und Little haben Erweiterungen für Wartesysteme entwickelt und beschrieben. Mit diesen Erweiterungen in die Verkehrstheorie der Wartesysteme wurde diese Modellierungsweise auch für Rechnersysteme und paketvermittelnde Netze einsetzbar. Neuere Arbeiten machen auch von den aus der Signalverarbeitung gebräuchlichen Transformationsmethoden (z-, LaPlace- Transformation) vom Zeit- in den Frequenzbereich und umgekehrt Gebrauch. Insbesondere die z-Transformation ist geeignet, um von den häufig diskreten Vorgängen in den Nachrichtennetzen (eine Leitung ist belegt oder frei) in den kontinuierlichen Frequenzbereich zu gelangen und damit differenzierbare Funktionen zur Lösung von z.B. Optimierungsproblemen zu erzeugen. Für das Studium der Wartesysteme ist die Arbeit von Bolch [Bolch,1989] gut geeignet.

Die exponentiell steigenden verfügbaren Rechner- und Übermittlungskapazitäten lassen den Fehlschluß zu, Verkehrstheorie sei ein Spezialgebiet für „Theoretiker“, die unbedingt den letzten Pfennig sparen müssen. Bei genauerem Hinsehen kann man leicht feststellen, daß diese Denkweise richtig ist, wenn die Dimensionierung von kleinen und mittleren Systemen der leitungsvermittelten konventionellen Fernsprechtechnik betrachtet werden. Hier hat die Miniaturisierung in der Halbleitertechnik soviel Kapazitätsspielraum gebracht, daß überschlägige Rechnungen reichen, um eine kostenbewußte Dimensionierung zu erzielen. Jedoch schon auf der Luftschnittstelle der DECT-, GSM- oder UMTS-Netze sind die Ressourcen so knapp, daß eine saubere verkehrstheoretische Dimensionierung unumgänglich ist. Auch das Internet ist kein Kandidat zum Vernachlässigen der Verkehrsberechnungen, in diesem Bereich steigt der Bedarf schneller als die Kapazität durch verbesserte Technologie. Daraus ergibt sich ebenfalls der Zwang zur exakten Rechnung der Kapazitäten, wenn man die Forderung nach einer Verbesserung der QOS (Quality of Service) ernst nimmt.



relax

Queueing Systems

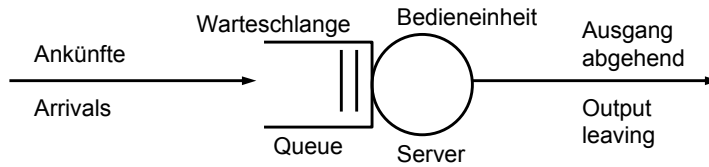
This is a lecture about statistical prediction. It tells the story of how the behavior of complex electronic systems can be predicted using pencil, paper, the poetry of mathematics and the number crunching ability of computers.

We use the basic theory of queueing systems in the sense that we deal with the abstraction of essential features of the system being studied.

Was tun wir?

- This is a lecture about **statistical prediction**. It tells the story of how the behavior of complex electronic systems can be predicted using **pencil, paper**, the poetry of **mathematics** and the **number crunching** ability of computers.
- We use the basic theory of **queueing systems** in the sense that we deal with a model, i.e. the **abstraction** of **essential features** of the system being studied.

Warteschlangensystem



Allgemein sprechen wir von Kunden (customer), die in einem System ankommen, sich ggf. in eine Warteschlange einreihen, von einer Bedieneinheit abgefertigt werden und dann das System verlassen.

Beispielsysteme

- Schlange an der Kasse im Supermarkt
- Zu- und Abfluß in einem Gasspeicher
- Zu- und Abfluß in einem Wasserturm
- Anfragen an einen Dateiserver (Computernetz)
- Bedienen von Jobs in einem Multitasking-Computer
- Pakete in einem Datenkommunikationssystem
- Anrufe in einem Sprachkommunikationssystem (z.B. auch Callcenter)

Verkehrstheorie 1.1.7

Was ist die Bedieneinheit?

System	Bedieneinheit (begrenzender Faktor)
Supermarkt	Kassierer (Schnelligkeit)
Gasspeicher	Heizungen der Kunden (Verbrauch)
Wasserturm	Wasserhähne der Kunden (Verbrauch)
Dateiserver	Festplatte, Systembus, Übertragungsleitung
Multitasking-Computer	Prozessor(en) (Rechengeschwindigkeit)
Sprachkommunikations-system	Leitungen (Anzahl der Leitungen)
Datenkommunikations-system	Übertragungskanal (Datenrate)

Fragestellungen

- Ankunftsrate, die abgefertigt werden kann
- Füllstand der Warteschlange bei Ankunft
- Wartezeit in der Warteschlange
- Abfertigungsdauer
- Verweilzeit im System (Warten + Abfertigung)
- Zufriedenheit der Kunden
- Prozentsatz abgewiesene Kunden
- Wo sind die Flaschenhälse im System?
- Lohnt es sich, eine zweite Bedieneinheit zu spendieren?
- Wie verhält sich das System bei Überlast?

Verkehrstheorie 1.1.9

- Solche Fragen benötigen Antworten über
 - Wahrscheinlichkeiten,
 - Mittelwerte und Varianzen,
 - Korrelationen und so fort
- Zusätzliche Erschwernisse:
 - Systemausfälle
 - Unregelmäßigkeiten in der Abarbeitung durch Konflikte in den Bearbeitungsstrategien

Statistik und Wahrscheinlichkeiten

- Kunden kommen zu zufällig gewählten Zeitpunkten im System an
- Die Bediendauer ist zufällig
 - ⇒ Z.B.: Menge an Artikeln im Einkaufswagen, Dauer eines Telefonats, Größe eines Datenpakets
- Wir haben es also mit Zufallsprozessen zu tun.
- Die Vorlesung bietet eine kurze Einführung. Für ein detailliertes Studium empfiehlt sich der „Papoulis“

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Kombinatorik (Permutation, Kombination, Variation)
- Grundbegriffe: Ereignis, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit
- Zufallsvariable, Dichten, Verteilungen, Momente, Transformationen
- Stochastische Prozesse
- Markov-Ketten

Verkehrstheorie 1.1.12

Definition

- Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik befassen sich mit den Gesetzmäßigkeiten des zufälligen Eintretens bestimmter Ereignisse aus einer vorgegebenen Ereignismenge bei Experimenten im allgemeinen Sinne.
(Ist das nicht ein Widerspruch?)
- Dabei wird vorausgesetzt, dass diese Versuche unter unveränderten Bedingungen beliebig oft wiederholt werden können
- Die Zahl der möglichen unterschiedlichen Ereignisse in Experimenten können häufig mit der Kombinatorik und ihren Teilgebieten, den Permutationen, den Kombinationen und den Variationen bestimmt werden.

Verkehrstheorie 1.1.13

[BRON99]

Das einzelne Zufallsereignis ist nicht vorhersagbar. Wenn jedoch eine Reihe von Versuchen Elementarereignisse mit gleicher Häufung erzeugen, dann ist zu vermuten, dass es trotz der Unregelmäßigkeiten Gesetzmäßigkeiten gibt.

Nehmen Sie als Beispiel den Fernmeldeverkehr: Das Verhalten des einzelnen Teilnehmers (Belegen, Wählen, Auflegen) ist absolut zufällig. Dennoch gibt es Eigenschaften des Verhaltens von Teilnehmergruppen, die regelmäßig und daher vorhersagbar sind. Das ist z.B. das Verkehrsangebot einer Teilnehmergruppe. Ziel der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist nun die Gesetzmäßigkeiten der Kollektive von Ereignissen herauszufinden.

Bedingung für die analytische Beschreibung der zufälligen Vorgänge ist, dass Versuchsanordnungen gewählt werden, deren Randbedingungen mit Einfluß auf die Versuchsergebnisse konstant gehalten werden, so dass das Experiment wiederholbar ist. Hierin unterscheidet sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht von der allgemeinen Analytik. Wenn z.B. in einem Experiment das Fernmeldeverhalten einer Gruppe von Geschäftsleuten am Festnetzanschluss untersucht wurde, darf in der Wiederholung des Experimentes nicht zu einer Kindergruppe während des Schulunterrichtes gewechselt werden.

Bevor wir uns über die Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit von Ereignissen Gedanken machen, müssen wir erst einmal herausfinden, mit welchen Ereignissen wir es zu tun haben. Abgesehen von den fachlichen Termini und Zusammenhängen aus der Nachrichtentechnik, hier eingeschränkter auf die Verkehrstheorie der Nachrichtentechnik, können einige grundsätzliche Überlegungen aus der Mathematik zur Kombinatorik weiterhelfen.

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Kombinatorik (Permutation, Kombination, Variation)
- Grundbegriffe: Ereignis, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit
- Zufallsvariable, Dichten, Verteilungen, Momente, Transformationen
- Stochastische Prozesse

Kombinatorik: Permutationen (1)

Zahl der **Permutationen ohne Wiederholungen** P_n :

Von n untereinander verschiedenen Elementen gibt es $P_n = n!$

Permutationen, d.h. Anordnungen in verschiedener Reihenfolge

Beispiel: In einer Urne sind 8 Kugeln mit den Zahlen 1 bis 8. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln in verschiedener Reihenfolge zu ziehen (bzw. anzuordnen)?

$n = 8 \rightarrow$ es existieren $P_n = n! = 8! = 40320$ Permutationen

Verkehrstheorie 1.1.15

Kombinatorik

Die Kombinatorik untersucht die verschiedenen Möglichkeiten der Anordnung von Gegenständen, z. B. die Fragen: "Wieviel Möglichkeiten gibt es, vier Buchstaben anzuordnen?" oder "Auf wieviel verschiedene Arten können aus 90 Zahlen fünf verschiedene Zahlen ausgewählt werden?" —Die Gegenstände der Untersuchung können Zahlen, Buchstaben, Personen, Versuche u. a. sein; sie werden *Elemente* genannt und mit Ziffern oder Buchstaben bezeichnet. Enthalten Zusammenstellungen nicht die gleichen Elemente, z. B. $a b$, $e d$, oder zwar die gleichen Elemente, aber nicht jedes gleich oft, z. B. $c a b$, $c b b$, so gelten sie als verschieden. Zusammenstellungen $aabb$, $abab$ u. a. gelten nur dann als verschieden, wenn ihre Anordnung berücksichtigt wird.

PERMUTATIONEN

Jede Zusammenstellung einer endlichen Anzahl von Elementen in irgendeiner Anordnung, in der sämtliche Elemente verwendet werden, heißt *Permutation* der gegebenen Elemente; z. B. sind von den Elementen a, b, c, d, e die Zusammenstellungen $a c d b e$, $d b c a e$.

Anzahl von Permutationen:

Ohne Wiederholungen: Die Anzahl der Permutationen untereinander unterschiedlicher Elemente erhält man durch folgende induktive Betrachtung: Aus zwei Elementen a und b lassen sich die zwei Permutationen $a b$, $b a$ bilden. Von drei Elementen a, b, c kann jedes an erster Stelle stehen, während die beiden anderen sich jeweils auf zwei Arten anordnen lassen:

abc acb bac bca cab cba.

Folglich gibt es $3 \cdot 2 = 6$ Permutationen. Die entsprechende Überlegung führt bei vier Elementen zu $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Permutationen. Allgemein können n Elemente auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots (n-1) n = n!$ (lies **n** *Fakultät*) Arten angeordnet werden.

Kombinatorik: Permutationen (2)

Zahl der **Permutationen mit Wiederholungen** P_n^k :

Von n Elementen mit k gleichen Elementen gibt es

$P_n^k = n!/k!$ Permutationen (Anordnungen unter Berücksichtigung der Reihenfolge)

***Beispiel:** In einer Urne sind 8 Kugeln, vier davon mit den Zahlen 1 bis 4 und 4 weitere Kugeln mit der 5. Wieviele Möglichkeiten der Anordnung in verschiedener Reihenfolge existieren (wenn die Kugeln mit der 5 als gleichwertig angesehen werden)?*

$n = 8, k = 4 \rightarrow$ es existieren $P_n^k = n!/k! = 8!/4! = 1680$ Permutationen

s. [BRON99]

Verkehrstheorie 1.1.16

Mit Wiederholungen: Treten in einer Anzahl von Elementen Gruppen von gleichen Elementen auf, so ist die Anzahl der Permutationen kleiner, als wenn alle Elemente verschieden sind; beim Permutieren z. B. der fünf Elemente $e_1 = a, e_2 = a, e_3 = b, e_4 = b, e_5 = b$ haben alle verschiedenen Anordnungen der Elemente e_1 und e_2 sowie der Elemente e_3, e_4 und e_5 als gleich zu gelten. Da dies jeweils $2!$ bzw. $3!$ Permutationen sind, ist die Gesamtzahl der unterscheidbaren Permutationen nur noch $5!/(2!*3!) = 10$.

Permutationen ohne Wiederholungen

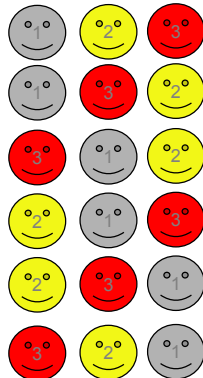
$$P_n = n!, n=3 :$$

Ausgangslage:
(erste Permutation)

Zweite Permutation:

Dritte Permutation:

N! Permutation:



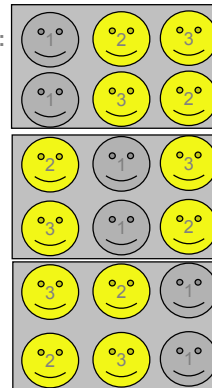
Permutationen mit Wiederholungen

$$P_n^k = n!/k!, n=3, k=2 :$$

Ausgangslage:

Erste Permutation:

Zweite Permutation:

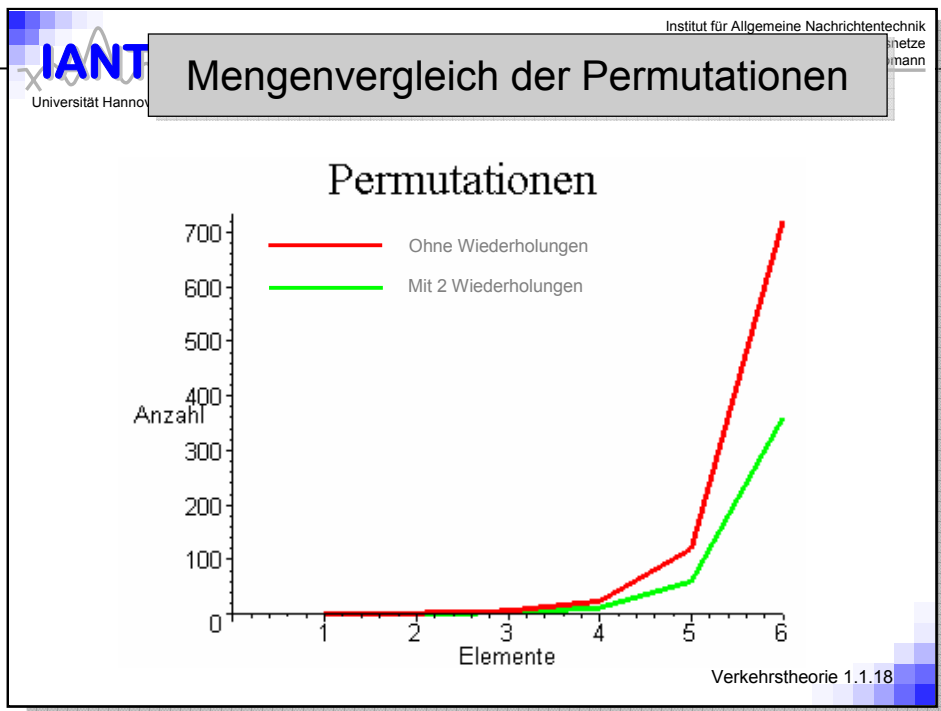


Verkehrstheorie 1.1.17

Wenn N unterschiedliche Objekte vertauscht werden, entstehen N! unterschiedliche Anordnungen. In diesem Fall sind das $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Wenn wenn k von N Objekten gleich sind, entstehen nur $N! / k!$ unterschiedliche Anordnungen, da sich die Anordnungen k! mal wiederholen. In diesem Fall sind das $3! / 2! = 1 \cdot 2 \cdot 3 / 1 \cdot 2 = 3$.

Im gezeichneten Beispiel sind nur die Farben als Unterscheidungsmerkmal zu verwenden. Die Ziffern dienen nur dem Zweck die wiederholten Anordnungen aufzuzeigen.



Wiederh:=2;elemente:=6;

```

> permutationen_ohne_Wiederholungen:=[[ n, n!] $n=1..elemente];
permutationen_mit_Wiederholungen:=[[ n, n!/Wiederh!] $n=Wiederh..elemente];
Kombinationen_ohne_Wiederholungen:=[[ n, n!/((n-Wiederh)!*Wiederh!)] $n=Wiederh..elemente];
Kombinationen_mit_Wiederholungen:=[[ n, (n+Wiederh-1)!/((n+Wiederh-1-
Wiederh)!*Wiederh!)] $n=Wiederh..elemente];
Varationen_ohne_Wiederholungen:= [[ n, Wiederh!*(n+Wiederh-1)!/((n+Wiederh-1-
Wiederh)!*Wiederh!)] $n=Wiederh..elemente]; Varationen_mit_Wiederholungen:= [[ n,
n^Wiederh] $n=Wiederh..elemente];
with(plots):p1:=plot([permutationen_ohne_Wiederholungen,permutationen_mit_Wiederholungen],
x=0..elemente,
style=patch,symbol=box,labels=["Elemente","Anzahl"],thickness=3,title="Permutationen",titlefont=[TI
MES,ROMAN,20]);
  
```

Wahrscheinlichkeitsrechnung - eine Einführung - Kombinatorik: Permutationen (1)

Zahl der Permutationen mit Gruppen von Wiederholungen $P_n^{k_1, k_2, \dots, k_m}$:

Von n Elementen mit m Gruppen von k_m gleichen

 Elementen gibt es

$$P_n^k = n! / (k_1! k_2! \dots k_m!) \text{ Permutationen}$$

*Beispiel: In einer Urne sind acht Kugeln, eine Kugel mit der 1, drei

 Kugeln mit der 2 und vier Kugeln mit der 3. Wie viele Permutationen

 existieren?*

Lösung: $n=8$, $k_1=1$, $k_2=3$, $k_3=4$

$$P_8^{1,3,4} = 8! / (1!3!4!) = 40320 / 1 \cdot 6 \cdot 24 = 280$$

Kombinationen nennt man eine Auswahl von k Elementen aus

 n Elementen ohne Beachtung der Reihenfolge.

- Ohne Wiederholungen („ohne Zurücklegen“)

 (k aus n)

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}; 1 \leq k \leq n$$

- Mit Wiederholungen („Mit Zurücklegen“)

 (k aus n)

$${}^w C_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}; 1 \leq k \leq n$$

Verkehrstheorie 1.1.20

Kombinationen können mit und ohne Wiederholungen ausgeführt werden. Ohne Wiederholung läuft das Experiment, wenn ein einmal gewähltes Objekt nicht wieder zur Wahl steht. Als Beispiel kann das Lottospiel 6 aus 49 gelten. Eine einmal gezogene Zahl steht für die nachfolgenden Ziehungen nicht mehr zur Verfügung.

Auch das Skatspiel kann hier weitergedacht werden. **Wie viele unterschiedliche Blattkombinationen kann der einzelne Skatspieler in seiner Hand finden?** Die Lösung wird in der Übung gegeben.

Für ein Experiment mit Wiederholung wird das gezogene Element wieder in die Auswahl zurückgegeben und kann im Ergebnis mehrfach auftauchen. Das Toto-Spiel dient oft als Beispiel.

Beispiele mit Kombinationen lassen sich auch für die Abarbeitung von Warteschlangen finden.

Kombinationen ohne Wiederholungen

$C_n^k = n \text{ über } k$; (Beispiel 2 aus 3 = 3 über 2 = $3! / [3-2]! * 2!] = 3$) :

Ausgangslage:



Erste Kombination:



Zweite Kombination:



Dritte Kombination:



Kombinationen mit Wiederholungen

${}^nC_n^k = n+k-1 \text{ über } k$; (Beispiel 2 aus 3) =

$(2+3-1)! / ((3-1)! 2!) = 6$:

Ausgangslage:



Achtung, 2,1; 3,2 und 3,1 werden, weil die Reihenfolge unerheblich ist, nicht berücksichtigt

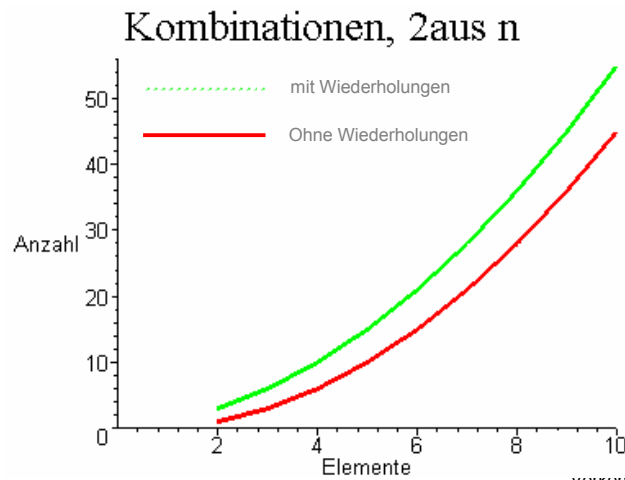
Verkehrstheorie 1.1.21

Bei der Kombination spielt die Anordnung keine Rolle. Dies ist unterschiedlich zur Variation, wo die Zahl der möglichen Anordnungen das Ziel ist. Deshalb kommt weder im linken Fall noch im rechten 1,2 und 2,1 sondern nur 1,2 vor. Gleiches gilt für 1,3 und 2,3.

Ohne Wiederholungen heißt, in dem Ergebnis treten keine wiederholten Ereignisse auf. Im obigen Beispiel kann jede Farbe nur einmal auftreten.

Mit Wiederholungen heißt, in dem Ergebnis treten wiederholte Ereignisse auf. Im obigen Beispiel kann jede Farbe zweimal auftreten.

Mengenvergleich der Kombinationen



Mit Wiederholungen ergeben sich mehr Möglichkeiten der Kombinationen. Das ist plausibel, da aus einer größeren Menge von Grundereignissen ausgewählt werden kann.

Zur Übung sollte der Hörer für unterschiedliche Zahl von Elementen (z.B. bis 100) und für unterschiedlich große Kombinationsgruppen das Verhalten der Kurven untersuchen. Vorzugsweise ist ein Tool aus der Gruppe des symbolic computing (Maple, Mathematica, MathLab) zu verwenden.

Kombinatorik: Variationen

Variationen nennt man eine Auswahl von k Elementen aus n Elementen mit Beachtung der Reihenfolge.

- Ohne Wiederholungen

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, 1 \leq k \leq n$$

- Mit Wiederholungen

$${}^W V_n^k = n^k, 1 \leq k \leq n$$

Verkehrstheorie 1.1.23

Die Variation ist also die Kombination unter Beachtung der Reihenfolge

Demonstration der Variationen

Variationen ohne Wiederholungen

$V_n^k = k!(n \text{ über } k)$; (Beispiel 2 aus 3: $2!(3 \text{ über } 2) = 2! \cdot 3! / [(3-2)! \cdot 2!] = 6$) :

Ausgangslage:



Erste Variation



Zweite Variation



Dritte Variation



vierte Variation



fünfte Variation



sechste Variation



Variationen mit Wiederholungen

${}^wV_n^k = n^k$; (Beispiel 2 aus 3) : ${}^wV_n^k = 9$

Ausgangslage:



Achtung, 2,1; 3,2
und 3,1
werden, weil die
Reihenfolge
erheblich ist,
hier berücksichtigt

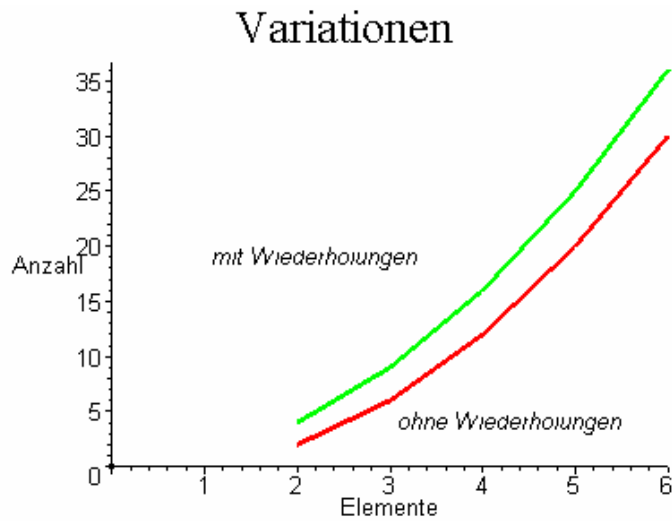
Verkehrstheorie 1.1.24

Bei der Variation spielt die Anordnung eine Rolle. Dies ist unterschiedlich zur Kombination.

Ohne Wiederholungen heißt, in dem Ergebnis treten keine wiederholten Ereignisse auf. Im obigen Beispiel kann jede Farbe in jedem Versuch, jeder Ziehung, nur einmal auftreten.

Mit Wiederholungen heißt, in dem Ergebnis treten wiederholte Ereignisse auf. Im obigen Beispiel kann jede Farbe zweimal auftreten.

Mengenvergleich der Variationen



Verkehrstheorie 1.1.25

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Kombinatorik (Permutation, Kombination, Variation)
- **Grundbegriffe: Ereignis, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit**
- Zufallsvariable, Dichten, Verteilungen, Momente, Transformationen
- Stochastische Prozesse

Mengen

- Eine Menge $\mathcal{A}$ ist eine Sammlung von Objekten, die Elemente genannt werden
 - ⇒ Bsp: $\mathcal{A} = \{1,2,3,4,5,6\}$ hat sechs Elemente;

 $\mathcal{A} = \{\text{alle positive ganzen Zahlen}\} = \mathbb{N}^+$
 - ⇒ Allgemein: $\mathcal{A} = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}$
 - ⇒ Nullmenge oder leere Menge: $\{\emptyset\}$
- Eine Teilmenge $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ enthält Elemente aus der Menge $\mathcal{A}$
 - ⇒ Die Menge aller Untermengen von $\mathcal{A}$ heißt Raum
 - ⇒ Bsp: $\mathcal{B} = \{1,3\}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{A} = \{1,2,3\}$
 - ⇒ Raum $\mathcal{S}$ von $\mathcal{A} = \{1,2\}$: $\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$ (Alle Teilmengen von $\mathcal{A}$)
 - ⇒ Eine Menge $\mathcal{A}$ mit n Elementen hat einen Raum der Größe 2^n

- **Zufallsexperiment** liefert als Ergebnis $\mathcal{E}$ eine **Teilmenge** aus der **Ergebnismenge** $\mathcal{A}$:
 $\mathcal{A} = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}; \mathcal{E} \subset \mathcal{A}$
- **Elementarereignis**: $\zeta_1 \in \mathcal{A}$
 - ⇒ Ein Elementarereignis ist ein Einzelement aus $\mathcal{A}$
 - ⇒ Eigenschaft: Elementarereignisse sind **paarweise disjunkt** (unvereinbar), d.h. sie schließen sich paarweise aus
- **Sicheres Ereignis**: *Ergebnismenge* $\mathcal{A}$
- **Unmögliches Ereignis**: $\{\emptyset\}$

Verkehrstheorie 1.1.28

1.3 Zufällige Ereignisse

Grundlage für die Beschreibung zufälliger Ereignisse ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bildet man die Ergebnisse von Zufallsexperimenten auf Zahlen ab, dann erhält man Zufallsvariablen, Als Verallgemeinerung können die Zufallsergebnisse auch Funktionen zugeordnet werden, man spricht dann von stochastischen Prozessen. Demnach wird ein Signal, das aus Sicht des Betrachters zufällig zustande gekommen ist, als eine Funktion behandelt; die einem Ergebnis eines Zufallsexperiments zugeordnet ist.

Das Zufallsexperiment kann z.B. eine Reihe von Würfelversuchen sein. Aber auch in der Nachrichtentechnik lassen sich Beispiele finden, wie das zufällige Belegen von Kanälen in einem 2Mbit/s-System.

1.3.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Es wird zunächst ein Zufallsexperiment betrachtet also ein Experiment mit zufälligem Ausgang, das eine diskrete Menge von zufälligen Ergebnissen, die Ergebnismenge $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots\}$ liefert, Ein Beispiel für ein solches Zufallsexperiment ist das Würfeln die Ergebnismenge ist dann die Menge der möglichen Würfelresultate: $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wenn bei der Durchführung des Experimentes ein bestimmtes Ergebnis A_i eintritt, spricht man von einem *Ereignis*, beim 'Würfeln' ist beispielsweise das Eintreten des Würfelresultates "6" ein Ereignis. Ereignisse können auch als Vereinigung mehrerer möglicher Ergebnisse definiert werden: Das Ereignis "gerade Zahl" tritt ein, wenn ein Ergebnis aus der Menge der Ergebnisse $\{1, 2, 6\}$ eintritt. Zur Unterscheidung werden Ereignisse wie das Auftreten des Würfelresultates "6" als *Elementarereignisse* bezeichnet Elementarereignisse sind dadurch gekennzeichnet, daß sie immer paarweise unvereinbar (disjunkt) sind. Um diese paarweise Unvereinbarkeit beim Würfeln zu verstehen, müssen wir den einzelnen Wurf exakter beschreiben. Wenn wir eine 6 würfeln ist das Gegenereignis: wir haben keine 1,2,3,4,5 gewürfelt. Das Ereignis, wir haben eine 6 gewürfelt ist paarweise disjunkt mit: wir haben eine 1 oder 2 oder 3 oder 4 oder 5 gewürfelt.

Beispiel Ergebnis und Elementarereignis

- Würfel mit sechs Seiten, d.h. $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Elementarereignisse: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$
- Raum hat $2^6 = 64$ Elemente
- Beispiele für Zufallsexperimente (Ereignisse):
 - ⇒ „Ein Wurf eines Würfel“
 - ⇒ „Würfeln einer geraden Zahl“, d.h. $\mathcal{E} = \{2, 4, 6\}$
 - ⇒ „Summe aus zwei Würfeln“, d.h. $\mathcal{E} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

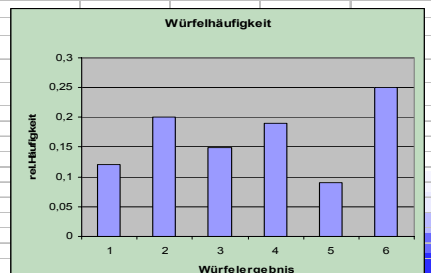
- Häufigkeit eines Experimentes: N (N-malige Wiederholung)
- Ergebnismenge $\mathcal{E} = \{\varepsilon_i, i \in \mathbb{IN}\}$
- Häufigkeit der Ereignisse $h = \{h_i, i \in \mathbb{IN}\}$
- relative Häufigkeit $H = \{h_i/N, i \in \mathbb{IN}\}$

Beispiel :



Häufigkeiten beim Würfeln							
i	1	2	3	4	5	6	
A_i	1	2	3	4	5	6	
h_i	12	20	15	19	9	25	N 100
h_i/N	0,12	0,2	0,15	0,19	0,09	0,25	H 1

Durch Beobachtung:
 $0 \leq h_i/N \leq 1$



Fakten

Führt man das Experiment N -mal durch und tritt dabei das Ergebnis A_i h_i -mal auf, dann ist die *relative Häufigkeit* dieses Ereignisses gegeben durch:

$$H_{\text{rel}} = \{h_i/N, i \in \mathcal{J}\}$$

Offensichtlich gilt für die relative Häufigkeit:

$$0 \leq h_i \leq 1,$$

da die Häufigkeit nicht kleiner als null und nicht größer als eins sein kann.

Führen Sie das Würfelexperiment selbst 10mal, 20mal, 50mal und 100mal durch und beantworten Sie die Frage, warum die relative Häufigkeit über alle Versuche keinen konstanten Wert hat.

- **Sicheres Ereignis** $\mathcal{A} = \mathcal{E} = \{\cup \varepsilon_i, i \in \mathbb{N}\}$ ist die Vereinigung aller möglichen Ereignisse

- relative Häufigkeit des sicheren Ereignisses:

$$H_{\mathcal{A}} = \sum h_i / N = 1$$



⇒ beim Würfeln war die Summe der relativen Häufigkeiten (also dass eine 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 gewürfelt wurde) gleich 1 (s. vorige Folie)

- das **unmögliche Ereignis** $\{\emptyset\}$ hat eine relative Häufigkeit von $0 = 1 - \sum H_i / N$



⇒ beim Würfeln ist das unmögliche Ereignis, dass $1 > A_i > 6$, dass also eine Zahl kleiner 1 oder größer 6 gewürfelt wird

Die Vereinigung aller Ergebnisse nennt man das sichere Ereignis

$$S = \mathcal{A} = \{A_i, i \in \mathcal{I}\}$$

Für die Häufigkeit des sicheren Ereignisses gilt offenbar:

$$h_s = \sum h_i / N = 1$$

wobei die Summe über alle i möglichen Zustände läuft. Das Ergebnis ist zwingend, da $\sum h_i = N$ ist.

Beim Experiment "Würfeln" würde das sichere Ereignis lauten: ("irgendeine ganze Zahl von 1 bis 6")

Analog zum sicheren Ereignis nennt man ein Ereignis, das sicher mit relativer Häufigkeit Null eintritt, das unmögliche Ereignis. Beim Würfeln wäre z.B. das Ereignis 'Eine Zahl größer 6 oder kleiner 1' ein unmögliches Ereignis.

- **Unabhängig Ereignisse:**

$$\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_k, \mathcal{E}_l$$

- **relative Häufigkeiten:**

$$H_i = h_i/N, H_k = h_k/N, H_l = h_l/N,$$

$$H(\mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_k \cup \mathcal{E}_l) = H_i + H_k + H_l$$



⇒ beim Würfeln ist die relative Häufigkeit für eine 1 oder 3 im
 vorigen Beispiel gleich $0,12 + 0,15 = 0,27$

Verkehrstheorie 1.1.32

Fakten

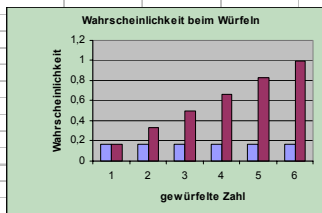
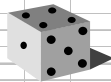
Es wird nun die relative Häufigkeit zweier unvereinbarer Ereignisse $A_i \cup A_k$ betrachtet, etwa der Ereignisse "1" oder "3" beim Würfeln. Die Häufigkeit, mit der eines der beiden Ergebnisse eintritt, entspricht offensichtlich der Summe der Häufigkeiten der beiden einzelnen Ereignisse und damit deren relativen Häufigkeiten

Wahrscheinlichkeitsrechnung - eine Einführung - axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeiten

- **Wahrscheinlichkeit P des Ereignisses $\mathcal{E}_i$:**
 $0 \leq P(\mathcal{E}_i) \leq 1$
- **Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses S**
 $P(\mathcal{A}) = \sum P(\mathcal{E}_i) = 1$
- **Disjunkte Ereignisse**
 $P(\mathcal{E}_i \cup \mathcal{E}_k) = P(\mathcal{E}_i) + P(\mathcal{E}_k)$

A_i	1	2	3	4	5	6
$P(A_i)$	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667
Summe $P(A_i)$	0,1667	0,3333	0,5	0,6667	0,8333	1

Beispiel Würfel:



Fakten

Aus den vorangegangenen Beobachtungen hat man den Begriff *Wahrscheinlichkeit* in Anlehnung an die relative Häufigkeit geprägt. Da man die Wahrscheinlichkeit mathematisch nicht als Grenzwert der Häufigkeit rechtfertigen kann - man kann wegen der Zufälligkeit der Ereignisse nicht beweisen, daß sich ab einer bestimmten Anzahl von Versuchen die Ergebnishäufigkeiten nicht ändern - hat Kolmogoroff eine *axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit* die auf ihrer Zweckmäßigkeit beruht begründet. Dabei wird Wahrscheinlichkeit den Ereignissen A_i als ein Maß zugeordnet mit Eigenschaften die denen der relativen Häufigkeiten entsprechen:

Definition der Wahrscheinlichkeit aus der Beobachtung der Eigenschaften der relativen Häufigkeiten (Kolmogoroff):

1. Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A_i gilt

$$0 \leq P(A_i) \leq 1$$

2. Für das sichere Ereignis S , d.h. die Vereinigung aller möglichen Ereignisse, gilt:

$$P(S) = \sum P(A_i) = 1$$

3. Für die Wahrscheinlichkeit, dass disjunkte Ereignisse auftreten, dass also das eine oder das andere oder ein weiteres Ereignis auftritt:

$$P(A_i \cup A_k \cup A_3 \cup \dots) = P(A_i) + P(A_k) + P(A_3) + \dots$$

Das Problem, die Wahrscheinlichkeiten $P(A_i)$ für reale Ereignisse A_i anzugeben, bleibt bei der axiomatischen Definition der Wahrscheinlichkeit ausgeklammert. Den Übergang von der relativen Häufigkeit zur Wahrscheinlichkeit $P(A_i)$ beschreibt das *Gesetz der großen Zahlen*, das für die Differenz zwischen der relativen Häufigkeit eines Ereignisses nach N Experimenten $h_N(A_i)$ und der Wahrscheinlichkeit $P(A_i)$ angibt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(|P(A_i) - h_N(A_i)| \leq \epsilon) = 1$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Unterschied zwischen der relativen Häufigkeit und der Wahrscheinlichkeit kleiner als eine beliebig kleine Schranke ϵ ist, konvergiert also für wachsendes N gegen Eins.

Was ist nun die Wahrscheinlichkeit?

- Durch Zufallsexperimente kann man beobachten, dass verschiedene Ereignisse einer bestimmten relativen Häufigkeit zustreben.
- Die Wahrscheinlichkeit ist mit einem *hohen Grad an Sicherheit* gleich der relativen Häufigkeit, wenn die Anzahl der Experimente groß genug wird.
- Ein *hoher Grad an Sicherheit* ist schwammig.
- Wahrscheinlichkeitsrechnung ist exakt!
 - ⇒ Die Wahrscheinlichkeit wird aufgrund physikalischer Eigenschaften vorausgesagt (oder per Experiment ermittelt)
 - ⇒ Der Umgang mit Wahrscheinlichkeiten ist axiomatisch begründet und **funktioniert** bei realen Problemen

Verkehrstheorie 1.1.34

- Komplementäres Ereignis $\overline{A_i}$: $P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i)$

$$\Rightarrow A_i = 4 \Leftrightarrow \overline{A_i} = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 5 \cup 6$$

$$P(\overline{4}) = 1 - P(4) = 1 - 1/6 = 5/6$$

- unmögliches Ereignis ϕ : $P(\phi) = 0$
- $A_i, i \in \infty$ und $A_j, j \in \infty$ seien disjunkt, d.h. $A_i \cap A_j = \{\phi\}$; dann gilt:
 $P(A_i \cap A_j) = 0$; $P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j)$
- Sei die Menge der Ereignisse $\{A_i, i=1 \dots n\}$ vollständig. Dann gilt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$$

Verkehrstheorie 1.1.35

• Das komplementäre Ereignis hat die Gegenwahrscheinlichkeit zur Folge, es wird also von der Wahrscheinlichkeit des Sicheren Ereignisses die Wahrscheinlichkeit des zu negierenden Ereignisses subtrahiert.

• Da das unmögliche Ereignis nicht auftreten kann, folgt der Wert der Wahrscheinlichkeit zu null.

• Die letzte Eigenschaft der Wahrscheinlichkeiten auf dieser Folie ist eine Folge aus dem dritten Axiom von Kolmogoroff. Wenn die Ereignisse eines Ereignisraumes oder einer Ereignismenge alle paarweise disjunkt sind, dann sind sie alle voneinander unabhängig und individuell (siehe die 6 unabhängigen Ziffern beim Würfel); wenn diese Ereignismenge dann noch vollständig ist, d.h. es sind alle möglichen Ereignisse enthalten, dann muss die Summe aller Wahrscheinlichkeiten eins sein, da dies das sichere Ereignis ist. Weiterhin schließen sich alle Ereignisse gegenseitig aus, da sie ja disjunkt sind. Folglich beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass zwei oder mehr Ereignisse gemeinsam auftreten, die leere Menge und ist null.

Bedingte Ereignisse

- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A unter der Bedingung, dass das Ereignis B mit $P(B) \neq 0$ eingetreten ist, wird mit $P(A|B)$ bezeichnet.
- $P(A|B)$ heißt die „Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B “
- Beispiel:
 - ⇒ Würfeln mit zwei Würfeln gleichzeitig. Jede Variation hat die Wahrscheinlichkeit $1/36$.
 - ⇒ A sei das Ereignis „Augensumme ≥ 10 , B sei das Ereignis „Augensumme gerade“ ($A = (4,6) \cup (6,4) \cup (5,5) \cup (6,5) \cup (5,6) \cup (6,6)$, also $P(A) = 6/36 = 1/6$)
 - ⇒ Wenn B eingetreten ist, gibt es noch 18 mögliche Variationen mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit $1/18$
 - ⇒ Für A sind nur die Ereignisse $\{(4,6), (6,4), (5,5), (6,6)\}$, also 4 Variationen, gültig
 - ⇒ Damit ist $P(A|B) = 4/18 = 2/9$

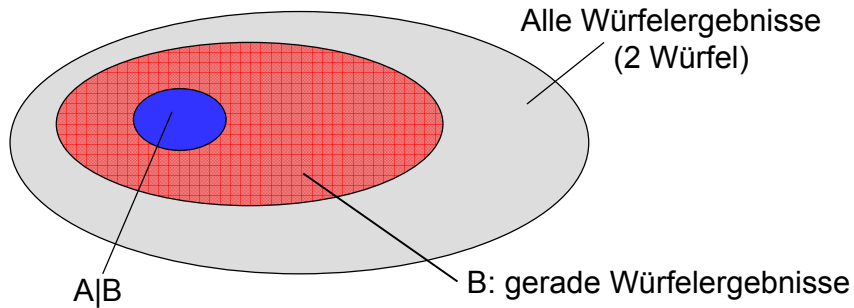
Verkehrstheorie 1.1.36

Die bedingte Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass zunächst das Eintreten des bedingenden Ereignisses (in der Folie das Ereignis B) die möglichen Ergebnisse einschränkt, d.h. es entsteht eine neue Ergebnismenge.

Die Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ bedeutet nun, dass das Ereignis A aus dieser neuen Ergebnismenge ausgewählt wird.

Illustration bedingte Ereignisse

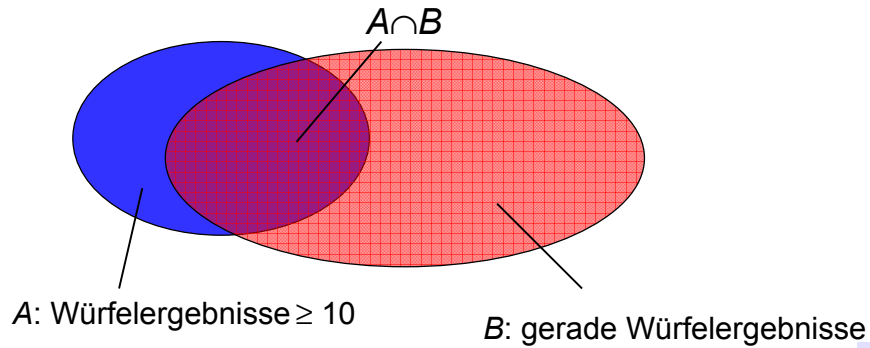
- Das Ereignis $A|B$ bedeutet, dass B eingetreten sein muss. Dann erst betrachten wir A



Verkehrstheorie 1.1.37

UND-Verknüpfung von Ereignissen

- Das Ereignis $A \cap B$ (auch als AB bezeichnet) bedeutet, dass sowohl A als auch B eintritt



Verkehrstheorie 1.1.38

Unabhängige Ereignisse

- Die Ereignisse A und B sind unabhängig, wenn gilt:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

- Dann gilt auch:

$$P(A) = P(AB) / P(B)$$

Bayessche Regel

Es gilt:

$$P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B) = P(B | A) \cdot P(A)$$

Wenn A und B unabhängig sind, gilt:

$$P(A | B) = P(A)$$

Und damit:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Verkehrstheorie 1.1.40

Diese Regel kann auch angewandt werden, um die Unabhängigkeit von Ereignissen zu überprüfen!

Beispiel

Von vorher:

- ⇒ Würfeln mit zwei Würfeln gleichzeitig. Jede Variation hat die Wahrscheinlichkeit $1/36$.
- ⇒ A sei das Ereignis „Augensumme ≥ 10 , B sei das Ereignis „Augensumme gerade“
- ⇒ $P(A) = 1/6$; $P(B) = 1/2$; $P(A|B) = 2/9$; $P(B|A) = 2/3$

$$P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

$$P(A \cap B) = P(B | A) \cdot P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

Tatsächlich ist das Ereignis $A \cap B = (4,6) \cup (6,4) \cup (5,5) \cup (6,6)$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B) = 4/36 = 1/9$.

Begriffe

- **Zufallsexperiment (random experiment):** Experiment mit ungewissem Ausgang
- **Elementarereignis (outcome):** Zufallsergebnis eines einzelnen Zufallsexperimentes A_i
- **Ergebnisraum (sample space):** alle möglichen Zufallsergebnisse eines Elementarereignisses $A=(A_1, A_2, \dots)$
- **Häufigkeit (frequency):** Anzahl des Auftretens von Zufallsergebnissen
- **relative Häufigkeit (relative frequency):** Auf die Zahl N der Zufallsexperimente normierte Häufigkeit
- **Wahrscheinlichkeit (probability):** vermuteter Grenzübergang der relativen Häufigkeit für N gegen unendlich

Verkehrstheorie 1.1.42

Ein Zufallsexperiment hat kein deterministisches Ergebnis sondern ein zufälliges. Nehmen Sie eine Standleitung zwischen zwei Fernsprechteilnehmern und belegen Sie diese durch die beiden Teilnehmer, sie werden immer auf eine freie Leitung stossen. Fassen Sie diesen Belegungsversuch als Experiment auf und Sie können leicht sagen, dass das Ergebnis deterministisch ist. Nehmen Sie im nächsten Gedankenschritt eine vermittelte Verbindung zwischen denselben Teilnehmern und Sie werden feststellen, dass nicht alle Belegungsversuche zum Erfolg führen. Aus der Sicht der Teilnehmer ist das Ergebnis des Belegungsversuches zufällig, da sie keine Kenntnis über das Verhalten der anderen Teilnehmer haben, die das Vermittlungsnetz ebenfalls benutzen. Jeder Belegungsversuch stellt ein Zufallsexperiment mit einem Zufallsergebnis als Ergebnis dar.

Der Ereignisraum ist die Summe aller möglichen Zufallsergebnisse. In diesem Beispiel sind die beiden Ereignisse „belegt“ oder „frei“ schon das vollständige Ensemble aller Möglichkeiten. Der Ereignisraum besteht also aus den Zufallsergebnissen „frei“ und „belegt“. Beim Würfeln würde der Ereignisraum aus den Zahlen 1,2,3,4,5,6 bestehen.

Die Zufallsvariable ist die Wertzuweisung zum Ereignisraum. Dies wird am besten am Beispiel klar:

	Ereignisraum	
Zufallsergebnis	frei	belegt
Zufallsvariable	1	1

	Ereignisraum					
Zufallsergebnis	1	2	3	4	5	6
Zufallsvariable	10	20	30	40	50	60

Die Wertzuweisung kann sowohl mittels einer Tabelle als auch mittels einer Funktion beschrieben werden. Die Funktion des ersten Beispiels lautet:

$$\text{Zufallsvariable} = 10 \cdot \text{Zufallsergebnis}$$

Die Zufallsvariable kann diskret sein, wenn sie abzählbar viele Ereignisse beschreibt, oder kontinuierlich. Eine kontinuierliche Zufallsvariable wird mittels der reellen Zahlen beschrieben und hat damit unendlich viele Werte.

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Kombinatorik (Permutation, Kombination, Variation)
- Grundbegriffe: Ereignis, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit
- Zufallsvariable, Dichten, Verteilungen, Momente, Transformationen
- Stochastische Prozesse

Zufallsvariable

- Eine Zufallsvariable (ZV) ist eine Zahl $X(\zeta)$, die jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments (=Ereignis) zugeordnet wird. $X(\zeta)$ ist also eine Funktion mit dem Definitionsbereich $\mathcal{S}$ (dem Ereignisraum)
- Beispiele:
 - ⇒ Beim Würfeln werden den Ergebnissen die Zahlen $X(\zeta_i) = 10i$ zugeordnet, d.h. $X(1) = 10, \dots$
 - ⇒ Beim Würfeln werden den ungeraden Zahlen 0, den geraden 1 zugeordnet:
 $X(1) = X(3) = X(5) = 0; X(2) = X(4) = X(6) = 1$
 - ⇒ Dem zufällig gewählten Blatt eines Baumes wird die Länge zugeordnet.
 - ⇒ Einer zufällig gewählten Glühbirne wird die Lebensdauer zugeordnet

Beschreibung zufälliger Größen

- Angabe der Wahrscheinlichkeit
 - ⇒ einer Menge von diskreten Zufallsgrößen A_i :
 $P[A_i], i \in \mathbb{N}$
 - ⇒ einer kontinuierlichen reellen Zufallsfunktion:
 $P[f(y)], y \in P$
 - ⇒ einer kontinuierlichen komplexen Zufallsfunktion:
 $P[f(y)], y \in X$

Verkehrstheorie 1.1.45

definition

Zeichensatz: Bookshelf 5

In der Verkehrstheorie haben wir es nicht mit deterministischen Größen zu tun, sondern mit zufälligen Größen. Zufällige Größen können auf unterschiedliche Weisen beschrieben werden. Hier ist die erste und sinnfälligste dargestellt, nämlich die Angabe der Wahrscheinlichkeit als Grenzwert für die relative Häufigkeit, bei der die Stichprobenzahl gegen unendlich geht.

Von der Zufallsvariablen zur Verteilung

- Mit ZVs lassen sich Ereignisse definieren wie:
 - $\Rightarrow X \leq x$ (Das Ereignis ist ein Ergebnis mit $X \leq x$)
 - $\Rightarrow X \geq x$ (Das Ereignis ist ein Ergebnis mit $X \geq x$)
 - $\Rightarrow x_1 \leq X \leq x_2$ (X liegt zwischen x_1 und x_2)
- Die Frage ist (wie zuvor): Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses?
- Notation: $P(X \leq x)$ ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $X \leq x$.

Verkehrstheorie 1.1.46

definition

Wahrscheinlichkeitsverteilung

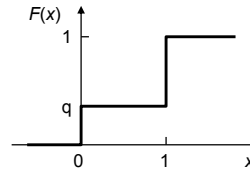
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist definiert durch:

$$F_x(x) = P(X \leq x) \text{ für alle } x \text{ von } -\infty \text{ bis } \infty$$

- Beispiel:

- Münzwurf mit der ZV: $X(\text{Kopf})=0$, $X(\text{Zahl})=1$;
 $P(\text{Kopf})=q$ und $P(\text{Zahl})=p$

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ q & ; 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

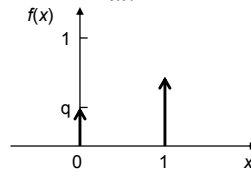
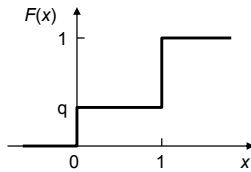


Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist definiert als:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Beispiel von voriger Folie: $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = q \cdot \delta(0) + p \cdot \delta(1)$



Interpretation:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Eigenschaften von Dichte und Verteilung

$F(x)$ ist monoton steigend

$$F(-\infty) = 0; F(\infty) = 1$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) d\xi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = 1$$

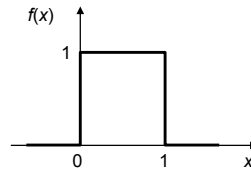
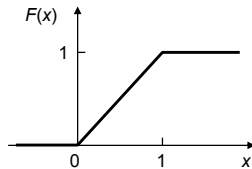
Kontinuierliches Beispiel

- Ein Telefonanruf beginnt beliebig im Zeitraum $(0,1)$. Das Ereignis ist der Zeitpunkt t zwischen t_1 und t_2 . Es gilt:

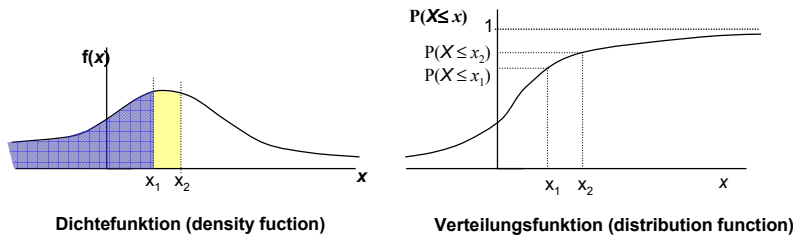
$$P(t_1 \leq t \leq t_2) = t_2 - t_1$$

- Damit (h – Sprungfunktion):

$$F(x) = P(t \leq x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ t & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & ; x > 1 \end{cases} \quad f(x) = h(x) - h(x-1)$$



Verteilungs- und Dichtefunktion mit **kontinuierlicher** Zufallsvariabler



- $f_x(x)=0$, nur die Auftretenswahrscheinlichkeit für ein Intervall von Elementarereignissen kann angegeben werden:
 $P(x_1 \leq X \leq x_2)$
- Wahrscheinlichkeit für Ereignisse im Intervall x_1, x_2 :

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(\xi) d\xi = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$

Verkehrstheorie 1.1.51

definition

Zum vertiefenden Studium sei hier auf [PAP1965,Chapter4,Section 4-1 The concept of a random variable, Properties of distribution functions] verwiesen.

Eine kontinuierliche Zufallsvariable führt auf unendlich viele Elementarereignisse in jedem Intervall a, b ($a, b \in X$) und damit auf eine Auftretenswahrscheinlichkeit von null für das einzelne Elementarereignis ($p_x=0$). Um dennoch mit Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen rechnen zu können, muss mit der Auftretenswahrscheinlichkeit innerhalb eines Intervalls x_1, x_2 gerechnet werden. Dazu kann die Differenz der Verteilungsfunktion für die Stellen x_1, x_2 verwendet werden, um die Dichtefunktion zu erhalten. Liegt die Dichtefunktion vor, kann mittels des Integrals

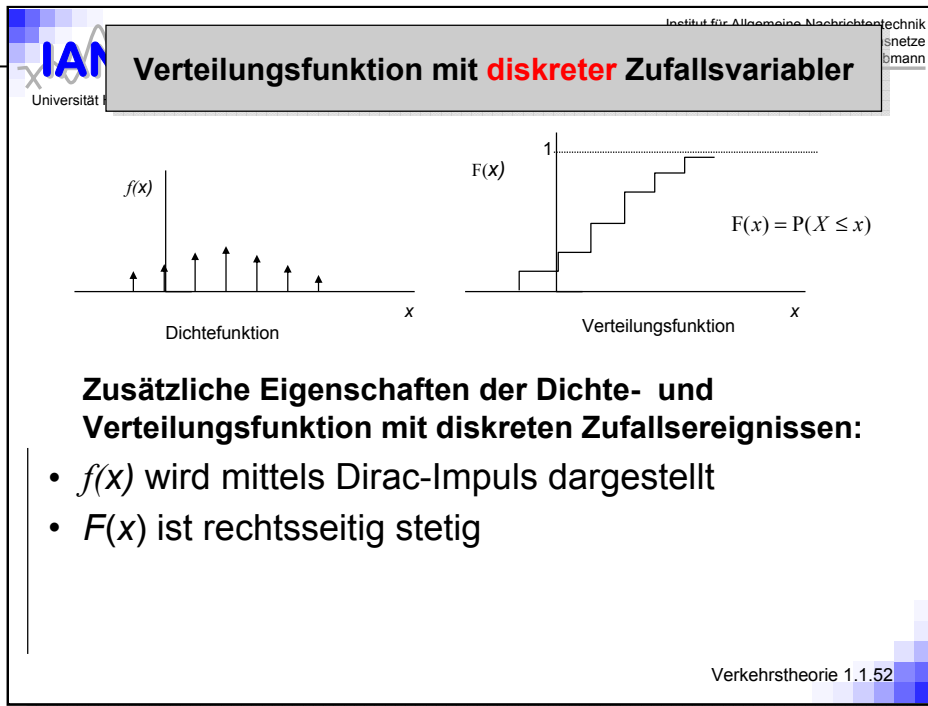
$$P_{(X \leq x_2)} - P_{(X \leq x_1)} = \int_{x=-\infty}^{x_2} f_x dx - \int_{x=-\infty}^{x_1} f_x dx = \int_{x_1}^{x_2} f_x dx = P_{(x_1 \leq x \leq x_2)}$$

die Wahrscheinlichkeit für Ereignisse im Intervall berechnet werden.

Führt man sich die Aussagen zur Verteilungsfunktion für diskrete und für kontinuierliche Elementarereignisse vor Augen, wird der folgende Merksatz klar:

Merke:

Die Berechnungen der Wahrscheinlichkeiten für kontinuierliche Elementarereignisse gehen von der Verteilungsfunktion aus, während die diskreten Elementarereignisse die Dichtefunktion als Ursprung haben.



definition

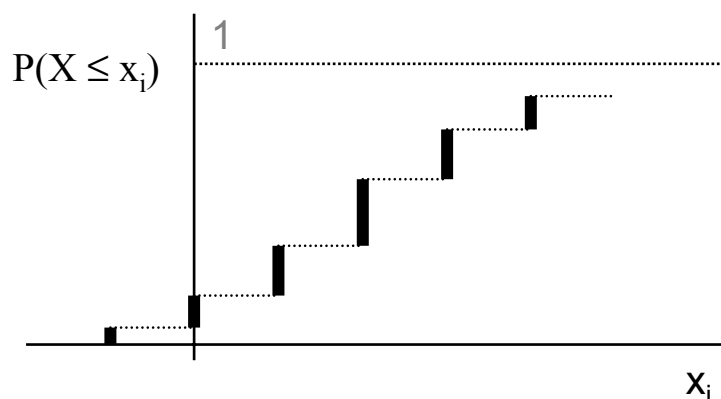
Die **Dichtefunktion** wird eindeutig mittels Dirac-Impulsen (δ -Impulsen) beschrieben, die als Gewicht die Wahrscheinlichkeit p_{x_i} des Elementarereignisses x_i tragen. Die Zahl der Elementarereignisse ist abzählbar, dementsprechend existieren keine Zwischenwerte, oder anders ausgedrückt, die Laufvariable i für die Elementarereignisse ist immer ganzzahlig.

Die **Verteilungsfunktion** ergibt sich durch Summation aus der Dichtefunktion. Sie enthält gegenüber der Dichtefunktion keine zusätzlichen Aussagen. Sie ist mathematisch einwandfrei mittels der Summation beschrieben. Bei der Umsetzung auf die physikalische Realität weist sie jedoch die Schwachstelle auf, dass die Zwischenwerte zwischen den x_i sich nicht auf die Realität abbilden lassen. **Folglich wird im diskreten Fall besser mit der Dichtefunktion gearbeitet.**

Eine exakte, auch die physikalische Umsetzung beschreibende Form der Verteilungsfunktion lautet:

$$P_{(X \leq x)} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_{x_i} \delta_i$$

Damit wird die graphische Darstellung zu:



Momente

Das n -te Moment ist definiert durch:

$$E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x^n dx$$

Das 1-te Moment ist der Erwartungswert (Mittelwert):

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x dx = \mu$$

Das n -te zentrale Moment ist definiert durch:

$$E\{(X - \mu)^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - \mu)^n dx$$

Das 2-te zentrale Moment ist die Varianz:

$$E\{(X - \mu)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - \mu)^2 dx$$

Varianz und Standardabweichung

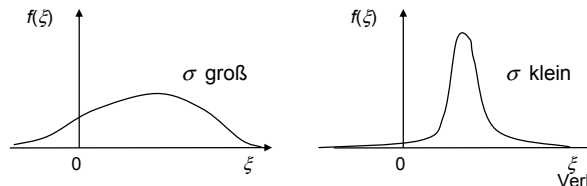
Es gilt für die Varianz:

$$\begin{aligned}
 E\{(X - \mu)^2\} &= E\{X^2 - 2\mu X + \mu^2\} \\
 &= E\{X^2\} - 2\mu \cdot E\{X\} + \mu^2 = E\{X^2\} - E^2\{X\}
 \end{aligned}$$

Die Varianz wird auch häufig mit σ^2 bezeichnet. Die Wurzel der Varianz ist die Standardabweichung σ :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Sie ist ein Maß für die „Breite“ der Wahrscheinlichkeitsdichte



Verkehrstheorie 1.1.55

Momente diskreter ZV

Eine diskrete ZV X hat eine begrenzte Anzahl n möglicher Ereignisse $X_i, i=1,2,\dots,n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X_i)$. Dann ist das n -te Moment von X :

$$E\{X^n\} = \sum_{i=1}^n P(X_i) \cdot X_i^n$$

Die anderen Definitionen gelten analog

Die obige Definition ist identisch mit der Definition der Momente für kontinuierliche ZVs. Sie entsteht durch Ausintegrieren der einzelnen Delta-Impulse.

Momentengenerierende Funktion

Die momentengenerierende Funktion einer kontinuierlichen ZV X ist definiert als:

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{sx} dx = E\{e^{sx}\}$$

(Laplace-Transformation von $f(x)$)

Mit

$$\frac{d\Phi^n(s)}{ds^n} = \Phi^{(n)}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x^n e^{sx} dx = E\{X^n e^{sX}\}$$

Ist:

$$\Phi^{(n)}(0) = E\{X^n\}$$

Momentenfunktion von diskreten ZVs

X sei eine diskrete ZV, die die Werte $X_i \in \mathbb{Z}$ mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_i annimmt. Dann ist die Momentenfunktion

$$\Gamma(z) = E(z^X) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} z^i p_i$$

Wenn $\Gamma(z)$ k -mal differenziert wird, ergibt sich:

$$\Gamma^{(k)}(z) = E(X \cdot (X-1) \cdot \dots \cdot (X-k+1) \cdot z^{X-k}),$$

$$\Gamma^{(k)}(1) = E(X \cdot (X-1) \cdot \dots \cdot (X-k+1))$$

Insbesondere ist:

$$\Gamma(1) = 1; \quad \Gamma'(1) = E\{X\}; \quad \Gamma''(1) = E\{X^2\} - E\{X\}$$

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Kombinatorik (Permutation, Kombination, Variation)
- Grundbegriffe: Ereignis, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit
- Zufallsvariable, Dichten, Verteilungen, Momente, Transformationen
- **Stochastische Prozesse**

Definition

- ZV X ist eine Regel, jedem Ereignis ζ eine Zahl $X(\zeta)$ zuzuweisen.
- Ein stochastischer Prozess ist eine Regel, um jedem ζ eine Funktion $X(t, \zeta)$ zuzuweisen, wobei t für die Zeit steht.
 - ⇒ Stoch. Proz. ist eine Familie von Zeitfunktionen, die von ζ abhängen, d.h. eine Funktion von t und ζ .
- Wenn die möglichen Werte von $X(t)$ endlich sind, sprechen wir von einem Prozess mit diskreten Zuständen, sonst von einem Prozess mit kontinuierlichen Zuständen

Möglichkeiten

1. Es handelt sich um eine Familie (oder Ensemble) von Funktionen $X(t, \zeta)$. Dann sind t und ζ variabel
2. Es handelt sich um eine einzelne Zeitfunktion (oder ein Muster). Dann ist ζ fest und t variabel
3. Wenn t fest und ζ variabel ist, ist $X(t)$ gleich dem Zustand des Prozesses zum Zeitpunkt t
4. Wenn beide fest vorgegeben sind, ist $X(t)$ eine Zahl

Verkehrstheorie 1.1.61

Ein typisches Beispiel für einen stochastischen Prozess ist die Brown'sche Molekularbewegung. Hier ist das Ensemble die Bewegungen aller Partikel über der Zeit t . Wir betrachten dabei nur eine räumliche Dimension.

Im Fall 2 oben nimmt man sich ein Partikel heraus und betrachtet seine Bewegung über der Zeit. Diese Bewegung ist eine reine Zeitfunktion.

Im Fall 3 oben würde man sich einen bestimmten Zeitpunkt wählen und zu diesem Zeitpunkt den Aufenthaltsort aller Partikel betrachten. Daraus ließe sich, wohlgemerkt, eine Wahrscheinlichkeitsdichte (für den Zeitpunkt t) bestimmen.

Im Fall 4 würde man ein einzelnes Partikel zu einem bestimmten Zeitpunkt betrachten. Es ergibt sich eine einfache Zahl.

Essentielles zu stochastischen Prozessen

- Stochastische Prozesse haben eine umfassende eigene Theorie
- Wenn gewisse Rahmenbedingungen (Stationarität) gegeben sind, können Ensemble-Momente durch Zeitmomente ersetzt werden:

$$E\{X^n(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X^n(t) dt$$