

Nachrichtenverkehrstheorie

Übung 5



Institut für Allgemeine Nachrichtentechnik
www.ant.uni-hannover.de

Universität Hannover 

- a) Es wird eine Funkzelle betrachtet in der das Angebot des Verkehrs zum aktuellen Zeitpunkt 5 Erl groß ist. Die Kanalzahl beträgt 8. Im nächsten Messzyklus wird ein vergrößertes Angebot von 8,61 Erl ermittelt. Auf welchen Wert muss die Kanalzahl erhöht werden, wenn der Verlust der Zelle konstant bleiben soll?
- b) Nach einer weiteren Messung wird die Anzahl der Kanäle in der Zelle um 2 erhöht. Welchen Wert hat das Angebot, wenn erneut von einem gleichbleibenden Verlust ausgegangen wird?

- a) Der Verlust der Zelle lässt sich mit Hilfe der Erlangschen Verlustformel berechnen:

$$B = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!}}$$

- Der Ausdruck ist schlecht anwendbar, da der Wert der Fakultäten sehr schnell anwächst.

➡ Iterationsformel

■ Iterationsformel für den Erlangischen Verlust:

$$\begin{aligned}
 B(N) &= \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!}} = \frac{\frac{A}{N} \cdot \frac{A^{N-1}}{(N-1)!}}{\frac{A^N}{N!} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!}} = \frac{\frac{A}{N} \cdot \frac{A^{N-1}}{(N-1)!}}{\frac{A}{N} \cdot \frac{A^{N-1}}{(N-1)!} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!}} \\
 &= \frac{\frac{A}{N} \cdot \frac{A^{N-1}}{(N-1)!}}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!} \left(\frac{A}{N} \cdot \frac{N-1!}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!}} + 1 \right)} = \frac{\frac{A}{N} \cdot \frac{A^{N-1}}{(N-1)!}}{N \left(\frac{A}{N} \cdot \frac{N-1!}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!}} + 1 \right)} = \frac{A \cdot \frac{N-1!}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!}}}{A \cdot \frac{N-1!}{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!}} + N} = \frac{A \cdot B(N-1)}{A \cdot B(N-1) + N} \\
 \Rightarrow \text{für } i = 2..N \text{ gilt } B(i) &= \frac{A \cdot B(i-1)}{A \cdot B(i-1) + i}
 \end{aligned}$$

(4)

```

> restart;
> a:=5; n:=8;
a := 5
n := 8
> B:=(a^n/n!)/sum('a^k/k!','k'=0..n);
78125
B := -----
1115309
> B1:=(5^1/1!)/sum('5^k/k!','k'=0..1);
5
B1 := -
6
> B2:=5*B1/(5*B1+2);
25
B2 := --
37
> B3:=5*B2/(5*B2+3);
125
B3 := ---
236
B4 := ----
1569
> B4:=5*B3/(5*B3+4);
625
> B5:=5*B4/(5*B4+5);
625
B5 := ----
2194
> B6:=5*B5/(5*B5+6);
3125
B6 := -----
16289
> B7:=5*B6/(5*B6+7);
15625
B7 := -----
129648
> B8:=5*B7/(5*B7+8);
78125
B8 := -----
1115309

```

- Für $N=8$ und $A=5$ gilt: $B=0,07$.

Berechnung der erforderlichen Kanäle

für $B= 0,07$ und $A= 8,61$.

1. N besitzt einen sehr großen Wert:

➡ **Umformulierung der Iterationsformel für den erlangischen Verlust nötig.**

$$B(i) = \frac{A * B(i-1)}{i + A * B(i-1)} \quad \text{mit } i = 2..N$$

für grosse N resp. i kann $B(i) = B(i-1)$ gesetzt werden:

$$B = \frac{A * B}{N + A * B}; \quad \text{umgestellt nach } A$$

$$A = \frac{N}{1-B}; \quad \text{oder nach } N \text{ umgestellt:}$$

$$N = A(1-B)$$

■ 2. N besitzt einen kleinen Wert:

➔ Schrittweise Erhöhung von N führt auf die benötigte Anzahl von 12 Kanälen.

```
> restart;
> a:=8.61; n:=11;
                                a := 8.61
                                n := 11
> B(11):=eval((a^n/n!)/sum('a^k/k!', 'k'=0..n));
                                B(11) := 0.1048998745
> n:=12;
                                n := 12
> B(12):=eval((a^n/n!)/sum('a^k/k!', 'k'=0..n));
                                B(12) := 0.06999726928
```

- Iterationsformel für das Angebot durch Umformulierung der Erlangischen Verlustformel:

$$B = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!}}$$

Umstellen nach A :

$$A = f(A) = \sqrt[N]{B \cdot N! \cdot \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!}}$$

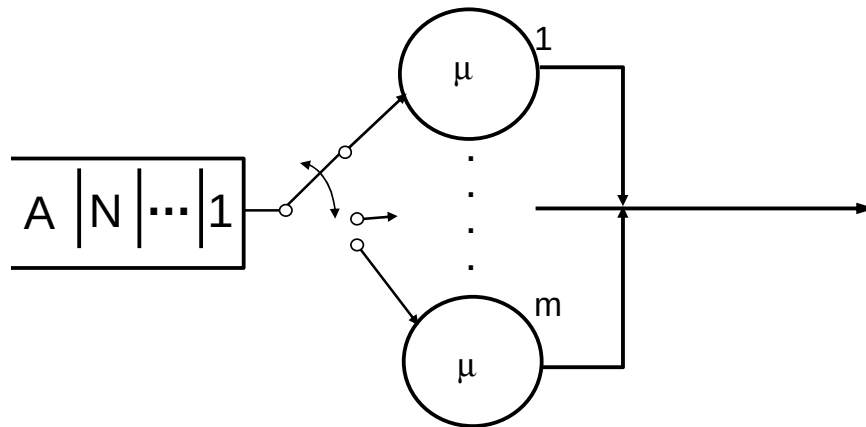
Wenn es einen Fixpunkt gibt (Test mit Banachschen Fixpunktsatz) ergibt die Picard - Iteration :

$$\Rightarrow A_{i+1} = \sqrt[N]{B \cdot N! \cdot \sum_{k=0}^N \frac{A_i^k}{k!}}, \text{ mit Index } i = \text{Iterationsschritt}$$

- Mit B=0.07 und N =14 lässt sich A=10.48 ermitteln.

```
> Startwerte: b:=0.07; n:=14;a:=1;
> a(i+1):=eval(root(b*n!*sum('a(i)^k/k!', 'k'=0..n),n));
a1 := 5.370142087
a2 := 7.337320569
a3 := 8.439364376
a4 := 9.118961042
a5 := 9.558758341
a6 := 9.851122137
a7 := 10.04863110
a8 := 10.18341830
a9 := 10.27600932
a10 := 10.33989264
a11 := 10.38409911
a12 := 10.41475087
a13 := 10.43603337
a14 := 10.45082450
a15 := 10.46111093
a16 := 10.46826783
a17 := 10.47324889
a18 := 10.47671637
a19 := 10.47913057
a20 := 10.48081161
```

Zum Zeitpunkt $t = 0$ tritt Kunde A in ein M/M/m System ein. Alle m Bedieneinheiten sind belegt und n weitere Kunden befinden sich im Wartesystem. Die Abarbeitung der Bedienwünsche erfolgt entsprechend der Ankunftsreihenfolge. Außerdem gilt, dass ab dem Zeitpunkt $t = 0$ keine weiteren Kunden in das System eintreten. Die Bedienzeiten seien exponentialverteilt und besitzen eine mittlere Dauer von $1/\mu$.



- a) Bestimmen Sie 1. die Zeit die der Kunde A wartet.
2. die erforderliche Zeit bis das System „leer“ ist ausgehend von $t=0$.
- b) Die Zufallsvariable X gebe den Rang an mit der Kunde A abgearbeitet wird. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P[X=k]$, dass der Kunde A der k -te Kunde ist der das System verlässt. ($k=1,2,\dots,m+n+1$).
- c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde A schneller das System verlässt als der Kunde, der direkt vor ihm in das System eingetreten ist.

a) 1. Wartezeit Kunde A:

Für den Fall das alle m -Bedieneinheiten beschäftigt sind gilt für die Zeit zwischen den Abfertigungszeitpunkten t_s :

$$t_s = \frac{1}{m\mu}$$

Der Kunde A muss solange warten *bis* $n+1$ Abfertigungen erfolgt sind:

$$\Rightarrow E[\text{Wartezeit von A}] = \frac{n+1}{m\mu}$$

2. Summe der Wartezeit von Kunde A und der Bedienzeit der übrigen Kunden :

$$\begin{aligned} \Rightarrow E[\text{Zeit bis das System leer ist}] &= \frac{n+1}{m\mu} + \frac{1}{m\mu} + \dots + \frac{1}{\mu} \\ &= \frac{n+1}{m\mu} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k\mu} \end{aligned}$$

1. Die "Wartezeit" für Kunde A ergibt sich aus der Wartezeit für die n Kunden vor ihm in der Schlange + 1 für seinen freien Platz einer Bedieneinheit.

Da zu dieser Zeit sämtliche Bedieneinheiten belegt sind gilt für die mittlere Zeit zwischen den Abfertigungszeitpunkten $1/m\mu$. (Man erinnere sich an die entsprechende Markovkette.)

2. Wartezeit + Bedienzeiten: Wenn Kunde A bedient wird sind nur noch m Kunden im System.

Beachte: Die mittlere Zeit zwischen den Abfertigungszeitpunkten nimmt von Bedienung zu Bedienung ab.

- b) Wahrscheinlichkeit, dass Kunde A als k -te Person bedient wird:

Da $n+1$ Kunden das System verlassen müssen bevor der Kunde A bedient wird gilt:

$$P[X = k] = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n, n+1$$

Für $n+2 \leq k \leq m+n+1$ kann sich jeder der m möglichen Werte mit derselben Wahrscheinlichkeit einstellen, falls das System gedächtnislos ist:

$$P[X = k] = \frac{1}{m} \quad \text{für } k = n+2, \dots, m+n+1$$

- c) Wird der Kunde der sich direkt vor A im Wartebereich befindet, mit B bezeichnet, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass B noch bedient wird wenn A in den Bedienprozess eintritt $\frac{m-1}{m}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Kunde A in diesem schneller als Kunde B fertig ist, ist dann $1/2$.

Damit gilt:

$$P[\text{A beendet den Bedienprozeß vor B}] = \frac{m-1}{2m}$$

In einem zellularen Mobilfunksystem wird ein bestimmtes Gebiet durch eine Vermittlungsstelle mit m Funkkanälen versorgt. Hierbei werden zwei Arten von Verbindungswünschen unterschieden:

- Funk-zu-Festnetz-Verbindungen mit der Poissonrate λ_1 belegen einen Funkkanal.
- Funk-zu-Funk-Verbindungen mit der Poissonrate λ_2 belegen zwei Funkkanäle.

Die Verbindungsdauer ist exponential verteilt mit dem Mittelwert $1/\mu$. Bei vollständig belegtem System gehen eintreffende Verbindungswünsche verloren.

Geben Sie für beide Verbindungsarten die Verlustwahrscheinlichkeit an.

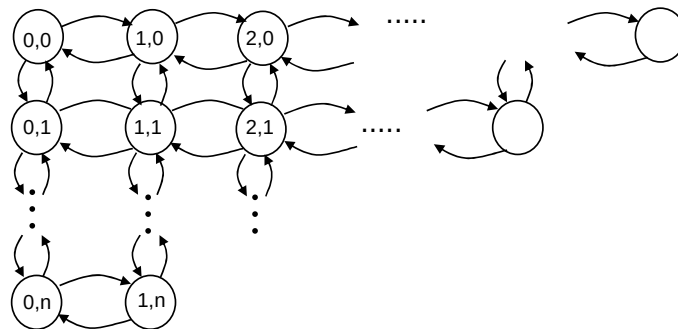
Der Zustandsraum besteht aus zweidimensionalen Zuständen (i,j) :

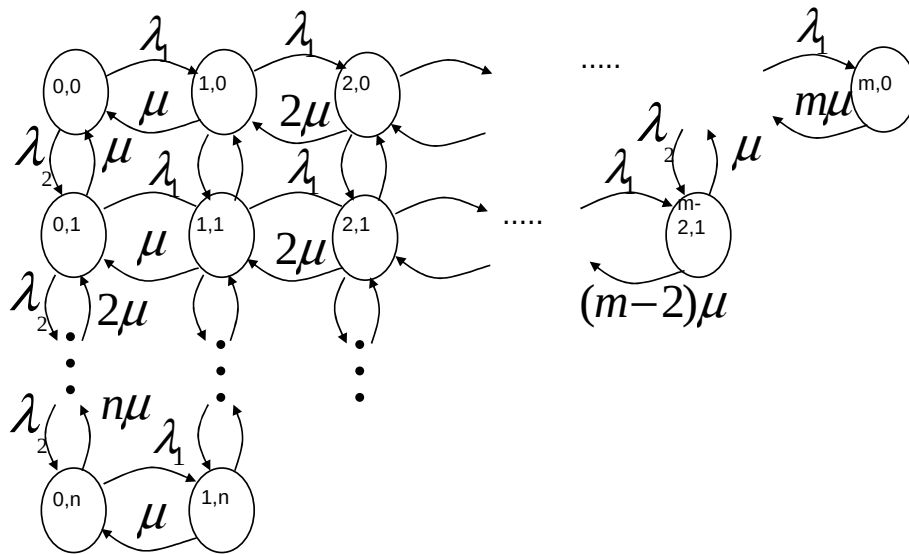
i : Kunden vom Typ1 Kanal

j : Kunden vom Typ 2 Kanäle

Kanäle: $m = 2n + k; k \in \{0,1\}$

Zustandsübergangsdiagramm:





Die allgemeinen Gleichgewichtsgleichungen (Rate In = Rate Out) für einen inneren Zustand:

$$\lambda_2 p(i, j-1) + \lambda_1 p(i-1, j) + (j+1)\mu_2 p(i, j+1) + (i+1)\mu_1 p(i+1, j) \\ = j\mu_2 p(i, j) + i\mu_1 p(i, j) + \lambda_2 p(i, j) + \lambda_1 p(i, j)$$

Jede Spalte und jede Reihe entspricht dem M/M/m/m Verlustsystem.

Verlustwahrscheinlichkeiten (Verlustsystem):

$$p_n = p_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow p(i, j) = \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right)^j p(0,0)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{Rate In}}{p(0,0)} &= \lambda_2 \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu} \right)^i \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu} \right)^{j-1} + \lambda_1 \frac{1}{(i-1)!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu} \right)^{i-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu} \right)^j \\
 &\quad + (j+1)\mu \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu} \right)^i \frac{1}{(j+1)!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu} \right)^{j+1} \\
 &\quad + (i+1)\mu \frac{1}{(i+1)!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu} \right)^{i+1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu} \right)^j \\
 &= (j\mu + i\mu + \lambda_2 + \lambda_1) \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu} \right)^i \frac{1}{(j)!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu} \right)^j \\
 &= \frac{\text{Rate Out}}{p(0,0)}
 \end{aligned}$$

Berechnung von $p(0,0)$:

$$\begin{aligned}
 1 &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-2j} p(i, j) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-2j} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu} \right)^i \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu} \right)^j p(0,0) \\
 &= p(0,0) \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu} \right)^j \sum_{i=0}^{m-2j} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu} \right)^i \\
 \Rightarrow p(i, j) &= \frac{\frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu} \right)^i \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu} \right)^j}{\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu} \right)^j \sum_{i=0}^{m-2j} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu} \right)^i}
 \end{aligned}$$

Verlustwahrscheinlichkeit für einen Kunden vom Typ 1:

- alle m Server sind belegt, Summieren der Wahrscheinlichkeiten von (n+1) Zuständen

$$p[\text{type 1 lost}] = p(0,0) \left[\frac{1}{m!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu} \right)^m + \frac{1}{(m-2)!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu} \right)^{m-2} \left(\frac{\lambda_2}{\mu} \right) + \dots + \frac{1}{(m-2n)!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu} \right)^{m-2n} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu} \right)^n \right]$$

$$p[\text{type 1 lost}] = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu} \right)^j \frac{1}{m-2j!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu} \right)^{m-2j}}{\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu} \right)^j \sum_{i=0}^{m-2j} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu} \right)^i}$$

Verlustwahrscheinlichkeit für einen Kunden vom Typ 2:

- Weniger als 2 Server sind idle (m-1 Server sind belegt)

$$p[\text{type 2 lost}] = \sum_{i=m-1}^m p(i,0) + \sum_{i=m-3}^{m-2} p(i,1) + \dots + \sum_{i=m-2n+1}^{m-2(n-1)} p(i,n-1) + \sum_{i=0}^k p(i,n)$$

$$p[\text{type 2 lost}] = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right)^j \sum_{i=m-2(j+1)+1}^{m-2j} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i}{\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right)^j \sum_{i=0}^{m-2j} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right)^n \sum_{i=0}^1 \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i}{\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right)^j \sum_{i=0}^{m-2j} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^i}$$