

Nachrichtenverkehrstheorie

Übung 4



Institut für Allgemeine Nachrichtentechnik
www.ant.uni-hannover.de

Universität Hannover 

- Zur Verringerung der Wartezeit soll in einem MM1-System die Übertragungsrate eines Kanals, auf dem Datenpakete der mittleren Größe von 2400 bit übertragen werden, von ursprünglich 6000 bit/s so verändert werden, dass die mittlere Wartezeit um 25% reduziert wird. Ankommende Pakete treten mit einem mittleren Abstand von 0.5 s in das Wartesystem ein.

Welche Übertragungsrate muss gewählt werden?

- Innerhalb eines MM1/N-Warteschlangensystems mit $N=15$ erhöht sich die Auslastung von $\rho_1 = 0,6$ auf $\rho_2 = 0,7$.

Wieviele zusätzliche Warteplätze sind nötig, damit der Verlust des Systems nicht steigt?

Innerhalb eines Nachrichtenübertragungssystems steht ein Kanal zur Verfügung. Ankommende Pakete haben eine Länge von 1200 bit und werden im Zeitmultiplexing mit einer Übertragungsrate von 9600 bit/s übertragen. Die Ankunftsrate λ und die Bedienrate μ des Systems seien poissonverteilte Größen. Zu jedem Ankunftszeitpunkt trifft entweder ein Paket mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 oder es treffen zwei Pakete ebenfalls mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 gleichzeitig ein. Die Auslastung soll $\rho=0.75$ betragen.

- Zeichnen Sie das Zustandübergangsdiagramm des Systems!
- Stellen Sie die das Gleichungssystem der Zustandswahrscheinlichkeiten für den eingeschwungenen Zustand auf!
- Bestimmen Sie die erwartete Anzahl von Paketen im System!
- Wie groß ist die mittlere Verweildauer eines Pakets im System?

In einem sehr kleinem Callcenter stehen 2 Personen zur Verfügung, die ankommende Anrufe entgegennehmen. Zusätzlich können 2 weitere Anrufer in Warteleitungen verbleiben bis Mitarbeiter frei werden. Sind alle Warteleitungen belegt, werden die ankommenden Anrufe abgewiesen. Die Anrufe sollen gemäß einem poissonischen Prozess eingehen mit einer Rate von einem Anruf pro Minute. Die Dauer eines Telefongesprächs sei exponentialverteilt mit einem Erwartungswert von 45 Sekunden.

- a) Stellen Sie das Zustandsübergangsdiagramm dar.
- b) Bestimmen Sie
 - I. die stationären Wahrscheinlichkeiten, für den Fall dass
 - ein Anrufer sofort einen Mitarbeiter spricht
 - ein Anrufer zunächst in der Warteleitung bleibt
 - ein Anrufer das Besetztzeichen hört

■ Einige wichtige Regeln:

Folge:

$$f_n \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$af_n + bg_n$$

$$f_{n+1}$$

$$f_{n+k} \quad k > 0$$

$$f_{n-1}$$

$$f_{n-k} \quad k > 0$$

z-Transformierte:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

$$aF(z) + bG(z)$$

$$\frac{1}{z} [F(z) - f_0]$$

$$\frac{F(z)}{z^k} - \sum_{i=1}^k z^{i-k-1} f_{i-1}$$

$$zF(z)$$

$$z^k F(z)$$

Sei mit L^q die Anzahl der Pakete in der Warteschlange bezeichnet, dann gilt für den Erwartungswert von L^q :

$$\begin{aligned} E(L^q) &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_n \\ &= -(1-p_0) + \sum_{n=0}^{\infty} n p_n \end{aligned}$$

mit $p_0 = 1-\rho$ und $p_n = (1-\rho)\rho^n$

$$\begin{aligned} E(L^q) &= -\rho + \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n \\ &= \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} \end{aligned}$$

Es gilt für das ursprüngliche System:

$$\text{Ankunftsrate: } \lambda = 2 \frac{1}{s}$$

$$\text{Bedienrate: } \mu_{alt} = \frac{6000 \text{ bit} / s}{2400 \text{ bit}}$$

$$\text{Auslastung: } \rho_{alt} = \frac{\lambda}{\mu_{alt}} = 0.8$$

Der Erwartungswert der Warteschlangenlänge berechnet sich für das ursprüngliche System zu:

$$E(L^q)_{alt} = \frac{\rho_{alt}^2}{1 - \rho_{alt}} = 3.2$$

Der Erwartungswert der Wartezeit $E(W^q)_{alt}$ lässt sich mit Hilfe von Littles Formel bestimmen:

$$E(L^q)_{alt} = \lambda E(W^q)_{alt}$$

$$\Rightarrow E(W^q)_{alt} = \frac{E(L^q)_{alt}}{\lambda} = \frac{3.2}{2} \text{ s} = 1.6 \text{ s}$$

Für das neue System soll gelten:

$$E(W^q)_{neu} = 0.75 \cdot E(W^q)_{alt} = 1.2 \text{ s}$$

$$\Rightarrow E(L^q)_{neu} = \lambda \cdot E(W^q)_{neu} = 2.4$$

Bestimmung von ρ_{neu} :

$$E(L^q)_{neu} = \frac{\rho_{neu}^2}{1 - \rho_{neu}} = 2.4$$

➡ Lösung von $0 = \rho_{neu}^2 + 2.4\rho_{neu} - 2.4$
 $\Rightarrow \rho_{neu} = 0.759592$

Hiermit lässt sich nun die erforderliche Übertragungsrate berechnen:

$$\text{Übertragungsrate}_{neu} = \frac{\lambda}{\rho_{neu}} \cdot (\text{Anzahl der bits pro Paket})$$

$$\Rightarrow \text{Übertragungsrate}_{neu} \approx 6320 \text{ bit/s}$$

Erinnerung: Die Verlustwahrscheinlichkeit ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass alle N Warteplätze belegt sind.

$$p_B = p_N = (1 - \rho) \rho^N / (1 - \rho^{N+1})$$

Vor der Erhöhung der Verkehrsintensität galt:

$$p_{B1} = (1 - \rho_1) \rho_1^{N_1} / (1 - \rho_1^{N_1+1}) = 1.88127 \cdot 10^{-4}$$

Sei die Warteschlangenlänge nach der Erhöhung des Verkehrsangebotes gegeben durch $N_2 = N_1 + \Delta N$,

dann gilt

$$p_{B2} = (1 - \rho_2) \rho_2^{N_1 + \Delta N} / (1 - \rho_2^{N_1 + \Delta N + 1})$$

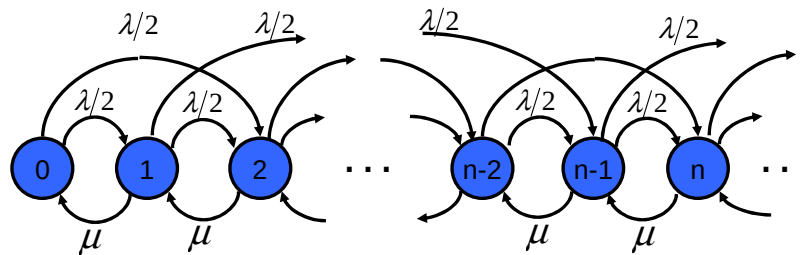
Gesucht ist ΔN mit $p_{B1} = p_{B2}$

$$\Rightarrow P_{B1} = P_{B2} = B = (1 - \rho_2) \rho_2^{N_1 + \Delta N} / (1 - \rho_2^{N_1 + \Delta N + 1})$$

$$\Rightarrow \Delta N = \frac{\ln \frac{B}{1 - \rho_2 + \rho_2 B}}{\ln \rho_2} - N_1 = 5.676695907$$

6 zusätzliche Warteplätze sind nötig.

a) Zustandübergangsdiagramm



b) Gleichungssystem

$$n = 0: \quad \lambda \cdot p_0 = \mu \cdot p_1$$

$$n = 1: \quad (\lambda + \mu) p_1 = \frac{\lambda}{2} p_0 + \mu \cdot p_2$$

$$n \geq 2: \quad (\lambda + \mu) p_n = \frac{\lambda}{2} p_{n-2} + \frac{\lambda}{2} p_{n-1} + \mu \cdot p_{n+1}$$

c) Erwartete Anzahl von Paketen im System

→ Erwartungswert $E(n)$ für den Zustand n

- Hier: z-Transformation zur Bestimmung des 1. Momentes, denn es gilt:

$$E(n) = \left. \frac{dP(z)}{dz} \right|_{z=1}$$

I. Anwendung der z-Transformation auf das Gleichungssystem

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = \frac{\lambda}{2} \sum_{n=2}^{\infty} p_{n-2} z^n + \frac{\lambda}{2} \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} z^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} z^n$$

$$\Rightarrow \lambda P(z) + \mu [P(z) - p_0] = \frac{\lambda}{2} z^2 P(z) + \frac{\lambda}{2} z P(z) + \frac{\mu}{z} [P(z) - p_0]$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{\mu p_0 \left(1 - \frac{1}{z}\right)}{\mu \left(1 - \frac{1}{z}\right) + \lambda \left(1 - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2}\right)} = \frac{2\mu p_0}{2\mu - \lambda z(z+2)}$$

Es gilt $\bar{\lambda} = \frac{3}{2} \lambda$ und damit folgt $\rho = \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = \frac{3\lambda}{2\mu}$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{p_0}{1 - \frac{1}{3} \rho z(z+2)}$$

Aus $P(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ lässt sich der Ausdruck $p_0 = 1 - \rho$ bestimmen.

$$\Rightarrow P(z) = \frac{1 - \rho}{1 - \frac{1}{3} \rho z(z+2)}$$

II. Erwartete Anzahl von Paketen im System

→ Bestimmung von $E(n) = \left. \frac{dP(z)}{dz} \right|_{z=1}$

$$\frac{dP(z)}{dz} = (1-\rho) \frac{\frac{1}{3} \rho(z+2)}{\left[1 - \frac{1}{3} \rho z(z+2) \right]^2}$$

$$\Rightarrow E(n) = \left. \frac{dP(z)}{dz} \right|_{z=1} = \frac{4}{3} \frac{\rho}{1-\rho}$$

Mit $\rho = 0.75$ lässt sich für die mittlere Anzahl von Paketen im System der Wert 4 ermitteln.

III. Mittlere Verweildauer im System

→ Lösung mit Littles Formel

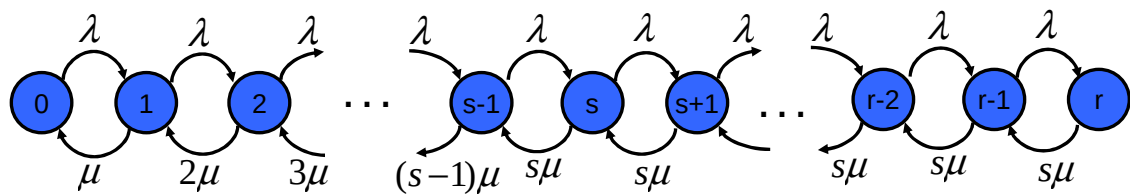
Es gilt: $\bar{\lambda} E(T) = E(n)$

$$\Rightarrow E(T) = \frac{4}{3\lambda} \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{4}{3\rho\mu} \frac{\rho}{1-\rho}$$

Aus Aufgabenstellung: $\mu = \frac{9600 \text{ bit/s}}{1200 \text{ bit}} = 8 \frac{1}{s}$

Durch Einsetzen erhält man 0.66 s als Wert für die mittlere Verweildauer im Wartesystem.

a) Zustandübergangsdiagramm



Gleichungssystem:

$$p_0 \lambda = p_1 \mu_1$$

$$p_n (\lambda + \mu_n) = p_{n-1} \cdot \lambda + p_{n+1} \mu_{n+1}$$

mit Glg. (2.2 - 3) aus der Vorlesung

$$\Rightarrow p_n = p_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda}{\mu_{i+1}}$$

$$\Rightarrow p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} p_0 & \text{für } n = 1, \dots, s-1 \\ \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}} p_0 & \text{für } n = s, \dots, r \\ 0 & \text{für } n > r \end{cases}$$

Die Summe der Zustandswahrscheinlichkeiten muss eins sein.

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^r p_n = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^r p_n = p_0 + \sum_{n=1}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} p_0 + \sum_s^r \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}} p_0 = 1$$

$$\Leftrightarrow p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_s^r \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}}}$$

$$\Leftrightarrow p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \sum_{n=s}^r \left(\frac{\rho}{s} \right)^{n-s}}$$

b) I. Wahrscheinlichkeiten

- ein Anrufer spricht sofort mit einem Mitarbeiter

Gesucht ist:

$$p_{\text{Mitarbeiter}} = \sum_{n=0}^{s-1} p_n = p_0 + \sum_{n=1}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} p_0$$

Mit $\mu = \frac{1}{45} \frac{1}{s}$, $\lambda = \frac{1}{60}$ und $\rho = 0.75$ gilt dann:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^1 \frac{0.75^n}{n!} + \frac{0.75^2}{2!} \sum_{n=2}^4 \left(\frac{0.75}{2} \right)^{n-2}} \approx 0.46$$

$$p_1 = \frac{0.75^1}{1!} p_0 \approx 0.35$$

$$\Rightarrow p_{\text{Mitarbeiter}} = \sum_{n=0}^1 p_n = 0.81$$

b) I. Wahrscheinlichkeiten

- ein Anrufer verbleibt zunächst in einer Warteleitung

Gesucht ist:

$$p_{\text{Warteleitung}} = \sum_{n=s}^{r-1} p_n = \sum_{n=s}^{r-1} \frac{\rho^n}{s! s^{n-s}} p_0$$

$$p_2 \approx 0.13$$

$$p_3 \approx 0.049$$

$$\Rightarrow p_{\text{Warteleitung}} = \sum_{n=2}^3 p_n \approx 0.149$$

b) I. Wahrscheinlichkeiten

- ein Anrufer hört das Besetztzeichen

Dies ist gleichbedeutend damit, dass sich das System im

Zustand r befindet: $p_B = p_r$

$$\Rightarrow p_B = p_4 \approx 0.018$$