

Nachrichtenverkehrstheorie

Übung 3



Institut für Allgemeine Nachrichtentechnik
www.ant.uni-hannover.de

Universität Hannover 

- Beziehen Sie sich auf die Aufgabe 9 der 2. Übung. Es wird der gemeinsame Ankunftsprozess betrachtet, der nun zerlegt werden soll. Sei p_i die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde des Gesamtstroms zu dem Teilstrom i gehört. Es sei die Gesamtrate mit λ Ankünfte pro Sekunde gegeben und die Wahrscheinlichkeit p_i für den Teilstrom i sei für jeden Kunden unabhängig.

Zeigen Sie, dass jeder Teilstrom ein Poisson-Prozess mit der Rate λp_i ist.

Gegeben:

p_i : Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Kunde
zum i -ten Teilstrom gehört

λ : Gesamtankunftsrate/sek

Lösung:

Betrachtung eines Intervalls der Länge t während dessen N
Ankünfte im Gesamtankunftsprozess eintreffen. Addiere nun alle
Arten auf denen N_i Kunden aus N Ankünften ausgewählt
werden können und damit den i -ten Teilstrom bilden.

Es gilt unter der Voraussetzung $N_i \leq N$,

$$\begin{aligned}
 P[N_i = n_i] &= \sum_{n=n_i}^{\infty} P[N = n] \binom{n}{n_i} p_i^{n_i} (1-p_i)^{n-n_i} \\
 &= \sum_{n=n_i}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \binom{n}{n_i} p_i^{n_i} (1-p_i)^{n-n_i} \\
 P[N_i = n_i] &= \frac{e^{-\lambda t} (\lambda p_i t)^{n_i}}{n_i!} \sum_{n=n_i}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p_i)t]^{n-n_i}}{(n-n_i)!} \\
 &= \frac{(\lambda p_i t)^{n_i}}{n_i!} e^{-\lambda p_i t}
 \end{aligned}$$

(4)

Poisson-Prozess: $f(k, t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$

Wahrscheinlichkeitsdichte der Binomialverteilung: $P(X = k) = \binom{n}{k} q^{n-k} p^k$

Potenzreihe: $\sum_{a=0}^{\infty} \frac{x^a}{a!} = \sum_{a=a_i}^{\infty} \frac{x^{a-a_i}}{(a-a_i)!} = e^x$

Sei $\{X_j\}$ eine Folge von gleich verteilten und untereinander unabhängigen Zufallsvariablen (mit $P[X_j = 1] = p$ und $P[X_j = 0] = 1 - p$).

Die Summe einer poissonverteilten Anzahl n mit dem Mittelwert λ der Zufallsvariablen X_j sei gegeben durch $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Zeigen Sie, dass die Summe S_n ebenfalls poissonverteilt ist mit dem Mittelwert $p\lambda$.

Gegeben :

$\{X_j\}$: Menge von unabh. Zufallsvariablen mit $P[X_j = 1] = p$
 und $P[X_j = 0] = 1 - p$

$$S_N = X_1 + \dots + X_N$$

N : poissonverteilte Anzahl mit dem Mittelwert λ

Zeige : S_N ist poissonverteilt mit dem Mittelwert λp

Damit erhalten wir für die z - Transformierte der Summe S_N unter der Bedingung $N = n$ und der Voraussetzung dass $\{X_j\}$ unabhängig voneinander sind.

$$G(z \mid N = n) = E[z^{S_n}] = E[z^{X_1 + \dots + X_N}] = (E[z^{X_1}])^n$$

Für die z - Transformierte der Zufallsvariable X_1 gilt :

$$\begin{aligned} E[z^{X_1}] &= \sum_{k=0}^{\infty} P[X_k = k] z^k = P[X_1 = 0] \cdot 1 + P[X_1 = 1] \cdot z \\ &= 1 - p + pz \end{aligned}$$

Es resultiert :

$$G(z \mid N = n) = (1 - p + pz)^n$$

Verallgemeinern wir nun $G(z | N = n)$:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G(z | N = n) \cdot P[N = n]$$

Mit $P[N = n]$ poissonverteilt folgt:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p + pz)^n \cdot \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

Da $e^x = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots$ gilt,

resultiert

$$G(z) = e^{\lambda p(z-1)} \quad (z - \text{Transformierte der Poissonverteilung})$$

- Weisen Sie die nach, dass die Exponentialverteilung gedächtnislos ist.

- zur Erinnerung

Exponentialverteilung: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

kumulierte Verteilungsfunktion: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

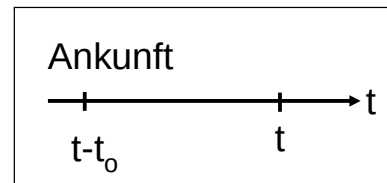
Annahme: Zum aktuellen Zeitpunkt sind bereits t_0 Sekunden verstrichen ohne dass eine Ankunft beobachtet wurde.

Für die Zwischenankunftszeit $\tilde{t}$ gilt die Exponentialverteilung mit $P[\tilde{t} \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}$

Es ist zu zeigen: Wenn $P[\tilde{t} \leq t + t_0 \mid \tilde{t} > t_0] = P[\tilde{t} \leq t]$ erfüllt, dann ist die Exponentialverteilung gedächtnislos.

Nachdem Multiplikationssatz $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ist

$$P[\tilde{t} \leq t + t_0 \mid \tilde{t} > t_0] = \frac{P[t_0 < \tilde{t} \leq t + t_0]}{P[\tilde{t} > t_0]}$$



$$\begin{aligned}
 P[\tilde{t} \leq t + t_0 \mid \tilde{t} > t_0] &= \frac{P[t_0 < \tilde{t} \leq t + t_0]}{P[\tilde{t} > t_0]} \\
 &= \frac{P[\tilde{t} \leq t + t_0] - P[\tilde{t} \leq t_0]}{P[\tilde{t} > t_0]} \\
 &= \frac{1 - e^{-\lambda(t+t_0)} - (1 - e^{-\lambda t_0})}{1 - (1 - e^{-\lambda t_0})} \\
 &= 1 - e^{-\lambda t}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Exponentialverteilung ist gedächtnislos

■ Einige wichtige Regeln:

Folge:

$$f_n \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$af_n + bg_n$$

$$f_{n+1}$$

$$f_{n+k} \quad k > 0$$

$$f_{n-1}$$

$$f_{n-k} \quad k > 0$$

z-Transformierte:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

$$aF(z) + bG(z)$$

$$\frac{1}{z} [F(z) - f_0]$$

$$\frac{F(z)}{z^k} - \sum_{i=1}^k z^{i-k-1} f_{i-1}$$

$$zF(z)$$

$$z^k F(z)$$