

Nachrichtenverkehrstheorie

Übung 2



Institut für Allgemeine Nachrichtentechnik
www.ant.uni-hannover.de

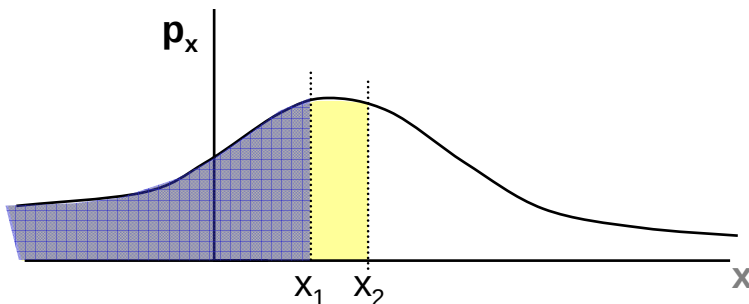
Universität Hannover 

- Diskrete Zufallsvariable X_i sind unabhängig, wenn gilt:

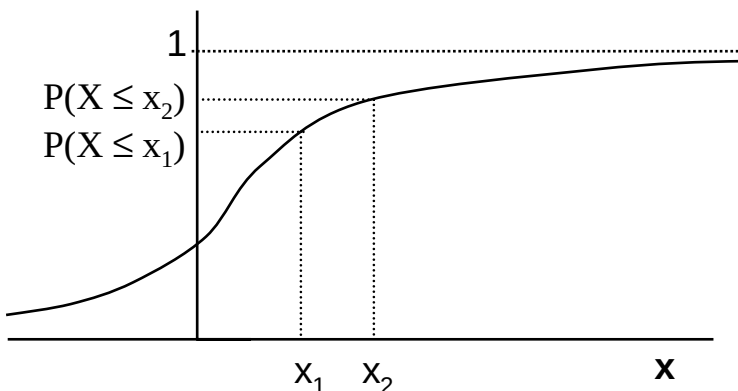
$$P\{X_1=a_1 \cap X_2=a_2 \cap \dots \cap X_n=a_n\} = P\{X_1=a_1\} P\{X_2=a_2\} \dots P\{X_n=a_n\}$$

Die Unabhängigkeit ist also dadurch gegeben, dass kein Verbundereignis existiert, das bei der multiplikativen UND-Verknüpfung berücksichtigt werden müsste.

Nun mal vorsichtig! Durch die $\leq$ Beziehung werden da doch wieder Verbundereignisse und Und-verknüpft. Müsste da nicht wieder ein Korrekturfaktor berücksichtigt werden? Nein, das muss nicht, da diese Menge an Verbundereignissen sowohl rechts, als auch links vom Gleichheitszeichen steht. Oder anders begründet, das Verbundereignis tritt nur bei der nicht definierten Dichtefunktion auf, nicht aber bei der Verteilungsfunktion!



bei der Dichtefunktion tritt das Verbundereignis auf, aber auf beiden Seiten der Gleichung



bei der Verteilungsfunktion tritt das Verbundereignis gar nicht erst auf.

- Ereignisse nennt man unabhängig voneinander, wenn das Eintreten des einen die Wahrscheinlichkeit des anderen nicht beeinflusst. Im umgekehrten Fall nennt man sie abhängig. Man definiert:

Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig, wenn gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Ungenau, aber einprägsam formuliert: Bei unabhängigen Ereignissen kann man die Wahrscheinlichkeiten multiplizieren.
- Dass dies dem Begriff "Unabhängigkeit" gerecht wird, erkennt man durch Umstellen nach $P(A)$:

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

Das gleichzeitige Eintreten zweier Ereignisse A und B entspricht mengentheoretisch dem Eintreten des Verbundereignisses $A \cap B$.

Die Wahrscheinlichkeit hiervon berechnet sich zu $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$

Es soll untersucht werden, ob in der folgenden Verbundverteilung (hier Verteilung mit zwei Zufallsvariablen) die beiden Zufallsvariablen X und Y statistisch unabhängig voneinander sind.

$$\text{geg.: } P\{X = m \cap Y = n\} = (0,64)(0,2)^{m-1}(0,2)^{n-1}$$

Die Bedingung für die statistische Unabhängigkeit lautet:

$$P\{X = m \cap Y = n\} = P\{X = m\} * P\{Y = n\}$$

Bei statistischer Unabhängigkeit muss die Wahrscheinlichkeit, dass X UND Y auftreten gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse sein.

Also prüfen wir diese Einzelwahrscheinlichkeiten!

Zum Test bedienen wir uns des folgenden Theorems:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap B_i), \text{ } B_i \text{ disjunkt, } i \in 1, 2, \dots, \infty$$

Wir setzen :

$$P(A) = P\{X = m\} \text{ und } P(B_i) = P\{Y = i\}$$

Damit und der zu prüfenden Beziehung gehen wir in das Theorem:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap B_i) = P\{X = m\} = \sum_{i=1}^{\infty} 0,64 * 0,2^{m-1} 0,2^{i-1}$$

Nun können wir konstante Terme bezüglich i ausklammern:

Das Theorem 1.10 kann am Würfel plausibel gemacht werden:

Die Ereignisse B_i der gewürfelten Ziffern 1 bis 6 sind:

$$p(B_1) = 1/6$$

$$p(B_2) = 1/6$$

$$p(B_3) = 1/6$$

$$p(B_4) = 1/6$$

$$p(B_5) = 1/6$$

$$p(B_6) = 1/6$$

Einsetzen in das Theorem führt auf:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A)P(B_1) + P(A)P(B_2) + P(A)P(B_3) + P(A)P(B_4) + P(A)P(B_5) + P(A)P(B_6) \\ &= P(A)(P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) + P(B_6)) = P(A)(6 * 1/6) \\ &= P(A) \end{aligned}$$

$$P\{X = m\} = (0,64)(0,2)^{m-1} \sum_{i=1}^{\infty} (0,2)^{i-1}$$

Mit dem Hinweis: $1+x+x^2+x^3+\dots+x^\infty = 1/(1-x)$ wird:

$$P\{X = m\} = (0,64)(0,2)^{m-1} (1/(1-0,2)) = 0,8 * 0,2^{m-1}$$

Auf die gleiche Weise kann die Wahrscheinlichkeit

$$P\{X = n\} = 0,8 * 0,2^{n-1}$$

berechnet werden.

Nun berechnen wir das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$P\{X = m\} P\{X = n\} = 0,8 * 0,2^{m-1} 0,8 * 0,2^{n-1} =$$

$$P\{X = m \cap X = n\}$$

Was zu beweisen war! Es liegt also statistische Unabhängigkeit vor.

- Von 6 Flächen eines Würfels W_1 sind 4 rot und 2 schwarz gefärbt, und von den 6 Flächen eines Würfels W_2 sind 2 rot und 4 schwarz gefärbt. Eine echte Münze wird einmal geworfen. Wenn „Kopf“ fällt wird der Würfel W_1 n -mal geworfen, wenn „Zahl“ fällt wird der Würfel W_2 n -mal geworfen. Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel W_1 benutzt wird, vorausgesetzt in allen n Würfeln rot auftritt?

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim gleichzeitigen Würfeln von 12 echten Würfeln jede der 6 Augenzahlen zweimal auftritt?

- Durch Berechnung der jeweiligen Wahrscheinlichkeiten nehme man Stellung zu folgender Aussage: Beim dreimaligen Würfeln sind die Ereignisse „die Augensumme ist 11“ und „die Augensumme ist 12“ gleichwahrscheinlich, da die Summe auf sechs Arten dargestellt werden kann:

$$11 = 6+4+1 = 6+3+2 = 5+5+1 = 5+4+2 = 5+3+3 = 4+4+3$$

$$12 = 6+5+1 = 6+4+2 = 6+3+3 = 5+5+2 = 5+4+3 = 4+4+4$$

- Elf Personen, darunter die Damen A,B,C und D, setzen sich zufällig auf elf
 - a) in einer Reihe,
 - b) um einen runden Tisch
 angeordneten Stühle.
 Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass A neben B, aber nicht C neben D sitzt?

- Es seien K unabhängige Quellen gegeben. Jede k -te Quelle besitzt einen poissonverteilten Ankunftsprozess mit einer Rate von λ_k Kunden in der Sekunde ($k=1,2,\dots,K$). Es wird nun der gemeinsame Ankunftsprozess der K Quellen betrachtet. Beweisen Sie, dass der gemeinsame Ankunftsprozess ebenfalls ein Poissonprozess mit dem Parameter $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_K$ ist.

Ereignisse:

A_1 := Münze zeigt „Kopf“: W1 wird benutzt

A_2 := Münze zeigt „Zahl“: W2 wird benutzt

R_n := in allen n Würfeln tritt rot auf

Es gilt:
$$P(R_n | A_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

$$P(R_n | A_2) = \frac{1}{3^n},$$

$$P(A_i) = \frac{1}{2}, \text{ für } i = 1, 2.$$

■ Bayessche Formel:

$$P(A_1 | R_n) = \frac{P(R_n | A_1)P(A_1)}{P(R_n | A_1)P(A_1) + P(R_n | A_2)P(A_2)}$$

$$= \frac{2^n}{2^n + 1}$$

Die Anzahl aller möglichen Würfe ist 6^{12} ,
wobei die Anzahl für das Ereignis günstigen Ergebnisse

$$\binom{12}{2} \binom{10}{2} \binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} \text{ beträgt.}$$

$\Rightarrow P(\text{"jede der 6 Augenzahlen wird genau zweimal gewürfelt"})$

$$= \frac{\binom{12}{2} \binom{10}{2} \binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2}}{6^{12}} = \frac{6775}{6^{12}} \approx 0,3438\%$$

$$\begin{aligned}
 &P(\text{"Summe der drei Würfel ist 11"}) \\
 &= 3!P(\{(6,4,1)\}) + 3!P(\{(6,3,2)\}) + 3P(\{(5,5,1)\}) \\
 &\quad 3!P(\{(5,4,2)\}) + 3P(\{(5,3,3)\}) + 3P(\{(4,4,3)\}) \\
 &= \frac{3 \cdot 3! + 3 \cdot 3}{6^3} = \frac{27}{6^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &P(\text{"Summe der drei Würfel ist 12"}) \\
 &= 3!P(\{(6,5,1)\}) + 3!P(\{(6,4,2)\}) + 3P(\{(6,3,3)\}) \\
 &\quad 3P(\{(5,5,2)\}) + 3!P(\{(5,4,3)\}) + P(\{(4,4,4)\}) \\
 &= \frac{3 \cdot 3! + 2 \cdot 3 + 1}{6^3} = \frac{25}{6^3}
 \end{aligned}$$

(a) Werden 11 Personen auf 11 Stühle angeordnet, so gibt es $11!$ Permutationen.

Jede der Permutationen ist gleichwahrscheinlich.

Betrachtet man Person A und B als eine Person, so existieren $10!$ Permutationen.

Es folgen $2 \cdot 10!$ Permutationen bei denen A neben B sitzt.

Betrachtet man zusätzlich die Personen C und D als eine Person, so gibt es $2^2 \cdot 9!$

Permutationen, bei denen die Personen A und B sowie C und D nebeneinander

plaziert sind. Es existieren somit $2 \cdot 10! \cdot 2^2 \cdot 9!$ Möglichkeiten, die Personen so anzuordnen, dass A neben B, nicht aber C neben D sitzt.

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit P gilt dann :

$$P = \frac{2 \cdot 10! \cdot 2^2 \cdot 9!}{11!} = \frac{8}{55}$$

(b) Werden 11 Personen auf 11 Stühle im Kreis angeordnet, so gibt es $10!$ Permutationen, unter der Annahme, dass Person A fest platziert ist. Es folgen $2 \cdot 9!$ Permutationen, bei denen A neben B sitzt. Betrachtet man die Personen C und D als eine Person, so gibt es $2^2 \cdot 8!$ Permutationen, bei denen die Personen A und B sowie C und D nebeneinander platziert sind. Es existieren somit $2 \cdot 9! - 2^2 \cdot 8!$ Möglichkeiten, die Personen so anzuordnen, dass A neben B, nicht aber C neben D sitzt. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit P gilt dann :

$$P = \frac{2 \cdot 9! - 2^2 \cdot 8!}{10!} = \frac{7}{45}$$

Ist die Addition von zwei poissonverteilten Verkehrsströmen erneut poissonverteilt, gilt dies auch für die Addition jedes weiteren poissonverteilten Stroms.

Daher beschränken wir uns darauf die Aussage für zwei Verkehrsströme nachzuweisen.

Zahl der Ankünfte der beiden Verkehrsströme :

$$\lambda_1 \Rightarrow N_1, \lambda_2 \Rightarrow N_2; n = N_1 + N_2$$

Die Wahrscheinlichkeit von n Ankünften kann über alle möglichen

Zustände für N_1 und N_2 variiert werden :

$$p(x = n) = \sum_{j=0}^n p(N_1 = j) p(N_2 = n - j)$$

$$p(x = n) = \sum_{j=0}^n e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_1 t)^j}{j!} e^{-\lambda_2 t} \frac{(\lambda_2 t)^{n-j}}{(n-j)!}$$

$$p(x = n) = e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n n! \frac{t^{j+(n-j)} \lambda_1^j \lambda_2^{n-j}}{j! (n-j)!}$$

$$p(x = n) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \frac{t^n}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (\lambda_1)^j (\lambda_2)^{n-j} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \frac{t^n}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

(17)

Wahrscheinlichkeitsdichte der Poissonverteilung: $f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Binomischer Lehrsatz für natürliche Exponenten:

Es gilt für alle reellen oder komplexen Zahlen x und y und für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung:

$$(x + y)^n = f(x, y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$