

Pflichtvorlesung

Mathematik II

für Studierende
des
2. Semesters

Fachhochschule
Oldenburg Ostfriesland **Wilhelmshaven**

Standort Wilhelmshaven

Fachbereich Elektrotechnik

Prof. Dr.-Ing. H. Ahlers

Literaturhinweise

- /1/ Brauch, W.; Dreyer, H.J.; Haacke, W. :
Mathematik für Ingenieure;
Teubner Verlag, Stuttgart 1990.
- /2/ Papula, L.:
Mathematik für Ingenieure 1;
Vieweg Verlag, Braunschweig 1990.
- /3/ Papula, L.:
Mathematik für Ingenieure 2;
Vieweg Verlag, Braunschweig 1990.
- /4/ Bartsch, H.J.:
Taschenbuch mathematischer Formeln;
Hanse Verlag; Leipzig
- /5/ Bronstein, I.N; Semendjajew, K.A.:
Taschenbuch der Mathematik;
Harri Deutsch Verlag; Zürich, Frankfurt, Thun; 1977.
- /6/ Stöcker, H.:
Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren
Harri Deutsch Verlag; Thun und Frankfurt/Main; 1993.
- /7/ Gradstein; Ryshik, I.
Summen-, Produkt und Integraltafeln
Thun-Frankfurt; 1991.
- /8/ Dirschmid, H.J. :
Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik;
Vieweg Verlag, Braunschweig 1989.
- /9/ Zurmühl, R.:
Praktische Mathematik für Ingenieure un Physiker;
Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1984.

Kommentar:

- /1/ 1. Lehrbuch in etwa Vorlesung
- /2/ und /3/ 2. Lehrbuch in etwa Vorlesung
- /4/ Übersichtliche Formelsammlung (reicht aus)
- /5/ Etwas umfangreichere Formelsammlung, schlechter lesbar.
- /6/ Kombination aus Formelsammlung und Lehrbuch. Eignet sich nicht zum Selbststudium. Wenn der Stoff einmal verstanden wurde, ist es ein hervorragendes Nachschlagewerk.
- /7/ Sehr umfangreiche Formelsammlung, insbesondere für Integrale, etwa 2000 Seiten, nur in Sonderfällen zu verwenden.
- /8/ Sehr theoretisches Werk, über Vorlesungsniveau, zur mathematischen Weiterbildung für Ingenieure bestens geeignet.
- /9/ Standardwerk der numerischen Mathematik

Ein Lehrbuch ist nicht vorlesungsbegleitend erforderlich. Allerdings ist eine Formelsammlung, insbesondere im zweiten und dritten Semester, sehr zu empfehlen.

Übersicht Mathematik I bis III

- 1. Semester: (8 Stunden)
 - 1. Algebra
 - 2. Funktionen
 - 3. Komplexe Zahlen
 - 4. Analytische Geometrie
 - 5. Grundlagen der Differentialrechnung
- 2. Semester: (6 Stunden)
 - 6. Anwendungen der Differentialrechnung
 - 7. Integralrechnung
 - 8. Reihen
- 3. Semester: (6 Stunden)
 - 9. Frequenzanalyse
 - 10. Differentialgleichungen

Gliederung Mathematik II

6. Anwendungen der Differentialrechnung

- 6.1. Tangente, Normale
- 6.2. Steigungswinkel, Schnittwinkel von Kurven
- 6.3. Kurvendiskussion
- 6.4. Extremwert-Aufgaben
- 6.5. Iterationsverfahren
- 6.6. Unbestimmte Ausdrücke
- 6.7. Differentiation in Parameterform
- 6.8. Differentiation in Polarkoordinaten
- 6.9. Ableitung mehrerer Veränderlicher
- 6.10. Das totale Differential
- 6.11. Fehlerrechnung
- 6.12. Vektoren und Differentiation
- 6.13. Extremwertaufgaben mehrerer Abhängiger
- 6.14. Kurvenanpassung

7. Integralrechnung

- 7.1. Einführung
- 7.2. Das unbestimmte Integral
- 7.3. Das bestimmte Integral
- 7.4. Rechenregeln der Integralrechnung
- 7.5. Grundintegral
- 7.6. Mittelwertsatz der Integralrechnung
- 7.7. Integrationsverfahren
- 7.8. Numerische Integration
- 7.9. Erweiterung des Integralbegriffs
- 7.10. Mehrfach-Integrale
- 7.11. Anwendung der Integralrechnung
- 7.12. Vektoren und Linienintegrale

8. Reihen

- 8.1 Einführung
- 8.2. Konvergenz und Divergenz von Reihen
- 8.3. Geometrische Reihe
- 8.4. Binomische Reihe und Fakultät
- 8.5. Potenzreihen
- 8.6. Abelsche Summation
- 8.7. Summe der natürlichen Zahlen und deren Potenzsumme
- 8.8. Reihenentwicklung der Standardfunktionen
- 8.9. Näherungsformeln
- 8.10. Einige Werte von unendlichen Reihen
- 8.11. Integration durch Reihenentwicklung

Anhang

- Aufgaben
- Ergebnisse

Inhaltsverzeichnis Mathematik II

6. Anwendungen der Differentialrechnung	1
6.1. Tangente, Normale	1
6.1.1. Tangente und Tangentenfunktion	1
6.1.2. Normale und Normalenfunktion	1
6.1.3. Grafische Konstruktion der e-Funktion	2
6.2. Steigungswinkel, Schnittwinkel von Kurven	3
6.2.1. Steigungswinkel	3
6.2.2. Schnittwinkel	4
6.3. Kurvendiskussion	5
6.3.1. Definitions- und Wertebereich	6
6.3.2. Schnittpunkte mit den Achsen	7
6.3.3. Pole, Nullstellen	8
6.3.4. Asymptote	9
6.3.5. Grenzwerte, Lücke	11
6.3.6. Symmetrieeigenschaften	11
6.3.7. Steigung	11
6.3.8. Extremwerte und Krümmung	12
6.3.9. Wendepunkt	13
6.3.10. Sattelpunkt	14
6.3.11. Allgemeine Bestimmung von Extremwert, Wende- und Sattelpunkt	15
6.3.12. Krümmung und Krümmungsradius	17
6.3.13. Zusammenfassung Kurvendiskussion	18
6.4. Extremwert-Aufgaben	18
6.5. Iterationsverfahren	19
6.5.1. Regula Falsi	19
6.5.2. Newton Verfahren	20
6.5.3. Iterationsverfahren durch wiederholtes Einsetzen	21
6.6. Unbestimmte Ausdrücke	23
6.7. Differentiation in Parameterform	24
6.8. Differentiation in Polarkoordinaten	25
6.9. Ableitung mehrerer Veränderlicher	26
6.9.1. Erste partielle Ableitungen	26
6.9.2. Zweite partielle Ableitungen	27
6.10. Das totale Differential	27
6.11. Fehlerrechnung	28
6.11.1. Grundbegriffe der Fehlerrechnung	28
6.11.2. Fehlerfortpflanzung	28
6.11.3. Mittlerer und maximaler Fehler	30
6.11.4. Mittelwert und Standardabweichung	31
6.11.5. Normalverteilung und Meßsicherheit	32
6.12. Vektoren und Differentiation	33
6.12.1. Differentiation eines Vektors nach einem Skalar	34
6.12.2. Differentiation eines Skalars nach den Vektorkomponenten	35
6.12.3. Divergenz eines Vektorfeldes	37
6.12.4. Rotation eines Vektorfeldes	38
6.12.5. Differentialoperator ∇ (Nabla)	40
6.12.6. Zusammengesetzte Vektoroperationen	41
6.12.7. Vektoren in angepaßten Koordinaten	42
6.12.7.1. Vektoren in schiefwinkligen Koordinaten	42
6.12.7.2. Vektoren in Zylinderkoordinaten	43
6.12.7.2.1. Wiederholung Zylinderkoordinaten	43
6.12.7.2.2. Einheitsvektoren und Komponenten	44
6.12.7.2.3. Längenelemente	44
6.12.7.2.4. Flächenelemente	45
6.12.7.2.5. Volumenelement	45
6.12.7.2.6. Linienelement	46
6.12.7.2.7. Transformation der Vektorkomponenten	46
6.12.7.2.8. Vektoroperationen in Zylinderkoordinaten	46
6.12.7.3. Vektoren in Kugelkoordinaten	47
6.12.7.3.1. Wiederholung Kugelkoordinaten	47

6.12.7.3.2. Einheitsvektoren und Komponenten	48
6.12.7.3.3. Längenelemente	48
6.12.7.3.4. Flächenelemente	48
6.12.7.3.5. Volumenelement	48
6.12.7.3.5 Linienelement	49
6.12.7.3.6. Transformation der Vektorkomponenten	49
6.12.7.3.7. Vektoroperationen in Kugelkoordinaten	49
6.13. Extremwertaufgaben mehrerer Abhängiger	50
6.14. Kurvenanpassung	54
6.14.1. Lineare Interpolation	54
6.14.2. Stetiger Übergang von y'	55
6.14.3. Stetigkeit von y' und y''	57
6.14.4. Lineare Regression	62
6.14.5. Vergleich der Anpassungsverfahren	68
7. Integralrechnung	69
7.1. Einführung	69
7.2. Das unbestimmte Integral	71
7.3. Das bestimmte Integral	72
7.3.1. Bedeutung des bestimmten Integrals	73
7.3.2. Integral durch Summenbildung	74
7.3.3. Bestimmte Integrale der Potenzfunktionen	75
7.3.4. Herleitung weiterer Rechenregeln	78
7.3.4.1. Addition von Flächen in x-Richtung	78
7.3.4.2. Addition von Flächen in y-Richtung	79
7.3.4.3. Umkehrung des Integrationsweges	80
7.3.4.4. Negative Funktionswerte	80
7.4. Rechenregeln der Integralrechnung	81
7.5. Grundintegrale	83
7.6. Mittelwertsatz der Integralrechnung	85
7.7. Integrationsverfahren	87
7.7.1. Substitutionsverfahren	88
7.7.1.1. Theorie	88
7.7.1.2. Beispiele	89
7.7.1.3. Zusammenfassung Substitution	95
7.7.2. Produktintegration	96
7.7.2.1. Theorie	96
7.7.2.2. Beispiele	97
7.7.2.3. Zusammenfassung Produktintegration	101
7.7.3. Partialbruchzerlegung	102
7.7.4. Gemischte Aufgaben unbestimmtes Integral	110
7.8. Numerische Integration	111
7.8.1. Rechteckregel	111
7.8.2. Trapez-Regel	112
7.8.3. Simpson-Regel	113
7.8.4. Annäherung durch eine Parabel 3.Ordnung	114
7.8.5. Integration nach Regressionsanalyse	114
7.8.6. Integration nach Runge-Kutta	114
7.9. Erweiterung des Integralbegriffs	115
7.9.1. Integration von Sprungstellen	115
7.9.2. Uneigentliche Integrale	116
7.10. Mehrfach-Integrale	118
7.10.1. Mehrfach-Integrale mit festen Grenzen	119
7.10.2. Mehrfachintegrale mit variablen Grenzen	121
7.10.3. Allgemeine Integrale in kartesischen Koordinaten	125
7.10.4. Flächenberechnung in Polarkoordinaten	127
7.10.5. Integrale in Zylinderkoordinaten	129
7.10.6. Integrale in Kugelkoordinaten	133
7.11. Anwendung der Integralrechnung	135
7.11.1. Bogenlänge	135
7.11.2. Volumen von Rotationskörpern	136
7.11.3. Oberfläche von Rotationskörpern	138

7.11.4. Massenträgheitsmoment	139
7.11.5. Flächenschwerpunkte	140
7.12. Vektoren und Linienintegrale	141
7.12.1. Der Begriff Linienintegral an Beispielen	141
7.12.2. Definition	143
7.12.3. Parameterdarstellung des Weges C	143
7.12.3.1. Zahlenwertbeispiele	145
7.12.3.2. Versuch: Darstellung des Vektorfeldes durch den Gradienten einer Skalarfunktion	148
7.12.3.3. Rechenregeln Linienintegral	150
7.12.4. Umlaufintegral	153
7.12.5. Integral-Sätze	153
8. Reihen	154
8.1 Einführung	154
8.1.1. Zahlenfolge und Reihe	154
8.1.2. Bedeutung der Reihen	155
8.1.3. Begriffe von Folgen	156
8.1.4. Begriffe von Reihen	159
8.2. Konvergenz und Divergenz von Reihen	160
8.3. Geometrische Reihe	164
8.3.1. Endliche geometrische Reihe	165
8.3.2. Unendliche geometrische Reihe	165
8.4. Binomische Reihe und Fakultät	166
8.4.1. Definition	166
8.4.2. Fakultät:	167
8.4.3. m über i	167
8.4.4. Formel der binomischen Reihe	172
8.5. Potenzreihen	175
8.5.1. Mac-Laurin Reihe	177
8.5.2. Taylor-Reihe	177
8.5.3. Konvergenz von Funktionsreihen	179
8.6. Abelsche Summation	181
8.7. Summe der natürlichen Zahlen und deren Potenzsumme	185
8.8. Reihenentwicklung der Standardfunktionen	185
8.8.1. Exponential Reihen	185
8.8.2. Trigonometrische Reihen	185
8.8.3. Hyperbolische Reihen	185
8.8.4. Logarithmische Reihen	186
8.8.5. Reihen der Arcus-Funktionen	186
8.8.6. Reihen der Areafunktionen	186
8.8.7. Verwandtschaft der Reihen	187
8.8.8. Spezielle Binomische Reihen	187
8.9. Näherungsformeln	188
8.10. Einige Werte von unendlichen Reihen	189
8.11. Integration durch Reihenentwicklung	190
Anhang	191
Aufgaben	191
Ergebnisse	209

6. Anwendungen der Differentialrechnung

6.1. Tangente, Normale

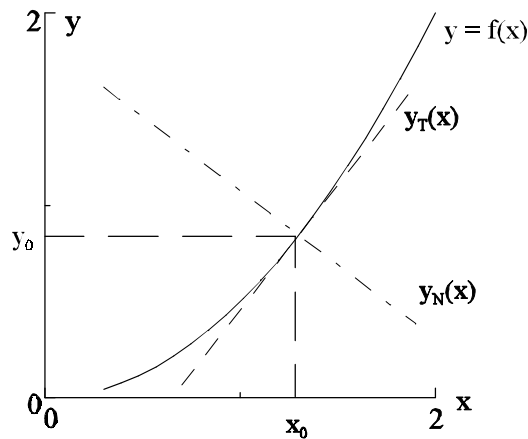


Bild MA61A

6.1.1. Tangente und Tangentenfunktion

Die Tangente oder die Tangentenfunktion $y_T(x)$, siehe Bild MA61A, hat mathematisch gesehen einen doppelten Schnittpunkt im betrachteten Funktionspunkt. Anschaulich ist die Tangente die Gerade, die die Funktionskurve nur tangiert und nicht schneidet. Analytisch faßt sich die Tangentenfunktion berechnen:

$$y_T(x) = y_0 + a_1 \cdot (x - x_0)$$

$$a_1 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0}$$

$$y_T(x) = y_0 - a_1 \cdot x_0 + a_1 \cdot x = (y_0 - a_1 \cdot x_0) + a_1 \cdot x$$

Anwendung: Linearisierung (kleine Abweichungen) vom Arbeitspunkt

6.1.2. Normale und Normalenfunktion

Die Normale oder die Normalenfunktion $y_N(x)$, steht senkrecht auf der Funktion $y = f(x)$, siehe Bild MA61A. Analytisch ist die Normalenfunktion auch eine Gerade, die sich beschreiben läßt durch:

$$y_N = y_0 + b_1 \cdot (x - x_0)$$

b_1 ist die Steigung der Normalenfunktion. Steigung der Tangente (a_1) und der Normalen (b_1) stehen im Zusammenhang. Umrechnung erfolgt über Inversion und Negation (inverse Reziproke)

$$b_1 = -\frac{1}{a_1} = \frac{-1}{\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0}}$$

Aufgabe 6.1.1 a rechnen

6.1.3. Grafische Konstruktion der e-Funktion

In der Technik ist die Lösung einer DGL (3.Semester), z.B. Schaltvorgänge von Gleichstromquellen, häufig eine e-Funktion in der Form:

$$y(x) = y_{\max} \cdot e^{ax}$$

Die obere Form ist nicht sehr praxisrelevant. Eine physikalische Lösung ist in der Regel abklingend für große t-Werte, hier x-Werte. Dieses bedingt, daß a negativ wird. x hat normalerweise eine Einheit. Damit mit einheitslosen Größen gerechnet werden kann, ersetzt man a durch:

$$a = \frac{-1}{x_0}$$

Somit kann die e-Funktion wie folgt beschrieben werden:

$$y(x) = y_{\max} \cdot e^{-x/x_0}$$

Die e-Funktion kann nun in einigen Punkten durch Tangenten angenähert werden. Dazu wird die Ableitung gebildet:

$$y'(x) = -\frac{y_{\max} \cdot e^{-x/x_0}}{x_0} = -\frac{y(x)}{x_0}$$

Die obere Formel sagt aus, daß die Steigung immer Funktionswert dividiert durch x_0 beträgt. Dieses ist als Steigungsdreieck in Bild MA613A verdeutlicht.

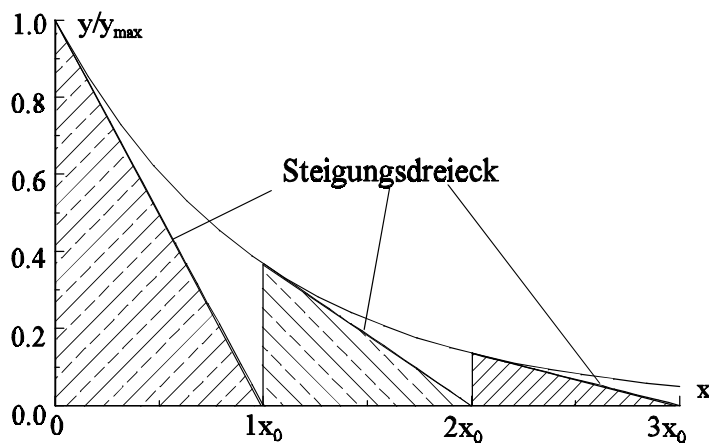


Bild MA613A

hier: $y_{\max} = 1$

$$y(x=x_0)/y_{\max} = e^{-1} = 0.37$$

$$y(x=2x_0)/y_{\max} = e^{-2} = 0.14$$

G8

$$y(x=3x_0)/y_{\max} = e^{-3} = 0.05$$

Aufgabe 6.1.2 a rechnen

6.2. Steigungswinkel, Schnittwinkel von Kurven

/1/ S.281

6.2.1. Steigungswinkel

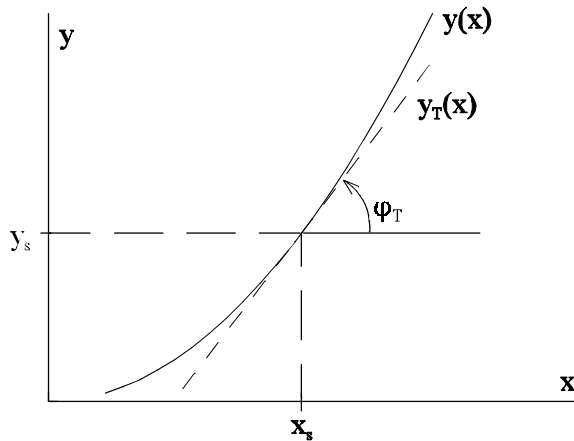


Bild MA621A

Die Steigung der Tangente im Punkt x_s beträgt:

$$a_1 = \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x_s} = y'(x_s)$$

Falls x und y in gleichen Maßstab aufgetragen sind, ist die Steigung der Tangens des Winkels φ_T :

$$a_1 = \tan(\varphi_T)$$

$$\varphi_T = \arctan(a_1) = \arctan\left\{ \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x_s} \right\} = \arctan[y'(x_s)]$$

Achtung: Bei ungleichen Maßstäben in x und y sind die Maßstabsfaktoren zu beachten

Beispiel (mit Maßstabsfaktor)

gegeben: $y = x^2$ $[x] = 1$ $[y] = 1$

$$\Delta y = 10 \triangleq 1 \text{ cm} \quad \Delta x = 1 \triangleq 2 \text{ cm}$$

gesucht: Steigungswinkel der Funktion an der Stelle $x = x_0 = 3$

Darstellung: $u = m_x \cdot x$ $[u] = \text{cm}$ $\Rightarrow$ $[m_x] = \text{cm}$

$v = m_y \cdot y$ $[v] = \text{cm}$ $\Rightarrow$ $[m_y] = \text{cm}$

$$m_y = \frac{1 \text{ cm}}{10} = 0.1 \text{ cm} \quad m_x = \frac{2 \text{ cm}}{1} = 2 \text{ cm}$$

$$\varphi = \arctan\left(\left. \frac{dv}{du} \right|_{x_0} \right) = \arctan\left(\left. \frac{m_y dy}{m_x dx} \right|_{x_0} \right)$$

$$\varphi = \arctan\left(\left. \frac{0.1 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} \cdot 2x \right|_{x_0=3} \right) = \arctan\left(\frac{0.1 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} \cdot 2 \cdot 3 \right) = 16.70^\circ$$

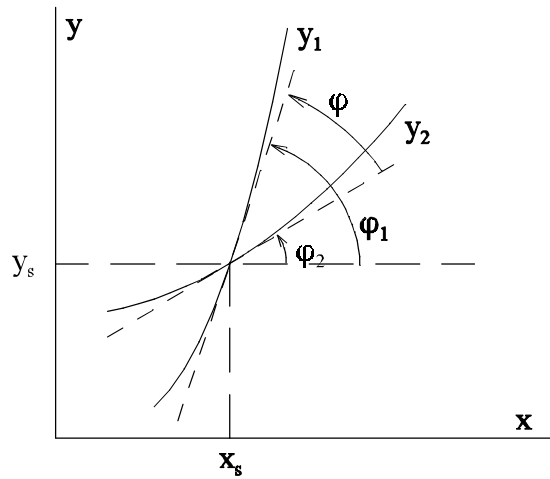
6.2.2. Schnittwinkel

Bild MA622A

Der Schnittwinkel zweier Kurven φ ist gleich dem Differenzwinkel der Steigungswinkel der beiden Tangenten im Schnittpunkt, siehe Bild MA622A.

$$\varphi_2 = \arctan \left\{ \frac{dy_2}{dx} \bigg|_{x_s} \right\}$$

$$\varphi_1 = \arctan \left\{ \frac{dy_1}{dx} \bigg|_{x_s} \right\}$$

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

Verfahren zur Bestimmung des Schnittwinkels

1. Schnittpunkt x_s von y_1 und y_2 suchen $\Rightarrow y_1 = y_2$
2. Steigung $y_1'(x_s)$ und $y_2'(x_s)$ berechnen
3. Schnittwinkel $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \arctan[y_1'(x_s)] - \arctan[y_2'(x_s)]$ berechnen

Achtung: Bei ungleichen Maßstäben in x und y sind die Maßstabsfaktoren zu beachten

Aufgabe 6.2.1a rechnen

6.3. Kurvendiskussion

/1/ S. 289 ff

/2/ S. 305 - 309

Ziel der Kurvendiskussion ist, möglichst einfach (ohne viel Aufwand) einen charakteristischen Verlauf einer Funktion zu erhalten. Hier in der Vorlesung soll die Funktion $y = f(x)$ untersucht werden.

1. Semester: Funktion ist die Abhängigkeit einer Größe von einer anderen. In der Technik kann dieses jede beliebige physikalischen Größe von einer anderen sein. Beispiel $U = f(I)$ oder $P = f(I)$ oder auch nicht technische Funktion. Hier soll $y = f(x)$ betrachtet werden.

Was kann an einer Funktion untersucht werden?

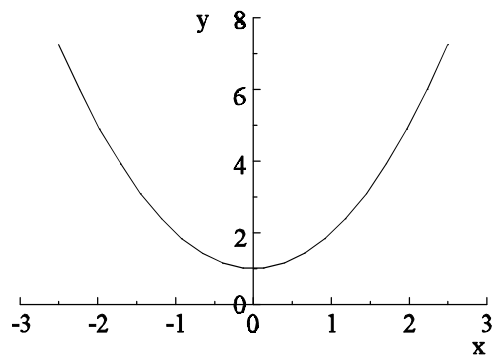
- Definitions- und Wertebereich
- Schnittpunkte mit den Achsen
- Pole, Nullstellen
- Asymptoten
- Grenzwerte
- Symmetrieeigenschaften
- Extremwert (Maximum, Minimum)
- Krümmung (Linkskrümmung, Rechtskrümmung)
- Wendepunkte
- Sattelpunkte

Jeder Punkt wird einzeln anhand kleiner Beispiele vorstellt. Am Ende des Kap. 6.3 erfolgen vollständige Kurvendiskussionen anhand der Übungsaufgaben.

6.3.1. Definitions- und Wertebereich

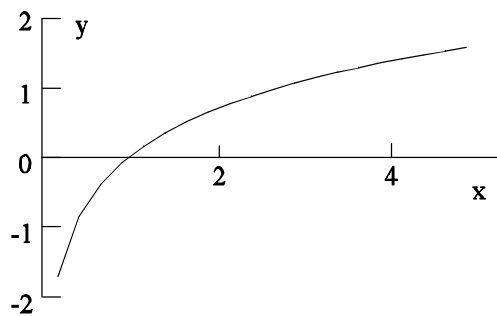
siehe auch Kap. 2.1.4. (erstes Semester)

Wertebereich: Bereich aller möglichen Funktions (y)-Werte
 Definitionsbereich: Bereich aller möglichen Abszissen (x)-Werte

Beispiel 1:

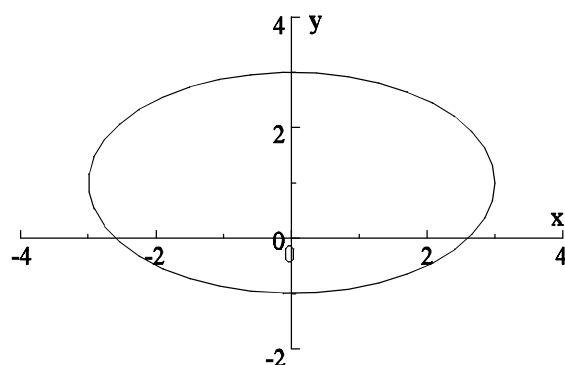
Funktion: $y = x^2 + 1$
Wertebereich: $1 \leq y < \infty$
Definitionsbereich: $-\infty < x < +\infty$

Bild MA631A

Beispiel 2:

Funktion: $y = \ln(x)$
Wertebereich: $-\infty < y < +\infty$
Definitionsbereich: $0 < x < +\infty$

Bild MA631B

Beispiel 3:

Funktion: $\left(\frac{y-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 1$
Wertebereich: $-1 \leq y \leq 3$
Definitionsbereich: $-3 \leq x \leq 3$

Bild MA631C

6.3.2. Schnittpunkte mit den Achsen

Schnittpunkt mit y - Achse $\Rightarrow y(x = 0) = y_0$
 Schnittpunkt mit x - Achse $\Rightarrow y(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$

Beispiel: $y = x^2 - 4$

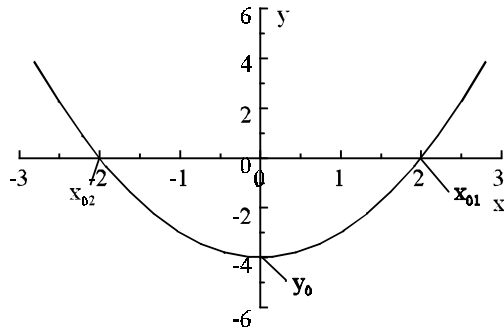


Bild MA632A

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$y_0 = y(x=0)$$

hier am Beispiel: $y_0 = -4$ für $x = 0$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

Prinzip: Suchen der Nullstelle, siehe auch Kap. 6.3.3 (Nullstellen), Kap. 6.5 (Iterationsverfahren) und 1. Semester (Kap. 1.6 und Kap. 1.7)

Beispiel: $y = 0 = x^2 - 4$

$$x_{01,02} = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad x_{01} = 2 \quad x_{02} = -2$$

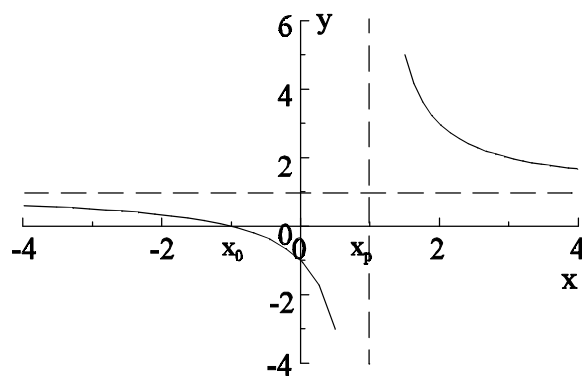
6.3.3. Pole, Nullstellen**Allgemein:**

Pol: Unstetigkeitsstelle $y(x_p) \rightarrow \pm\infty$

Nullstelle: siehe auch Kap. 6.3.2, 6.5, 1.6, 1.7 $y(x_0) = 0$

Eine gebrochen rationale Funktionen hat Zähler- und Nenner-Nullstellen:

Nennernullstelle	$\Rightarrow$	$y \rightarrow \infty$	$\Rightarrow$	Pol
Zählernullstelle	$\Rightarrow$	$y = 0$	$\Rightarrow$	Nullstelle

Beispiel 1:

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

Bild MA633A

Pol:	wenn Nenner gleich Null x_p	$\Rightarrow$	$x_p - 1 = 0$	$\Rightarrow$	$x_p = 1$
Nullstelle:	wenn Zähler gleich Null x_0	$\Rightarrow$	$x_0 + 1 = 0$	$\Rightarrow$	$x_0 = -1$

Im oberen Bild sind schon Zusatz-Information der Asymptoten enthalten: $x = 1$ und $y = 1$

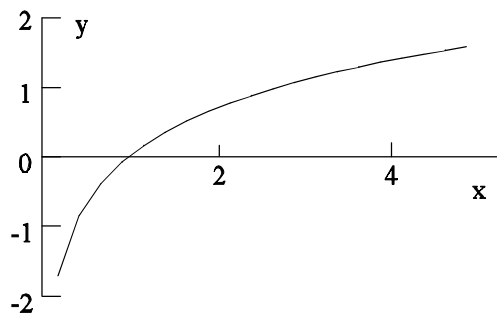
Beispiel 2: $y = \ln(x)$ 

Bild MA631B

ein Pol:	$y \rightarrow -\infty$	$\Rightarrow$	$\ln(x \rightarrow 0) \rightarrow -\infty$	$x_p = 0$
eine Nullstelle:	$y = 0$	$\Rightarrow$		$x_0 = 1$

6.3.4. Asymptote

Bekannt: Verhalten der Funktion für $x \rightarrow \infty$ oder auch für $y \rightarrow \infty$

einfach ausgedrückt: Das Verhalten für $x \rightarrow \infty$ wird durch eine einfachere Funktion angenähert.

mathematisch korrekt: $f(x)$ - Original-Funktion
 $f_A(x)$ - Asymptoten-Funktion

Eine Funktion $f(x)$ hat die Asymptote $f_A(x)$ wenn für den Grenzwert x_g die Abweichung zwischen $f(x)$ und $f_A(x)$ beliebig klein wird.

$$\lim_{x \rightarrow x_g} [f(x) - f_A(x)] = 0$$

Beispiel 1:

$$y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} \quad \text{siehe Bild MA634A}$$

$$\text{für } x \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad y_A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{2}{x-1} \right]$$

$$y_A = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right)$$

$$y_A = 1 + \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right) + 1} = 1 + \frac{0}{0+1} = 1$$

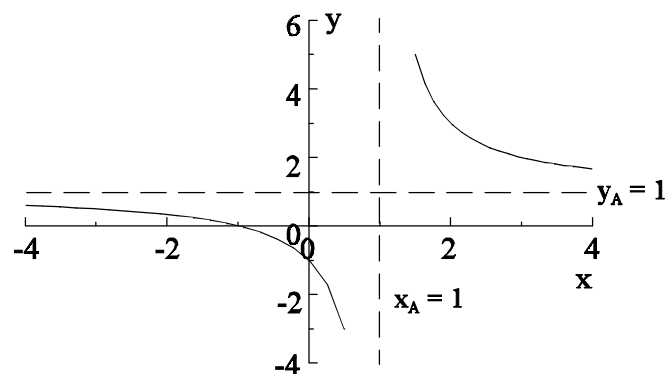


Bild MA634A

Beispiel 2:

$$y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1} = x + 3 + \frac{1}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 4 \quad 4 \\ -1 \quad - \quad -1 \quad -3 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 1 \end{array}$$

$$y_A = x + 3$$

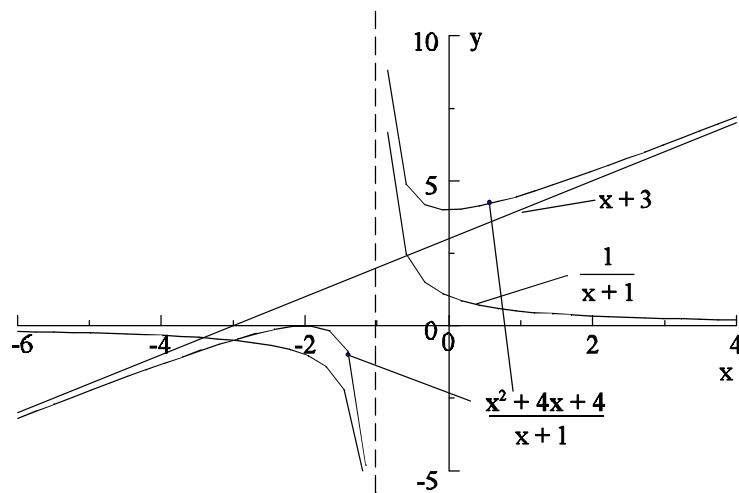


Bild MA634B

Beispiel 3:

$$y = \frac{x^3 + 3}{x + 1} = x^2 - x + 1 + \frac{2}{x + 1}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \\ -1 \quad - \quad -1 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 1 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

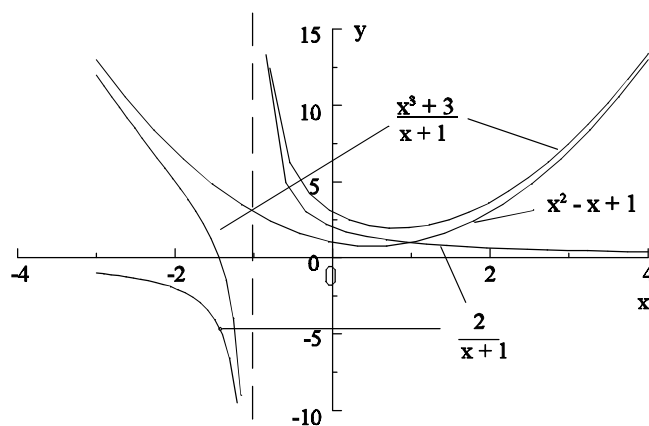


Bild MA634C

6.3.5. Grenzwerte, Lücke

(wenn zwei gleiche Funktionen 0/0 ergeben)

Beispiel:

$$y = \frac{x+1}{x+1} \quad x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (y) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x+1}{x+1} \right) = 1$$

=> Lücke siehe Kap. 2.2.3.3 (1. Semester)

weitere Informationen im Abschnitt 6.6 (Regel von de l'Hospital)

6.3.6. Symmetrieeigenschaften

Wiederholung Kap. 2.4 (1. Semester) gerade/ungerade Funktion:

Beispiele:

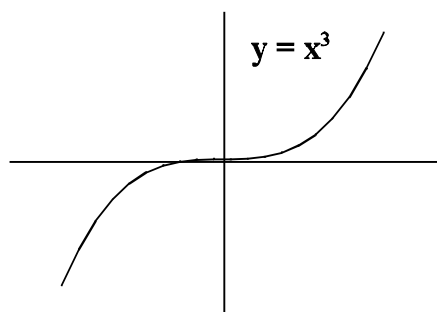
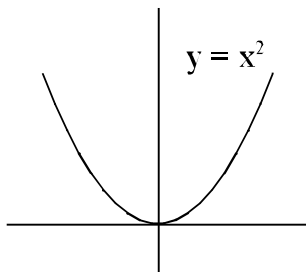


Bild MA636A

gerade Funktion
nur gerade Potenzen
achsensymmetrisch zur y-Achse
 $y = \cos(x)$
 $y = \cosh(x)$
 $y = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4$

ungerade Funktion
nur ungerade Potenzen
Punktsymmetrisch zum Nullpunkt
 $y = \sin(x)$
 $y = \sinh(x)$
 $y = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5$

6.3.7. Steigung

=> siehe Kap. 6.2

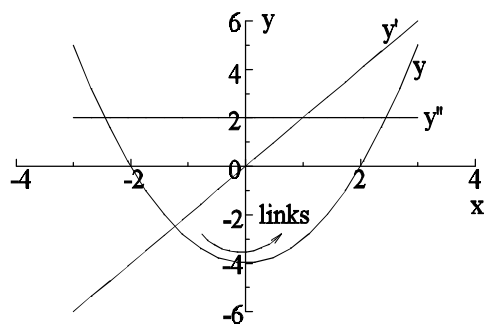
6.3.8. Extremwerte und Krümmung**Beispiel:**

Bild MA638A

$y = x^2 - 4$
 $y' = 2x$
 $y'' = 2$
 Extremwert $x = 0$
 Minimum $x = 0$
 Linkskrümmung $\Leftarrow y'' > 0$

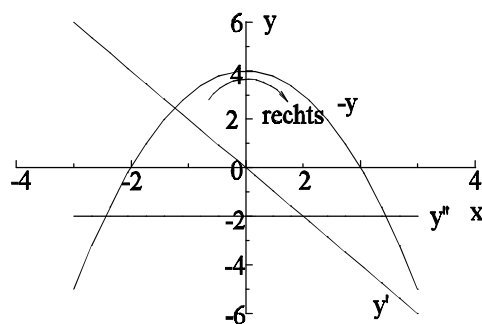


Bild MA638B

$y = 4 - x^2$
 $y' = -2x$
 $y'' = -2$
 Extremwert $x = 0$
 Maximum $x = 0$
 Rechtskrümmung $\Leftarrow y'' < 0$

Extremwert	=>	$y' = 0$	
Minimum	=>	$y' = 0$	und $y'' > 0$
Maximum	=>	$y' = 0$	und $y'' < 0$

Extremwert-Bestimmung für oberes Beispiel:

$y' = 0 = 2x_E \Rightarrow x_E = 0$
 $y_E = x^2 - 4 = -4$
 $y''(x_E) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$
 $(x_E, y_E) = (0, -4)$
 später noch detaillierter

$y' = 0 = -2x_E \Rightarrow x_E = 0$
 $y_E = 4 - x^2 = 4$
 $y''(x_E) = -2 \Rightarrow \text{Maximum}$
 $(x_E, y_E) = (0, 4)$

Schema zur Bestimmung von Extremwerten

- | | | | | |
|----|--------------|---|---|-----------------------|
| A] | $y'(x)$ | ; | erste Ableitung bilden | |
| B] | $y'(x) = 0$ | ; | erste Ableitung gleich Null setzen | $\Rightarrow x_E$ |
| C] | $y''(x)$ | ; | zweite Ableitung bilden | |
| D] | $y''(x_E)$ | ; | Wert der zweiten Ableitung an der Stelle des x_E -Wertes bilden | |
| E] | Entscheidung | ; | $y''(x_E) > 0$ | $\Rightarrow$ Minimum |
| | | | $y''(x_E) < 0$ | $\Rightarrow$ Maximum |

Schema zur Bestimmung der Krümmung

- | | | | |
|----|--|--------------|------------------------------|
| A] | zweite Ableitung bilden | $y''(x)$ | |
| B] | Wert $y''(x)$ an der Stelle x bilden | | |
| C] | Entscheidung; | $y''(x) > 0$ | $\Rightarrow$ Linkskrümmung |
| | | $y''(x) < 0$ | $\Rightarrow$ Rechtskrümmung |

Eselsbrücke

Linkskrümmung, Rechtskrümmung, Minimum und Maximum Bedingungen lassen sich schlecht merken. Diese Bedingungen lassen sich sehr schnell erarbeiten, wie oben, anhand der Normalparabeln:

$$y = x^2 \quad \text{Minimum bei } x = 0 \quad y'' = 2$$

$$y = -x^2 \quad \text{Maximum bei } x = 0 \quad y'' = -2$$

Hinweis: Absolute und relative Extrema siehe Kap. 2.1.6 (1. Semester)

6.3.9. Wendepunkt

Übergang von Links- auf Rechtskrümmung oder umgekehrt $\Rightarrow y'' = 0$
Tangente schneidet als Sonderfall die Funktion $y = f(x)$ im Wendepunkt

Beispiel:

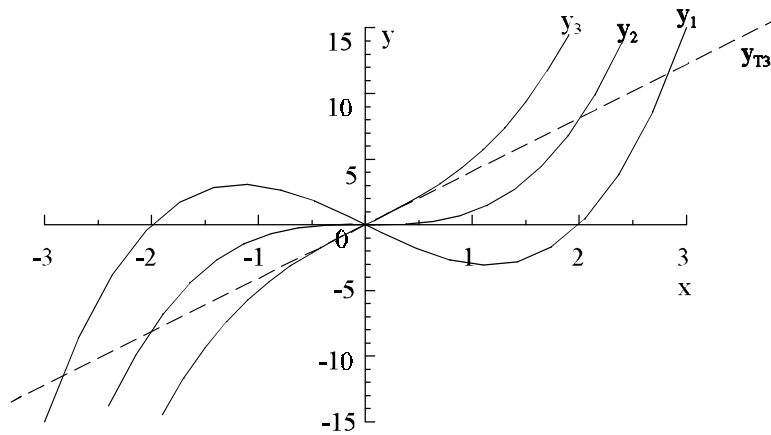


Bild MA639A

$$\begin{aligned} y_1 &= x^3 - 4x \\ y_1' &= 3x^2 - 4 \\ y_1'' &= 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= x^3 \\ y_2' &= 3x^2 \\ y_2'' &= 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= x^3 + 4x \\ y_3' &= 3x^2 + 4 \\ y_3'' &= 6x \end{aligned}$$

Alle oberen Funktionen haben einen Wendepunkt bei $x = 0$, überall geht bei $x = 0$ Rechtskrümmung in Linkskrümmung über.

Wendepunkt-Bestimmung für oberes Beispiel

$$y_1'' = 0 = x_w^2 \Rightarrow x_w = 0$$

$$y_2'' = 0 \Rightarrow x_w = 0$$

$$y_3'' = 0 \Rightarrow x_w = 0$$

$$(x_w, y_w) = (0, 0)$$

$$(x_w, y_w) = (0, 0)$$

$$(x_w, y_w) = (0, 0)$$

Schema zur Wendepunkt-Bestimmung

- A] $y''(x)$ - zweite Ableitung bilden
B] $y''(x)$ - zweite Ableitung gleich Null setzen $\Rightarrow x_w$

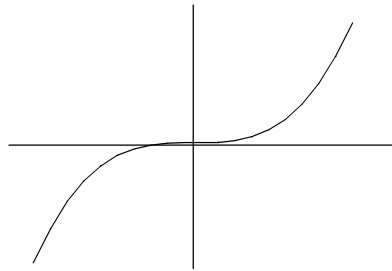
6.3.10. Sattelpunkt

festgestellt	$y' = 0$	$y'' > 0$	$\Rightarrow$	Maximum
	$y' = 0$	$y'' < 0$	$\Rightarrow$	Minimum
	$y' = 0$	$y'' = 0$	$\Rightarrow$	Sattelpunkt

Sattelpunkt, was ist das?

Beispiel 1:

$$y = x^3$$



$$\begin{aligned} y &= x^3 \\ y' &= 2x^2 \\ y'' &= 4x \\ y'(x_s = 0) &= 0 \\ y''(x_s = 0) &= 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt} \end{aligned}$$

Bild MA6310A

Dieser Fall wurde bislang noch nicht behandelt, es liegt weder ein Minimum, noch ein Maximum vor. Hier handelt es sich dann um einen Sattelpunkt.

Bedingung für einen Sattelpunkt:

$$\begin{aligned} y'(x_s) &= 0 \\ y''(x_s) &= 0 \\ y'''(x_s) &\neq 0 \end{aligned}$$

Hinweis:

Der Sattelpunkt beinhaltet auch einen Wendepunkt, weil die Art der Krümmung wechselt (rechts $\Leftrightarrow$ links). Wegen der speziellen wagerechten Tangente und weil kein Extremwert vorhanden ist, wird hier Sattelpunkt vom gesprochen.

Anti-Beispiel:

$y(x) = x^4$	- Bekanntlich Minimum bei $x = 0$
$y'(x) = 4x^3$	$y'(x=0) = 0$
$y''(x) = 12x^2$	$y''(x=0) = 0$
$y'''(x) = 12x$	$y'''(x=0) = 0$

$\Rightarrow$ Obere Funktion erfüllt fast die Bedingungen für einen Sattelpunkt, ist aber kein Sattelpunkt

$\Rightarrow$ Hier muß eine genauere Untersuchung erfolgen, siehe nächster Abschnitt

6.3.11. Allgemeine Bestimmung von Extremwert, Wende- und Sattelpunkt

Was bis jetzt in den Abschnitten 6.3.8 bis 6.3.10 aufgeführt wurde ist, ist nicht allgemein gültig, sondern gilt nicht wenn die ersten zwei Ableitungen an der betrachteten Stelle gleich Null werden.

6.3.8 bis 6.3.10 nicht anwenden wenn an der betrachteten Stelle x_B gilt:

$$y'(x_B) = 0 \text{ und } y''(x_B) = 0$$

Die Problematik soll anhand eines Beispiels untersucht werden:

Beispiel 1: $y_1 = x^4 + 5$ $y_2 = x^3 - 5$

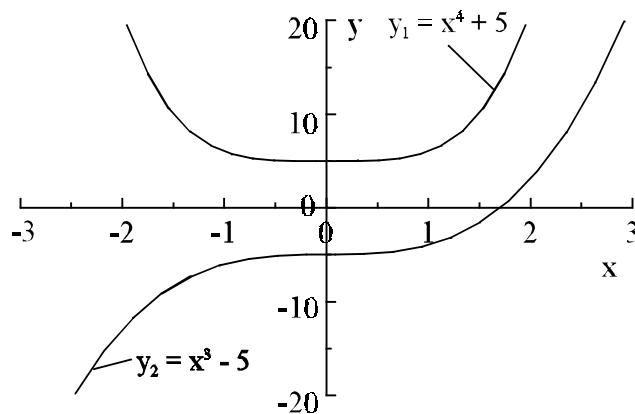


Bild MA6311A

Extremwert

$$y_1 = x^4 + 5$$

$$y_1' = 4x^3$$

$$y_1'' = 12x^2$$

$$y_1^{3'} = 24x$$

$$y_1^{4'} = 24$$

$$y_1^{5'} = 0$$

$$y_1'(x=0) = 0$$

$$y_1''(x=0) = 0$$

$$y_1'''(x=0) = 0$$

$$y_1^{4'}(x=0) = 24 > 0$$

Sattelpunkt

$$y_2 = x^3 - 5$$

$$y_2' = 3x^2$$

$$y_2'' = 6x$$

$$y_2^{3'} = 6$$

$$y_2^{4'} = 0$$

$$y_2'(x=0) = 0$$

$$y_2''(x=0) = 0$$

$$y_2'''(x=0) = 6 \neq 0$$

Das obere Beispiel läßt erkennen, daß die erste nicht zu Null werdende Ableitung entscheidend für die Art des Punktes ist. Zum Beispiel zurück:

zu y_1 erste nicht zu Null werdende Ableitung bei $x = 0$ ist $y^{(4)}(x=0) = 24 > 0$ ist von gerader Ordnung $\Rightarrow$ Extremwert, Minimum**zu y_2** erste nicht zu Null werdende Ableitung bei $y^{(3)}(x=0) = 6 \neq 0$ ist von ungerader Ordnung $\Rightarrow$ Sattelpunkt

Schema zur Bestimmung der Art des Punktes, wenn erste und zweite Ableitung gleich Null sind, $y'(x_B) = 0$ und $y''(x_B) = 0$

A] $y'(x_B) = 0$ und $y''(x_B) = 0$ **B] Ordnung n , der ersten nicht zu Null werdenden Ableitung bestimmen****C] Entscheidung:**

n ungerade	$\Rightarrow$	Sattelpunkt
n gerade	$\Rightarrow$	Extremwert
		$y^n(x_E) > 0 \Rightarrow$ Minimum
		$y^n(x_E) < 0 \Rightarrow$ Maximum

Beispiel 2:

$$y = 24\cos(x) + 12x^2 - x^4 + 3$$

$$y' = -24\sin(x) + 24x - 4x^3 \quad y'(x=0) = 0$$

$$y'' = -24\cos(x) + 24 - 12x^2 \quad y''(x=0) = 0$$

$$y^{(3)} = 24\sin(x) - 24x \quad y^{(3)}(x=0) = 0$$

$$y^{(4)} = 24\cos(x) - 24 \quad y^{(4)}(x=0) = 0$$

$$y^{(5)} = -24\sin(x) \quad y^{(5)}(x=0) = 0$$

$$y^{(6)} = -24\cos(x) \quad y^{(6)}(x=0) = -24 < 0$$

gerade Ordnung und kleiner Null $\Rightarrow$ Maximum bei $x = 0$ **Beispiel 3:**

$$y = 6\sin(x) - 6x + x^3 + 5$$

$$y' = 6\cos(x) - 6 + 3x^2 \quad y'(x=0) = 0$$

$$y'' = -6\sin(x) + 6x \quad y''(x=0) = 0$$

$$y^{(3)} = -6\cos(x) + 6 \quad y^{(3)}(x=0) = 0$$

$$y^{(4)} = 6\sin(x) \quad y^{(4)}(x=0) = 0$$

$$y^{(5)} = 6\cos(x) \quad y^{(5)}(x=0) = 6$$

ungerader Ordnung $\Rightarrow$ Sattelpunkt

6.3.12. Krümmung und Krümmungsradius

Jede Kurve, die keine Gerade ist, läßt sich in einem Punkt durch einen Kreis annähern, siehe Beispiel, Bild MA6312A.

Beispiel: $y = x^2 - 1$

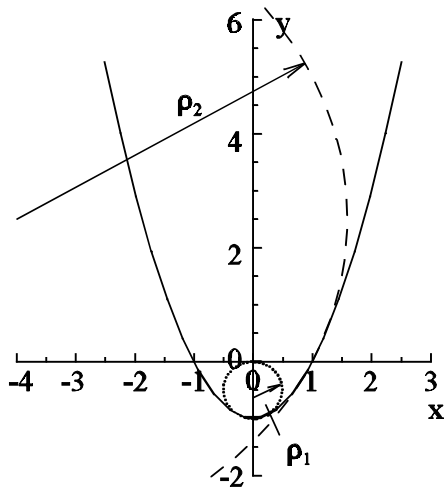


Bild MA6312A

Aus Bild MA6312A läßt sich der Krümmungsradius erkennen. Auch der Begriff der Krümmung ist gebräuchlich.

ohne Ableitung:

Krümmungsradius:
$$\rho = \left| \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \right|$$

Krümmung:
$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

$$\rho = \left| \frac{1}{k} \right|$$

zum Beispiel:

$$y = x^2 - 1$$

$$y' = 2x$$

$$y'' = 2$$

$$\rho = \frac{(1 + 4x^2)^{3/2}}{2}$$

$$\rho_1 = \rho(x = 0) = \frac{1}{2}$$

$$\rho_2 = \rho(x = 1) = \frac{(1 + 4)^{3/2}}{2} = 5.59$$

6.3.13. Zusammenfassung Kurvendiskussion

Folgende Punkte können bei einer Kurvendiskussion untersucht werden:

- **Definitions- und Wertebereich**
- **Schnittpunkte mit den Achsen**
- **Pole, Nullstellen, Lücken**
- **Asymptoten**
- **Grenzwerte**
- **Symmetrieeigenschaften**
- **Steigung**
- **Extremwerte (Maximum, Minimum)**
- **Krümmung (Linkskrümmung, Rechtskrümmung)**
- **Wendepunkte**
- **Sattelpunkte**
- **evtl. Krümmungsradius berechnen**

Aufgaben 6.3.1 a, d, g, 6.3.2 a und 6.3.3 e, d rechnen

6.4. Extremwert-Aufgaben

/1/ S. 303 ff

Statt des gesamten Verlaufs einer Funktion ist hier nur der Extremwert einer Abhängigkeit (Funktion) gesucht.

=> Optimierungsproblem (Meist: Kosten, Zeit, Material, Wirkungsgrad, Ergiebigkeit u.s.w.)

Die Größe $f(x)$ soll bezüglich der Variablen x optimal werden

$f(x)$	→	MAX, MIN
$f'(x) = 0$	=>	$x_{\max}, x_{\min}$
$f''(x) > 0$	=>	Minimum
$f''(x) < 0$	=>	Maximum

Methoden zur Extremwert-Bestimmung siehe Kap. 6.3 (Berechnung des Extremwertes).

Aufgaben 6.4.1, 6.4.2 und 6.4.3 rechnen

6.5. Iterationsverfahren

Das Prinzip der Iterationsverfahren ist, bei einer Gleichung oder einem Gleichungssystem, ausgehend von einer Anfangslösung, schrittweise eine verbesserte Lösung zu erhalten. Dabei ist der Begriff der Konvergenz wichtig oder man spricht auch davon, wie schnell ein Gleichungssystem konvergiert.

konvergent	=>	Annäherung an die Lösung
nicht konvergent	=>	Lösung entfernt sich von der wahren Lösung.

6.5.1. Regula Falsi

Dieses Verfahren ist schon aus dem ersten Semester bekannt (Kap. 1.7.2) und soll hier nur vollständigkeithalber noch einmal aufgeführt werden, ohne weitere Übung.

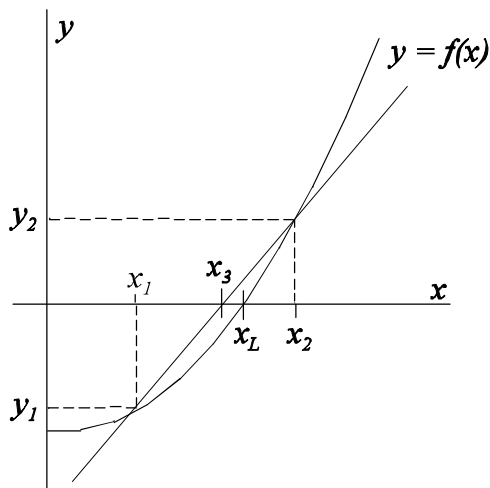


Bild MA651A

$$x_3 = x_1 - y_1 \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

(Hinweis auf Aufgaben 1.16/1.17 vom 1. Semester)

6.5.2. Newton Verfahren

siehe auch Kap. 1.7.1

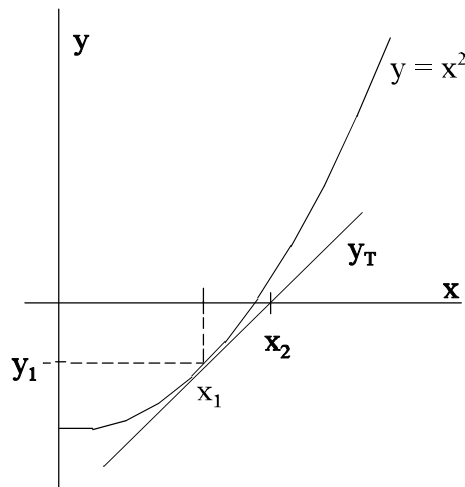
Prinzip: Suchen der Nullstellen einer Funktion $y = f(x)$ 

Bild MA652A

Ableitung über Regula Falsi

$$x_2 = x_1 - \frac{y_1}{\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1}} = x_1 - \frac{y}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{y_1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Ableitung über Tangente

$$y_T = y_1 + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_1} * (x - x_1) = f(x_1) + f'(x_1) * (x - x_1) = 0$$

$$x - x_1 = - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Problem x_1 finden

Methode A: irgendeines einsetzen

Methode B: grafische Näherungslösung bestimmen, siehe Kap. 1.6 (1. Semester)

Konvergenzbedingung (ohne Ableitung) /2/ S. 313

$$\frac{f(x) * f''(x)}{[f'(x)]^2} < 1$$

Aufgabe 6.5.1 b rechnen

6.5.3. Iterationsverfahren durch wiederholtes Einsetzen

Beispiel 1: (Achtung: rad-Modus einstellen!)

$$\cos(x) = x \quad \Rightarrow \quad x = 0.7391$$

$$\cos(0) = 1 \quad = x_1$$

$$\cos(1) = 0.5403 \quad = x_2$$

$$\cos(0.5403) = 0.8576 \quad = x_3$$

$$\cos(0.8576) = 0.6543 \quad = x_4$$

$$\cos(0.6543) = 0.7934 \quad = x_5$$

$$\cos(0.7934) = 0.7014 \quad = x_6$$

$\Rightarrow$ nähert sich langsam von beiden Seiten an

Prinzip: gegeben: $x = f(x)$ $x = \cos(x)$
 $x_{i+1} = f(x_i)$ $x_{i+1} = \cos(x_i)$

Konvergenzbedingung (ohne Ableitung):

$$|f'(x)| < 1$$

Am einfachsten: probieren

Verfahren geeignet, wenn auf Taschenrechner $f(x) = f(\text{ANS})$ leicht gebildet werden kann.

Konvergenzbeschleunigung: (verschiedene Verfahren)

Beispiel 2:

$$x_1 = \cos(0) = 1$$

$$x_2 = \cos(1) = 0.5403$$

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0.7702$$

$$x_4 = \cos(0.7702) = 0.7178$$

$$x_5 = \cos(0.7178) = 0.7533$$

$$x_6 = \frac{x_4 + x_5}{2} = 0.7355$$

Dieses war nur Hinweis auf ein Verfahren.

Konvergenzverbesserung oder Konvergenz herstellen

Wird die Gleichung nach einem anderen x umgestellt ist u.U. Konvergenz möglich.

umgestellt: $x = f(x) \Rightarrow x_i = f(x_i)$
 $x = g(x) \Rightarrow x_i = g(x_i)$

Dazu ein Beispiel:

Beispiel 3:

$$x^2 - x - 0.2 = 0$$

A] analytische Lösung

$$x_{12} = + 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 0.2} = 0.5 \pm \sqrt{0.45}$$

$$x_1 = 1.1708$$

$$x_2 = -0.1708$$

B] erste Umstellung

$$x = x^2 - 0.2$$

$$x_{i+1} = x_i^2 - 0.2$$

$x_0 = -5$	$x_0 = -0.5$	$x_0 = 0$	$x_0 = 1.1$	$x_0 = 1.2$
$x_1 = 24.8$	$x_1 = 0.05$	$x_1 = -0.2$	$x_1 = 1.01$	$x_1 = 1.24$
$x_2 = 614$	$x_2 = -0.1975$	$x_2 = -0.16$	$x_2 = 0.8201$	$x_2 = 1.3376$
	$x_3 = -0.1610$	$x_3 = -0.1744$	$x_3 = 0.4726$	$x_3 = 1.5891$
	$x_4 = -0.1741$	$x_4 = -0.1696$	$x_4 = 0.0233$	$x_4 = 2.3255$
		$x_5 = -0.1712$	$x_5 = -0.1995$	$x_5 = 5.2078$
			$x_6 = -0.1602$	$x_6 = 26.92$
				$x_6 = 724.6$

C] zweite Umstellung

$$x = \sqrt{x + 0.2}$$

$$x_{i+1} = \sqrt{x_i + 0.2}$$

$x_0 = 0$	$x_0 = 10$	$x_0 = -1.2$
$x_1 = 0.4472$	$x_1 = 3.194$	$x_1 = j$
$x_2 = 0.8045$	$x_2 = 1.842$	$x_2 = 0.78 + j0.64$
$x_3 = 1.0022$	$x_3 = 1.429$	$x_3 = 1.04 + j0.31$
$x_4 = 1.0965$	$x_4 = 1.276$	$x_4 = 1.12 + j0.14$
$x_5 = 1.1386$	$x_5 = 1.215$	$x_5 = 1.15 + j0.06$
$x_6 = 1.1569$	$x_6 = 1.190$	$x_6 = 1.16 + j0.03$

6.6. Unbestimmte Ausdrücke

/1/ S. 270

/2/ S. 470

Unbestimmte Ausdrücke sind:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0^{\infty} \quad 0^0 \quad 1^{\infty} \quad (\infty - \infty)$$

Regel von de l'Hospital lautet:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \begin{array}{l} \text{für } f(x=a) = 0 \quad \text{und } g(x=a) = 0 \\ \text{oder } f(x=a) = \infty \quad \text{und } g(x=a) = \infty \end{array}$$

Wenn $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ und $f'(x) = 0$ und $g'(x) = 0$ dann muß die zweite Abteilung berücksichtigt werden u.s.w..

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} \quad \text{für } f'(x) = g'(x) = f(x) = g(x) = 0$$

Wenn auch die zweite Ableitung gleich Null => dritte Ableitung verwenden, u.s.w.

Regel gilt also für $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ andere Formen (0^{∞} , 0^0 , 1^{∞} oder $\infty - \infty$) müssen auf $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ umgeformt werden.

Umformungen:

$$A] \quad 0^{\infty} \quad f(x) * g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad (\text{siehe Aufgabe 6.6.1 c})$$

$$B] \quad \infty - \infty \quad (\text{siehe Aufgabe 6.6.1 e})$$

B1] auf einen Hauptnenner bringen

$$B2] \quad f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} * \frac{1}{g(x)}}$$

$$C] \quad 0^0 \text{ oder } 1^{\infty} \quad (\text{siehe Aufgabe 6.6.1 d})$$

$$y_g = f(x)^{g(x)}$$

$$\ln(y_g) = g(x) * \ln[f(x)]$$

dazu siehe A]

Beweis der Regel für 0/0

Annahme $f(x)$ und $g(x)$ haben eine Nullstelle bei $x = a$, $f(x=a) = 0$ und $g(x=a) = 0$ Annäherung der Funktionen durch ihre Tangenten:

$$f(x) = f(a) + f'(a) * (x-a) = f'(a) * (x-a)$$

$$g(x) = g(a) + g'(a) * (x-a) = g'(a) * (x-a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a) * (x-a)}{g'(a) * (x-a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Aufgabe 6.6.1 a bis 6.6.1 e rechnen

6.7. Differentiation in Parameterform

gegeben: $x = x(t)$ $y = y(t)$

gesucht: $y'(t)$ $y''(t)$

Konvention: - Ableitung nach x mit Strich ' kennzeichnen

- Ableitung nach t mit Punkt . kennzeichnen

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

obige rechte Seite wird mit $\frac{1}{dt}$ erweitert

$$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\dot{x}}$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}}{\dot{x}^2}$$

$$y'' = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

$$x = x(t) \Rightarrow \dot{x}(t) \Rightarrow \ddot{x}(t)$$

$$y = y(t) \Rightarrow \dot{y}(t) \Rightarrow \ddot{y}(t)$$

$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$
$y'' = \frac{\dot{x} \ddot{y} - \dot{y} \ddot{x}}{\dot{x}^3}$

Aufgabe 6.7.1 a und d rechnen

6.8. Differentiation in Polarkoordinaten

/1/ S.444, /2/ S. 280

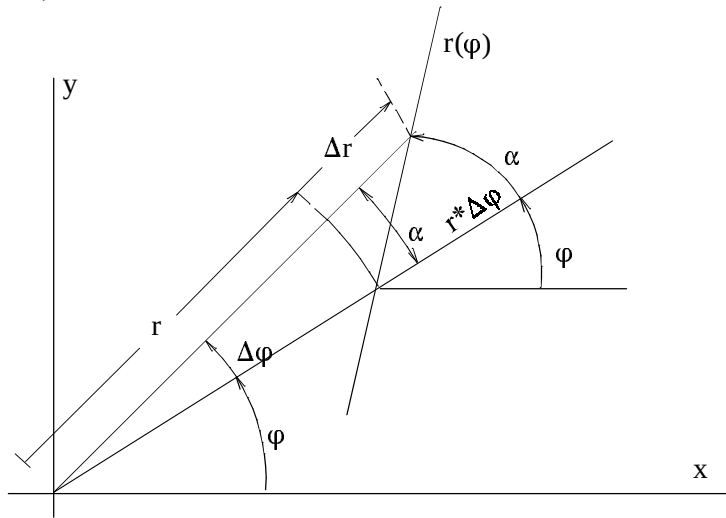


Bild MA68A

$$\frac{dy}{dx} = y' = \tan(\varphi + \alpha) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\varphi)}{1 - \tan(\alpha) * \tan(\varphi)}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta\varphi * r}{\Delta r} = \frac{r}{\frac{\Delta r}{\Delta\varphi}} = \frac{r}{r'}$$

$$r' = \frac{dr}{d\varphi}$$

$$y' = \frac{\frac{r}{r'} + \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}}{1 - \frac{r}{r'} * \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}}$$

$y' = \frac{r * \cos(\varphi) + r' * \sin(\varphi)}{r' * \cos(\varphi) - r * \sin(\varphi)}$	$r' = \frac{dr}{d\varphi}$
--	----------------------------

ohne Ableitung:

$y'' = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^3}$

Aufgabe 6.8.1a rechnen

6.9. Ableitung mehrerer Veränderlicher

Funktion einer Veränderlichen ist bekannt:

$$y = f(x)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \text{Steigung der Tangente}$$

$$\text{für kleines } x - x_0 \quad \Rightarrow y = y_0 + y'(x - x_0) \quad \text{Tangentenfunktion}$$

$\Rightarrow$ Annäherung durch eine Tangente (Gerade), Abweichung vom Arbeitspunkt

6.9.1. Erste partielle Ableitungen

Funktion von zwei Abhängigen:

$$z = f(x, y)$$

$\Rightarrow$ Annäherung durch eine Ebene

$$z = z_0 + a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0)$$

$$\text{bei } y = f(x) \quad a_1 = \frac{dy}{dx}$$

Einführung der partiellen Ableitung

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Beispiel: $z = 2x + 4xy + y^2$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2 + 4y$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 4x + 2y$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Bedeutung u.a.: Funktion der Tangentialebene:

$$z = z_0 + a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_0)$$

$$a_1 = \frac{\partial z}{\partial x} \quad b_1 = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Unterschied partielle und totale Ableitung

Beispiel: $z = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx}$$

Aufgabe 6.9.1 a rechnen

6.9.2. Zweite partielle Ableitungen

$$z_{xx} = \frac{\partial z_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$z_{yy} = \frac{\partial z_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$z_{xy} = \frac{\partial z_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$z_{yx} = \frac{\partial z_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$z_{yx} = z_{xy}$$

Aufgabe 6.9.2 a rechnen.

6.10. Das totale Differential

/3/ S. 209

Für $y = f(x)$ $\Rightarrow$ $dy = df(x)$
 $\Delta y = \frac{df(x)}{dx} * \Delta x$
 Annäherung durch Tangente

Für $z = f(x, y)$ Annäherung durch Ebene

$$z(x, y) = z(x_0, y_0) + z_x(x_0, y_0) * (x - x_0) + z_y(x_0, y_0) * (y - y_0)$$

$$z - z_0 = \Delta z$$

$$y - y_0 = \Delta y$$

$$x - x_0 = \Delta x$$

$$\Delta z = z_x * \Delta x + z_y * \Delta y \quad \Delta \rightarrow d$$

$$dz = z_x * dx + z_y * dy$$

Aufgaben 6.10.1 a und 6.10.2 a rechnen.

6.11. Fehlerrechnung

/1/ S. 265, S.483

6.11.1. Grundbegriffe der Fehlerrechnung

x_m	-	gemessener Wert
x	-	wahrer Wert
f_{abs}	-	absoluter Fehler
f_{rel}	-	relativer Fehler
$f_{rel\%}$	-	relativer Fehler in %

$$f_{abs} = x_m - x = \text{falscher Wert} - \text{richtiger Wert}$$

$$f_{rel} = \frac{f_{abs}}{x} = \frac{x_m - x}{x} = \frac{\text{falscher Wert} - \text{richtiger Wert}}{\text{richtiger Wert}}$$

$$f_{rel\%} = 100\% * f_{rel} = 100\% * \frac{f_{abs}}{x} = 100\% * \frac{x_m - x}{x}$$

obige Formeln sehr einfach daher nur Hinweis auf Aufgabe 6.11.1.

Aufgabe 6.11.2 rechnen.

6.11.2. Fehlerfortpflanzung

Problem (Aufgabe 6.11.3.) Widerstand aus U-I-Messung bestimmen
($U = 10 \text{ V} \pm 0.5\%$) ($I = 2 \text{ A} \pm 2\%$)

$$R = \frac{U}{I}$$

$$\text{manuell:} \quad R_{\max} = \frac{U_{\max}}{I_{\min}} \quad R_{\min} = \frac{U_{\min}}{I_{\max}}$$

Dieses Verfahren ist aufwendig aber einsichtig.

Zahlenwertrechnung:

$$U = 10 \text{ V} \pm 10 \text{ V} * 0.005 = 10 \text{ V} \pm 0.05 \text{ V} \quad U_{\min} = 9.95 \text{ V} \quad U_{\max} = 10.05 \text{ V}$$

$$I = 2 \text{ A} \pm 2 \text{ A} * 0.02 = 2 \text{ A} \pm 0.04 \text{ A} \quad I_{\min} = 1.96 \text{ A} \quad I_{\max} = 2.04 \text{ A}$$

$$R_{\max} = \frac{10.05 \text{ V}}{1.96 \text{ A}} = 5.128 \Omega \quad R_{\min} = \frac{9.95 \text{ V}}{2.04 \text{ A}} = 4.877 \Omega$$

$$4.877 \Omega < R < 5.128 \Omega \quad (\text{exakt, manuell})$$

einfacher: totales Differential bilden

$$R = \frac{U}{I}$$

$$dR = \frac{\partial R}{\partial U} * dU + \frac{\partial R}{\partial I} * dI$$

Übergang d → Δ

$$\Delta R = \frac{\partial R}{\partial U} * \Delta U + \frac{\partial R}{\partial I} * \Delta I$$

$$\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I} \qquad \frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}$$

$$\Delta R = \frac{1}{I} \Delta U + \left(-\frac{U}{I^2} \right) * \Delta I = \frac{\Delta U}{I} - \frac{U}{I^2} * \Delta I = \frac{\Delta U}{U} * \frac{U}{I} - \frac{\Delta I}{I} * \frac{U}{I} = R \left(\frac{\Delta U}{U} - \frac{\Delta I}{I} \right)$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} - \frac{\Delta I}{I}$$

Die oberen beiden Formeln sehen nach der etwas längeren Herleitung relativ einfach aus. Die direkte Bestimmung der oberen Formel erfolgt nach der zahlenwertmäßigen Bestimmung von ΔR.

$$\Delta R_{\max} = R \left(\frac{\Delta U_{\max}}{U} + \frac{\Delta I_{\max}}{I} \right) = \frac{10 \text{ V}}{2 \text{ A}} (0.005 + 0.02) = 0.125 \Omega$$

$$4.875 \Omega < R < 5.125 \Omega$$

Damit ergibt sich fast das gleiche Ergebnis als exakt manuell, aber wegen der Annäherung durch eine Ebene tritt nur eine geringe Abweichung auf. Dieses Verfahren ist schon weniger aufwendig als manuell. Es gibt aber eine noch bessere Standard-Methode über die sofortige Berechnung des relativen Fehlers. Meistens ergibt sich eine physikalische Größe aus der Multiplikation anderer physikalischer Größen mit verschiedenen Potenzen.

Allgemeiner Ansatz:

$$z = f(x, y) = x^m * y^n$$

$$dz = z_x * dx + z_y * dy$$

$$\Delta z = z_x * \Delta x + z_y * \Delta y$$

$$z_x = m * x^{m-1} * y^n$$

$$z_y = n * x^m * y^{n-1}$$

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{z_x}{z} * \Delta x + \frac{z_y}{z} * \Delta y$$

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{m x^{m-1} * y^n}{x^m * y^n} * \Delta x + \frac{n * x^m * y^{n-1}}{x^m * y^n} \Delta y$$

$$\frac{\Delta z}{z} = m * \frac{\Delta x}{x} + n * \frac{\Delta y}{y}$$

Obere Formel ist die **Fehler-Fortpflanzungs-Formel** für

$$z = x^m * y^n$$

$$\frac{\Delta z}{z} = m \frac{\Delta x}{x} + n \frac{\Delta y}{y}$$

Diese Formel läßt sich entsprechend für drei und mehr Größen leicht erweitern. Hier sieht man auch, wie man auf ΔR_{rel} (siehe oben) gekommen ist.

6.11.3. Mittlerer und maximaler Fehler

$$z = f(u, v, w, x)$$

$$\Delta z = z_u \cdot \Delta u + z_v \cdot \Delta v + z_w \cdot \Delta w + z_x \cdot \Delta x$$

Maximaler Fehler:

$$\Delta z_{\max} = |z_u \cdot \Delta u| + |z_v \cdot \Delta v| + |z_w \cdot \Delta w| + |z_x \cdot \Delta x|$$

Mittlerer Fehler:

$$\Delta z_{\text{mittlerer}} = \sqrt{(z_u \cdot \Delta u)^2 + (z_v \cdot \Delta v)^2 + (z_w \cdot \Delta w)^2 + (z_x \cdot \Delta x)^2}$$

Aufgaben 6.11.4 und 6.11.5.a rechnen

6.11.4. Mittelwert und Standardabweichung

Unterscheidung zufälliger und systematischer Fehler.

systematischer Fehler: Meßgerät falsch geeicht, tritt immer wieder auf.
 zufälliger Fehler: aufgrund von zufälligen Schwankungen, statistischer Fehler.

Dieser zufällige Fehler soll nun untersucht werden.

Problem: Mehrfache Messung einer einzelnen Größe.
gegeben: $x_1, x_2, \dots, x_n$ - Messungen

gesucht: - Mittelwert
 - Aussage über Meßsicherheit

a) Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

b) Abweichung vom Mittelwert:

Die Summe der Abweichungen vom Mittelwert zu berechnen, wäre falsch, weil das Ergebnis Null ergibt:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} n \cdot \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

besser ist, die quadratische Abweichung zu berücksichtigen

$$\begin{aligned} \sum \Delta x^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \bar{x} x_i + \sum_{i=1}^n (\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n (\bar{x})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} (n \cdot \bar{x}) + n \cdot \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot (\bar{x})^2 \\ \sum \Delta x^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot (\bar{x})^2 \end{aligned}$$

Eigentlich sollte der obere Ausdruck durch n dividiert werden, da aber bei $n = 1$ keine Abweichung vom Mittelwert feststellbar ist, wird durch $(n - 1)$ dividiert. Da die quadratischen Abweichungen vom Mittelwert die gleiche Maßeinheit aufweisen sollten als die Größe selbst, muß noch die Wurzel gezogen werden:

Definition:
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum \Delta x^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot (\bar{x})^2 \right)}$$

Aufgabe 6.11.6 a rechnen

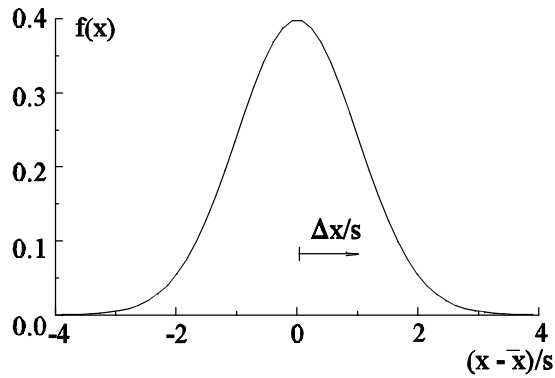
6.11.5. Normalverteilung und Meßsicherheit

Bild MA6115A

Gaußsche Normalverteilung (siehe Bild MA6115A):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{s} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \bar{x}}{s}\right)^2\right]$$

Es gibt auch noch andere Verteilungen, symmetrische oder auch asymmetrische.

Die Meßsicherheit sagt aus, wie sicher es ist, daß das Ergebnis innerhalb der Grenzen $\bar{x} \pm \Delta x$ liegt. (z.B. $\bar{x} \pm s$ oder $\bar{x} \pm 2s$).

Meßsicherheit in %
Meßtoleranz Δx

Δx	Meßsicherheit	Δx	Meßsicherheit
$\pm 0.1 s$	8%	$\pm 2.4 s$	98.36%
$\pm 0.2 s$	15.86%	$\pm 2.6 s$	99.06%
$\pm 0.4 s$	31.08%	$\pm 2.8 s$	99.48%
$\pm 0.6 s$	45.14%	$\pm 3.0 s$	99.73%
$\pm 0.8 s$	57.62%	$\pm 3.2 s$	99.86%
$\pm 1.0 s$	68.26%	$\pm 3.4 s$	99.93%
$\pm 1.2 s$	76.98%	$\pm 3.6 s$	99.97%
$\pm 1.4 s$	83.84%	$\pm 3.8 s$	99.99%
$\pm 1.6 s$	89.04%	$\pm 4.0 s$	99.99%
$\pm 1.8 s$	92.82%	$\pm 4.5 s$	100%
$\pm 2.0 s$	95.44%	$\pm 5.0 s$	100%
$\pm 2.2 s$	97.22%		

Tabelle MA6115A: Meßsicherheit bei Gauß'scher Normalverteilung

Aufgabe 6.11.7 a und 6.11.8 a rechnen

6.12. Vektoren und Differentiation

Die gesamte Elektrotechnik lässt sich in elementarer Form mit Hilfe von vier Vektorgleichungen, den sogenannten Maxwell-Gleichungen, beschreiben:

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \dot{\vec{D}}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\dot{\vec{B}}$$

$$\vec{J} = \kappa * \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon * \vec{E}$$

mit den Randbedingungen

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = \varrho$$

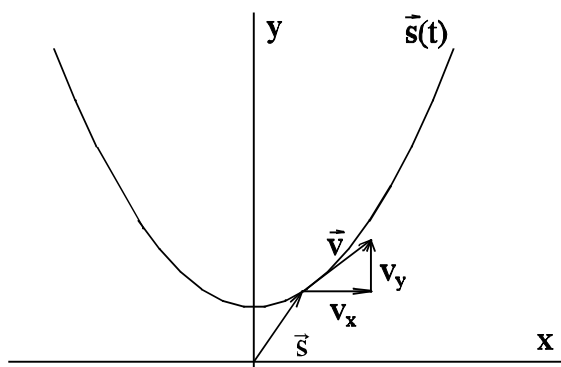
$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$$

Die oberen Gleichungen sehen sehr kompliziert aus. Die Ausdrücke darin sollen nur andiskutiert werden, damit diese mal gehört wurden. In Klausur nur, was in Übungen dran war. Die oberen Gleichungen werden in der theoretischer Elektrotechnik zur Feldberechnung benötigt.

Jetzt sollen mehrere Arten der Differentiation von Vektoren vorgestellt werden, denn obere Aktionen ".", "rot" und "div" sind Arten der Vektordifferentiation.

6.12.1. Differentiation eines Vektors nach einem Skalar**Physikalisches Beispiel, eindimensional:**Weg: x Geschwindigkeit: $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

Eindimensional wird kein Vektor benötigt.

Beispiel zweidimensional

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$$

Bild MA6121A

$$v_x = \frac{ds_x}{dt} = \dot{s}_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{ds_y}{dt} = \dot{s}_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{s}_x \\ \dot{s}_y \end{pmatrix}$$

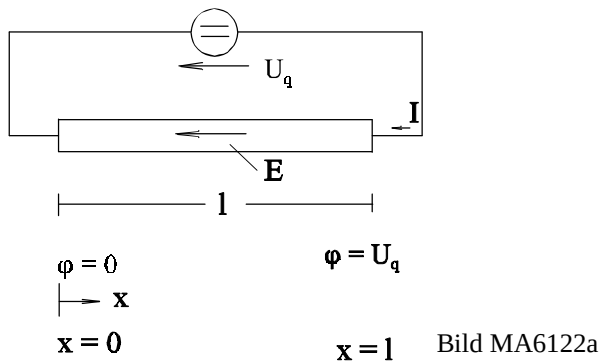
Allgemeine Differentiation des Vektor s nach dem Parameter t

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \frac{d\vec{s}}{dt} = \dot{\vec{s}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.12.1 a rechnen

6.12.2. Differentiation eines Skalars nach den Vektorkomponenten

Physikalisches Beispiel eindimensional:



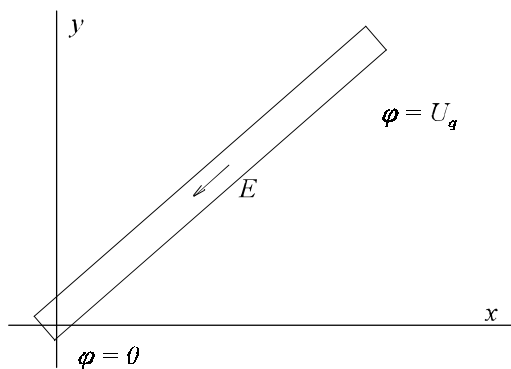
Beispiel schon in EGI gerechnet

$$\frac{U_q}{l} = E \quad - \text{Feldstärke (Betrag)}$$

$$\varphi = \frac{x}{l} * U_q$$

$$E_x = - \frac{d\varphi}{dx} \quad (\text{eindimensional})$$

Beispiel zweidimensional: $\varphi = f(x,y)$



$$\vec{E} = - \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix} = -\text{grad}(\varphi)$$

Allgemeine Differentiation des Skalars s nach Vektorkomponenten

gegeben: $s = f(x, y, z)$

hier fehlt das Differentiationszeichen, dafür wird der Gradient eingeführt

$$\text{grad}(s) = \begin{pmatrix} \partial s / \partial x \\ \partial s / \partial y \\ \partial s / \partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix}$$

Anwendung E- Technik

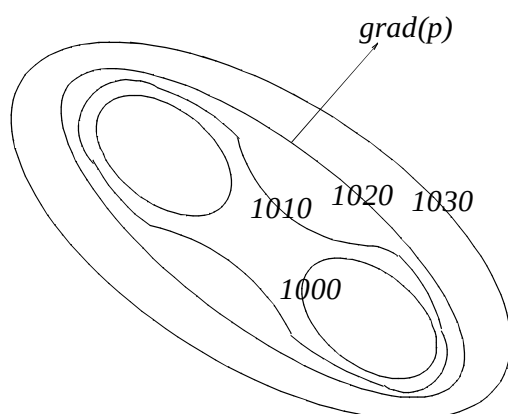
$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi) = -\begin{pmatrix} \partial \varphi / \partial x \\ \partial \varphi / \partial y \\ \partial \varphi / \partial z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix}$$

Mathematische Deutung:

Der Vektor $\text{grad}(s)$ zeigt in die Richtung der stärksten Zunahme.

Physikalische Deutung:

Beispiel: Isobare



Der Vektor $\text{grad}(p)$ steht senkrecht auf den Isobaren und zeigt in Richtung der stärksten Luftdruckzunahme.

Bild MA6122C

Aufgabe 6.12.2 a rechnen

6.12.3. Divergenz eines Vektorfeldes

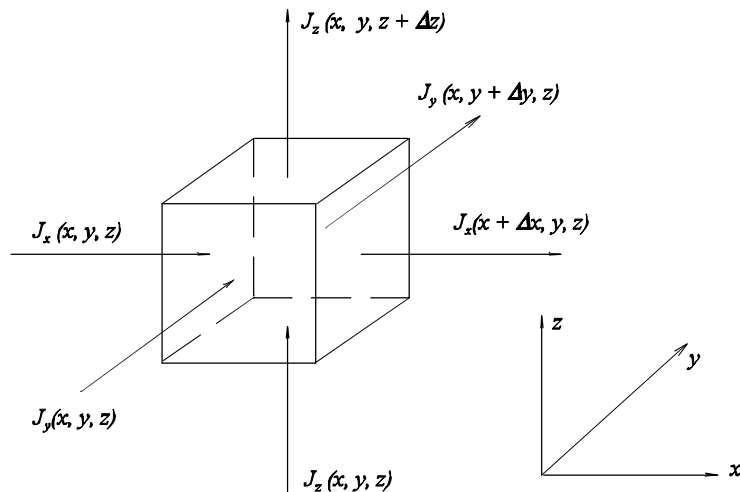


Bild MA6123A

gesucht: Zunahme des Stromes pro Volumen

$$\frac{\Delta I}{\Delta V} = \frac{\Delta I_x}{\Delta V} + \frac{\Delta I_y}{\Delta V} + \frac{\Delta I_z}{\Delta V} = \frac{\Delta J_x \cdot \Delta A_x}{\Delta V} + \frac{\Delta J_y \cdot \Delta A_y}{\Delta V} + \frac{\Delta J_z \cdot \Delta A_z}{\Delta V}$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta V} = \frac{\Delta J_x \cdot \Delta y \cdot \Delta z}{\Delta V} + \frac{\Delta J_y \cdot \Delta x \cdot \Delta z}{\Delta V} + \frac{\Delta J_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y}{\Delta V}$$

$$\Delta J_x \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\Delta V} = \Delta J_x \frac{\Delta y \cdot \Delta z}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} = \frac{\Delta J_x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta V} = \frac{\Delta J_x}{\Delta x} + \frac{\Delta J_y}{\Delta y} + \frac{\Delta J_z}{\Delta z}$$

$$\Delta \Rightarrow \partial \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial J}{\partial V}$$

$$\operatorname{div}(\vec{J}) = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist ein skalares Feld.

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Physikalisch mechanische Deutung:

Die Divergenz der Strömungsgeschwindigkeit in einem Fluß ist gleich Null, wegen der Massenerhaltung und der Inkompressibilität von Wasser. Wenn $\operatorname{div}(\vec{v})$ gleich Null ist $\Rightarrow$ das Feld ist quellen- und senkenfrei, Flüssigkeit $\operatorname{div}(\vec{V})=0$

Physikalisch elektrische Deutung:

Falls keine Ladung im Volumen erzeugt wird, gilt

$$\operatorname{div}(\vec{J}) = 0$$

Aufgabe 6.12.3 rechnen

6.12.4. Rotation eines Vektorfeldes

Die Rotation eines Vektorfeldes (ohne Ableitung) ist definiert:

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\text{rot}(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & v_x & \vec{e}_x \\ \partial/\partial y & v_y & \vec{e}_y \\ \partial/\partial z & v_z & \vec{e}_z \end{vmatrix}$$

Die Rotation eines Feldes sagt etwas über den Drehsinn eines Feldes aus. In der Strömungsmechanik spricht man dann von Wirbel.

Beispiel 1: Drehung eines Punktes auf einer Welle

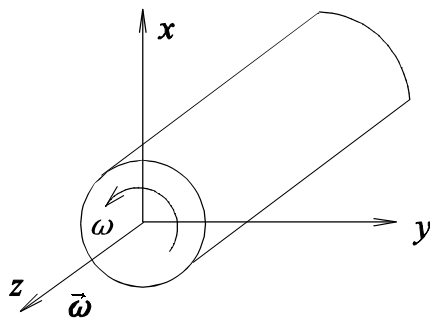


Bild MA6124A

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ y_y \\ 0 \end{pmatrix} = R * \omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die untere Herleitung der Formel ist mit Hilfe von Kap. 6.12.7 möglich oder /1 S. 510/:

$$\text{rot}(\vec{v}) = 2\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\vec{\omega}$$

Die Rotation einer sich drehenden Welle zeigt in die Drehachse und ist zwei mal der Winkelgeschwindigkeit ω .

Wichtig: $\text{rot}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow$ Das Vektorfeld ist wirbelfrei.

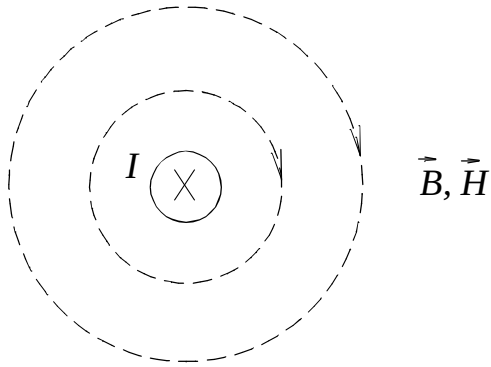
Beispiel 2; Magnetfeld eines Leiters

Bild MA6124B

Das Magnetfeld eines Leiters ist inneren Leiters ein Wirbelfeld. Außerhalb des Leiter ist das Feld, obwohl es nicht so aussieht, wirbelfrei.

Es gilt die Beziehung für quasistationäre Felder: $\text{rot } (\vec{H}) = \vec{J}$.

Aufgabe 6.12.4 a rechnen

6.12.5. Differentialoperator ∇ (Nabla)

Dieser wird hauptsächlich von Physikern verwendet. ∇ wird ohne Pfeil gekennzeichnet und ist ein Vektor:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Es gibt drei Arten den Differentialoperator ∇ anzuwenden:

A] Skalar-Produkt auf Vektor

$$\nabla * \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z = \text{div}(\vec{v})$$

B] Multiplikation mit Skalar

$$\nabla * s = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} * s = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial z} \end{pmatrix} = \text{grad}(s)$$

C] Kreuzprodukt mit Vektor

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & v_x & e_x \\ \frac{\partial}{\partial y} & v_y & e_y \\ \frac{\partial}{\partial z} & v_z & e_z \end{vmatrix} = \text{rot}(\vec{v})$$

Zusammenfassung:

Die Ausdrücke "div", "grad" und "rot" lassen sich mit Hilfe des Differentialoperators ∇ ausdrücken

$$\text{A] } \nabla * \vec{v} = \text{div}(\vec{v}) \quad \text{Skalar-Produkt mit Vektor} \quad \Rightarrow \quad \text{Divergenz}$$

$$\text{B] } \nabla * s = \text{grad}(s) \quad \text{mit Skalar multipliziert} \quad \Rightarrow \quad \text{Gradient}$$

$$\text{C] } \nabla \times \vec{v} = \text{rot}(\vec{v}) \quad \text{Kreuzprodukt} \quad \Rightarrow \quad \text{Rotation}$$

6.12.6. Zusammengesetzte Vektoroperationen

Laplace-Operator

$$\Delta = \nabla * \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta s = \operatorname{div}(\operatorname{grad} s) = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

$$\operatorname{div}(\lambda \vec{v}) = \vec{v} * \operatorname{grad}(\lambda) + \lambda * \operatorname{div}(\vec{v})$$

$$\operatorname{rot}(\lambda \vec{v}) = \lambda * \operatorname{rot} \vec{v} + \operatorname{grad}(\lambda) \times \vec{v}$$

$$\operatorname{grad}(u * v) = u * \operatorname{grad}(v) + v * \operatorname{grad}(u)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) = -\Delta * \vec{v} + \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{v}))$$

$$\operatorname{rot}[\operatorname{grad}(\lambda)] = 0$$

6.12.7. Vektoren in angepaßten Koordinaten

Manche Felder lassen sich besser in speziellen Koordinaten berechnen, z.B. läßt sich das Feld eines Koaxialleiters am besten in Zylinderkoordinaten berechnen. Die Darstellungsweise mit Einheitsvektoren ist schon aus dem 1. Semester bekannt:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = A_x \cdot \vec{e}_x + A_y \cdot \vec{e}_y + A_z \cdot \vec{e}_z$$

Obige Vektoren wurden in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten dargestellt. Die Einheitsvektoren müssen dabei in drei unabhängige Richtungen zeigen. Bei rechtwinkligen Koordinaten sind dieses die drei Koordinatenrichtungen x, y und z. Rechtwinkelige Koordinaten sind mittlerweile ausreichend bekannt. Im folgenden sollen Vektoren in drei anderen Koordinatensystemen behandelt werden:

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z \quad \text{rechtwinkelige Koordinaten (bekannt)}$$

$$\vec{A} = A_u \vec{e}_u + A_v \vec{e}_v + A_w \vec{e}_w \quad \text{schiefwinkelige Koordinaten}$$

$$\vec{A} = A_R \vec{e}_R + A_\phi \vec{e}_\phi + A_z \vec{e}_z \quad \text{Zylinderkoordinaten}$$

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\phi \vec{e}_\phi + A_\theta \vec{e}_\theta \quad \text{Kugelkoordinaten}$$

6.12.7.1. Vektoren in schiefwinkligen Koordinaten

Schiefwinkelige Koordinaten sind, insbesondere in der Elektrotechnik, nicht von großer Bedeutung. Diese eignen sich aber zur Einführung auf andere Koordinatensysteme, da diese leicht verständlich sind.

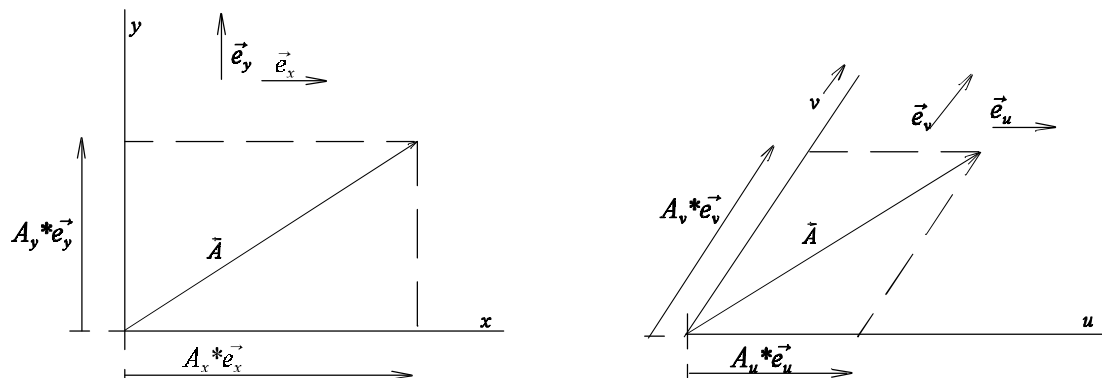


Bild Ma61271A

Nach Bild MA61271A wird der gleiche Vektor $\vec{A}$ einmal in rechtwinkligen und einmal in schiefwinkligen Koordinaten dargestellt. Prinzip: Vektor wird zerlegt nach Komponenten in Richtung der Einheitsvektoren. Hier ist die Richtung der Einheitsvektoren noch ortsunabhängig. Auf eine Umrechnung und auf eine Angabe der Vektoroperation soll für schiefwinkelige Koordinaten verzichtet werden.

6.12.7.2. Vektoren in Zylinderkoordinaten

6.12.7.2.1. Wiederholung Zylinderkoordinaten

(siehe auch Kap. 4.1.2.2)

Auf eine dreidimensionale Darstellung soll hier verzichtet werden. Es werden hier zwei Ansichten dargestellt.

Ansicht A] Projektion auf x-y-Ebene

Ansicht B] Projektion auf R-z-Ebene

Die jeweils dritte Koordinate kann durch:

- ⊙ Koordinate zeigt aus der Zeichenebene heraus
- ⊗ Koordinate zeigt in die Zeichenebene

dargestellt werden. Eselsbrücke:

Pfeilspitze oder Pfeilende

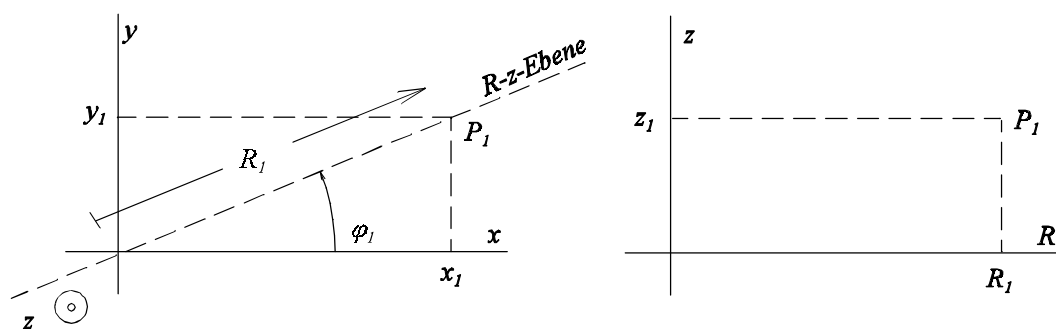


Bild MA612721

Nach Bild MA612721 lässt sich Punkt P_1 , nicht als Vektor, beschreiben durch x, y, z oder durch R, φ, z . Die Umrechnung zwischen beiden Formen ergab:

$$\begin{aligned}
 x &= R \cdot \cos(\varphi) & R &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 y &= R \cdot \sin(\varphi) & \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (+\pi \text{ für } x < 0) \\
 z &= z & z &= z
 \end{aligned}$$

Koordinatenflächen in rechtwinkligen Koordinaten sind

$$\begin{aligned}
 x - y - \text{Ebene} & \quad (z = \text{const} = 0) \\
 x - z - \text{Ebene} & \quad (y = \text{const} = 0) \\
 y - z - \text{Ebene} & \quad (x = \text{const} = 0)
 \end{aligned}$$

Koordinatenflächen in Zylinderkoordinaten sind die Flächen

$R = \text{const}$ das sind gerade, koaxiale Hohlzylinder vom Radius R mit der z -Achse als Zylinderachse.
 $\varphi = \text{const}$ das sind die von der z -Achse begrenzten Halbebenen
 $z = \text{const}$ das sind die Ebenen senkrecht zur z -Achse.

6.12.7.2.2. Einheitsvektoren und Komponenten

Da Vektor-Felder ortsabhängige Vektoren enthalten können, werden die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ in den Punkten P_1 und P_2 nach Bild MA612722A dargestellt, einmal in der x-y-Ebene und der Vektor $\vec{v}$ auch in der R-z-Ebene

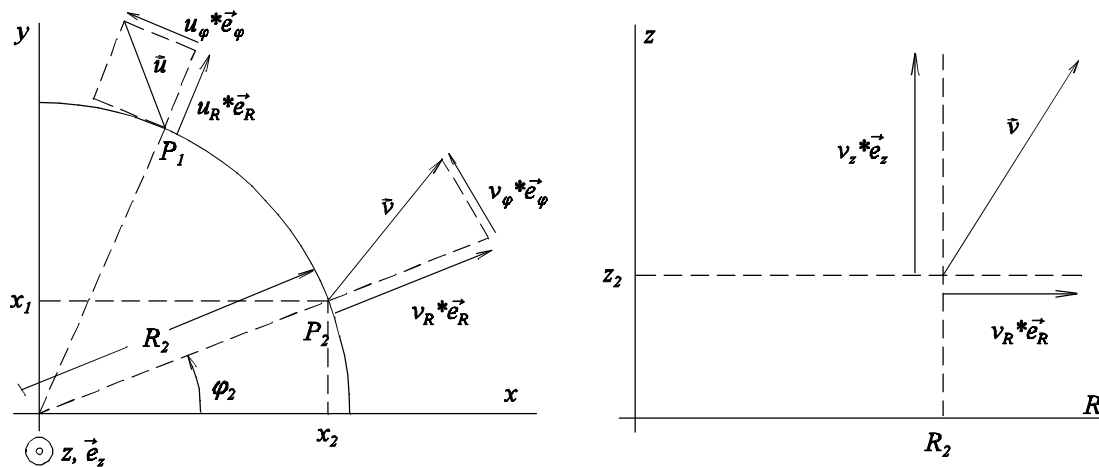


Bild MA612722A

Die Vektoren werden zerlegt in die Komponenten in Richtung der Einheitsvektoren. Die Richtung der Einheitsvektoren ist hier ortsabhängig. Die z-Richtung wird wie bei kartesischen Vektoren behandelt. Die zwei anderen Komponenten sind in Richtung des Radius R und in Richtung des Winkels φ gerichtet. Somit ergibt sich der Vektor $\vec{v}$ in Zylinderkoordinaten

$$\vec{v} = v_R \vec{e}_R + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z$$

6.12.7.2.3. Längenelemente

dR in R-Richtung

Rd φ in φ -Richtung

dz in z-Richtung

6.12.7.2.4. Flächenelemente

In kartesischen Koordinaten gilt für ein Volumenelement nach Bild MA61224A

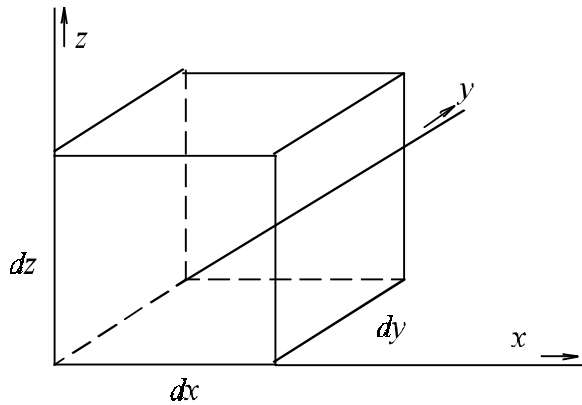


Bild MA612723

$dA = dx \, dy$	auf Flächen in der x-y-Ebene, $z = \text{const}$
$dA = dx \, dz$	auf Flächen in der x-z-Ebene, $y = \text{const}$
$dA = dy \, dz$	auf Flächen in der y-z-Ebene, $x = \text{const}$

Die Flächenelemente auf den Koordinatenflächen im Zylinderkoordinaten sind:

$dA = R \, d\varphi \, dz$	auf den Flächen $R = \text{const}$,
$dA = R \, dz \, d\varphi$	auf den Flächen $\varphi = \text{const}$,
$dA = R \, dR \, d\varphi$	auf den Flächen $z = \text{const}$.

Dabei wird, wie oben, immer die Länge einer Koordinatenrichtung mit der in der anderen multipliziert. $d\varphi$ wird dabei immer mit R multipliziert, weil die Bogenlänge (Länge im Winkelrichtung) sich ergibt aus der Multiplikation von Radius mal Winkel (siehe Definition des Bogenmaßes in Kap. 2.3.21).

6.12.7.2.5. Volumenelement

Das Volumenelement in kartesischen Koordinaten

$$dV = dx \, dy \, dz$$

nach Bild MA612723 ergibt sich aus der Multiplikation aller drei Koordinatenrichtungen. Auch in Zylinderkoordinaten ergibt sich aus der Multiplikation aller Koordinatenrichtungen das Volumenelement:

$$dV = R \, dR \, d\varphi \, dz$$

6.12.7.2.6. Linienelement

Das Linienelement in rechtwinkligen Koordinaten ist:

$$d\vec{s} = \vec{e}_x * dx + \vec{e}_y * dy + \vec{e}_z * dz$$

Das vektorielle Linienelement im Zylinderkoordinaten lautet:

$$d\vec{s} = \vec{e}_R dR + \vec{e}_\varphi R d\varphi + \vec{e}_z dz$$

Dieses ergibt sich auch aus den Längen im Richtung der Einheitsvektoren, multipliziert mit dem Einheitsvektor.

Das Quadrat des Linienelements ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dR^2 + R^2 d\varphi^2 + dz^2$$

6.12.7.2.7. Transformation der Vektorkomponenten

$$A_R = A_x \cos(\varphi) + A_y \sin(\varphi)$$

$$A_\varphi = -A_x \sin(\varphi) + A_y \cos(\varphi)$$

$$A_z = A_z$$

$$A_x = A_R \cos(\varphi) - A_\varphi \sin(\varphi)$$

$$A_y = A_R \sin(\varphi) + A_\varphi \cos(\varphi)$$

$$A_z = A_z$$

6.12.7.2.8. Vektoroperationen in Zylinderkoordinaten

$$[\text{grad}(s)]_R = \frac{\partial s}{\partial R} \quad [\text{grad}(s)]_\varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial s}{\partial \varphi} \quad [\text{grad}(s)]_z = \frac{\partial s}{\partial z}$$

$$\text{div}(\vec{B}) = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R B_R) + \frac{\partial}{\partial \varphi} B_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} (R B_z) \right]$$

$$\text{div}(\vec{B}) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R B_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\Delta s = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial s}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

$$\text{rot}_R \vec{B} = \frac{1}{R} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}, \quad \text{rot}_\varphi \vec{B} = \frac{\partial B_R}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial R}$$

$$\text{rot}_z \vec{B} = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial (R B_\varphi)}{\partial R} - \frac{\partial B_R}{\partial \varphi} \right]$$

6.12.7.3. Vektoren in Kugelkoordinaten

6.12.7.3.1. Wiederholung Kugelkoordinaten

(siehe auch Kap. 4.1.2.3, 1. Semester)

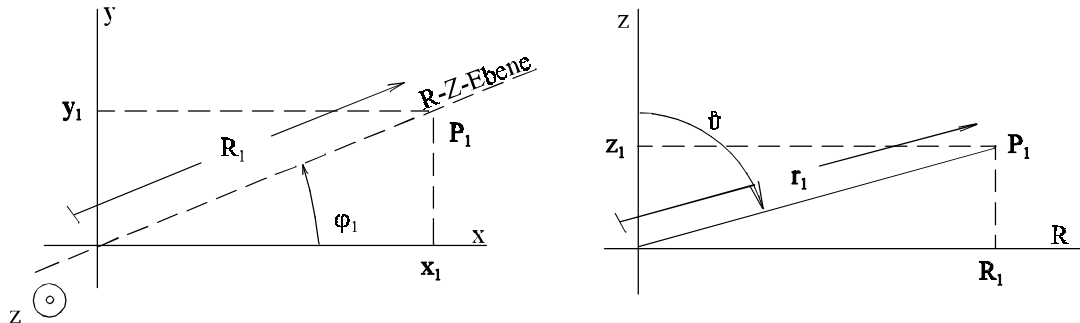


Bild MA612731

Ein Punkt lässt sich nach Bild MA612731A durch die drei folgenden Koordinaten darstellen:

- r - Entfernung zum Ursprung
- φ - Winkel in der x - y -Ebene zum Punkt
- ϑ - Winkel von der z -Achse zum Punkt in der R - z -Ebene

Die Größe R in Zylinderkoordinaten ist hier nur eine Hilfsgröße. Umrechnung nach folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y &= r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) & \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (+\pi \text{ für } x < 0) \\ z &= r \cdot \cos(\vartheta) & \vartheta &= \arccos\frac{z}{r} \end{aligned}$$

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Koordinatenflächen sind die Flächen

- $r = \text{const}$ das sind konzentrische Kugelflächen von Radius r mit dem Mittelpunkt in Koordinatenursprung
- $\vartheta = \text{const}$ das sind gerade Kreiskegel mit Öffnungswinkel ϑ , mit der z -Achse als Achse und der Spitze im Koordinatenursprung
- $\varphi = \text{const}$ das sind die von der z -Achse begrenzten Halbebenen.

6.12.7.3.2. Einheitsvektoren und Komponenten

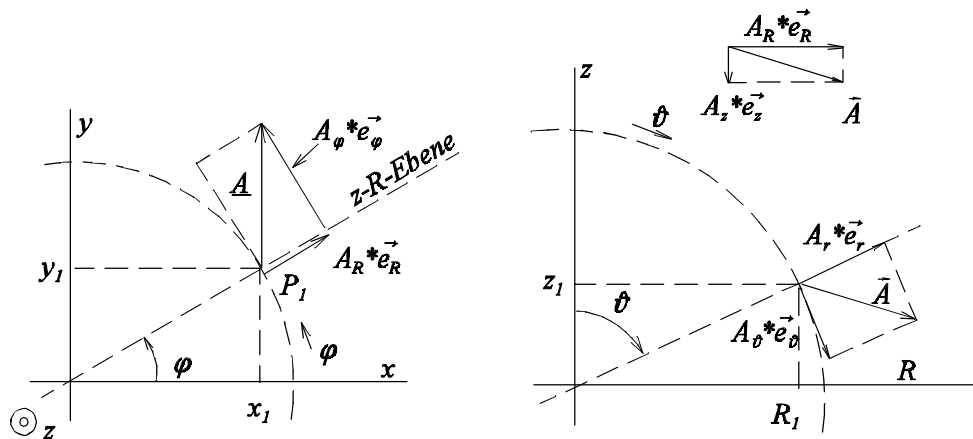


Bild MA612732

Nach Bild MA612732 wird der Vektor $\vec{A}$ zerlegt in Komponenten in Richtung der Einheitsvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_\vartheta$. Dabei sind die Richtungen wieder ortsabhängig und die Koordinatenrichtungen nach Kap. 6.12.7.3.1 sind: r , φ und ϑ .

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_\vartheta \vec{e}_\vartheta$$

6.12.7.3.3. Längenelemente

Die Längen in Koordinatenrichtung lauten:

dr	in r -Richtung
$R \cdot d\varphi = r \cdot \sin(\vartheta) \cdot d\varphi$	in φ -Richtung
$r \cdot d\vartheta$	in ϑ -Richtung

6.12.7.3.4. Flächenelemente

Mit den oberen Längenelementen ergeben sich die Flächenelemente auf den Koordinatenflächen, durch Multiplikation von zwei Längenelementen:

$dA = r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$	auf den Flächen $r = \text{const}$
$dA = r \sin(\vartheta) dr d\varphi$	auf den Flächen $\vartheta = \text{const}$
$dA = r dr d\vartheta$	auf den Flächen $\varphi = \text{const}$

6.12.7.3.5. Volumenelement

Das Volumenelement lässt sich durch Multiplikation aller Längenelemente berechnen:

$$dV = r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi$$

6.12.7.3.5 Linienelement

Das vektorielle Linienelement lässt sich wieder aus den Längen in Koordinatenrichtung und den Einheitsvektoren bestimmen:

$$d\vec{s} = \vec{e}_r * dr + \vec{e}_\vartheta * r * d\vartheta + \vec{e}_\varphi * r * \sin(\vartheta) d\varphi$$

Das Quadrat des Linienelements ergibt sich zu

$$ds^2 = dr^2 + r^2 * d\vartheta^2 + r^2 * \sin^2(\vartheta) d\varphi^2.$$

6.12.7.3.6. Transformation der Vektorkomponenten

$$A_r = A_x \sin(\vartheta) \cos(\varphi) + A_y \sin(\vartheta) \sin(\varphi) + A_z \cos(\vartheta)$$

$$A_\vartheta = A_x \cos(\vartheta) \cos(\varphi) + A_y \cos(\vartheta) \sin(\varphi) - A_z \sin(\vartheta)$$

$$A_\varphi = -A_x \sin(\varphi) + A_y \cos(\varphi)$$

$$A_x = A_r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) + A_\vartheta \cos(\varphi) \cos(\vartheta) - A_\varphi \sin(\varphi)$$

$$A_y = A_r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) + A_\vartheta \cos(\vartheta) \sin(\varphi) + A_\varphi \cos(\varphi)$$

$$A_z = A_r \cos(\vartheta) - A_\vartheta \sin(\vartheta)$$

6.12.7.3.7. Vektoroperationen in Kugelkoordinaten

$$[grad(s)]_r = \frac{\partial s}{\partial r} \quad [grad(s)]_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \vartheta} \quad [grad(s)]_\varphi = \frac{1}{r * \sin(\vartheta)} \frac{\partial s}{\partial \varphi}$$

$$div(\vec{B}) = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \vartheta B_r) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta B_\vartheta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r B_\varphi) \right]$$

$$div(\vec{B}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta B_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\Delta s = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial s}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial s}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2}$$

$$rot_r \vec{B} = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta B_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r B_\vartheta) \right]$$

$$rot_\varphi \vec{B} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r B_\vartheta) - \frac{\partial B_r}{\partial \vartheta} \right]$$

$$rot_\vartheta \vec{B} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \vartheta B_\varphi) \right]$$

6.13. Extremwertaufgaben mehrerer Abhängiger

Die Extremwertproblematik bei einer Variablen wurde ausführlich in Kap. 6.3 und 6.4 behandelt. Am anschaulichsten ist die Extremwertberechnung anhand einfacher Funktionen, z.B. hat im Eindimensionalen (eine unabhängige Variable x) die Parabel

$$y = x^2$$

ein Minimum bei

$$x_{\min} = 0$$

In diesem Abschnitt sollen Funktionen mit mindestens zwei unabhängigen Variablen untersucht werden:

$$f(x,y) = z(x,y)$$

Die einfachste Form einer solchen Funktion ist der Rotationsparaboloid

Beispiel 1: $z = z(x,y) = x^2 + y^2$

Obere Funktion ist die Normalparabel im Ursprung $(0,0,0)$, die in positiver z -Richtung geöffnet ist und die um die z -Achse rotiert. Hier ist einsichtig, daß bei $x=0$ und $y=0$ ein Minimum der Funktion $z(x,y)$ vorhanden ist. Wie läßt sich dieses jetzt mathematisch berechnen? Für ein eindimensionales Minimum war die Bedingung:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Dieses war eine Gleichung zur Bestimmung eines Variablenwertes und zwar des x -Wertes, wo ein Extrema auftrat. Hier werden für zwei Variable auch zwei Bestimmungsgleichungen benötigt. Was sagt die obere Gleichung anschaulich oder grafisch aus? Die Ableitung gleich Null setzen, bedeutet eine waagerechte Tangente in x -Richtung. Nun sind zwei Variablen vorhanden. Die Bedingungen hier wären:

waagerechte Tangente in x -Richtung
waagerechte Tangente in y -Richtung

Wie kann das mathematisch ausgedrückt werden? $\frac{dz}{dx} = 0$ und $\frac{dz}{dy} = 0$ wäre falsch, weil nur die x - bzw. y -Abhängigkeit untersucht werden soll. Da ist das Mittel der partiellen Ableitungen vorhanden.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z_y = 0$$

$$z = x^2 + y^2 \qquad z_x = 2x \qquad z_y = 2y$$

$$\begin{aligned} z_x = 0 = 2x & \Rightarrow x_{\min} = 0 \\ z_y = 0 = 2y & \Rightarrow y_{\min} = 0 \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

Zur Bestimmung der Extrema müssen die 1 partiellen Ableitungen gleich Null gesetzt werden.

Beispiel 2: $z = x^2 - y^2$

Obere Methode auf Beispiel 2 angewandt, ergibt den gleichen Punkt als bei Beispiel 1. Ist dieses nun auch ein Extrempunkt? Antwort: Nein. Begründung: In x-Richtung liegt ein Minimum vor und in y-Richtung ein Maximum. Auch dieser Punkt wird dann Sattelpunkt genannt. Die obere Bedingung (Nullsetzen der partiellen Ableitungen) ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung. Die Entscheidung ob es sich um einen Sattelpunkt oder um einen Extrempunkt muß mit Hilfe der zweiten partiellen Ableitungen erfolgen.

Schema:**A] notwendige Bedingung:**

Alle ersten partiellen Ableitungen gleich Null setzen, ergibt nach Lösung einen oder mehrere Punkt (Sattelpunkte oder Extrempunkte)

B] hinreichende Bedingung:

Die zweiten partiellen Ableitungen auswerten an der Stelle mit den Werten von A.

Zur notwendigen und hinreichenden Bedingung soll ein Berechnungsschema für die Funktion

$$z = f(x, y, u, v)$$

angegeben werden:

A] notwendige Bedingung:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{grad}(z) = 0$$

Aus der notwendigen Bedingung werden durch Nullsetzen ein oder mehrere Punkte

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

gefunden.

B] hinreichende Bedingung:

Für die hinreichende Bedingung werden n (hier 4, weil auch 4 Variablen vorhanden) Determinanten gebildet. Die zweiten partiellen Ableitungen werden an der Stelle P (unter A gefunden) ausgewertet:

$$Det_1 = \begin{vmatrix} z_{xx} \end{vmatrix}_P$$

$$Det_2 = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}_P$$

$$Det_3 = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} & z_{xu} \\ z_{yx} & z_{yy} & z_{yu} \\ z_{ux} & z_{uy} & z_{uu} \end{vmatrix}_P$$

$$Det_4 = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} & z_{xu} & z_{xv} \\ z_{yx} & z_{yy} & z_{yu} & z_{yv} \\ z_{ux} & z_{uy} & z_{uu} & z_{uv} \\ z_{vx} & z_{vy} & z_{vu} & z_{vv} \end{vmatrix}_P$$

Minimum	=>	$Det_1 > 0$ und $Det_2 > 0$ und $Det_3 > 0$ und $Det_4 > 0$
Maximum	=>	$Det_1 < 0$ und $Det_2 > 0$ und $Det_3 < 0$ und $Det_4 > 0$
sonst	=>	Sattelpunkt

Für mehr Variable als vier müssen nach obigen Schema auch mehr Determinanten ausgewertet werden, für weniger Variable auch auf sprechend weniger Determinanten. Der Sonderfall zweier Variable soll hier noch mal angegeben werden:

für $z = f(x, y)$

notwendig:	$f_x(x_E, y_E) = 0$	oder $z_x = 0$	=>	x_E, y_E
	$f_y(x_E, y_E) = 0$	oder $z_y = 0$	=>	x_E, y_E

hinreichend:	$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_E, y_E) & f_{xy}(x_E, y_E) \\ f_{yx}(x_E, y_E) & f_{yy}(x_E, y_E) \end{vmatrix} > 0$	oder	$\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} > 0$
--------------	--	------	--

$f_{xx}(x_E, y_E) > 0$	=>	Minimum
$f_{xx}(x_E, y_E) < 0$	=>	Maximum
sonst	=>	Sattelpunkt

Beispiel 3:

$$z = x^2 - 6x + y^2 - 8y + 50$$

$$z_x = 2x - 6 \quad z_x = 0 \Rightarrow x_E = 3$$

$$z_y = 2y - 8 \quad z_y = 0 \Rightarrow y_E = 4.$$

$$z_{xx} = 2 \quad z_{xy} = 0$$

$$z_{yx} = 0 \quad z_{yy} = 2$$

$$\text{Det}_1 = 2 > 0$$

$$\text{Det}_2 = 2 \cdot 2 = 4 > 0$$

aus $\text{Det}_1 > 0$ und $\text{Det}_2 > 0$ folgt, daß es sich bei dem gefundenen Punkt um ein Minimum handelt.

Einsichtig wird Beispiel 3, wenn quadratisch ergänzt wird:

$$z = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + 50 - 9 - 16$$

Hinweis: Weil hier bei Beispiel 3 nur rationale Funktionen mit der Potenz keiner gleich 2 vorkommen, sind die zweiten partiellen Ableitungen nicht mehr von x und y -abhängig, im Normalfall ist das anders. Auch das Gleichungssystem, was sich aus dem Nullsetzen der ersten partiellen Ableitungen ergibt, ist in der Regel nichtlinear und verkoppelt.

Aufgaben 6.13.1 f und 6.13.3 rechnen

6.14. Kurvenanpassung

Problem: Mehrere Meß- oder Rechenwerte sind tabellarisch gegeben in bestimmten, meist äquidistanten Abständen. Gesucht ist nun $f(x)$ als Ganzes oder $f_i(x)$ in n Abschnitten i. Mehrere Möglichkeiten.

Einige Vereinbarungen:

m - Anzahl der Meßwerte oder gegebenen Punkte

n - Polynomordnung der Anpassung

k - Anzahl der unterteilten Bereiche

6.14.1. Lineare Interpolation

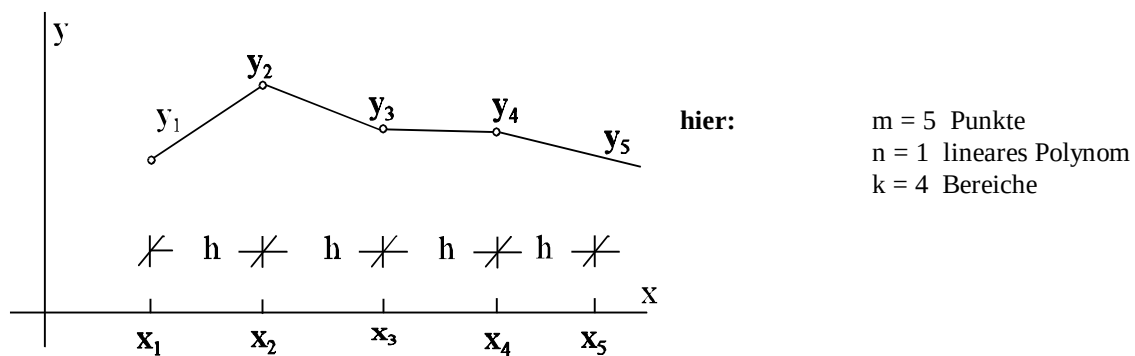


Bild MA6141A

$$f_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

Lineare Interpolation ist bekannt und dient nur zur Wiederholung und zum Erkennen des Prinzips. Die obere Formel ist die Geradengleichung durch die Punkte (x_i, y_i) und (x_{i+1}, y_{i+1}) .

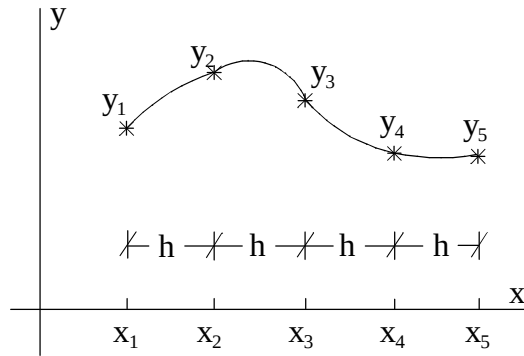
(keine Übungsaufgaben)

6.14.2. Stetiger Übergang von y'

Problem: Bei linearer Interpolation ist die Ableitung der Funktion an den Stützstellen nicht stetig.

Durch einen quadratischen Ansatz soll ein stetiger Übergang ermöglicht werden:

$$f_i(x) = A_i + B_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right) + C_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^2$$



hier: $m = 5$ Punkte, Funktionswerte
 $n = 2$ Anpassung durch Parabel
 $k = 4$ Bereiche

Bild MA6142A

gegeben: m - Funktionswerte im äquidistanten Abstand h in x -Richtung

gesucht: $k = m - 1$ Koeffizienten A_i, B_i, C_i für den Bereiche $i=1$ bis $i=k$
 $k \cdot 3$ unbekannte Koeffizienten

Bestimmungsgleichungen:	k * linksseitige Funktionswerte	Bd1
	k * rechtsseitige Funktionswerte	Bd2
	$(k-1)$ * stetige Ableitung	Bd3

Summe	$3k - 1$ Bestimmungsgleichungen für	
	$3k$ unbekannte Koeffizienten	

=> eine Bedingung frei wählbar

welche ist egal,
hier gewählt: $y''(x_1) = 0$

Bd4

Zur Auswertung der oberen Bedingungen wird der Ansatz zunächst zweimal differenziert:

$$f_i(x) = A_i + B_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right) + C_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^2$$

$$f_i'(x) = \left[B_i + 2C_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right) \right] \cdot \frac{1}{h}$$

$$g_i'(x) = h \cdot f_i'(x) = B_i + 2C_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right)$$

$$f_i''(x) = 2C_i \frac{1}{h^2}$$

$$g_i''(x) = \frac{1}{2} h^2 f_i''(x) = C_i$$

Es werden die Werte der nullten bis zweiten Ableitungen am linken Rand $x = x_i$ und rechten Rand $x = x_i + h$ gebildet:

linker Rand Bereich i		rechter Rand Bereich i		linker Rand Bereich (i+1)	
$f_i(x_i) = A_i$	-1	$f_i(x_i+h) = A_i + B_i + C_i$	-4	$f_{i+1}(x_i+h) = A_{i+1}$	-7
$g_i'(x_i) = B_i$	-2	$g_i'(x_i+h) = B_i + 2C_i$	-5	$g_{i+1}'(x_i+h) = B_{i+1}$	-8
$g_i''(x_i) = C_i$	-3	$g_i''(x_i+h) = C_i$	-6	$g_{i+1}''(x_i+h) = C_{i+1}$	-9

Bereich i = 1

$$\begin{aligned}
\text{Bd1 bzw. (1)} & \Rightarrow A_1 = y_1 \\
\text{Bd4 bzw. (3)} & \Rightarrow 0 = 2C_1 \Rightarrow C_1 = 0 \\
\text{Bd2 bzw. (4)} & \Rightarrow y_2 = A_1 + B_1 + C_1 \Rightarrow B_1 = y_2 - y_1
\end{aligned}$$

Bereich i > 1

$$\begin{aligned}
\text{bekannt:} & A_{i-1}, B_{i-1}, C_{i-1} \\
\text{gesucht:} & A_i, B_i, C_i \\
\text{Bd1 bzw. (1)} & \Rightarrow A_i = y_i \\
\text{Bd3 und (5), (8)} & \Rightarrow B_{i+1} = B_i + 2C_i \\
& B_i = B_{i-1} + 2C_{i-1} \\
\text{Bd2 und (4), (7)} & \Rightarrow A_i + B_i + C_i = y_{i+1} \\
& C_i = y_{i+1} - y_i - B_{i-1} - 2C_{i-1}
\end{aligned}$$

Zusammenfassung und Schema

A] Koeffizienten für den Bereich 1 bilden:

$$\begin{aligned}
A_1 &= y_1 \\
B_1 &= y_2 - y_1 \\
C_1 &= 0
\end{aligned}$$

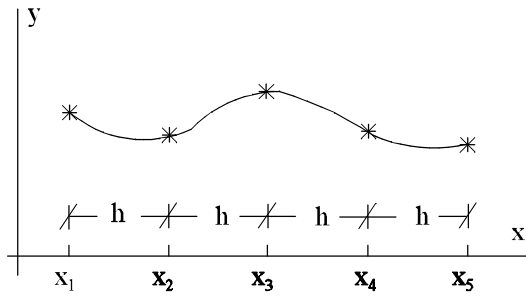
B] Koeffizienten für den nächsten Bereich i > 1 rekursiv berechnen

$$\begin{aligned}
A_i &= y_i \\
B_i &= B_{i-1} + 2C_{i-1} \\
C_i &= y_{i+1} - y_i - B_{i-1} - 2C_{i-1}
\end{aligned}$$

C] Funktionswert berechnen (mit Auswahl des Bereiches i):

$$f_i(x) = A_i + B_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right) + C_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^2$$

Aufgabe 6.14.1 a rechnen

6.14.3. Stetigkeit von y' und y'' 

hier: $m = 5$ Punkte, Funktionswerte
 $n = 3$ Kubische Parabel
 $k = 4$ Bereiche

Bild MA6143A

Für einen allgemeinen Verlauf mit speziell $m = 5$ Stützwerten im äquidistanten Abstand h und $k = 4$ Abschnitten erfolgt für die Bereiche $i = 1$ bis $k = 4$ der Ansatz:

$$f_i = A_i + B_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right) + C_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^2 + D_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^3$$

Damit sind $k \cdot (n+1) = 4 \cdot 4 = 16$ Koeffizienten zu bestimmen. Somit sind auch 16 Bedingungen (Bestimmungsgleichungen) erforderlich:

14 Bedingungen:	a) 4 Funktionswerte links	Bd1
	b) 4 Funktionswerte rechts	Bd2
	c) (4-1) y' stetig	Bd3
	d) (4-1) y'' stetig	Bd4

Um alle Koeffizienten zu bestimmen sind 16 Bedingungen erforderlich, zwei fehlen.

$$\Rightarrow \quad 2 \text{ Zusatzbedingungen} \quad \begin{array}{ll} y''(x_1) = 0 & \text{Bd5} \\ y''(x_5) = 0 & \text{Bd6} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Entspricht mechanisch einer Biegelatte durch die Punkte i , die am Ende keine Krümmung ($y''(\text{Endpunkte}) = 0$) aufweist.

Die allgemeinen Funktionen und deren erste und zwei Ableitungen werden angegeben:

$$f_i = A_i + B_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right) + C_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^2 + D_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^3$$

$$f'_i = \left[B_i + 2C_i \frac{x - x_i}{h} + 3D_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^2 \right] * h$$

$$g'_i = h * f'_i = B_i + 2C_i \frac{x - x_i}{h} + 3D_i \left(\frac{x - x_i}{h} \right)^2$$

$$f''_i = \left[2C_i + 6D_i \frac{x - x_i}{h} \right] * h^2$$

$$g''_i = \frac{1}{2} h^2 * f''_i = C_i + 3D_i \frac{x - x_i}{h}$$

Die Funktionswerte der nullten bis zweiten Ableitung werden an drei Stellen gebildet:

linker Rand Bereich i		rechter Rand Bereich i		linker Rand Bereich (i+1)	
$f_i(x_i) = A_i$	(1)	$f_i(x_i+h) = A_i + B_i + C_i$	(4)	$f_{i+1}(x_{i+1}) = A_{i+1}$	(7)
$g_i'(x_i) = B_i$	(2)	$g_i'(x_i+h) = B_i + 2C_i + 3D_i$	(5)	$g_{i+1}'(x_{i+1}) = B_{i+1}$	(8)
$g_i''(x_i) = C_i$	(3)	$g_i''(x_i+h) = C_i + 3D_i$	(6)	$g_{i+1}''(x_{i+1}) = C_{i+1}$	(9)

Die Bedingungen Bd1 bis Bd6 werden mit Hilfe von (1) bis (9) ausgewertet:

4*Bd1 bzw. (1) =>

$$\begin{aligned} A_1 &= y_1 \\ A_2 &= y_2 \\ A_3 &= y_3 \\ A_4 &= y_4 \end{aligned}$$

4*Bd2 bzw. (4) =>

$$\begin{aligned} y_2 &= A_1 + B_1 + C_1 + D_1 & B_1 + C_1 + D_1 &= y_2 - y_1 & (10) \\ y_3 &= A_2 + B_2 + C_2 + D_2 & B_2 + C_2 + D_2 &= y_3 - y_2 & (11) \\ y_4 &= A_3 + B_3 + C_3 + D_3 & B_3 + C_3 + D_3 &= y_4 - y_3 & (12) \\ y_5 &= A_4 + B_4 + C_4 + D_4 & B_4 + C_4 + D_4 &= y_5 - y_4 & (13) \\ \text{allgemein:} & & B_i + C_i + D_i &= y_{i+1} - y_i & (14) \end{aligned}$$

3*Bd3 und (5),(8) =>

$$\begin{aligned} B_1 + 2C_1 + 3D_1 &= B_2 & B_1 + 2C_1 + 3D_1 - B_2 &= 0 & (15) \\ & & B_2 + 2C_2 + 3D_2 - B_3 &= 0 & (16) \\ & & B_3 + 2C_3 + 3D_3 - B_4 &= 0 & (17) \\ \text{allgemein:} & & B_i + 2C_i + 3D_i - B_{i+1} &= 0 & (18) \end{aligned}$$

3*Bd4 und (6),(9) =>

$$\begin{aligned} C_1 + 3D_1 &= C_2 & C_1 + 3D_1 - C_2 &= 0 & (19) \\ & & C_2 + 3D_2 - C_3 &= 0 & (20) \\ & & C_3 + 3D_3 - C_4 &= 0 & (21) \\ \text{allgemein:} & & C_i + 3D_i - C_{i+1} &= 0 & (22) \end{aligned}$$

Bd5 bzw. (3) =>

$$C_1 = 0$$

Bd6 bzw. (6) =>

$$C_4 + 3D_4 = 0 \quad (23)$$

Damit ergibt sich ein Gleichungssystem für die Variablen $B_1, D_1, B_2, C_2, D_2, B_3, C_3, D_3, B_4, C_4$ und D_4 . Die Variablen A_1, A_2, A_4 und C_1 sind oben schon bestimmt. Dieses Gleichungssystem lässt sich in Matrizenschreibweise angeben:

	B ₁	D ₁	B ₂	C ₂	D ₂	B ₃	C ₃	D ₃	B ₄	C ₄	D ₄			
Z _{A1}	1	1										B ₁	y ₂ -y ₁	(10)
Z _{A2}	1	3	-1									D ₁		(15)
Z _{A3}		3		-1								B ₂		(19)
Z _{A4}			1	1	1							C ₂	y ₃ -y ₂	(11)
Z _{A5}			1	2	3	-1						D ₂		(16)
Z _{A6}				1	3		-1					B ₃		(20)
Z _{A7}						1	1	1				C ₃	y ₄ -y ₃	(12)
Z _{A8}						1	2	3	-1			D ₃		(17)
Z _{A9}							1	3		-1		B ₄		(21)
Z _{A10}									1	1	1	C ₄	y ₅ -y ₄	(13)
Z _{A11}										1	3	D ₄		(23)

Die D_i des oberen Gleichungssystems lassen sich eliminieren mit der Gleichung (14):

$$D_i = y_{i+1} - y_i - B_i - C_i$$

oder durch Zeilenaddition:

$$Z_{B1} = -Z_{A2} + 3 \cdot Z_{A1}$$

$$Z_{B2} = -Z_{A3} + 3 \cdot Z_{A1}$$

$$Z_{B3} = -Z_{A5} + 3 \cdot Z_{A4}$$

$$Z_{B4} = -Z_{A6} + 3 \cdot Z_{A4}$$

$$Z_{B5} = -Z_{A8} + 3 \cdot Z_{A7}$$

$$Z_{B6} = -Z_{A9} + 3 \cdot Z_{A7}$$

$$Z_{B7} = -Z_{A11} + 3 \cdot Z_{A10}$$

Damit ergibt sich ein reduziertes Gleichungssystem:

	B ₁	B ₂	C ₂	B ₃	C ₃	B ₄	C ₄			
Z _{B1}	2	1						B ₁	+3(y ₂ -y ₁)	
Z _{B2}	3		1					B ₂	+3(y ₂ -y ₁)	
Z _{B3}		2	1	1				C ₂	+3(y ₃ -y ₂)	
Z _{B4}		3	2		1			B ₃	+3(y ₃ -y ₂)	
Z _{B5}				2	1	1		C ₃	+3(y ₄ -y ₃)	
Z _{B6}				3	2		1	B ₄	+3(y ₄ -y ₃)	
Z _{B7}						3	2	C ₄	+3(y ₅ -y ₄)	

Die Struktur des oberen Gleichungssystems ist gut erkennbar. Das System lässt sich leicht um eine Stützstelle von (m = 5, k = 4) auf (m = 6, k = 5) erweitern, die rechte Seite wird als Matrix mal Vektor geschrieben:

	B ₁	B ₂	C ₂	B ₃	C ₃	B ₄	C ₄	B ₅	C ₅
Z _{C1}	2	1							
Z _{C2}	3		1						
Z _{C3}		2	1	1					
Z _{C4}		3	2		1				
Z _{C5}				2	1	1			
Z _{C6}				3	2		1		
Z _{C7}						2	1	1	
Z _{C8}					3	2			1
Z _{C9}								3	2

B₁
B₂
C₂
B₃
C₃
B₄
C₄
B₅
C₅

=3

y₁ y₂ y₃ y₄ y₅ y₆

	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆
B ₁	-1	1				
B ₂	-1	1				
C ₂		-1	1			
B ₃		-1	1			
C ₃			-1	1		
B ₄			-1	1		
C ₄				-1	1	
B ₅				-1	1	
C ₅					-1	1

Das obere Gleichungssystem soll für die Variable B_1 nach dem Gauß'schen Algorithmus gelöst werden. Die obere Struktur erlaubt die Möglichkeit, jeweils zwei Schritte in einen zu vollziehen (Erklärung weiter unten):

[illegible]

$$Z_{D1} = Z_{C9} - 2*Z_{C8} - 3*Z_{C7}$$

$$Z_{D2} = Z_{D1} + 7*Z_{C6} + 12*Z_{C5}$$

$$Z_{D3} = Z_{D2} - 26 * Z_{C4} - 45 * Z_{C3}$$

$$Z_{D4} = Z_{D3} + 97 * Z_{C2} + 168 * Z_{C1}$$

Die Koeffizienten B_1 für $k = 5$, $m = 6$ lassen sich aus Z_{D_4} bestimmen:

$$Z_{D4} \Rightarrow k=5, m=6 \quad B_1 = \frac{-265y_1 + 336y_2 - 90y_3 + 24y_4 - 6y_5 + y_6}{209}$$

$$Z_{D1} \Rightarrow k=2, m=3 \quad B_1 = \frac{5y_1 - 6y_2 + y_3}{-4}$$

Auch der Koeffizient B_1 für eine andere Anzahl von Stützstellen lässt sich auch Z_{D1} bis Z_{D4} bestimmen.

$$Z_{D2} \Rightarrow k=3, m=4 \quad B_1 = \frac{-19y_1 + 24y_2 - 6y_3 + y_4}{15}$$

$$Z_{D3} \Rightarrow k=4, m=5 \quad B_1 = \frac{71y_1 - 90y_2 + 24y_3 - 6y_4 + y_5}{-56}$$

Schema**A] Werte für den Bereich 1 berechnen**

$$A_1 = y_1 \quad C_1 = 0$$

B_1 berechnen nach:

$$k = 2, m = 3 \quad B_1 = \frac{5y_1 - 6y_2 + y_3}{-4}$$

$$k = 3, m = 4 \quad B_1 = \frac{-19y_1 + 24y_2 - 6y_3 + y_4}{15}$$

$$k = 4, m = 5 \quad B_1 = \frac{71y_1 - 90y_2 + 24y_3 - 6y_4 + y_5}{-56}$$

$$k = 5, m = 6 \quad B_1 = \frac{-265y_1 + 336y_2 - 90y_3 + 24y_4 - 6y_5 + y_6}{209}$$

$$D_1 = y_2 - y_1 - B_1 \quad \text{aus (10)}$$

B] Rekursiv die Koeffizienten für die Bereiche 2 bis k berechnen:

$$A_i = y_i$$

$$B_i = B_{i-1} + 2C_{i-1} + 3D_{i-1} \quad \text{aus (18)}$$

$$C_i = C_{i-1} + 3D_{i-1} \quad \text{aus (22)}$$

$$D_i = y_{i+1} - y_i - B_i - C_i \quad \text{aus (14)}$$

Aufgabe 6.14.2 a rechnen

6.14.4. Lineare Regression

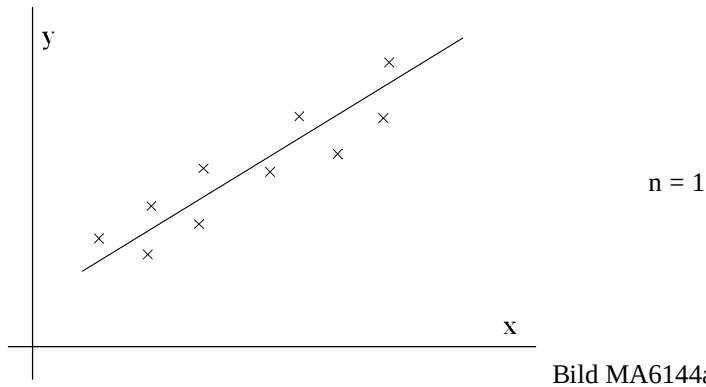
Problem: Mehrere Meßwerte sollen durch nur eine Funktion angenähert werden

m - Anzahl der Meßwert

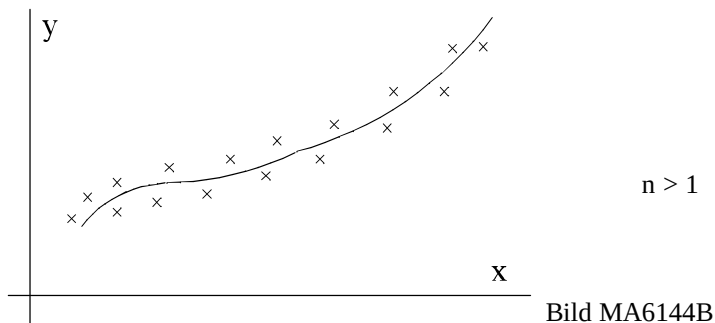
k = 1 Bereich

n = ? Polynomordnung

Beispiel 1: durch Gerade annähern



Beispiel 2: Durch Polynom höherer Ordnung annähern



Ansatz: $y_b = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ Index "b" für berechnet

gesucht: n + 1 Koeffizienten a_0 bis a_n

gegeben: zwei Meßvektoren mit m-Meßwerten

$$\bar{y}_m = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \bar{x}_m = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$m < n + 1 \Rightarrow$ unbestimmt, nicht möglich
 $m = n + 1 \Rightarrow$ direkt möglich zu bestimmen (Kap. 2.2.1, 1. Semester)
 $m > n + 1 \Rightarrow$ soll in diesem Abschnitt behandelt werden

Problematik:

Es liegen mehr Meßwerte als Koeffizienten vor. Mit welcher Bedingung soll man nun die a_i bestimmen? Antwort: Der Fehler (die Abweichung) zur angenäherten Funktion sollte minimiert werden. Damit muß die Abweichung zwischen Meßwerten und berechneten Werten betrachtet und aufsummiert werden. Die Abweichungen vorzeichenbehaftet aufzusummieren bringt nichts, da negative und positive Abweichungen sich aufheben würden. Eine Möglichkeit wäre die Betragsbildung. Betragsbildung ist aber keine analytische Funktion und läßt sich mathematisch schlecht berechnen. Abhilfe: Das Betragsquadrat ist immer positiv. **Die Koeffizienten a_0 bis a_n bestimmt man, indem die Betragsquadrate der Abweichungen zwischen Meßwerten und berechneten Werten aufsummiert und minimiert werden.** Der Vorteil hier ist, daß größere Abweichungen stärker berücksichtigt werden.

Das i -te berechnete y_{bi} ist:

$$y_{bi} = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \dots + a_n x_i^n$$

Der Fehler y_{fi} zwischen berechneten y_{bi} und gemessenen y_i beträgt:

$$y_{fi} = y_{bi} - y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \dots + a_n x_i^n - y_i$$

Der Fehler läßt sich zum Fehlervektor y_f zusammenfassen und in Matrixschreibweise angeben:

$$\bar{y}_f = \begin{pmatrix} y_{f1} \\ y_{f2} \\ \dots \\ y_{fm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$$

oder in Kurzform

$$\bar{y}_f = \bar{X} * \bar{a} - \bar{y}_m$$

mit der Matrix und den Vektoren:

$$\bar{y}_f = \begin{pmatrix} y_{f1} \\ y_{f2} \\ y_{f3} \\ \dots \\ y_{fm} \end{pmatrix} \quad \text{Fehlervektor}$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{pmatrix} \quad \text{Meßmatrix}$$

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{zu bestimmender Koeffizientenvektor}$$

$$\bar{y}_m = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \text{Meßvektor}$$

Das gesuchte Betragsquadrat des Fehlervektors ergibt sich aus dem Skalarprodukt des transponierten Fehlervektors mit dem Fehlervektor (Kap. 1.3.3.5)

$$|\bar{y}_f|^2 = \bar{y}_f^T \bar{y}_f = e^2 = f \quad - \text{Fehler}$$

$$\bar{y}_f = \bar{X} \bar{a} - \bar{y}_m$$

$$\bar{y}_f^T = \bar{a}^T \bar{X}^T - \bar{y}_m^T$$

$$f = (\bar{a}^T \bar{X}^T - \bar{y}_m^T)(\bar{X} \bar{a} - \bar{y}_m)$$

$$f = \bar{a}^T \bar{X}^T \bar{X} \bar{a} - \bar{a}^T \bar{X}^T \bar{y}_m - \bar{y}_m^T \bar{X} \bar{a} + \bar{y}_m^T \bar{y}_m$$

Problem: hier Extremwertaufgaben mehrerer Veränderlichen $a_0, a_1, \dots, a_n$

Bestimmungsgleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0$$

..

..

$$\frac{\partial f}{\partial a_n} = 0$$

Zusammengefaßt zu einer Vektordifferentiation:

$$\frac{df}{d\bar{a}} = 0$$

Wie differenziert man nun einen Skalar nach dem Vektor $\bar{a}$, wobei der Skalar den Vektor $\bar{a}$ schon als Skalarprodukt enthält. Dazu ein Beispiel.

Beispiel:

$$F = f_0 * a_0 + f_1 * a_1 + f_2 * a_2 = (a_0, a_1, a_2) \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = (f_0, f_1, f_2) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = f_0 \quad \frac{\partial F}{\partial a_1} = f_1 \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} = f_2$$

$$\frac{dF}{d\bar{a}} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$F = \bar{a}^T * \bar{f} = \bar{f}^T * \bar{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{d\bar{a}} = \bar{f}$$

=> Das Differenzieren des Skalars $\bar{a}^T * \bar{f}$ nach einem Vektor $\bar{a}$ ergibt als Ableitung den Vektor $\bar{f}$ selbst.

Die Hilfsgröße

$$h = \bar{a}^T * \bar{X}^T * \bar{X} * \bar{a}$$

nach $\bar{a}$ differenziert ergibt nach der Produktregel und den gefundenen Regeln für die Differentiation nach einem Vektor:

$$\frac{dh}{d\bar{a}} = \bar{X}^T * \bar{X} * \bar{a} + (\bar{a}^T * \bar{X}^T * \bar{X})^T = 2\bar{X}^T * \bar{X} * \bar{a}$$

zurück zur eigentlichen Bestimmung von $\bar{a}$

$$f = \bar{a}^T * \bar{X}^T * \bar{X} * \bar{a} - 2\bar{a}^T * \bar{X}^T * \bar{y}_m + \bar{y}_m^T * \bar{y}_m$$

$$\frac{df}{d\bar{a}} = 2\bar{X}^T * \bar{X} * \bar{a} - 2\bar{X}^T * \bar{y}_m = 0$$

$$\bar{X}^T * \bar{X} * \bar{a} = \bar{X}^T * \bar{y}_m$$

Vergleicht man obere Gleichung mit

$$\bar{M} * \bar{a} = \bar{m}$$

ist noch die Matrix

$$\bar{M} = \bar{X}^T * \bar{X}$$

und der Vektor

$$\bar{m} = \bar{X}^T * \bar{y}_m$$

zu bestimmen. Mit

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{Y}_m = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$$

ergibt sich:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & \dots & \dots & \dots & x_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m 1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \dots \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_i^n & \dots & \dots & \dots & \sum x_i^{2n} \end{pmatrix}$$

und

$$\bar{m} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_m^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & \dots & \dots & \dots & x_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ \sum y_i x_i^3 \\ \dots \\ \sum y_i x_i^n \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung lineare Regression:

Die Koeffizienten des Polynoms

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

werden mit Hilfe des Gleichungssystems $(n+1)$. Ordnung

$$\bar{M} * \bar{a} = \bar{m}$$

bestimmt mit den Werten für $\bar{M}$ und $\bar{m}$:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \bar{m} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ \sum y_i x_i^3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum y_i x_i^n \end{pmatrix}$$

$$M_{jk} = \sum_{i=1}^m x_i^{j+k-2}$$

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m 1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \dots \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum x_i^n & \dots & \dots & \dots & \sum x_i^{2n} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.14.4 a und 6.14.5 a rechnen

6.14.5. Vergleich der Anpassungsverfahren

Fehler Anpassung

$y = \sin(x)$

$x = 0.. \pi$

Anzahl Meßwerte	Verfahren	max Fehler	Anzahl Parameter
m = 5	lineare Interpolation	$70 \cdot 10^{-3}$	8
m = 5	y' stetig	$3 \cdot 3 \cdot 10^{-3}$	12
m = 5	y'' stetig	$1.1 \cdot 10^{-3}$	20
m = 11	lineare Interpolation	$1.2 \cdot 10^{-3}$	20
m = 11	y' stetig	$2 \cdot 10^{-3}$	30
m = 3	y'' stetig	$20 \cdot 10^{-3}$	8
m = 4	y'' stetig	$4 \cdot 10^{-3}$	12
m = 5	y'' stetig	$1.1 \cdot 10^{-3}$	16
m = 6	y'' stetig	$0.45 \cdot 10^{-3}$	20
m = 4	n = 3 Regression	$45 \cdot 10^{-3}$	4
m = 5	n = 3 Regression	$40 \cdot 10^{-3}$	4
m = 10	n = 3 Regression	$30 \cdot 10^{-3}$	4
m = 11	n = 4 Regression	$0.5 \cdot 10^{-3}$	5
m = 11	n = 5 Regression	$0.8 \cdot 10^{-3}$	6
m = 21	n = 6 Regression	$0.012 \cdot 10^{-3}$	7

7. Integralrechnung

7.1. Einführung

Integralrechnung: Was ist das?

salopp: Die Umkehrung der Differentialrechnung.

Zur Infinitesimalrechnung (das Rechnen mit kleinen Größen) gehören die Differentialrechnung und die Integralrechnung. Die Differentialrechnung befaßt sich (salopp ausgedrückt) mit der Steigung der Tangente. Diese erhielt man durch Grenzübergang der Sekanten zur Tangente. Die Differentialrechnung wurde parallel von Newton und Leibniz um 1700 entwickelt. Die Integralrechnung entstand im Anschluß an die Differentialrechnung und wurde im wesentlichen von Leibniz und den Gebrüdern Bernoulli entwickelt. Standardproblem der I-Rechnung ist die Flächenberechnung.

Differentialrechnung	-	Steigungsberechnung	$\Delta \rightarrow d$
Integralrechnung	-	Aufsummierung von infinitesimal kleinen Größen	$\sum \rightarrow \int$

In der Einführung zur Differentialrechnung wurde aus dem zurückgelegtem Weg die Geschwindigkeit berechnet. Jetzt soll versucht werden, aus einem gegebenen Geschwindigkeitsverlauf den zurückgelegten Weg zu berechnen, siehe Bild MA71A.

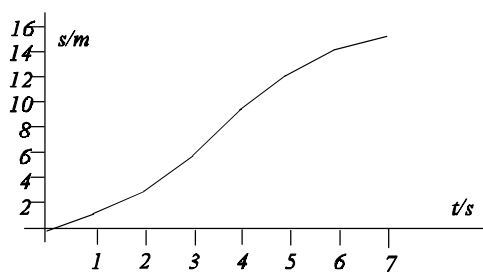
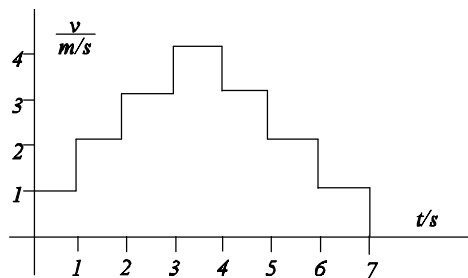


Bild MA71A

Den Weg erhält man durch Aufsummieren des Produktes aus Geschwindigkeit v und kleiner Zeitspanne Δt :

$$s = \sum v \cdot \Delta t$$

Übergang von Summe zu Integral und von kleiner endlicher Zeitspanne zu infinitesimal kleiner Zeitspanne ergibt:

$$\sum \rightarrow \int \quad \Delta \rightarrow d$$

$$s(t) = \int v(t) \cdot dt$$

Für die Flächenberechnung soll der Zusammenhang noch genauer untersucht werden.

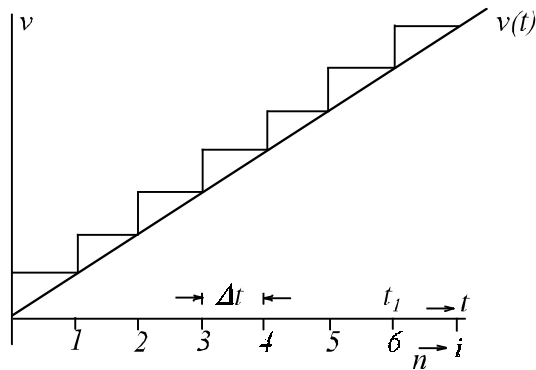
Einfaches Beispiel:gegeben: $v(t) = a \cdot t$ gesucht: $s(t)$ hier $n = 6$

Bild MA71B

$$s(\Delta t \cdot n) = s(\Delta t \cdot 6) = \sum_{i=1}^{n=6} v(i \cdot \Delta t) \Delta t$$

$$v(i \cdot \Delta t) = a \cdot i \cdot \Delta t \quad \Delta t = \frac{t}{6} = \frac{t}{n}$$

$$s(t) = \sum_{i=1}^n a \cdot i \cdot \Delta t \cdot \Delta t$$

$$s(t) = a \cdot \frac{t^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i$$

Kap. 8.7: $\sum_{i=1}^n i = \frac{(n+1)n}{2}$

$$s(t) = a \cdot \frac{t^2}{n^2} \cdot \frac{(n+1) \cdot n}{2} = a \cdot t^2 \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

$$s(t) = a \cdot \frac{1}{2} t^2$$

Probe: $\frac{ds}{dt} = a \cdot t = v(t)$

=> Integralrechnung ist Umkehrung der Differentialrechnung

Differentialrechnung: $s(t) = \frac{1}{2} a t^2 \quad \rightarrow \quad v = \frac{ds}{dt} = a \cdot t$

Integralrechnung: $v = a \cdot t \quad \rightarrow \quad s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$

7.2. Das unbestimmte Integral

Nach den Vorbetrachtungen nun zum eigentlichen wichtigsten Teilpunkt der I.-Rechnung: aus einer gegebenen Funktion $f(x)$ die Stammfunktion $F(x)$ zu bestimmen.

Die I.-Rechnung ist die Umkehrung der Differentialrechnung:

Differentialrechnung: $f(x) \rightarrow f'(x)$

Umkehrung: $f'(x) \rightarrow f(x)$

Jetzt ist die Bezeichnung hier aber etwas anderes. Gegeben ist $f(x)$ und gesucht ist die Stammfunktion $F(x)$

$f(x)$ = Integrand, zu integrierende Funktion

$F(x)$ = Stammfunktion

x = Integrationsvariable

$$F'(x) = f(x) \quad \frac{dF}{dx} = f(x) \quad dF = f(x)dx \quad \int dF = F = \int f(x)dx$$

Beispiel: Erst $F(x)$ ausfüllen im ersten Teil der Tabelle $F(x) \rightarrow f(x)$

Ableitung	Stammfunktion	Weitere Stammfunktion
$f(x)$	$F(x)$	$F_2(x)$
e^x	e^x	$e^x + 7$
$2x$	x^2	$x^2 + 4$
$3x^2$	x^3	$x^3 - 8$
$1/x$	$\ln(x)$	$\ln(x) - \ln(5) = \ln(x/5)$
$a \cdot \cos(ax)$	$\sin(ax)$	$\sin(ax) + 25$
x^5	$1/6x^6$	$1/6x^6 + 7$
e^{ax}	$1/ae^{ax}$	$1/ae^{ax} + 9$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$-\cos(x) + 5$
3	$3x$	$3x - 4$
x	$1/2x^2$	$1/2x^2 - 5$

Im zweiten Teil der Tabelle soll erst die Ableitung eingetragen werden und erst dann wird eine Stammfunktion gesucht.

Zur Erinnerung an die Differentialrechnung: Die Ableitung einer Konstanten ($da/dx = 0$) ergab Null. D.h. wenn man zur Stammfunktion eine Konstante addiert ist, auch die Bedingung zur Integration auch erfüllt: $F'(x) = f(x)$ oder $F(x)$ ist die Stammfunktion von $f(x)$. Nachtrag in obere Tabelle der konstanten im unteren Teil.

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

$F(x)$ - beliebige Stammfunktion

Zusammenfassung unbestimmtes Integral

Umkehrung Differentialrechnung

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

$$\frac{d}{dx} \int f(x)dx =$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$d\int$ beide Zeichen heben sich auf

$F(x)$	-	Stammfunktion
$f(x)$	-	Integral, zu integrierende Funktion
x	-	Integrationsvariable
c	-	Integrationskonstante (beliebig reell)

Berechnungsmethoden zur Ermittlung der Stammfunktion werden später im Kap. 7.5 und speziell in Kap. 7.7 vorgestellt.

Studenten: Aufgabe 7.2.1.

7.3. Das bestimmte Integral

Im letzten Kapitel wurde die Stammfunktion $\int f(x)dx = F(x)$ erklärt. In diesem Kapitel soll der Zusammenhang zwischen Stammfunktion und integraler Größe erklärt werden:

- Was sagt das Integral physikalisch und mathematisch aus?
- Das Integral von Potenzfunktionen wird durch Summenbildung und Grenzübergang untersucht.
- Die Rechenregeln werden erläutert, die im nächsten Kapitel 7.4 noch einmal explizit in Kurzform zusammenfaßt werden.

7.3.1. Bedeutung des bestimmten Integrals

Manchen von Ihnen ist bestimmt die Flächenberechnung unter der Kurve $y = f(x)$ aus der Schule bekannt, die mit Hilfe der Integralrechnung durchgeführt wird. Auch das Einführungs Beispiel mit Geschwindigkeit und zurückgelegtem Weg lässt sich auf eine Flächenberechnung zurückführen: Der zurückgelegte Weg entspricht der Fläche unter der $v = f(t)$ -kurve.

Die Flächenberechnung mit Hilfe der Integralberechnung ergibt Flächen, die wie im Bild MA731A begrenzt werden (Beweis weiter unten):

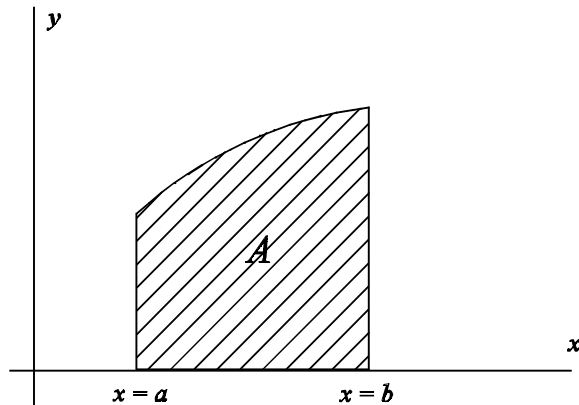


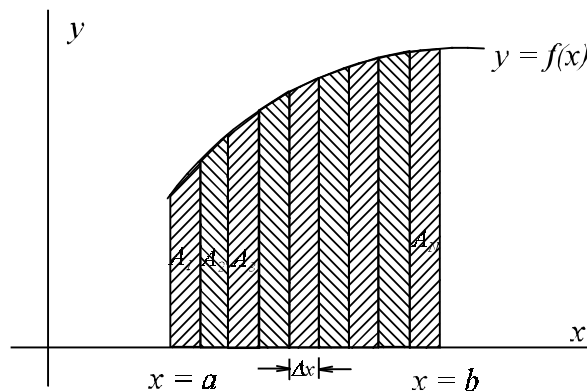
Bild MA731A

Vereinbarung: $f(x) > 0$

Begrenzung: in y-Richtung: $y = 0$ $y = f(x)$
in x-Richtung: $x = a$ $x = b$

In den nächsten Abschnitten soll langsam erarbeitet werden, wie diese Flächen zu berechnen sind. Dabei sind die Beweise erst etwas komplizierter. Ähnlich wie bei der Differentialrechnung, die Herleitung von Differenzen- und Differentialquotient, wird die Integralrechnung durch den Grenzübergang von endlichen Größen zu infinitesimal kleinen Größen erläutert.

Beweis: Die erwähnte Fläche aus Bild MA731A kann in viele Teilflächen aufgeteilt werden, siehe Bild MA731B.



Die Gesamtfläche A ergibt sich durch Aufsummierung der Einzelflächen:

Bild MA731B

$$A = \sum_{i=1}^n A_i \quad A_i = f(x) \cdot \Delta x$$

$$A = \sum_{i=1}^n f(x) \cdot \Delta x \quad \Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Der Grenzübergang $\int \rightarrow \Delta x \rightarrow dx$ ergibt

$$A = \int f(x) dx$$

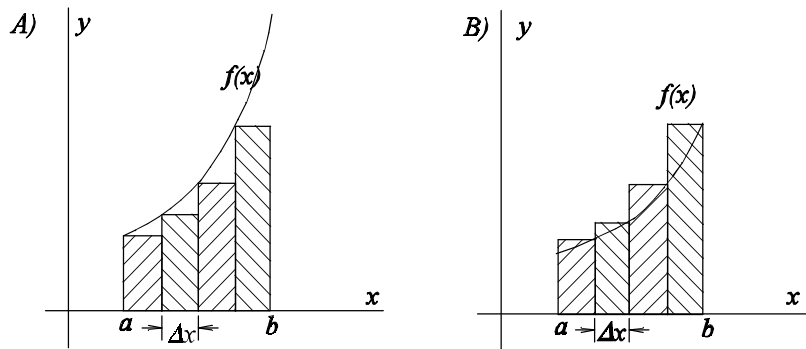
7.3.2. Integral durch Summenbildung

Bild MA732A

Bildung von

- A) Untersumme S_u
- B) Obersumme S_o

$$S_o > A > S_u$$

Zerlegen in n -Abschnitte

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

$i = 0, 1, 2, \dots, n$ -Funktionswerte

$$y_i = f(a + \Delta x \cdot i) = f(i)$$

$$S_o = \sum_{i=1}^n f(i) \cdot \Delta x \quad \text{Obersumme}$$

$$S_u = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) \cdot \Delta x \quad \text{Untersumme}$$

Hier gilt: $\Delta x = \text{const} = \frac{b - a}{n}$

$$S_o = \Delta x \sum_{i=1}^n f(a + \Delta x \cdot i) \quad S_u = \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} f(a + \Delta x \cdot i)$$

Durch den Übergang von endlichen zu infinitesimal kleinen Größen ($\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$) ergibt sich der Übergang von der Summenbildung zur Integralbildung.

$$A = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} (S_u) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} (S_o)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{b - a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b - a}{n} i\right) \right] \quad \text{Untersumme}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{b - a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b - a}{n} i\right) \right] \quad \text{Obersumme}$$

Diese zwei oberen Formeln können grundsätzlich auf alle Funktionen angewendet werden. Im nächsten Abschnitt sollen die bestimmten Integrale von den Potenzfunktionen untersucht werden, um bestimmte Erkenntnisse zu erhalten. Das Integral $\int x^n dx$ ist zu berechnen. Die Grenzwertbildung ist schon im Kap. 7.1 (Einführung in die Integralrechnung) angewandt worden.

7.3.3. Bestimmte Integrale der Potenzfunktionen

In diesem Abschnitt wird die Fläche unter der Funktion $y = x^m$ berechnet und dabei bestimmte Rechenregeln abgeleitet, die in 7.4. noch einmal zusammengefaßt werden. Dabei sollen die Fälle $m = 0, 1, 2$ und m allgemein betrachtet werden.

Beispiel 1: $y = f(x) = c = c \cdot x^0$

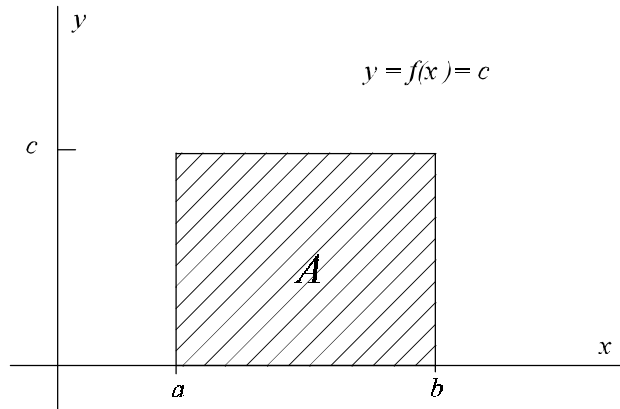


Bild MA733A

Für $m = 0$ braucht die Integralrechnung nicht bemüht zu werden. Aus Bild MA733A ergibt sich die Fläche für $f(x) = x^0$:

$$A = c \cdot (b - a)$$

Beispiel 2: $y = f(x) = x$

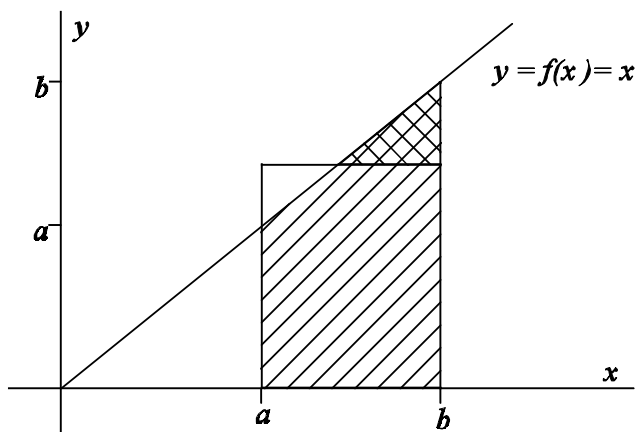


Bild MA733B

Die Integration einer Geraden ist schon durch den Grenzübergang in der Einführung (Kap. 7.1.) bekannt. Die Fläche läßt sich aus Bild MA733B für $y=f(x)=x$ bestimmen:

$$A = (b - a) \cdot \frac{b + a}{2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

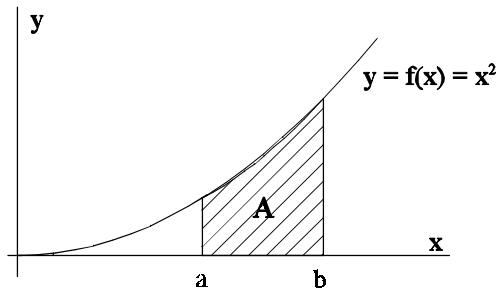
Beispiel 3: $y = f(x) = x^2$ 

Bild MA733C

Anwendung von Obersumme aus Abschnitt 7.3.2.

$$s_o = \Delta x \sum_{i=1}^n f(a + \Delta x * i)$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$S_o = \Delta x \sum_{i=1}^n (a + \Delta x * i)^2 = \Delta x \left[\sum_{i=1}^n a^2 + \sum_{i=1}^n 2a * \Delta x * i + \sum_{i=1}^n (\Delta x)^2 i^2 \right]$$

$$S_o = \Delta x a^2 \sum_{i=1}^n 1 + 2a * (\Delta x)^2 \sum_{i=1}^n i + (\Delta x)^3 \sum_{i=1}^n i^2$$

Im Vorgriff auf Kap. 8.7 (ohne Ableitung):

$$\sum_{i=1}^n 1 = n \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}(n^2 + n) \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

$$S_o = \frac{b-a}{n} a^2 * n + 2a \frac{(b-a)^2}{n^2} * \frac{1}{2} (n^2 + n) + \frac{(b-a)^3}{n^3} \frac{1}{6} (2n^3 + 3n^2 + n)$$

$$S_o = (b-a)a^2 + a(b-a)^2 \frac{n^2 + n}{n^2} + (b-a)^3 * \frac{1}{6} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n^2} = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} = 2$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_o) = (b-a)a^2 + a(b-a)^2 + \frac{1}{3}(b-a)^3 = \frac{1}{3}(b-a)[3a^2 + 3a(b-a) + (b-a)^2]$$

$$A = \frac{1}{3}(b-a)[3a^2 + 3ab - 3a^2 + b^2 - 2ab + a^2] = \frac{1}{3}(b-a)[b^2 + ab + a^2]$$

$$A = \frac{1}{3}[b^3 + ab^2 + ba^2 - ab^2 - a^2b - a^3] = \frac{1}{3}[b^3 - a^3]$$

Beispiel 4: (ohne Herleitung)

Flächen unter der Funktion $y = f(x) = x^m$

Ergebnis: $A = 1/(m+1) (b^{m+1} - a^{m+1})$

Zusammenfassung: Fläche unter den Potenzfunktionen

$y = f(x)$	A	$F(x)$
c	$c \cdot (b - a)$	cx
x	$(b^2 - a^2)/2$	$x^2/2$
x^2	$(b^3 - a^3)/3$	$x^3/3$
x^m	$(b^{m+1} - a^{m+1})/(m+1)$	$x^{m+1}/(m+1)$

Wenn die Fläche A unter der Kurve $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ und die Stammfunktion $F(x)$ in eine Tabelle einträgt, so läßt sich ein Zusammenhang zwischen Fläche A und Stammfunktion erkennen:

Die Fläche A (oder auch das bestimmte Integral) erhält man, wenn die Stammfunktion an der Stelle $F(x = b)$ von der Stammfunktion an der Stelle $F(x = a)$ subtrahiert wird.

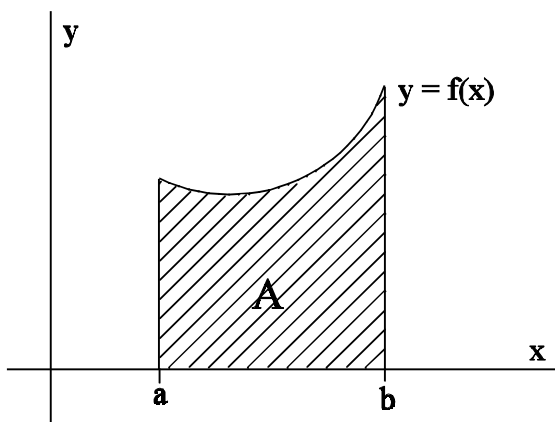


Bild MA731D

$$A = \int_{x=a}^b f(x) dx = F(x)|_{x=b} - F(x)|_{x=a} = F(b) - F(a)$$

Der Unterschied zwischen unbestimmten und bestimmten Integral ist der, daß beim unbestimmten Integral nur die Stammfunktion $F(x)$ gesucht ist. Das bestimmte Integral ist in den Integrationsgrenzen zu berechnen. Dabei wird von einer unteren (hier in den Beispielen immer a) und einer oberen (hier b) Integrationsgrenze gesprochen. Beim bestimmten Integral werden diese Grenzen unten und oben an Integralzeichen angegeben. Meist wird Variable mit "=" hinzugefügt. Die Integrations-Variable (hier x) ist diejenige, die im Integral hinter dem d (hier x) steht.

Aufgabe 7.3.1 a, b und c rechnen. Studenten d, e und f

7.3.4. Herleitung weiterer Rechenregeln

In diesem Abschnitt sollen weitere Rechenregeln herleitet werden. Im Kap. 7.4. werden alle bis dann bekannten Rechenregeln der Integralrechnung noch einmal zusammengefaßt und wiederholt.

7.3.4.1. Addition von Flächen in x-Richtung

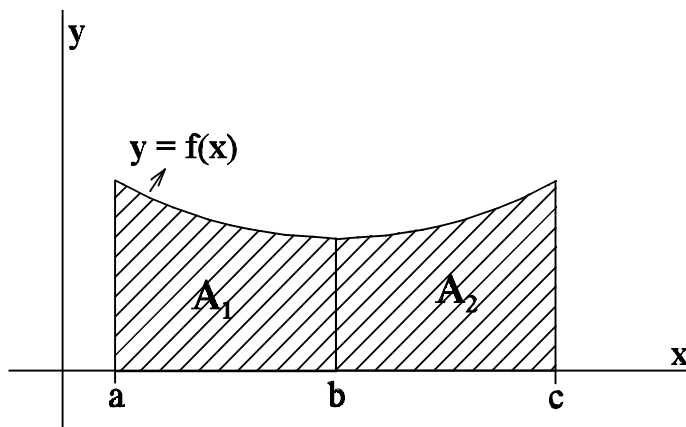


Bild MA7341A

gesucht: $A = A_1 + A_2$

$$A_1 = \int_a^b f(x) dx$$

$$A_2 = \int_b^c f(x) dx$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$A = F(c) - F(a) = F(b) - F(a) + F(c) - F(b)$$

=> Der Integrationsweg darf an jeder beliebigen Stelle unterbrochen werden.

7.3.4.2. Addition von Flächen in y-Richtung**Beispiel:** $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$$f_1(x) = 1$$

$$f_2(x) = x$$

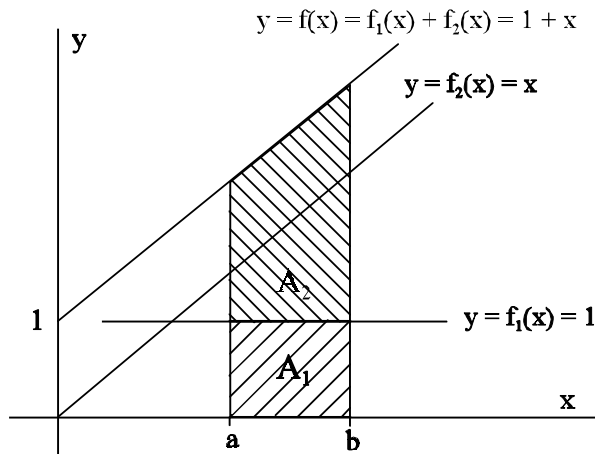


Bild MA7342A

gesucht: $A = A_1 + A_2$ $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$$A_1 = \int_{x=a}^b f_1(x) dx$$

$$A_2 = \int_{x=a}^b f_2(x) dx$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \int_{x=a}^b f(x) dx = \int_{x=a}^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_{x=a}^b f_1(x) dx + \int_{x=a}^b f_2(x) dx$$

$$\int_{x=a}^b f(x) dx = \int_{x=a}^b f_1(x) dx + \int_{x=a}^b f_2(x) dx$$

Das Integral einer Summenfunktion ist gleich der Integrale der Einzelfunktionen.

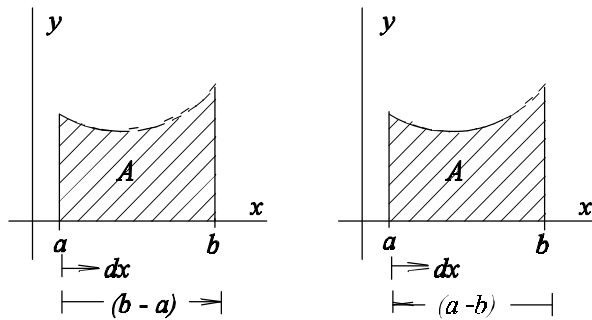
7.3.4.3. Umkehrung des Integrationsweges

Bild MA7343A

Im zweiten Fall läuft der Integrationsweg entgegen der Koordinatenrichtung und führt somit wegen positiver y -Wert zu einer negativen Fläche (Vergleich Vektorrechnung, Kreuzprodukt, Fläche gerichtete Größe)

$$\int_{x=a}^b f(x)dx = - \int_{x=b}^a f(x)dx$$

$$F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)]$$

Bei der Vertauschung der Integrationsgrenzen ändert der Wert des Integrals sein Vorzeichen.

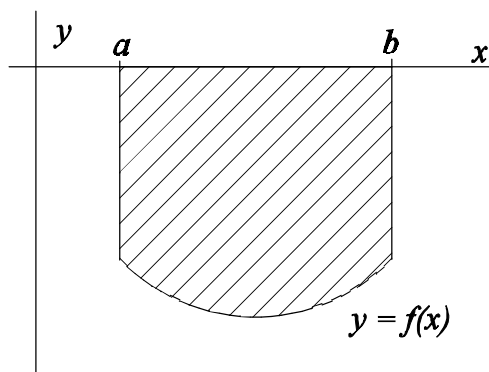
7.3.4.4. Negative Funktionswerte

Bild MA7344A

hier $\int_a^b f(x)dx < 0$

hier $A = - \int_a^b f(x)dx$

Physikalische Größen können auch negativ werden, weil die Richtung (z.B. Strom, Spannung, Geschwindigkeit) meistens willkürlich angenommen wird. Wenn aber aus nur negativen Werten ein Integral (sprich Summe) gebildet wird, dann ist auch das Ergebnis negativ.

7.4. Rechenregeln der Integralrechnung

Regel 1: Das unbestimmte Integral $\int f(x)dx = F(x)$ bestimmt man durch suchen der Stammfunktion. Für die Stammfunktion gilt:

$$dF(x)/dx = f(x)$$

Regel 2: Es gibt unendlich viele Stammfunktionen z.B. $F(x)$ und $G(x)$, die sich nur um eine additive reelle Konstante unterscheiden.

$$\int f(x)dx = F(x) + c = G(x)$$

Beweis: Bei der Differentiation nach Regel 1 fällt diese Konstante wieder weg.

Regel 3: Der Wert eines bestimmten Integrals ergibt sich aus den Differenzen der Stammfunktion an den Integrationsgrenzen:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x=b) - F(x=a) = F(b) - F(a)$$

Regel 4: Die Potenzfunktion $y = x^m$ wird dadurch integriert, daß der Exponent um 1 erhöht wird und, daß durch diesen um 1 erhöhten Exponenten dividiert wird:

$$\int x^m dx = \frac{1}{m+1} * x^{m+1} + C$$

Regel 5: Konstante Faktoren dürfen vor das Integral gezogen werden. Beweis: Der konstante Faktor bleibt beim Grenzwertübergang erhalten:

$$\int_a^b k * f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

Regel 6: Das Integral einer Summenfunktion ist gleich der Integrale der Einzelfunktionen:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

Regel 7: Man kann den Integrationsweg in beliebig viele Einzelstücke zerlegen, ohne das der Wert des bestimmten Integrals sich ändert:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Regel 8: Bei der Umkehrung des Integrationsweges wechselt das Vorzeichen des bestimmten Integrals.

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Regel 9: Falls die obere Grenze größer ist als die untere (Integration in positiver Richtung der Integrationsvariablen) ergeben positive $f(x)$ -Wert auch positive Anteile an Integral.

$$(b > a) \wedge (f(x) > 0) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0$$

zwei Rechenregeln zur Flächenberechnung:**Regel 10:** Bei echten Flächenberechnungen ist auf die Maßeinheiten zu achten. z.B.

$$[y] = [x] = 1$$

$$[v] = [u] = \text{cm}$$

$$v = m_v \cdot y \quad m_v \text{ Maßstab } v$$

$$u = m_u \cdot x \quad m_u \text{ Maßstab } u$$

$$A = \int v(u) du = \int m_v \cdot y(x) \cdot m_u dx$$

$$A = m_v \cdot m_u \int y(x) dx$$

Regel 11: Falls der Betrag der Flächen gesucht ist müssen die Nullstellen von $f(x)$ gesucht werden. Der Integrationsweg ist an Nullstellen zu unterbrechen. Die Flächen werden dann entsprechend ihrer Vorzeichen aufsummiert. Dieses ist eher eine geometrische als eine physikalische Anwendung der I.-Rechnung.

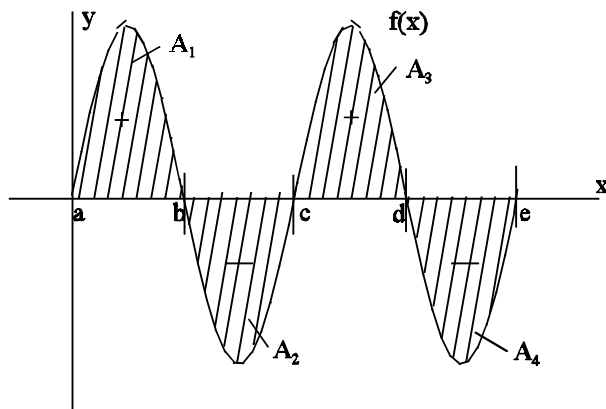
Beispiel:

Bild MA74A

1. Wert a, b, c, d, e bestimmen
2. Beträge der Integrale aufsummieren

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|$$

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx - \int_d^e f(x) dx$$

$$A = F(b) - F(a) - F(c) + F(b) + F(d) - F(c) - F(e) + F(d)$$

$$A = -F(a) + 2F(b) - 2F(c) + 2F(d) - F(e)$$

Aufgaben 7.4.1. bis 7.4.3. rechnen.

7.5. Grundintegrale

Bis jetzt ist ausführlich diskutiert worden, wie ein Integral berechnet wird, wenn die Stammfunktion einmal bekannt ist. Das Hauptproblem bei der Integralrechnung ist das Finden der Stammfunktion.

Bei der Differentialrechnung konnte zu einer jeden Funktion $f(x)$, die sich aus Grundfunktionen zusammensetzte, auch die Ableitung $f'(x)$ gefunden werden. Diese Ableitung setzt sich dann wiederum aus Grundfunktionen zusammen.

Bei der I.-Rechnung existiert zwar auch zu jeder stetigen Funktion $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$. Diese kann aber, muß aber nicht, eine Kombination von Grundfunktionen sein. Kennengelernt haben wir schon die Integrale der Potenzfunktionen. Auch von Sinus- und Kosinusfunktion kann leicht die Stammfunktion angegeben werden, siehe Tabelle 7.5.1.

Die Tabelle 7.5.1 kann auf zwei Arten ermittelt werden:

- Die Tabelle der Ableitungen von Grundfunktionen (z.B. Arbeitsblatt MA1-26 und MA1-27 wird invers ausgewertet.
- In Kap. 7.7 werden Integrations-Verfahren angegeben.

Um später mit Hilfe der Integrationsverfahren Integrale zu lösen, muß eine Liste von Grundintegralen vorhanden sein.

Nach den Vorstellen der Tabelle 7.5.1 die Aufgaben 7.5.1.a und b rechnen.

Arbeitsblatt MAII-2

1.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
2.	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$x \neq 0$
3.	$\int e^x dx = e^x + C$	
4.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C = a^x \log_a e + C$	$a > 0, a \neq 1$
5.	$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$	
6.	$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$	
7.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan(x) + C$	$x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad n \in \mathbb{G}$
8.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot(x) + C$	$x \neq n\pi \quad n \in \mathbb{G}$
9.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C = -\arccos(x) + C_1$	für $ x < 1$
10.	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C = -\operatorname{arccot}(x) + C_1$	
11.	$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$	
12.	$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$	
13.	$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh(x) + C$	
14.	$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth(x) + C$	$x \neq 0$
15.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh}(x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$	
16.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh}(x) + C = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1}) + C$	$ x > 1$
17.	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{artanh}(x) + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$	$ x < 1$
18.	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arcoth}(x) + C = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} + C$	$ x > 1$
19.	$\int \frac{dx}{x^2-1} = -\operatorname{arcoth}(x) + C = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + C$	$ x > 1$

Tabelle 7.5.1: Grundintegrale

Hinweis: Die Positionen 1, 2, 3, 5, 6, 11 und 12 sollen auswendig ohne weiteres Nachdenken parat sein.

7.6. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung läßt sich auf zwei Arten ableiten:

- mathematisch über Grenzwerte
- grafisch über mittlere Flächen

a) mathematischen Ableitung

Laut Kap. 6.11.4 ist der Mittelwert einer Reihe von Meßwerten:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$S_o = \sum_{i=1}^n y_i * \Delta x = \sum_{i=1}^n y_i \frac{b-a}{n}$$

Obersumme laut Kap. 7.3.2

$$S_o = (b-a) * \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right] = (b-a) * \bar{y}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_o) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) * \bar{y}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_{x=a}^b f(x) dx$$

Diese Aussage bedeutet das die Fläche unter der Kurve $y = f(x)$ durch die Breite $(b-a)$ dividiert werden muß, um den Mittelwert zu erhalten.

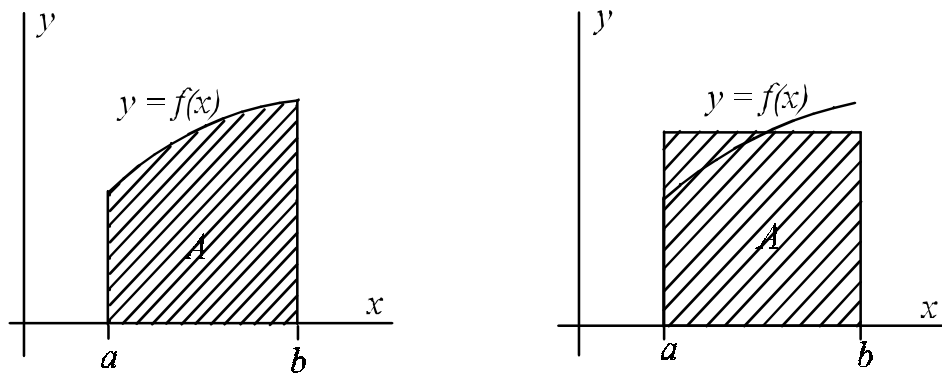
b) Geometrische Deutung

Bild MA76A

Geometrische bedeutet der Mittelwert, daß die Fläche unter der Kurve repräsentiert wird durch ein Rechteck mit den Seitenlänge $\bar{y}$ und $(b-a)$.

$$A = \bar{y} \cdot (b - a) \quad \text{- Rechteck}$$

$$A = \int_{x=a}^b f(x) dx \quad \text{- Fläche unter der Funktionskurve}$$

$$A = A$$

$$\int_{x=a}^b f(x) dx = \bar{y} \cdot (b - a)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

Aufgabe 7.6.1 f rechnen

7.7. Integrationsverfahren

Bislang sind die Grundlagen der I.-Rechnung vorgestellt worden. Flächen und Mittelwerte von Standardfunktion wurden berechnet. Was aber ist bei Integralen der folgenden Form:

$$\int \sin^2(x) dx$$

$$\int \sqrt{1-x} dx$$

$$\int x^2 \cdot \sin(x) dx$$

$$\int \tan(x) dx$$

$$\int \frac{dx}{(x+5)(x-3)}$$

In diesem Abschnitt 7.7. sollen Verfahren vorgestellt werden, um obige Integrale zu lösen.

Nochmals wiederholt: Die Differentiation aus einer Kombination von Elementarfunktionen ergab wieder als Ergebnis eine Kombination von Standardfunktionen. Bei der Integration ist dieses anders. Zwar existiert für jede stetige Funktion eine Stammfunktion, diese muß aber keine bekannte Standardfunktion sein.

In den nächsten drei Abschnitten werden folgende drei Verfahren zum Lösen von Integralen vorgestellt:

- Integration durch Substitution
- Produktintegration
- Partialbruchzerlegung

Allen diesen Verfahren gemeinsam ist, daß durch Umformung das Integral auf ein Grundintegral zurückgeführt wird.

Für alle diese Verfahren muß man ein Feeling gewinnen. Konkrete Regeln als bei der Differentialrechnung gibt es hier nicht, bis auf bei der Partialbruchzerlegung. Bei all diesen Verfahren wird eine kurze theoretische Einführung gegeben. Vorstellen kann man sich diese Verfahren am besten durch Anwendung. Darum werden hier viele Übungsbeispiele im Rahmen der Vorlesung vorgestellt. Wichtig ist, daß Sie die verbleibenden Beispiele selbst rechnen. Dadurch bekommen man Gespür für das Lösen von Integralen.

7.7.1. Substitutionsverfahren**7.7.1.1. Theorie**

Dieses Verfahren gilt allgemein als Umkehrung der Kettenregel

$$F(x) = \int f[g(x)]dx$$

Der Integrand ist also eine Funktion eines Ausdrucks in $g(x)$. Jetzt wird $g(x)$ ersetzt durch u .

$$g(x) = u$$

$$F(u) = \int f(u) dx$$

Jetzt muß noch dx ersetzt (substituiert) werden:

$$g(x) = u \quad \Rightarrow \quad g'(x)dx = du$$

$$dx = \frac{du}{g'(x)}$$

Wenn $g'(x)$ kein einfacher Ausdruck (Konstante) ist, muß die Variable x noch durch u ersetzt werden. Dazu muß die Umkehrfunktion von $g(x)$ gebildet werden, d.h. $g(x) = u$ muß nach $x = h(u)$ aufgelöst werden:

$$g(x) = u \quad \Rightarrow \quad x = h(u)$$

Somit ergibt sich das Integral

$$F(u) = \int \frac{f(u)}{g'[h(u)]} du$$

Zum Schluß muß noch u ersetzt (zurücksubstituiert) werden.

$$F(x) = F[g(x)]$$

Diese Umformung hat nur Sinn, wenn sich das Integral dadurch vereinfacht. Mit Hilfe der theoretischen Ableitung ist dieses Verfahren wenig einsichtig. Praktische Erfahrungen mit dem Substitutionsverfahren sind sehr wichtig. Darum soll die komplette Aufgabe 7.7.1 hier in der Vorlesung vorgerechnet werden.

7.7.1.2. Beispiele**Aufgabe 7.7.1. a)**

$$F(x) = \int (3x + 4)^5 dx$$

$$\text{Substitution:} \quad 3x + 4 = u \quad 3dx = du \quad dx = \frac{du}{3}$$

$$F(u) = \int u^5 \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^5 du$$

Das Problem ist auf ein Grundintegral zurückgeführt. Dieses ist allen Verfahren gemeinsam: durch Umformung auf ein oder mehrere Grundintegral zurückführen.

$$F(u) = \frac{1}{18} u^6 + C$$

Zurücksubstituieren:

$$F(u) = \frac{1}{18} (3x + 4)^6 + C$$

Wie kann bei einem berechneten unbestimmten Integral leicht die Probe gemacht werden? Antwort: durch Differenzieren:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{6}{18} (3x + 4)^5 \cdot 3 = (3x + 4)^5 \quad \Rightarrow \text{ok}$$

Aufgabe 7.7.1. b)

$$F(x) = \int \cos(ax) dx$$

Hier gibt es jetzt zwei Methoden oberes Integral zu lösen. Einmal durch Substitution und einmal durch genaues Hinsehen. Eine solche Funktion zu integrieren ist für einen E-Techniker später eine reine Formsache. Man merkt, weil sie wichtig sind, sich diese Rechenregeln. Aber erstmal soll die Substitution angewendet werden.

$$a \cdot x = u \quad a \cdot dx = du \quad dx = \frac{1}{a} du$$

$$F(u) = \frac{1}{a} \int \cos(u) du = \frac{1}{a} \sin(u) + C$$

$$F(u) = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$$

Dieses Ergebnis läßt sich auch so interpretieren: Man weiß, was das Integral $\int \cos(x) dx = \sin(x)$ ergibt, weil $\sin(x)$ abgeleitet $\cos(x)$ ergibt. Die Ableitung der Stammfunktion ergibt ja bekanntlich den Integranden: $dF(x)/dx = f(x)$. Aber was ergibt abgeleitet $\cos(ax)$? $\sin(ax)$ abgeleitet ergibt $a \cdot \cos(ax)$. Also ergibt $\sin(ax)/a$ abgeleitet $\cos(ax)$ $\Rightarrow F(x) = \sin(ax)/a$. Bei all solchen Funktion wo eine Standard-Funktion anstelle von $f(x)$ eine Funktion von ax ist, muß wegen der Differentiation (Kettenregel) mit $1/a$ multipliziert werden.

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax)$$

Aufgabe 7.7.1. c) Standardproblem wie eben (Wiederholung)

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} \int f(ax) d(ax) = \frac{1}{a} F(ax) + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

Aufgabe 7.7.1. d)

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Das obere Integral ist zwar schon ein Standardintegral, siehe Tabelle 7.5.1. Bei dieser Form wäre einem nicht sofort das Standardintegral eingefallen. Es soll hier das Prinzip erläutert werden, wann man was substituiert.

Frage: Wann hebt sich die Wurzel $\sqrt{1-x^2}$ auf? Welche Standardfunktion muß für x substituiert werden, damit die Wurzel sich aufhebt?

$$\begin{aligned} x &= \sin(u) & \sqrt{1-x^2} &= \sqrt{1-\sin^2(u)} = \cos(u) \\ dx &= \cos(u) du \end{aligned}$$

$$F(u) = \int \frac{\cos(u) du}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} = \int \frac{\cos(u)}{\cos(u)} du = \int du = u + C$$

$$F(x) = \arcsin(x) + C$$

Jetzt gibt es aber als Standardintegral auch eine zweite Lösung. Dieses erhält man wenn wie folgt substituiert:

$$\begin{aligned} x &= \cos(u) \\ dx &= -\sin(u) du \\ F(u) &= \int \frac{-\sin(u) du}{\sqrt{1-\cos^2(u)}} = -\int du = -u + C_1 \end{aligned}$$

$$F(x) = -\arccos(x) + C_1$$

Beide Lösungen sind richtig, weil gilt (siehe Kap. 2.3.3 und Arbeitsblatt MAI-11):

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

Aufgabe 7.7.1. e)

$$F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

hier würde man vielleicht auch wieder $x = \cos(u)$ setzen. Das würde aber keinen Erfolg bringen, weil im Zähler das x vorhanden ist. Erstmal soll substituiert und dann diskutiert werden warum.

$$1 - x^2 = u$$

$$-2x dx = du$$

$$x dx = -0.5 du$$

$$F(u) = \int \frac{1}{\sqrt{u}} (-0.5 du) = -0.5 \int u^{-0.5} du$$

$$F(u) = -0.5 \frac{1}{0.5} u^{0.5} = -\sqrt{u} + C$$

$$F(x) = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Welcher Sonderfall ist beim letzten Integral vorhanden? Im Zähler steht die Ableitung von einem Term im Nenner, oder allgemein ausgedrückt.

allgemein: $F(x) = \int [v(x)]^m \cdot v'(x) dx$

Substitution: $u = v(x)$

$$du = v'(x) dx$$

$$F(u) = \int u^m du = \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C \quad m \neq -1$$

$$F(x) = \frac{1}{m+1} [v(x)]^{m+1} + C \quad m \neq -1$$

$$F(u) = \int \frac{du}{u} = \ln(u) + C \quad m = -1$$

$$F(x) = \ln[v(x)] + C \quad m = -1$$

noch allgemeiner: $F(x) = \int f(x) dx = \int g[v(x)] \cdot v'(x) dx$

$$u = v(x) \quad du = v'(x) dx$$

$$F(u) = \int g(u) du$$

Aufgabe 7.7.1. f

$$F(x) = \int \sin^3(x) \cdot \cos(x) dx$$

Oberes Integral hat wieder die Form: $\int v^3(x) v'(x) dx$

Mit Hilfe der oberen Formel aus Aufgabenpunkt e lässt sich sofort angeben:

$$F(x) = \frac{1}{4} \sin^4(x) + C$$

Besser ist diese Aufgabe durch Substitution zu lösen, weil man Formeln schlechter behalten kann als Verfahren. Man muß nur wissen, daß wenn der Integrand sich beschreiben läßt als Ableitung multipliziert mit einer Funktion der zur Ableitung zugehörigen Stammfunktion, daß dann die Stammfunktion substituiert werden muß.

$$u = \sin(x)$$

$$du = \cos(x) dx$$

$$F(u) = \int u^3 \cdot dv = \frac{1}{4} u^4 + C$$

$$F(x) = \frac{1}{4} \sin^4(x) + C$$

Aufgabe 7.7.1. g

$$F(x) = \int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

$$u = \ln(x)$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$F(u) = \int u du = \frac{u^2}{2} + C$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln^2(x) + C$$

Aufgabe 7.7.1. h

$$F(x) = \int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$$

$$u = \cos(x)$$

$$du = -\sin(x) dx$$

$$F(u) = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$$

$$F(x) = -\ln|\cos(x)| + C$$

Die nächsten vier Unterpunkte sind fast Grundintegrale. Hier soll aber das Prinzip erkannt werden.

Aufgabe 7.7.1.i

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Substitution:

$$x = a \cdot \sin(u) \quad \text{oder} \quad x = a \cdot \cos(u)$$

hier

$$x = a \cdot \sin(u)$$

$$dx = a \cdot \cos(u) du$$

$$F(u) = \int \frac{a \cdot \cos(u) du}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(u)}} = \int du = u + C$$

$$F(x) = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Aufgabe 7.7.1.j

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\cosh^2(u) = 1 + \sinh^2(u) \quad \sinh^2(u) = \cosh^2(u) - 1$$

$$x = a \cdot \cosh(u)$$

$$dx = a \cdot \sinh(u) du$$

$$F(u) = \int \frac{a \cdot \sinh(u) du}{\sqrt{a^2 \cosh^2(u) - a^2}} = \int du = u + C$$

$$F(x) = \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Aufgabe 7.7.1. k

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$x = a \cdot \sinh(u)$$

$$dx = a \cdot \cosh(u) du$$

$$F(u) = \int \frac{a \cdot \cosh(u) du}{\sqrt{a^2 \sinh^2(u) + a^2}} = \int du = u + C$$

$$F(x) = \operatorname{arsinh}(x/a) + C$$

Aufgabe 7.7.1. l

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$$

$$x = a \cdot \tan(u) = a \frac{\sin(u)}{\cos(u)}$$

$$dx = \frac{a}{\cos^2(u)} du$$

$$F(u) = \int a \frac{1}{\cos^2(u)} \cdot \frac{1}{a^2 \frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)} + a^2} du$$

$$F(u) = \frac{1}{a} \int \frac{du}{\cos^2(u) + \sin^2(u)}$$

$$F(u) = \frac{1}{a} \int du = \frac{1}{a} u + C$$

$$F(x) = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Aufgabe 7.7.1. m

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}} dx$$

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2 + 9}} dx$$

$$u = x - 2$$

$$du = dx$$

$$F(u) = \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + 3^2}} du$$

=> bekannt aus Aufgabe 7.7.1 k

$$F(u) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{u}{3}\right) + C$$

$$F(x) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{x-2}{3}\right) + C$$

7.7.1.3. Zusammenfassung Substitution

Allgemeine Regeln können nicht gegeben werden, aber Hinweise. Wir haben kennengelernt:

		Beispiele
einfache Substitutionen:	$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(a)$	7.7.1 a, b, c
$\int f[v(x)] v'(x)dx = \int f(u)du$	$u = v(x)$	7.7.1 e, f, g, h
$\int x^{2n+1} f(x^2 \pm a^2)dx$	$u = x^2 \pm a^2$	7.7.1 e
$\int x^{2n} f(x^2 + a^2)dx$	$x = a \cdot \tan(u)$	7.7.1 l
$\int x^{2n} f(x^2 - a^2) dx$	$x = a \cdot \tanh(u)$	
$\int x^{2n} \sqrt{x^2 + a^2} dx$	$x = a \cdot \sinh(u)$	7.7.1 k
$\int x^{2n} \sqrt{a^2 - x^2} dx$	$x = a \cdot \sin(u)$	7.7.1 d, i
$\int x^{2n} \sqrt{x^2 - a^2} dx$	$x = a \cdot \cosh(u)$	7.7.1 j
$\int f(x^2 + a_1 x + a_0)dx$	Quadratische Ergänzung	7.7.1 m

Hinweise für den Gebrauch der oberen Tabelle:

- A] Einfache Substitutionen:** Wird das x in einem bekannten Integral nur mit a multipliziert, so muß die Stammfunktion durch a dividiert werden, siehe Aufgabe 7.7.1 a, b und c.
- B] Ableitung als Multiplikant:** Läßt sich der Integral als Produkt aus einer Funktion $f[v(x)]$ und der Ableitung $v'(x)$ beschreiben, so muß $v(x) = u$ substituiert werden, siehe Aufgabe 7.7.1 e, f, g und h.
- C]** Läßt sich der Integral beschreiben aus dem Produkt einer Funktion $f(x^2 \pm a^2)$ und einer Potenzfunktion von x^{2n+1} mit ungeraden Exponenten muß $u = x^2 \pm a^2$ substituiert werden, siehe Aufgabe 7.7.1 e. Dazu ein Beispiel:

$$F(x) = \int x^3 \sqrt{1 - x^2} dx = \int x^2 \sqrt{1 - x^2} x dx$$

Weil der Exponent "3" ungerade ist, wird substituiert:

$$1 - x^2 = u \quad x^2 = 1 - u \quad 2x dx = -du \quad x dx = -\frac{1}{2} du$$

$$F(u) = \int (1 - u) \sqrt{u} \left(-\frac{1}{2} du\right) = -\frac{1}{2} \int (u^{3/2} - u^{1/2}) du$$

$$F(u) = -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{5/2} u^{5/2} - \frac{2}{3/2} u^{3/2} \right] + C$$

$$F(x) = -\frac{1}{5} \sqrt{1 - x^2}^5 + \frac{1}{3} \sqrt{1 - x^2}^3 + C$$

- D]** Läßt sich der Integrand beschreiben aus dem Produkt einer Funktion $f(x \pm a^2)$ und einer geraden Potenzfunktion von x^{2n} , muß je nach Vorzeichen mit trigonometrischen oder Hyperbelfunktion substituiert werden. Dazu ein Beispiel:

$$F(x) = \int x^4 \sqrt{1 - x^2} dx$$

Weil der Exponent "4" gerade ist, ergibt sich aus Tabelle die Substitution:

$$x = \sin(u) \quad dx = \cos(u)du$$

$$F(u) = \int \sin^4(u) \cdot \sqrt{1 - \sin^2(u)} \cos(u) du$$

$$F(u) = \int \sin^4(u) \cos^2(u) du = \int \sin^4(u) [1 - \sin^2(u)] du$$

$$F(u) = \int \sin^4(u) du - \int \sin^6(u) du$$

Die oberen Integrale lassen sich erst mit Methoden aus Kap. 7.7.2 lösen.

dringende Empfehlung:

Aufgabe 7.7.2 und 7.7.3 selbst rechnen

7.7.2. Produktintegration

7.7.2.1. Theorie

Die Theorie zur Produktintegration, oder auch partielle Integration genannt, ist etwas komplizierter, dafür ist die Anwendung etwas leichter. Die Regeln sind leicht in Worte zu fassen.

Die Produktintegration, oder auch partielle Integration, ist die Umkehrung der Produktregel der Differentialrechnung.

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2)' &= f_1' * f_2 + f_1 * f_2' \\ \int (f_1 * f_2)' dx &= \int f_1' * f_2 dx + \int f_1 * f_2' dx \\ \int (f_1 * f_2)' dx &= f_1 * f_2 \\ f_1 * f_2 &= \int f_1' * f_2 dx + \int f_1 * f_2' dx \\ \int f_1 * f_2' dx &= f_1 * f_2 - \int f_1' * f_2 dx \end{aligned}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int f_1(x) * f_2'(x) dx \\ \int f(x) dx &= \int f_1 * f_2' dx = f_1 * f_2 - \int f_1' * f_2 dx \end{aligned}$$

Was kann man aus dieser Formel ablesen?

- Wichtig ist die Aufspaltung von $f(x)$ in das Produkt $f_1 * f_2'$?
- Wenn sich die Funktion $f(x)$ durch in Produkt aufspalten läßt $f_1(x) * f_2'(x)$, so muß als erste Voraussetzung die Funktion $f_2'(x)$ ein bekanntes Integral besitzen (meist Grundintegral aber nicht Voraussetzung, man kann auch in Tabellen nachsehen)
- Die Funktion $f_1(x)$ muß so beschaffen sein, daß die Differentiation $f_1'(x)$ einen möglichst einfacheren Ausdruck als $f_1(x)$ liefert.

Die Aufgabe 7.7.4 soll im Kap. 7.7.2.2 zum Kennenlernen erstmal vollständig durchgerechnet werden. Danach wird in Kap. 7.7.2.3 die Produktintegration zusammenfaßt.

7.7.2.2. Beispiele**Aufgabe 7.7.4. a**

$$F(x) = \int x \cdot \cos(x) \, dx$$

$$\int f_1 \cdot f_2' \, dx = f_1 \cdot f_2 - \int f_1' \cdot f_2 \, dx$$

Was soll hier nun f_1 und was f_2' gesetzt werden? Falsch wäre x zu integrieren. Dieses würde auf der rechten Seite zu einem Integral führen mit x^2 mal irgend was. Komplizierter! Also muß x gleich f_1 gesetzt werden.

$$f(x) = x \cdot \cos(x) = f_1 \cdot f_2'$$

Am besten man schreibt sich die Funktionen in der folgenden Form auf:

$$f_1 = x$$

$$f_1' = 1$$

$$f_2' = \cos(x)$$

$$f_2 = \sin(x)$$

Um danach in die Formel der Produktintegration einzusetzen:

$$\int f_1 \cdot f_2' \, dx = f_1 \cdot f_2 - \int f_1' \cdot f_2 \, dx = x \cdot \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x) \, dx$$

$$F(x) = \int x \cdot \cos(x) \, dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C$$

Aufgabe 7.7.4.b

$$F(x) = \int x^2 \cdot \sin(x) \, dx$$

$$\int f_1 \cdot f_2' \, dx = f_1 \cdot f_2 - \int f_1' \cdot f_2 \, dx$$

f_1 soll vereinfacht werden $\Rightarrow f_1 = x^2$

$$f_1 = x^2$$

$$f_1' = 2x$$

$$f_2' = \sin(x)$$

$$f_2 = -\cos(x)$$

$$F(x) = -x^2 \cdot \cos(x) + \int 2x \cdot \cos(x) \, dx$$

Hat sich das Integral vereinfacht oder nicht? Ja! Die Potenz von x , mit der die der trigonometrischen Funktion multipliziert wird, hat sich um verringert. Das rechte Integral müßte noch einmal mit der Produktintegration berechnet werden. Dieses ist aber schon im Aufgabenpunkt a) berechnet.

$$F(x) = -x^2 \cdot \cos(x) + 2 \cdot [x \cdot \sin(x) + \cos(x)] + C$$

$$F(x) = -x^2 \cdot \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) + C$$

Regel 1: Manchmal muß die partielle Integration mehrfach durchgeführt werden.

Aufgabe 7.7.4.c (Erst falsch vorrechnen)

$$F(x) = \int x^2 \cdot \ln(x) \, dx$$

$$\int f_1 \cdot f_2' \, dx = f_1 \cdot f_2 - \int f_1' \cdot f_2 \, dx$$

Nach den bisher festgestellten Regeln müßte man $f_1 = x^2$ setzen.

$$f_1 = x^2 \quad f_1' = 2x$$

$$f_2' = \ln(x) \quad f_2 = \int \ln(x) \, dx = ? \quad \text{geht nicht!}$$

Da $\int \ln(x) dx$ noch unbekannt ist erfolgt der Ansatz:

$$f_1 = \ln(x) \quad f_1' = \frac{1}{x}$$

$$f_2' = x^2 \quad f_2 = \frac{1}{3}x^3$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x^3 \, dx$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C$$

Regel 2: Falls im Integrand ein $\ln(x)$ vorhanden, muß man dieses als f_1 setzen. Weil Area-, Arcus- und ln-Funktion verwandt sind, gilt diese Regel auch für Area- und Arcus-Funktionen.

Aufgabe 7.7.4.d

$$F(x) = \int \ln(x) \cdot dx = \int \ln(x) \cdot 1 \cdot dx$$

$$f_1 = \ln(x) \quad f_1' = \frac{1}{x}$$

$$f_2' = 1 \quad f_2 = x$$

$$F(x) = x \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x \cdot dx = x \cdot \ln(x) - x + C$$

Regel 3: Manchmal ist es auch nötig, einen Faktor (hier f_2') zu eins zu setzen.

Aufgabe 7.7.4.e

$$F(x) = \int \arcsin(x) \, dx$$

$$\int f_1 \cdot f_2' \, dx = f_1 \cdot f_2 - \int f_1' \cdot f_2 \, dx$$

Von $\arcsin(x)$ ist die Ableitung bekannt, darum wird f_1 gleich $\arcsin(x)$ gesetzt. Außerdem besagt Regel 2, daß Arcus-Funktionen gleich f_1 zu setzen sind.

$$f_1 = \arcsin(x) \qquad f_1' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f_2' = 1 \qquad f_2 = x$$

$$F(x) = x \cdot \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

Der zweite Teil müßte durch Substitution berechnet werden, ist aber schon in Aufgabe 7.7.1 e berechnet worden.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\sqrt{1-x^2} + C_1$$

$$F(x) = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

Regel 4: **Manchmal müssen zum Lösen einer Integrationsaufgabe mehrere, auch verschiedene, Integrationsverfahren angewandt werden.**

Aufgabe 7.7.4.f

$$F(x) = \int \cosh^2(x) \, dx$$

$$\int f_1 \cdot f_2' \, dx = f_1 \cdot f_2 - \int f_1' \cdot f_2 \, dx$$

$$f_1 = \cosh(x) \qquad f_1' = \sinh(x)$$

$$f_2' = \cosh(x) \qquad f_2 = \sinh(x)$$

$$\int \cosh^2(x) \, dx = \sinh(x) \cdot \cosh(x) - \int \sinh^2(x) \, dx$$

$$= \sinh(x) \cdot \cosh(x) - \int (\cosh^2(x) - 1) \, dx$$

$$\int \cosh^2(x) \, dx = \sinh(x) \cdot \cosh(x) - \int \cosh^2(x) \, dx + \int 1 \, dx$$

$$2 \int \cosh^2(x) \, dx = \sinh(x) \cdot \cosh(x) + x + C_1$$

$$F(x) = \int \cosh^2(x) \, dx = \sinh(x) \cdot \cosh(x) / 2 + x / 2 + C$$

Aufgabe 7.7.4.g

$$F(x) = \int x \cdot \operatorname{arcosh}(x) dx$$

$$\int f_1' \cdot f_2 dx = f_1 \cdot f_2 - \int f_1 \cdot f_2' dx$$

Wir haben gelernt, daß wir Arcus, Area und ln Funktionen (diese sind verwandt) stets als f_1 setzen sollen.

$$f_1 = \operatorname{arcosh}(x) \quad f_1' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$f_2' = x \quad f_2 = \frac{1}{2}x^2$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arcosh}(x) - \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1}{2}x^2 dx$$

Einschub Substitution:

$$F_2(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \quad x = \cosh(u) \quad \sinh(u) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$dx = \sinh(u) du$$

$$F_2(u) = \int \frac{\cosh^2(u)}{\sqrt{\cosh^2(u) - 1}} \cdot \sinh(u) du = \int \cosh^2(u) du$$

Mit Hilfe der Aufgabe 7.7.4 f ergibt sich

$$F_2(u) = \int \cosh^2(u) du = \frac{1}{2}[\cosh(u) \cdot \sinh(u) + u]$$

$$F_2(x) = \frac{1}{2}[x \cdot \sqrt{x^2 - 1} + \operatorname{arcosh}(x)]$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arcosh}(x) - \frac{1}{2}F_2(x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \operatorname{arcosh}(x) - \frac{1}{4}x \cdot \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{4}\operatorname{arcosh}(x) + C$$

Anmerkung 1: Hier würde auch der Ansatz $f_1 = x$ zum Ziel führen.

Anmerkung 2: Siehe Regel 4.

7.7.2.3. Zusammenfassung Produktintegration

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) * f_2'(x) * dx = f_1(x) * f_2(x) - \int f_1'(x) * f_2(x) * dx$$

- Bedingung: $f(x) = f_1(x) * f_2'(x)$. Der Integrand läßt sich Aufspalten in ein Produkt zweier Funktionen.
- $f_1(x)$: Die Ableitung $f_1'(x)$ sollte ein möglichst einfacherer Ausdruck als $f_1(x)$ sein.
- Wenn $f(x) = x^n * f_{\text{rest}}(x)$
 $\Rightarrow f_1 = x^n \quad f_2' = f_{\text{rest}}(x)$
 Bedingung: $\int f_{\text{rest}} dx$ bekannt
 Anmerkung: Rekursiv n-mal durchführen
- Wenn in der zu integrierenden Funktion Logarithmus-Funktion, AREA-Funktion oder ARCUS-Funktionen als Produkt vorkommen, diese Funktion als f_1 ansetzen.
- Manchmal muß ein Teil eines Produktes zu eins gesetzt werden.
- Um manche Integrale zu berechnen, müssen die Integrationsmethoden gemischt oder die Methoden mehrmals angewandt werden. Eine weitere Methode wird im nächsten Abschnitt 7.7.3. vorgestellt. In Kap. 7.7.4 werden Aufgaben gerechnet, wo verschiedene Integrationsmethoden anzuwenden sind.

7.7.3. Partialbruchzerlegung

Im Gegensatz zu den zwei vorher beschriebenen Verfahren (Kap. 7.7.1 und 7.7.2) ist dieses durch feste Regeln gekennzeichnet, die man lernen kann. Bei den zwei anderen Methoden, Substitution und Produktintegration, muß man sich ein gewisses Feeling aneignen. In diesem Kapitel geht es um die Integration von gebrochen rationalen Funktionen (Kap. 2.2.3 erstes Semester)

$$y = \frac{b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i x^i}{\sum_{i=0}^n a_i x^i}$$

Dabei wird zwischen echt und unecht gebrochen rationalen Funktionen unterschieden:

echt gebrochen: $n > m$

unecht gebrochen: $n \leq m$

Hier soll nur die Integration von echt gebrochen rationalen Funktionen behandelt werden, aus dem 1. Semester sollte bekannt sein, daß man durch Division eine unecht gebrochen rationale Funktion in eine ganze rationale Funktion und in eine echt gebrochene Funktion aufspalten kann. Dazu nur das Beispiel 1.

Beispiel 1:

$$F(x) = \int \frac{x^3 - x^2 + 5x - 2}{x - 1} dx$$

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 + 5x - 2) : (x - 1) = x^2 + 5 + \frac{3}{x - 1} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ 0 + 5x - 2 \\ \underline{5x - 5} \\ + 3 \end{array}$$

Horner Schema

$$\begin{array}{r} 1 \quad -1 \quad 5 \quad -2 \\ 1 \quad - \quad 1 \quad 0 \quad 5 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 5 \quad 3 \end{array}$$

$$F(x) = \int (x^2 + 5) dx + \int \frac{3}{x - 1} dx$$

Die Integration von $x^2 + 5$ sollte keine Schwierigkeiten mehr bereiten.

$$F_2(x) = \int \frac{1}{x + a} dx \quad x + a = u \quad dx = du$$

$$F_2(x) = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|x + a| + C$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5x + 3 \ln|x - 1| + C$$

Dieses soll für die Integration unecht gebrochener Funktionen genügen.

Die echt gebrochene rationale Funktion

$$y = \frac{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}{x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0} \quad a_n = 1$$

läßt sich im Zähler durch Linearfaktoren umformen mit Hilfe der n-Nullstellen des Zählers:

$$y = \frac{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}{(x - x_{01})(x - x_{n-1}) \dots (x - x_{0n})}$$

Die Art der Nullstellen können verschieden sein:

- a) nur einfach reelle Nullstellen
- b) mehrfach reelle Nullstellen
- c) einfach komplexe Nullstellen
- d) mehrfach komplexe Nullstellen
- e) Kombination aus a) bis d)

Beispiel 2: Echt gebrochen rationale Funktion 3. Ordnung in allgemeiner Form mit drei verschiedenen reellen Nullstellen.

$$y = \frac{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}{(x - x_{01})(x - x_{02})(x - x_{03})}$$

Diese Funktion kann in Partialbrüche zerlegt werden:

$$y = \frac{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}{(x - x_{01})(x - x_{02})(x - x_{03})} = \frac{A_1}{x - x_{01}} + \frac{A_2}{x - x_{02}} + \frac{A_3}{x - x_{03}}$$

Multiplizieren mit dem Hauptnenner ergibt:

$$\begin{aligned} b_2 x^2 + b_1 x + b_0 &= \frac{A_1 (x - x_{02})(x - x_{03})}{(x - x_{01})(x - x_{02})(x - x_{03})} + \frac{A_2 (x - x_{01})(x - x_{03})}{(x - x_{01})(x - x_{02})(x - x_{03})} + \frac{A_3 (x - x_{01})(x - x_{02})}{(x - x_{01})(x - x_{02})(x - x_{03})} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} b_2 x^2 + b_1 x + b_0 &= \frac{A_1 x^2 - (x_{02} + x_{03})A_1 x + x_{02}x_{03}A_1}{(x - x_{01})(x - x_{02})(x - x_{03})} + \frac{A_2 x^2 - (x_{01} + x_{03})A_2 x + x_{01}x_{03}A_2}{(x - x_{01})(x - x_{02})(x - x_{03})} + \frac{A_3 x^2 - (x_{01} + x_{02})A_3 x + x_{01}x_{02}A_3}{(x - x_{01})(x - x_{02})(x - x_{03})} \end{aligned}$$

$$b_2 = A_1 + A_2 + A_3$$

$$b_1 = -(x_{02} + x_{03})A_1 - (x_{01} + x_{03})A_2 - (x_{01} + x_{02})A_3$$

$$b_0 = x_{02}x_{03}A_1 + x_{01}x_{03}A_2 + x_{01}x_{02}A_3$$

1	1	1
$-x_{02} - x_{03}$	$-x_{01} - x_{03}$	$-x_{01} - x_{02}$
$x_{02} x_{03}$	$x_{01} x_{03}$	$x_{01} x_{02}$

A_1	=	b_2
A_2		b_1
A_3		b_0

Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich ergibt die obere Gleichung ein lineares Gleichungssystem 3. Ordnung für die Variablen A_1 , A_2 und A_3 . Dieses obere wäre relativ umständlich zu berechnen.

Versuchen wir es einfacher. Ein Polynom ist nur dann gleich, wenn alle Koeffizienten gleich sind. Das Verfahren war ziemlich aufwendig. Darum gibt es hier einen Trick. Die Partialbruchzerlegung und somit auch die obere Gleichung (1) gilt für jedes x , also auch für die Nullstellen x_{01} , x_{02} und x_{03} . Die Gleichung (1), angewandt für x_{01} , x_{02} und x_{03} ergibt:

$$x = x_{01} \Rightarrow b_2 x_{01}^2 + b_1 x_{01} + b_0 = A_1 (x_{01} - x_{02})(x_{01} - x_{03})$$

$$x = x_{02} \Rightarrow b_2 x_{02}^2 + b_1 x_{02} + b_0 = A_2 (x_{02} - x_{01})(x_{02} - x_{03})$$

$$x = x_{03} \Rightarrow b_2 x_{03}^2 + b_1 x_{03} + b_0 = A_3 (x_{03} - x_{01})(x_{03} - x_{02})$$

Aus den oberen Gleichungen lassen sich die Koeffizienten A_1 , A_2 und A_3 direkt bestimmen:

$$A_1 = \frac{b_2 x_{01}^2 + b_1 x_{01} + b_0}{(x_{01} - x_{02})(x_{01} - x_{03})}$$

$$A_2 = \frac{b_2 x_{02}^2 + b_1 x_{02} + b_0}{(x_{02} - x_{01})(x_{02} - x_{03})}$$

$$A_3 = \frac{b_2 x_{03}^2 + b_1 x_{03} + b_0}{(x_{03} - x_{01})(x_{03} - x_{02})}$$

Der Vergleich mit der Ausgangsgleichung

$$y = \frac{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}{(x - x_{01})(x - x_{02})(x - x_{03})}$$

ergibt, für den Koeffizienten A_1 :

$$A_1 = y(x = x_{01}) \cdot (x - x_{01})$$

oder mathematisch korrekt ausgedrückt:

$$A_1 = \lim_{x \rightarrow x_{01}} [y(x) \cdot (x - x_{01})]$$

Hier spricht man auch von der Zuhaltemethode: Die Nullstelle, dessen Koeffizient ermittelt werden soll, muß zugehalten werden. Den Koeffizienten erhält man dann durch Einsetzen der entsprechenden Nullstelle in die restliche, nicht zugehaltene Funktion. Dieses Verfahren funktioniert am besten bei einfach reellen Nullstellen.

Aufgabe 7.7.7 a

$$F(x) = \int \frac{8x - 13}{(x-1)(x-2)} dx$$

$$y = \frac{8x - 13}{(x-1)(x-2)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-2)}$$

$$x=1 \Rightarrow A_1 = \frac{8 \cdot 1 - 13}{(1-2)} = 5$$

$$x=2 \Rightarrow A_2 = \frac{8 \cdot 2 - 13}{(2-1)} = 3$$

$$F(x) = \int \left[\frac{5}{x-1} + \frac{3}{x-2} \right] dx$$

$$F(x) = 5 \cdot \ln|x-1| + 3 \cdot \ln|x-2| + C$$

Beispiel 3: Die Partialbruchzerlegung einer n-fach-Nullstelle ergibt n-Partialbrüche mit den Potenzen 1 bis n:

$$\frac{b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0}{(x-x_0)^n} = \frac{A_n + A_{n-1}(x-x_0) + A_{n-2}(x-x_0)^2 + \dots + A_2(x-x_0)^{n-2} + A_1(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^n}$$

$$= \frac{A_n}{(x-x_0)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-x_0)^{n-1}} + \dots + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \frac{A_1}{x-x_0}$$

Hier ließen sich durch Koordinatenverschiebung (Umformung Zähler) die A_i bestimmen, siehe Kap. 2.2.2.3, erstes Semester.

Aufgabe 7.7.7 b

$$F(x) = \int \frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 6}{(x-3)^4} dx$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 5 \quad 6 \\ 3 \quad - \quad 3 \quad 15 \quad 60 \\ 1 \quad 5 \quad 20 \quad 66 \\ 3 \quad - \quad 3 \quad 24 \\ 1 \quad 8 \quad 44 \\ 3 \quad - \quad 3 \\ 1 \quad 11 \end{array} \quad (\text{Horner Schema siehe Kap. 2.2.2.3})$$

$$x^3 + 2x^2 + 5x + 6 = (x-3)^3 + 11(x-3)^2 + 44(x-3) + 66$$

$$F(x) = \int \left[\frac{(x-3)^3 + 11(x-3)^2 + 44(x-3) + 66}{(x-3)^4} \right] dx$$

$$F(x) = \int \frac{1}{x-3} dx + \int \frac{11}{(x-3)^2} dx + \int \frac{44}{(x-3)^3} dx + \int \frac{66}{(x-3)^4} dx$$

$$F(x) = \ln|x-3| - 11 \frac{1}{x-3} - \frac{44}{2} \frac{1}{(x-3)^2} - \frac{66}{3} \frac{1}{(x-3)^3} + C$$

Beispiel 4: Echtgebrochen rationale Funktionen 3. Ordnung in allgemeiner Form mit einer einfachen Nullstelle und einer doppelt reellen Nullstelle.

$$y = \frac{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}{(x - x_{01})(x - x_{02})^2}$$

Die Partialbruchzerlegung des oberen y ergibt:

$$y = \frac{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}{(x - x_{01})(x - x_{02})^2} = \frac{A_1}{x - x_{01}} + \frac{A_2}{x - x_{02}} + \frac{A_3}{(x - x_{02})^2}$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt sich:

$$\begin{aligned} b_2 x^2 + b_1 x + b_0 &= A_1 (x - x_{02})^2 \\ &+ A_2 (x - x_{01})(x - x_{02}) \\ &+ A_3 (x - x_{01}) \end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich könnte man ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten A_1 , A_2 und A_3 erhalten. Hier kann man auch einen Trick anwenden. Setzt man $x = x_{01}$ und $x = x_{02}$ folgt:

$$x = x_{01} \Rightarrow b_2 x_{01}^2 + b_1 x_{01} + b_0 = A_1 * (x_{01} - x_{02})^2$$

$$x = x_{02} \Rightarrow b_2 x_{02}^2 + b_1 x_{02} + b_0 = A_2 * (x_{02} - x_{01})$$

Daraus lassen sich A_1 und A_3 direkt mit der Zuhalttemethode berechnen. A_2 ist noch unbestimmt. A_1 und A_3 sind die Koeffizienten der Partialbrüche mit der höchsten Potenz. Wertet man die obere Gleichung aus, ist zu ersehen, daß die Koeffizienten der Partialbrüche mit den höchsten Potenzen einer mehrfach-Nullstelle auch mit der Zuhalttemethode ermittelt werden können. Auch alle Einfach-Nullstellen sind schon in der höchsten Potenz vorhanden.

Die restlichen Koeffizienten (hier A_2) müssen mit anderen Methoden bestimmt werden:

- A] Gleichungssystem lösen
- B] Schon bekannte Partialbrüche (durch Zuhalttemethode) von der ursprünglichen Gleichung subtrahieren und anschließend durch Linearfaktoren dividieren.
- C] Für bestimmte x-Werte Zahlenwert auf beiden Seiten der Gleichung (echt gebrochen rationale Funktion und Partialbruch zerlegte Funktion) einsetzen, für n Koeffizienten n verschiedene x-Wert. Dieses ergibt ein Gleichungssystem für n-Koeffizienten. Das Gleichungssystem ist hier schneller aufgestellt als bei Methode A. Durch geschickte Wahl der x-Werte vereinfacht sich das Gleichungssystem.

Aufgabe 7.7.7 c

$$y = \frac{x^2 + 4x + 7}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A_1}{(x-2)^2} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+3}$$

A) Gleichungssystem lösen

$$x^2 + 4x + 7 = A_1(x+3) + A_2(x-2)(x+3) + A_3(x-2)^2$$

$$x^2 + 4x + 7 = xA_1 + 3A_1 + A_2x^2 + A_2x - 6A_2 + A_3x^2 - 4A_3x + 4A_3$$

$$x^2 + 4x + 7 = x^2[A_2 + A_3] + x[A_1 + A_2 - 4A_3] + [3A_1 - 6A_2 + 4A_3]$$

Koeffizientenvergleich

$$\begin{array}{lcl} 1 & = & A_2 + A_3 \\ 4 & = & A_1 + A_2 - 4A_3 \\ 7 & = & 3A_1 - 6A_2 + 4A_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = 3.8 \quad A_2 = 0.84 \quad A_3 = 0.16$$

B) Zuhalttemethode

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{2^2 + 4 \cdot 2 + 7}{2 + 3} = 3.8$$

$$x = -3 \quad \Rightarrow \quad A_3 = \frac{3^2 + 4 \cdot (-3) + 7}{(-3 - 2)^2} = 0.16$$

$$\frac{x^2 + 4x + 7}{(x+2)^2(x+3)} = \frac{3.8}{(x-2)^2} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{0.16}{x+3} = \frac{A_2}{x-2} + \frac{3.8(x+3) + 0.16(x-2)^2}{(x-2)^2(x+3)}$$

$$\frac{x^2 + 4x + 7 - 3.8(x+3) - 0.16(x-2)^2}{(x-2)^2(x+3)} = \frac{A_2}{x-2}$$

$$\frac{x^2 + 4x + 7 - 3.8x - 11.4 - 0.16x^2 + 0.64x - 0.64}{(x-2)(x-2)(x+3)} = \frac{A_2}{x-2}$$

$$\frac{0.84x^2 + 0.84x - 5.04}{(x-2)(x^2 + x + 6x)} = \frac{A_2}{x-2}$$

$$(0.84x^2 + 0.84x - 5.04)(x^2 + x - 6x) = 0.84$$

$$\frac{0.84}{x-2} = \frac{A_2}{x-2} \quad \Rightarrow \quad A_2 = 0.84$$

C] Bestimmte Zahlenwerte einsetzen

$$x^2 + 4x + 7 = A_1(x + 3) + A_2(x - 2)(x + 3) + A_3(x - 2)^2$$

$$\begin{aligned} x = -3 \Rightarrow \quad (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 7 &= A_3(-3 - 2)^2 \\ 4 &= A_3 \cdot 25 \\ A_3 &= 0.16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = +2 \Rightarrow \quad 2^2 + 4 \cdot 2 + 7 &= A_1(2 + 3) \\ 19 &= A_1 \cdot 5 \\ A_1 &= 3.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 0 \quad \quad \quad 7 &= 3A_1 - 6A_2 + 4A_3 \\ 7 &= 3 \cdot 3.8 - 6A_2 + 4 \cdot 0.16 \\ A_2 &= \frac{1}{6}(3 \cdot 3.8 + 4 \cdot 0.16 - 7) \\ A_2 &= 0.84 \end{aligned}$$

- Hinweis 1:** Am besten eignet sich eine Kombination aus B und C:
- höchste Potenz durch Zuhaltemethode
 - Rest mit anderen x-Zahlenwerten (erste Wahl ist dabei x=0 einsetzen)

$$F(x) = \int y(x) dx = \int \left[\frac{3.8}{(x - 2)^2} + \frac{0.84}{x - 2} + \frac{0.16}{x + 3} \right] dx$$

$$F(x) = -\frac{3.8}{x - 2} + 0.84 \cdot \ln|x - 2| + 0.16 \cdot \ln|x + 3| + C$$

Beispiel 5: Echt gebrochen rationale Funktion 3. Ordnung in allgemeiner Form mit einer einfachen Nullstelle und einer konjugiert komplexen Nullstelle.

$$y = \frac{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}{(x - x_{01})[(x - x_{0re})^2 + x_{0im}^2]}$$

$$x_{012} = x_{0re} \pm jx_{0im}$$

$$(x - x_{02})(x - x_{03}) = (x - x_{0re} + jx_{0im})(x - x_{0re} - jx_{0im}) \\ (x - x_{0re})^2 + x_{0im}^2$$

Die Partialbruchzerlegung von y ergibt:

$$\frac{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}{(x - x_{01})[(x - x_{0re})^2 + x_{0im}^2]} = \frac{A_1}{x - x_{01}} + \frac{B_1 x + B_2}{(x - x_{0re})^2 + x_{0im}^2}$$

A_1 ist am besten mit der Zuhalttemethode zu bestimmen. B_1 und B_2 lassen sich mit den Methoden A, B, C des Beispiels 4 (Aufgabe 7.7.7 c) berechnen.

Aufgabe 7.7.8 a

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{(x - 3)(x^2 - 8x + 25)} = \frac{A_1}{x - 3} + \frac{B_1 x + B_2}{x^2 - 8x + 25}$$

$$x_{01,02} = 4 \pm \sqrt{16 - 25} = 4 \pm j3$$

$$x = 3 \quad (\text{Zuhalttemethode}) \quad A_1 = \frac{3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 2}{3^2 - 8 \cdot 3 + 25} = 4.1$$

$$x = 0 \quad \frac{2}{(-3) \cdot 25} = \frac{A_1}{-3} + \frac{B_2}{25}$$

$$B_2 = 25 \cdot \left(\frac{2}{-3 \cdot 25} + \frac{4.1}{3} \right) = 33.5$$

$$x = 1$$

$$\frac{3 + 4 + 2}{(1 - 3)(1^2 - 8 \cdot 1 + 25)} = \frac{A_1}{1 - 3} + \frac{B_1 \cdot 1 + B_2}{1^2 - 8 \cdot 1 + 25}$$

$$\frac{9}{-2 \cdot 18} = \frac{4.1}{-2} + \frac{B_1 + 33.5}{18}$$

$$B_1 = -\frac{9}{2} + 18 \cdot \frac{4.1}{2} - 33.5 = -1.1$$

$$f(x) = \frac{4.1}{x - 3} + \frac{-1.1x + 33.5}{(x - 4)^2 + 3^2}$$

Aufgabe 7.7.11 a

$$F(x) = \int f(x) dx$$

$f(x)$ aus Aufgabe 7.7.8 a

$$f(x) = \frac{4.1}{x-3} - 1.1 \frac{x-4}{(x-4)^2 + 3^2} + 29.1 \frac{1}{(x-4)^2 + 3^2}$$

$$29.1 = 33.5 - 1.1 \cdot 4$$

$$\int \frac{u}{u^2 + 3^2} du = \frac{1}{2} \ln(u^2 + 3^2) \quad (\text{Substitution})$$

$$\int \frac{1}{u^2 + 3^2} du = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{u}{3}\right) \quad (\text{Substitution})$$

$$F(x) = 4.1 \cdot \ln|x-3| - 1.1 \cdot \frac{1}{2} \ln[(x-4)^2 + 3^2] + 29.1 \cdot \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x-4}{3}\right) + C$$

$$\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{(x-3)(x^2 - 8x + 25)} dx = 4.1 \cdot \ln|x-3| - 0.55 \cdot \ln(x^2 - 8x + 25) + 9.7 \cdot \arctan\left(\frac{x-4}{3}\right) + C$$

7.7.4. Gemischte Aufgaben unbestimmtes Integral

Aufgaben 7.7.10 a, k und o rechnen

7.8. Numerische Integration

Was heißt numerisches Rechnen? Antwort: Berechnung von Zahlenwerten mit dem Rechner. Folgende Gründe erlauben eine numerische Integration in Betracht zu ziehen:

- Falls nur das Ergebnis als Zahlenwert eines bestimmten Integrals von Interesse ist.
- Es verlangt viel Erfahrung komplizierte Integrale zu lösen.
- Manchmal (meistens) ist es nicht möglich ein Integral (mit Hilfe einer Kombination von Standardfunktionen) zu lösen.
- Für einen Anfänger ist die numerische Integration leicht durchzuführen oder auch zu programmieren.

Der Nachteil der numerischen Integration:

- Es ist keine geschlossene (analytische) Lösung anzugeben.
- Dieses ist wichtig z.B. bei der Lösung von DGLn (3.Semester)

Es sollen verschiedene Methoden der numerischen Integration vorgestellt werden:

- Rechteckregel
- Trapezregel
- Simpson-Regel

7.8.1. Rechteckregel

Nach Kap. 7.3.2 ist die Rechteckregel schon bekannt:

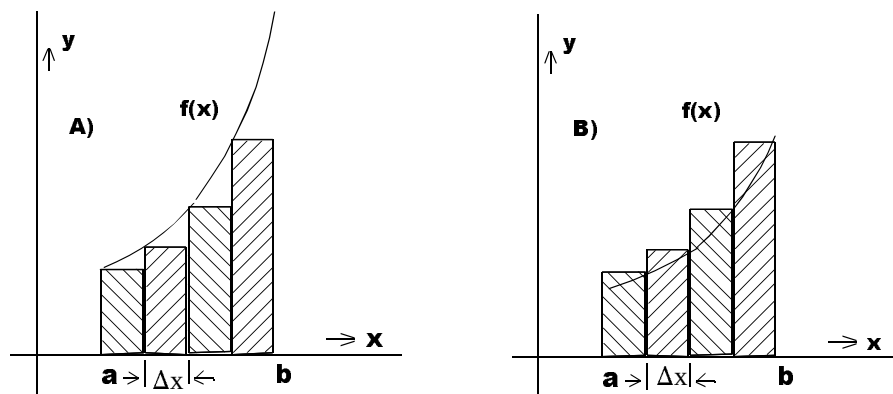


Bild MA732A

Dieses ist nach Bild MA732A die Bildung von Ober- und Untersummen. Das Prinzip: In einem Intervall $x_i \leq x \leq x_i + \Delta x = x_{i+1}$ wird der Funktionswert angenähert durch einen konstanten Wert. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten: den linksseitigen Wert oder den rechtsseitigen Wert zu benutzen. Dieses Verfahren ist relativ ungenau und wird zur numerischen Integration von bestimmten Integralen kaum benutzt. Nur Hinweis auf 3.Semester: Numerisch löst man auch DGL's. Hier hat die Rechteckregel schon eher eine Bedeutung. In diesem Abschnitt ist die Rechteckregel zur Vollständigkeit aufgeführt. Eine gewisse Systematik ist auch hier dabei. Die Annäherung der Funktion erfolgt hier durch einen konstanten Wert, also ein Polynom 0.Ordnung.

$$\int_{x=x_1}^{x_2} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n y(i) * \Delta x \quad \text{Obersumme}$$

$$\int_{x=x_1}^{x_2} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} y(i) * \Delta x \quad \text{Untersumme}$$

7.8.2. Trapez-Regel

Hier erfolgt die Annäherung der Funktion $f(x)$ stückweise durch ein Polynom 1.Ordnung, also durch eine Gerade:

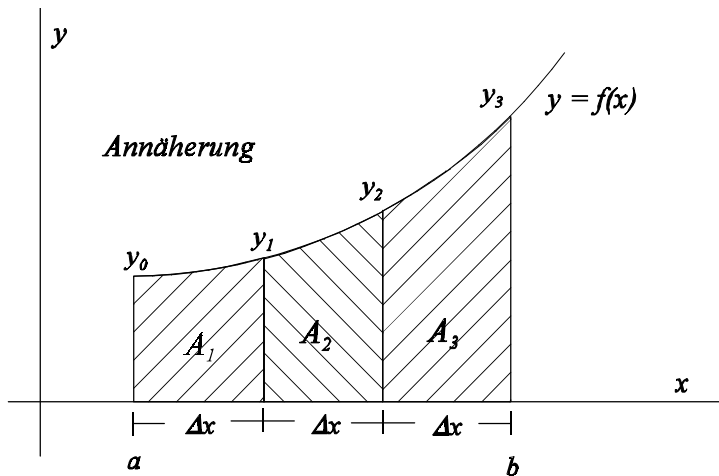


Bild MA782A

Gesucht ist die Gesamtfläche. Dazu Einzelflächen-Bestimmung:

$$A_{\text{ges}} = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

n - Anzahl der Funktionintervalle

b - obere Integrationsgrenze

a - untere Integrationsgrenze

$$A_1 = \Delta x \cdot \frac{y_0 + y_1}{2}$$

$$A_2 = \Delta x \cdot \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$A_3 = \Delta x \cdot \frac{y_1 + y_3}{2}$$

.....

$$A_n = \Delta x \cdot \frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

$$A_{\text{ges}} = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_{\text{ges}} = \Delta x \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)$$

$$A_{\text{ges}} = \frac{b - a}{n} \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)$$

$$\int_{x=a}^b f(x) dx = \frac{b - a}{n} \left[\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_n}{2} \right]$$

Zusammenfassung:

Bei der Trapez-Integration wird die Funktion $y = f(x)$ durch eine Gerade angenähert.

Zur Berechnung von $\int_a^b f(x) dx$ werden die Funktionswerte $y_i = f(x = a + i \cdot \Delta x)$, mit $(i = 0 \dots n)$ und $\Delta x = (b - a)/n$, so aufsummiert daß der linke und rechte je zur Hälfte und alle anderen voll aufsummiert werden.

7.8.3. Simpson-Regel

Bei der Rechteckregel erfolgt die Annäherung durch ein Polynom 0. Ordnung, bei der Trapezregel durch ein Polynom 1. Ordnung und hier durch ein Polynom 2. Ordnung.

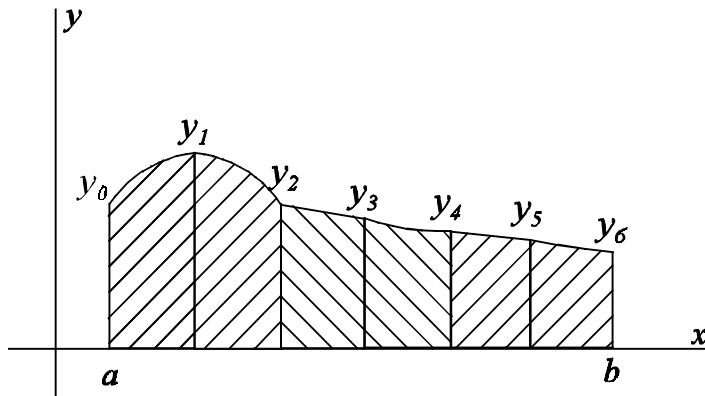


Bild MA783A

Jeweils zwei Funktionsintervalle werden zusammengefaßt und durch eine Parabel 2. Grades angenähert:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

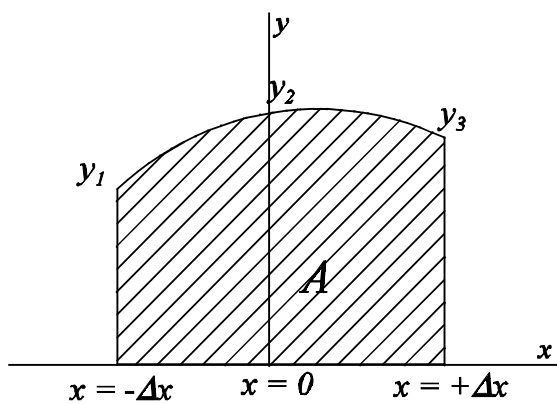


Bild MA783B

Nach oberer Zeichnung und Formel beträgt die Fläche A:

$$A = \int_{x=-\Delta x}^{\Delta x} (a_0 + a_1x + a_2x^2) dx$$

$$A = a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 \Big|_{x=-\Delta x}^{\Delta x}$$

$$A = 2 \left(a_0\Delta x + \frac{1}{3}a_2\Delta x^3 \right) = 2\Delta x \left(a_0 + \frac{1}{3}a_2x^2 \right)$$

erstes Semester (Kap. 2.2.1.3.5):

$$a_0 = y_2$$

$$a_2 = \frac{1}{2\Delta x^2} * (y_1 - 2y_2 + y_3)$$

$$A = 2\Delta x \left[y_2 - \frac{1}{3} * \frac{1}{2} (y_1 - 2y_2 + y_3) \right] = \Delta x \frac{1}{3} [6y_2 + y_1 - 2y_2 + y_3] = \frac{1}{3} \Delta x [y_1 + 4y_2 + y_3]$$

Die obere Formel gilt nun für ein Doppelintervall. Zur Bestimmung der Gesamtfläche müssen alle Doppelintervalle aufsummiert werden. Laut Bild MA783A ergibt sich die Fläche für 3 Doppelintervalle ($n = 6$), bzw. das Integral.

$$A_{ges} = \frac{1}{3} \Delta x [y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + y_4 + 4y_5 + y_6]$$

$$A_{ges} = \frac{b-a}{3n} * [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6]$$

Zusammenfassung:

Bei der numerischen Integration nach Simpson wird die Funktion in Doppelintervalle unterteilt und darin durch eine Parabel 2.Ordnung angenähert. Das Ergebnis: Eine ungradzahlige Anzahl von Funktionswerten ist erforderlich $i = 0 \dots n$ (n ganzzahlig). Aufsummierung nach folgender Regel: Der erste (y_0) und der letzte (y_n) Wert zählt einfach. Alle anderen werden mit vier oder zwei bewertet. Das Ergebnis muß mit $\Delta x/3$ multipliziert werden.

$$I = A = \int_{x=a}^b y(x) dx = \frac{b-a}{3n} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

7.8.4. Annäherung durch eine Parabel 3.Ordnung

Hier nur der Hinweis, daß die in Kap. 6.14.3 abschnittsweise gefundenen Funktionen auch abschnittsweise integriert werden können.

7.8.5. Integration nach Regressionsanalyse

Das Polynom n -Ordnung durch Regressionsanalyse (siehe Kap. 6.14.4) gefunden, kann integriert werden.

7.8.6. Integration nach Runge-Kutta

Vollständigerhalber erfolgt hier der Hinweis: Das Integral kann auf eine DGL zurückgeführt werden und mit Hilfe von Runge-Kutta (3. Semester, Kap 10.8.3) gelöst werden.

7.9. Erweiterung des Integralbegriffs

Bislang wurden immer stetige Funktionen integriert. Stetigkeit wurde im 1. Semester im Kap. 2.1.8 definiert und mit linksseitigen und rechtsseitig gleichem Grenzwert erklärt. Die Deutung war: Es gab zwei Arten von Unstetigkeitswerten:

- Der Funktionswert springt
- Der Funktionswert geht gegen unendlich.

Diese beiden Unstetigkeitsarten sollen in den nächsten beiden Abschnitten im Rahmen der Integralrechnung untersucht werden.

7.9.1. Integration von Sprungstellen

Im Gegensatz zur Differentiation führt die Integration einer Sprungstelle von $f(x)$ nicht zu einer Unstetigkeitsstelle.

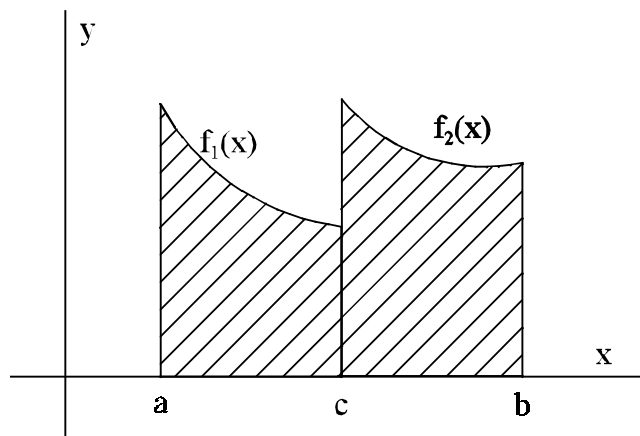


Bild MA791A

Wie aus Bild MA791A zu erkennen ist, bereitet die Integration (sprich Flächenberechnung) keine Schwierigkeit. Eine Sprungstelle ist meistens damit verbunden, daß links und rechts jeweils eine andere Funktion gültig ist. Zur Auswertung dieses Integrals muß daher der Integrationsweg unterbrochen werden. Es gilt nach Bild MA791A:

$$f(x) = f_1(x) \quad a \leq x < c$$

$$f(x) = f_2(x) \quad c < x \leq b$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f_1(x) dx + \int_c^b f_2(x) dx$$

Aufgabe 7.9.1 a rechnen.

7.9.2. Uneigentliche Integrale

Hier soll das bestimmte Integral behandelt werden, wo der Funktionswert an einer Integrationsgrenze (obere oder untere) unendlich wird. Jetzt vermutet man, wenn ein Funktionswert unendlich wird, daß dann auch das Integral, und somit auch die Fläche unter der Kurve unendlich wird. Dieses ist allerdings nicht immer der Fall. Im Integral steht als Summe $y(x) \cdot dx$. Der Funktionswert wird nur an einer infinitesimal schmalen Stelle ∞ mit der Breite $dx \approx 0$. Es liegt ein unbestimmter Ausdruck $0 \cdot \infty$ vor. Mathematisch korrekt müßten wir einen Grenzübergang mit $\lim$ durchführen.

$$f(x=a) \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \int_{x=a}^b f(x) dx = \lim_{x_0 \rightarrow a} \left\{ \int_{x=x_0}^b f(x) dx \right\}$$

Beispiel 1:

$$A_1 = \int_{x=0}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$A_2 = \int_{x=0}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

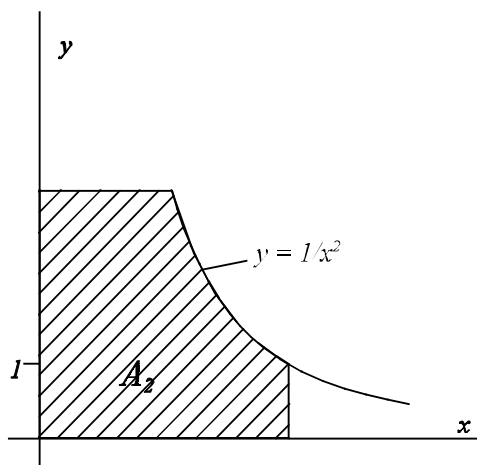
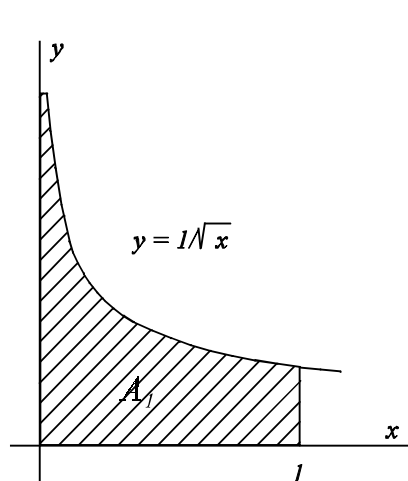


Bild MA792A

$$A_1 = \int_{x=0}^1 x^{-1/2} dx$$

$$A_2 = \int_{x=0}^1 x^{-2} dx$$

$$A_1 = 2x^{1/2} \Big|_{x=0}^1$$

$$A_2 = -x^{-1} \Big|_{x=0}^1$$

$$A_1 = 2$$

$$A_2 = -1 + \infty = \infty$$

Das was eben berechnet worden ist, würde ein Mathematiker als komplett falsch empfinden. Warum sind die oberen Ableitungen trotzdem durchgeführt worden, obwohl sie mathematisch falsch sind? Ingenieure oder zukünftige Ingenieure sind Praktiker. Außerdem ist die obere Ableitung anschaulicher als die mathematisch korrekte. Die korrekte Schreibweise wäre:

$$A_1 = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \int_{x=a}^1 x^{-1/2} dx \right\}$$

$$A_2 = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \int_{x=a}^1 x^{-2} dx \right\}$$

$$A_1 = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ 2x^{1/2} \right\} \Big|_{x=a}^1 = 2 * \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ 1 - \sqrt{a} \right\}$$

$$A_2 = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{x} \right\} \Big|_{x=a}^1 = \lim_{a \rightarrow 0} \left(-1 + \frac{1}{a} \right)$$

$$A_1 = 2$$

$$A_2 \rightarrow \infty$$

Fazit: Ein uneigentliches Integral (wo ein Funktionswert gegen ∞ geht) kann als Lösung einen endlichen oder unendlichen Wert aufweisen.

Beispiel 2:

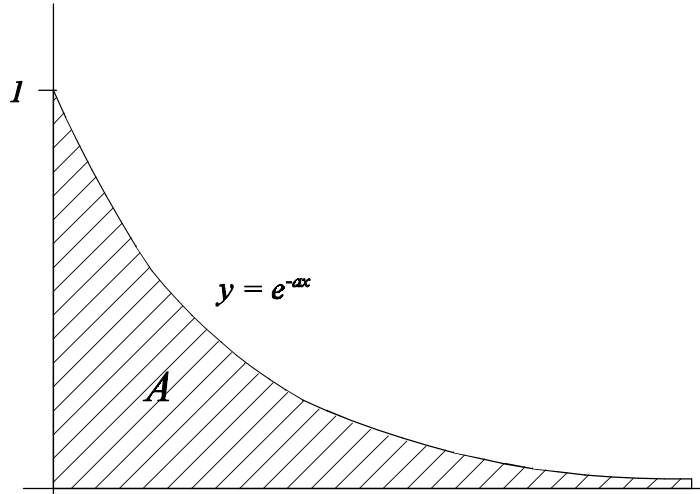


Bild MA792B

$$A = \int_{x=0}^{\infty} e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} e^{-ax} \bigg|_{x=0}^{\infty} = -\frac{1}{a}(0-1)$$

$$A = \frac{1}{a}$$

Fazit: Die Fläche unter einer e-Funktion $y = y_0 * e^{-x/x_0}$ oder $y = y_0 * e^{T/x_0}$ ergibt immer $y_0 * x_0$ oder $y_0 * T$, also Anfangswert multipliziert mit der Zeitkonstanten.

Aufgabe 7.9.2 b, c und f rechnen

7.10. Mehrfach-Integrale

Bislang sind nur Einfach-Integrale bekannt:

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad \Rightarrow \quad \text{Flächenberechnung}$$

Die Flächenberechnung war als eine Aufsummierung von Strecken, multipliziert mit einer kleinen Breite Δx (Bildung von Ober- und Untersummen):

$$A = \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_1} f(i) * \Delta x$$

Hat man nun viele Flächen $A(j)$ die man in einer dritten Richtung aufsummiert, was bekommt man dann?

$$V = \lim_{n_2 \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_2} A(j) * \Delta y \quad \Rightarrow \quad \text{Volumenberechnung}$$

Einsetzen von $A(j)$ als Summe ergibt

$$V = \lim_{n_2 \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n_2} \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_1} f(i,j) \Delta x * \Delta y$$

Volumen können also als Doppelsumme berechnet werden. Zur Erinnerung an die Einführung in die Integralrechnung (Kap. 7.1): Da ergab sich das Integral durch Übergang zu infinitesimal kleinen Größen:

$$\begin{array}{l} \sum \rightarrow \int \\ \Delta x \rightarrow dx \\ \Delta y \rightarrow dy \end{array}$$

Damit läßt sich die obere Summe als Integral schreiben:

$$V = \int_{y=g_1}^{g_2} \int_{x=g_3}^{g_4} f(x,y) dx dy$$

mit den Grenzen g_1 bis g_4 die später noch genauer untersucht werden sollen. Da die Aufsummierungsreihenfolge vertauscht werden kann, kann auch die Integrationsreihenfolge dx und dy vertauscht werden, so daß für die obere Formel ebenfalls gilt:

$$V = \int_{x=g_3}^{g_4} \int_{y=g_1}^{g_2} f(x,y) dy dx$$

Deutung: Oberes Integral gibt das Volumen im dreidimensionalen Raum (x-y-z) an mit den Grenzen:

$$\begin{array}{lll} z = 0 & \text{bis} & z = f(x,y) \\ x = g_3 & \text{bis} & x = g_4 \\ y = g_1 & \text{bis} & y = g_2 \end{array}$$

Die Strecken in z-Richtung werden z.B. zuerst in x-Richtung aufsummiert zur Fläche in der x-z-Ebene und danach werden diese Flächen in y-Richtung aufsummiert zum Volumen. Die Reihenfolge von x und y könnte dabei auch vertauscht werden.

7.10.1. Mehrfach-Integrale mit festen Grenzen

Vergleich zur Flächenberechnung:

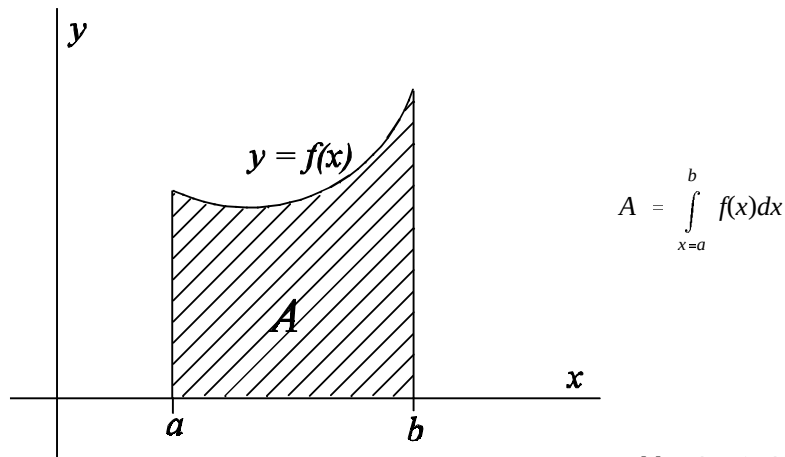


Bild MA7101A

Die zu bestimmende Fläche ist begrenzt durch:

$$y = 0, \quad y = f(x), \quad x = a \quad \text{und} \quad x = b$$

Bei dem einfachsten Fall der Volumenrechnung soll das Volumen eines Körpers mit einer rechteckigen Grundfläche in der $x - y$ Ebene berechnet werden.

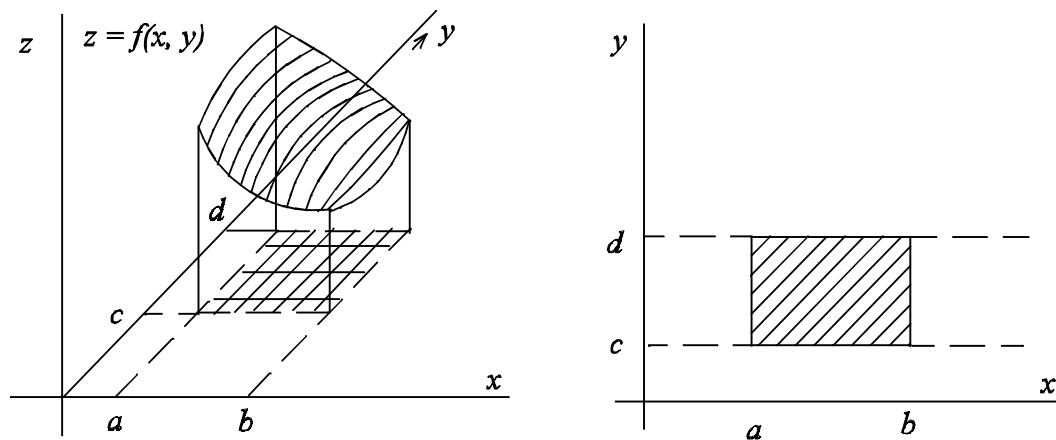


Bild MA7101B

Nach dem Bild MA7101B wird das zu berechnende Volumen begrenzt durch:

$$\begin{array}{ll} x = a & x = b \\ y = c & y = d \\ z = 0 & z = f(x, y) \end{array}$$

Die Begrenzung in der $x - y$ -Ebene (Grundfläche) ist rechts im Bild MA7101B gezeigt. Das Volumen des Körpers berechnet sich nun nach folgender Vorschrift:

$$V = \int_{y=c}^d \left[\int_{x=a}^b f(x, y) dx \right] dy$$

Mathematisch interpretieren läßt sich die obere Formel:

- Die innere Klammer (Integration über dx) summiert Stecken, die in z -Richtung zeigen, über der x -Richtung auf. Man erhält infinitesimal kleine Scheiben (Flächen) parallel zur z - x -Ebene, deren Größe eine Funktion von y ist.
- In der äußeren Integration summiert man diese infinitesimal kleinen Scheiben (Größe nur noch von y abhängig ist) über der y -Richtung auf.
- Damit ist das Gesamt-Volumen berechnet.

Hinweis: Falls das Volumen zwischen zwei z -Funktion

$$\begin{aligned} z_1 &= f_1(x,y) && \text{(untere Funktion)} \\ z_2 &= f_2(x,y) && \text{(obere Funktion)} \end{aligned}$$

gebildet werden soll, muß für $f(x,y)$ die Differenz beider angesetzt werden (Differenz der Stecken in z):

$$f(x, y) = f_2(x, y) - f_1(x, y)$$

Hier ist auch das Vertauschen der Integrationsreihenfolge möglich:

$$V = \int_{x=a}^b \left[\int_{y=c}^b f(x, y) dy \right] dx$$

Aufgabe 7.10.1 b

$$\begin{array}{lll} x_1 = 2 & y_1 = 3 & z_1 = 0 \\ x_2 = 5 & y_2 = 7 & z_2 = y + 5x^2 \end{array}$$

A] erst Integration über x

$$\begin{aligned} V &= \int_{y=3}^7 \left[\int_{x=2}^5 (y + 5x^2) dx \right] dy = \int_{y=3}^7 \left[\left(yx + \frac{5}{3}x^3 \right) \Big|_{x=2}^5 \right] dy \\ V &= \int_{y=3}^7 \left[y(5 - 2) + \frac{5}{3}(5^3 - 2^3) \right] dy = \int_{y=3}^7 [(3y + 195)] dy \\ V &= \left[1.5y^2 + 195y \right]_{y=3}^7 = 1.5 \cdot (7^2 - 3^2) + 195 \cdot (7 - 3) = 840 \end{aligned}$$

B] erste Integration über y

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=2}^5 \left[\int_{y=3}^7 (y + 5x^2) dy \right] dx = \int_{x=2}^5 \left[\left(\frac{1}{2}y^2 + 5x^2y \right) \Big|_{y=3}^7 \right] dx \\ V &= \int_{x=2}^5 \left[\frac{1}{2}(7^2 - 3^2) + 5x^2(7 - 3) \right] dx = \int_{x=2}^5 [(20 + 20x^2)] dx \\ V &= \left[20x + \frac{20}{3}x^3 \right]_{x=2}^5 = 20(5 - 2) + \frac{20}{3}(5^3 - 2^3) = 840 \end{aligned}$$

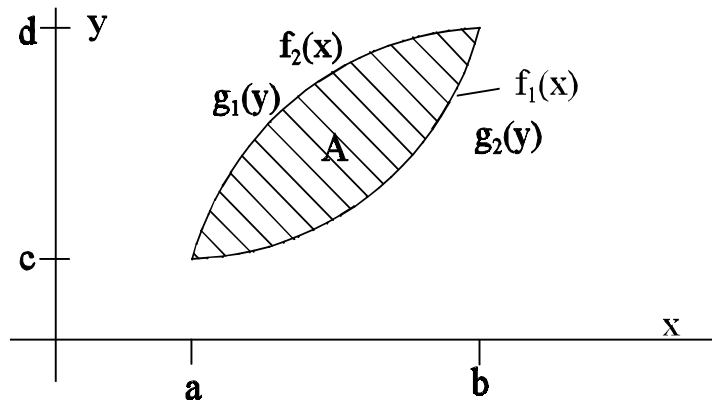
7.10.2. Mehrfachintegrale mit variablen Grenzen

Bild MA7102A

Ist die Grenze in x- und y-Richtung kein Rechteck wie im vorigen Abschnitt sondern eine Funktion von x oder y (Bild MA7102A), muß dieses berücksichtigt werden und die Integrationsreihenfolge beachtet werden.

Begrenzung für Bild MA7102A Methode a)

$$\begin{aligned}
 x_1 &= a & y_1 &= f_1(x) & z_1 &= f_1(x,y) \\
 x_2 &= b & y_2 &= f_2(x) & z_2 &= f_2(x,y) \\
 z &= f(x,y) = f_2(x,y) - f_1(x,y)
 \end{aligned}$$

$$V = \int_{x=a}^b \left[\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y) dy \right] dx$$

oder Methode b)

$$\begin{aligned}
 y_1 &= c & x_1 &= g_1(y) & z_1 &= f_1(x,y) \\
 y_2 &= d & x_2 &= g_2(y) & z_2 &= f_2(x,y) \\
 z &= f(x,y) = f_2(x,y) - f_1(x,y)
 \end{aligned}$$

$$V = \int_{y=c}^d \left[\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y) dx \right] dy$$

Deutung Methode a)

In der inneren Klammer (inneres Integral) werden Stecken der Länge z in x-Richtung aufsummiert zwischen $y = f_1(x)$ bis $y = f_2(x)$ zu Flächen in der y-z-Ebene deren Größen von x abhängig sind. Im äußeren Integral werden dann diese x abhängigen Flächen über x zum Volumen integriert.

Aufgabe 7.10.1 f

$$x_1 = -1 \quad y_1 = -1 \quad z_1 = x \cdot y$$

$$x_2 = 2y^2 \quad y_2 = 1 \quad z_2 = 2x^2 + y^2 + 2$$

$$z = z_2 - z_1 = 2x^2 + y^2 + 2 - x \cdot y$$

$$V = \int_{y=-1}^1 \left\{ \int_{x=-1}^{2y^2} z(x, y) dx \right\} dy$$

$$V = \int_{y=-1}^1 \left\{ \int_{x=-1}^{2y^2} (2x^2 + y^2 + 2 - x \cdot y) dx \right\} dy$$

$$V = \int_{y=-1}^1 \left\{ \left[\frac{2}{3} x^3 + y^2 \cdot x + 2x - \frac{1}{2} y \cdot x^2 \right]_{x=-1}^{2y^2} \right\} dy$$

$$V = \int_{y=-1}^1 \left\{ \frac{2}{3} [(2y)^3 - (-1)^3] + y^2 [(2y^2) - (-1)] + 2[(2y^2) - (-1)] - \frac{1}{2} y [(2y^2) - (-1)^2] \right\} dy$$

$$V = \int_{y=-1}^1 \left\{ \frac{16}{3} y^6 - 2y^5 + 2y^4 + 5y^2 + \frac{1}{2} y + \frac{8}{3} \right\} dy$$

$$V = \left[\frac{16}{21} y^7 - \frac{2}{6} y^6 + \frac{2}{5} y^5 + \frac{5}{3} y^3 + \frac{1}{4} y^2 + \frac{8}{3} y \right]_{y=-1}^{+1}$$

$$V = 2 \left[\frac{16}{21} y^7 + \frac{2}{5} y^5 + \frac{5}{3} y^3 + \frac{8}{3} y \right]_{y=0}^{+1}$$

$$V = 2 \left[\frac{16}{21} + \frac{2}{5} + \frac{5}{3} + \frac{8}{3} \right] = 10.99$$

Beispiel:

Das Volumen des Prismas nach Bild 7102B soll bestimmt werden.

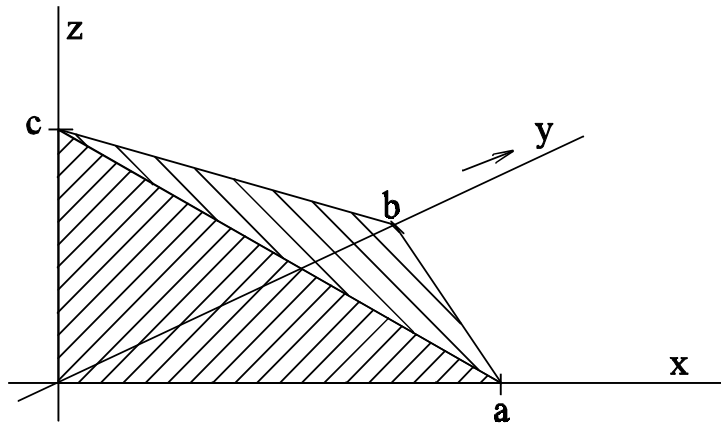


Bild MA7102B

Das Prisma nach Bild MA7102B wird begrenzt durch die vier Ebenen

- x-z-Ebene
- y-z-Ebene
- x-y-Ebene
- Ebene durch die drei Punkte (a,0,0), (0,b,0) (0,0,c)

Das Volumen V soll nach der Methode a

$$V = \int_{x=0}^a \left[\int_{y=0}^{y(x)} z(x,y) dy \right] dx$$

berechnet werden. Die untere y-Grenze und auch die untere x-Grenze sind Null. x wird bis $x = a$ integriert, y bis $y(x)$. Die obere y-Grenze und die Funktion $z(x,y)$ werden durch die Achsenabschnittsformeln von Gerade (Kap. 2.2.1.2.4) und Ebene (Kap. 4.2.2.3) bestimmt:

$$\frac{z}{c} + \frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1 \quad \Rightarrow \quad z(x,y) = c \left(1 - \frac{y}{b} - \frac{x}{a} \right)$$

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = b \left(1 - \frac{x}{a} \right)$$

$$V = \int_{x=0}^a \left[\int_{y=0}^{y(x)} z(x,y) dy \right] dx$$

$$V = \int_{x=0}^a \left[\int_{y=0}^{b \left(1 - \frac{x}{a} \right)} c \left(1 - \frac{y}{b} - \frac{x}{a} \right) dy \right] dx$$

Hier lässt sich besser in der normierten Schreibweise (Substitution) integrieren

$$V = a * b * c \int_{\frac{x}{a}=0}^1 \left[\int_{\frac{y}{b}=0}^{1-\frac{x}{a}} \left(1 - \frac{y}{b} - \frac{x}{a} \right) d\left(\frac{y}{b}\right) \right] d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$V = a * b * c \int_{\frac{x}{a}=0}^1 \left[\int_{\frac{y}{b}=0}^{1-\frac{x}{a}} \left[\left(1 - \frac{x}{a} \right) - \frac{y}{b} \right] d\left(\frac{y}{b}\right) \right] d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$V = a * b * c \int_{\frac{x}{a}=0}^1 \left[\left[\left(1 - \frac{x}{a} \right) \frac{y}{b} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right]_{\frac{y}{b}=0}^{1-\frac{x}{a}} \right] d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$V = a * b * c \int_{\frac{x}{a}=0}^1 \left[\left(1 - \frac{x}{a} \right) \left(1 - \frac{x}{a} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 \right] d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a*b*c}{2} \int_{\frac{x}{a}=0}^1 \left(\frac{x}{a} - 1 \right)^2 d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$V = \frac{a * b * c}{2} \int_{\frac{x}{a}=0}^1 \left(\frac{x}{a} - 1 \right)^2 d\left(\frac{x}{a} - 1\right)$$

$$V = \frac{a * b * c}{2} \frac{1}{3} \left(\frac{x}{a} - 1 \right)^3 \bigg|_{\frac{x}{a}=0}^1 = \frac{a*b*c}{6} [0 - (-1)^3]$$

$$V = \frac{a * b * c}{6}$$

Bekannt aus der Schulmathematik:

$$V = \frac{1}{3} * \text{Grundfläche} * \text{Höhe}$$

7.10.3. Allgemeine Integrale in kartesischen Koordinaten

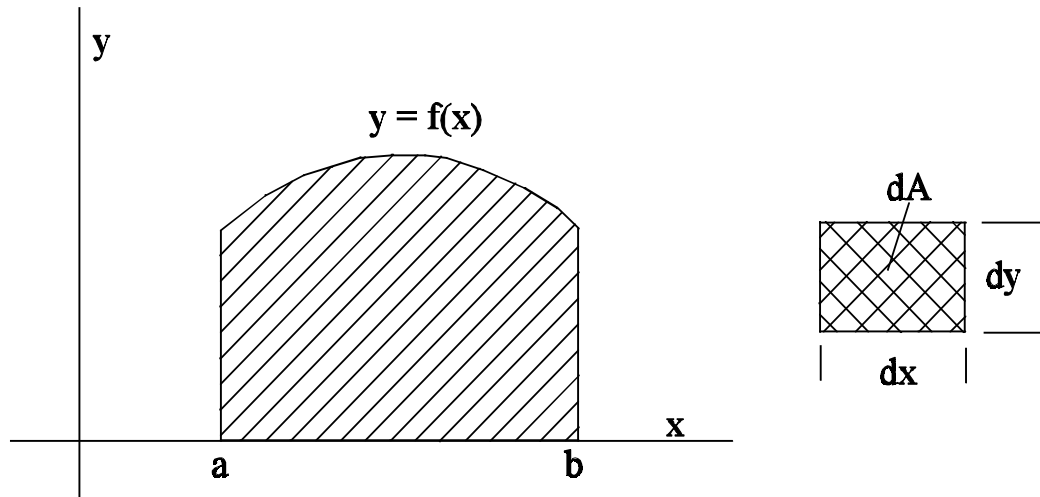


Bild MA7103A

Eine Fläche eines Rechtecks ergibt sich aus Länge mal Breite. Die Größe einer infinitesimal kleinen Flächen in Bild MA7103A ergibt sich zu

$$dA = dx \cdot dy$$

Die Fläche A in Bild MA7103A ergibt sich aus der zweifachen Integration

$$A = \iint dA = \int_a^b \left[\int_{y=0}^{f(x)} dy \right] dx$$

Mit der Länge

$$l(x) \int_{y=0}^{f(x)} dy = y \Big|_{y=0}^{f(x)} = f(x)$$

läßt sich die Fläche beschreiben durch:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Dieses ist die allgemeine Herleitung, weshalb die Fläche A in Bild MA7103A durch das obere Integral berechnet werden kann.

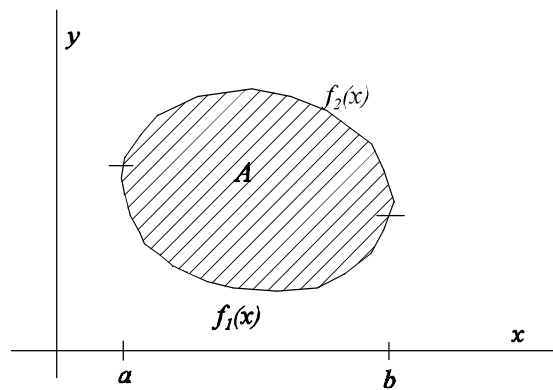


Bild MA7103B

Für die Fläche A in Bild MA7103B gilt:

$$A = \int \int dx \, dy = \int_{x=a}^b \left[\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} dy \right] dx$$

$$\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} dy = f_2(x) - f_1(x)$$

$$A = \int_{x=a}^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

Dieses war auch schon durch Anschauung ersichtlich.

Die Volumenberechnung des letzten Kapitels lässt sich auch durch dreifache Integration Volumenelementes erklären:

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

$$V = \int_{(x)} \int_{(y)} \int_{(z)} dV = \int_{(x)} \int_{(y)} \int_{z=0}^{f(x,y)} f(x,y) dz \, dy \, dx = \int_{(x)} \int_{(y)} z \Big|_{z=0}^{f(x,y)} dx \, dy = \int_{(x)} \int_{(y)} f(x,y) dx \, dy$$

Beispiel: allgemeine Berechnung der Kreisfläche des Einheitskreises

$$A = \iint dA = \int_{x=-1}^1 \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy \, dx = \int_{x=-1}^1 y \Big|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$A = 2 \int_{x=-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

$$A = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin(x) \right]_{x=-1}^1$$

$$A = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \pi$$

7.10.4. Flächenberechnung in Polarkoordinaten

Für manche Flächenberechnungen (z.B.) Kreis ist es angebrachter in angepaßten Koordinaten zu rechnen. Zur Berechnung der Kreisfläche sind dies sicher Polarkoordinaten.

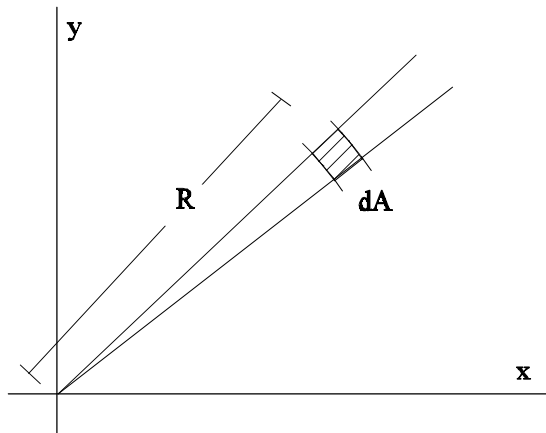


Bild MA7104A

Nach Bild MA7104A ergibt sich das Flächenelement dA mit der radialen Länge dr und der Länge in Winkelrichtung $r \cdot d\varphi$:

$$dA = dR \cdot (R d\varphi) = R dR d\varphi$$

$$A = \int \int_{(R)(\varphi)} R dR d\varphi$$

Beispiel: Der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius R_1 ist mit Hilfe der oberen Formel zu berechnen.

Lösung 1:

$$A = \int_{R=0}^{R_1} \left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} R d\varphi \right] dR$$

$$A = \int_{R=0}^{R_1} \left[R \cdot \varphi \right]_{\varphi=0}^{2\pi} dR$$

$$A = \int_{R=0}^{R_1} [R \cdot 2\pi] dR$$

$$A = 2\pi \cdot \frac{1}{2} R^2 \Big|_{R=0}^{R_1} = \pi \cdot R_1^2$$

Lösung 2:

$$A = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\int_{R=0}^{R_1} R dR \right] d\varphi$$

$$A = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{2} R^2 \right]_{R=0}^{R_1} d\varphi$$

$$A = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{2} R_1^2 d\varphi$$

$$A = \frac{1}{2} R_1^2 \cdot \varphi \Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{1}{2} R_1^2 \cdot 2\pi$$

Bei der Lösung 1 wurde erst über den Winkel integriert und dann über den Radius. In diesem Fall ist die Reihenfolge egal, da die Grenzen von der anderen Koordinate unabhängig sind. Bei Mehrfach bzw. Doppelintegralen ist die Integrationsreihenfolge zwar immer beliebig. Aber nicht immer läßt sich die Umkehrfunktion der Grenzen bilden, so daß die Grenzen nur in Abhängigkeit einer Variablen angegeben werden können. Bei der Lösung 2 wurde erst über R und dann über φ integriert.

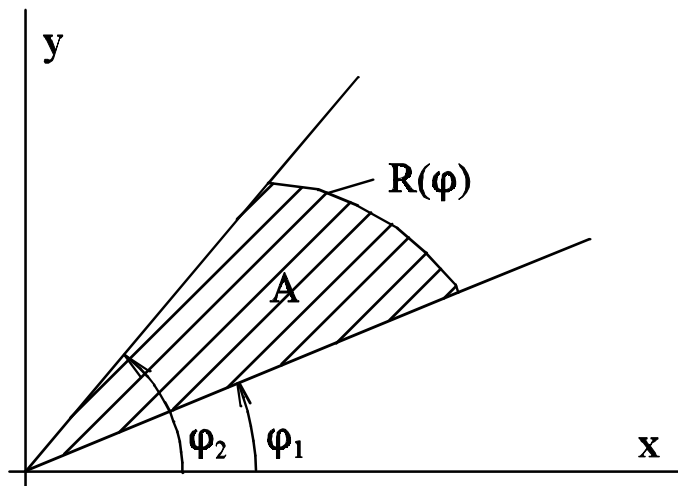


Bild MA7104B

Die Fläche in Bild MA7104B soll berechnet werden

gegeben: $\varphi_1, \varphi_2, R(\varphi)$

$$A = \iint dA = \iint R dR \cdot d\varphi$$

$$A = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\int_{R=0}^{R(\varphi)} R dR \right] d\varphi$$

$$A = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\frac{1}{2} R^2 dR \right]_{R=0}^{R(\varphi)} d\varphi$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} R^2(\varphi) d\varphi$$

Aufgabe 7.10.2 c rechnen

7.10.5. Integrale in Zylinderkoordinaten

In den letzten zwei Unterkapiteln, erhielt man ein Flächenelement

$$\begin{array}{ll} \text{Polar:} & dA = (R \cdot d\varphi) \cdot (dR) \\ \text{Kart.} & dA = dx \cdot dy \end{array}$$

durch Multiplikation der Längen in Richtung der Einheitsvektoren. Ebenso setzt sich das Volumenelement durch Multiplikation der drei Einheitsrichtungen zusammen.

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \quad \text{kartesische Koordinaten}$$

Das Volumenelement in Zylinderkoordinaten setzt sich ebenfalls aus den Längen in den Einheitsrichtungen

$$\begin{array}{l} \text{in } R \quad dR \\ \text{in } \varphi \quad R d\varphi \\ \text{in } z \quad dz \end{array}$$

$$\text{zusammen:} \quad dV = (R \cdot d\varphi) \cdot (dR) \cdot (dz) = R \cdot dR \cdot d\varphi \cdot dz$$

Obige Formel lässt sich auch als Erweiterung der Fläche in Polarkoordinaten mit zusätzlicher Multiplikation in z-Richtung erklären.

Wenn man eine Koordinate konstant setzt so ergeben sich Flächen. In Kartesischen Koordinaten sind dieses Ebenen z.B. $y = \text{const}$ ist eine Ebene parallel zur x-z-Ebene. In Zylinderkoordinaten können die drei Variablen R , φ und z konstant gesetzt werden. Die Flächenelemente in Richtung der verbleibenden Koordinaten werden dann zum Flächenelement multipliziert:

$R = \text{const}$ Zylinder-Mantelfläche

$$dA = (R \cdot d\varphi) \cdot (dz) = R \cdot d\varphi \cdot dz$$

$z = \text{const}$ Kreisscheiben

$$dA = (R \cdot d\varphi) \cdot (dR) = R \cdot dR \cdot d\varphi$$

$\varphi = \text{const}$ Halbebenen (weniger von Bedeutung)

$$dA = (dR) \cdot (dz)$$

Beispiel 1: Das Volumen eines Hohlzylinders mit den Außenradius R_2 , den Innenradius R_1 und der Länge l ist zu berechnen.

$$V = \int_{z=0}^l \int_{R=R_1}^{R_2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \cdot R \cdot dR \cdot dz$$

Wegen der Unabhängigkeit der Grenzen lässt sich umformen:

$$\begin{aligned} V &= \left[\int_{R=R_1}^{R_2} R dR \right] \cdot \left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right] \cdot \left[\int_{z=0}^l dz \right] \\ V &= \left[\frac{1}{2} R^2 \right]_{R=R_1}^{R_2} \cdot \left[\varphi \right]_{\varphi=0}^{2\pi} \cdot \left[z \right]_{z=0}^l \\ V &= \left[\frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2) \right] \cdot [2\pi] \cdot [l] = \pi (R_2^2 - R_1^2) \cdot l \end{aligned}$$

Beispiel 2: Das Volumen eines Zylinders aus dem konisch ein Anteil herausgeschnitten wurde nach Bild MA7105A ist zu berechnen:

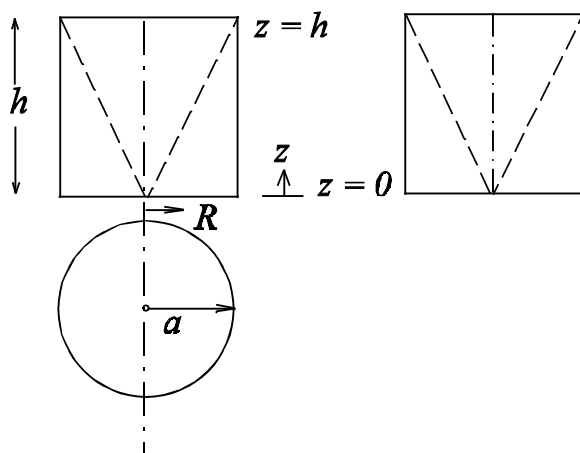


Bild MA7105A

Das Volumen lässt sich mathematisch beschreiben durch die Grenzen

$$\begin{array}{lll} R = 0 & z = 0 & \varphi = 0 \\ R = a & z = h * \frac{R}{a} & \varphi = 2\pi \end{array}$$

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{R=0}^a \int_{z=0}^{h \frac{R}{a}} dz * R * dR * d\varphi$$

Die Integration von φ unabhängig ist, kann diese multiplikativ separiert werden:

$$V = \left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} \varphi \right] * \int_{R=0}^a \left[\int_{z=0}^{h \frac{R}{a}} dz \right] * R dR = 2\pi \int_{R=0}^a z \left[h \frac{R}{a} \right] R dR$$

$$V = 2\pi * \int_{R=0}^a h * \frac{R}{a} * R dR = \frac{2\pi * h}{a} \int_{R=0}^a R^2 dR$$

$$V = \frac{2\pi * h}{a} * \frac{1}{3} R^3 \bigg|_{R=0}^a$$

$$V = \frac{2}{3} \pi * h * a^2$$

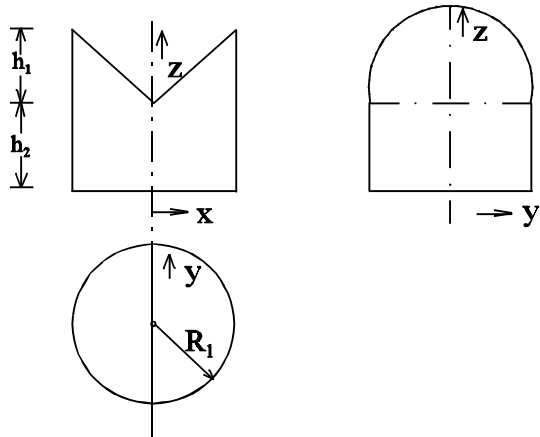
Beispiel 3:

Bild MA7105B

Von der oberen dargestellten Anordnung (eingeschnittener Zylinder) sollen berechnet werden:

- die Oberfläche des Zylindermantelfläche A.
- das Volumen V

a) Zylindermantelfläche A

Aus Bild MA7105B ergibt sich die Höhe der Zylindermantelfläche in z-Richtung

$$h(x) = h_2 + h_1 \cdot \frac{x}{R_1} \quad x > 0$$

Da hier besser (nach der Form der Geometrie) in Zylinderkoordinaten gerechnet werden sollte, wird ersetzt:

$$x = R_1 \cdot \cos(\varphi) \quad -90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$$

und oben eingesetzt ergibt:

$$h(\varphi) = h_2 + h_1 \cdot \cos(\varphi) \quad -90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$$

Das Flächenelement für Zylindermantelflächen beträgt:

$$dA = R \cdot d\varphi \cdot dz$$

$$A = \int \int dA = 4 \int_{\varphi=0}^{90^\circ} \int_{z=0}^{h(\varphi)} dz \cdot R \cdot d\varphi$$

$$A = 4 \int_{\varphi=0}^{90^\circ} h(\varphi) \cdot R_1 \cdot d\varphi$$

$$A = 4R_1 \int_{\varphi=0}^{90^\circ} [h_2 + h_1 \cdot \cos(\varphi)] d\varphi$$

$$A = 4R_1 \left[h_2 \cdot \varphi + h_1 \cdot \sin(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=90^\circ = \pi/2}$$

$$A = 4R_1 \left[h_2 \cdot \frac{\pi}{2} + h_1 [\sin(90^\circ) - \sin(0^\circ)] \right]$$

$$A = 2R_1 \cdot \pi \cdot h_2 + 4R_1 h_1$$

b) Volumen

$$dV = dz * R * dR * d\varphi$$

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{R=0}^{R_1} \int_{z=0}^{h(\varphi,z)} dz * R * dR * d\varphi$$

$$V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{R=0}^{R_1} h(\varphi,z) R * dR * d\varphi$$

$$h(\varphi,z) = h_2 + \frac{h_1}{R_1} x \quad x \geq 0 \quad x = R * \cos(\varphi)$$

$$h(\varphi,z) = h_2 + \frac{h_1}{R_1} R * \cos(\varphi)$$

$$V = 4 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left\{ \int_{R=0}^{R_1} \left[h_2 + \frac{h_1}{R_1} R * \cos(\varphi) \right] R dR \right\} d\varphi$$

$$V = 4 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left\{ \int_{R=0}^{R_1} \left[h_2 * R + \frac{h_1}{R_1} \cos(\varphi) R^2 \right] dR \right\} d\varphi$$

$$V = 4 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left\{ \int_{R=0}^{R_1} \left[\frac{h_2}{2} * R^2 + \frac{h_1}{3R_1} \cos(\varphi) R^3 \right]_{R=0}^{R_1} \right\} d\varphi$$

$$V = 4 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left\{ \frac{h_2 * R_1^2}{2} + \frac{h_1 * R_1^2}{3} \cos(\varphi) \right\} d\varphi$$

$$V = 4R_1^2 \left[\frac{h_2}{2} \varphi + \frac{h_1}{3} * \sin(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\pi/2}$$

$$V = R_1^2 * h_2 * \pi + \frac{4}{3} * h_1 * R_1^2$$

Aufgabe 7.10.3 a und 7.10.4 rechnen

7.10.6. Integrale in Kugelkoordinaten

Ein Punkt in Kugelkoordinaten wird repräsentiert durch die drei Werte:

- r - Abstand vom Ursprung
- φ - Winkel in der x-y-Ebene projiziert
- ϑ - Winkel von der z-Achse zum Punkt

Weitere Einzelheiten sind im Kap. 4.1.2.3 und Kap. 6.12.7.3 zu ersehen. Linienelemente in Richtung der Koordinatenrichtung (gleich der Richtung der Einheitsvektoren) sind nach Kap. 6.12.7.3:

dr	in r-Richtung
$r \sin(\vartheta) d\varphi$	in φ -Richtung
$r d\vartheta$	in ϑ -Richtung

Das Volumenelement ergibt sich die Multiplikation oberer drei Längen:

$$dV = r^2 dr \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$$

und das Volumen in integraler Form

$$V = \iiint dV = \iiint r^2 dr \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$$

r = const (Flächen in ϑ und φ -Richtung) $\Rightarrow$ Kugeloberflächen

$$dA = r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$$

φ = const (Flächen in r und ϑ -Richtung) $\Rightarrow$ Halbebenen

$$dA = r dr d\vartheta$$

ϑ = const (Flächen in r und φ -Richtung) $\Rightarrow$ Kegeloberflächen

$$dA = r dr \sin(\vartheta) d\varphi$$

Beispiel 1:

Das Volumen einer Kugel mit Radius a ist zu berechnen.

$$V = \iiint r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta dr d\varphi$$

$$V = \left[\int_{r=0}^a r^2 dr \right] * \left[\int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin(\vartheta) d\vartheta \right] * \left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right]$$

$$V = \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_{r=0}^a * \left[-\cos(\vartheta) \right]_{\vartheta=0}^{180^\circ} * \left[\varphi \right]_{\varphi=0}^{2\pi}$$

$$V = \frac{1}{3} a^3 * [-(-1) - (-1)] * 2\pi$$

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3$$

Beispiel 2:

Die Oberfläche einer Kugel mit Radius a ist zu berechnen.

$$A = \iint dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{180^\circ} r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi$$

$$r = a = \text{const}$$

$$A = a^2 * \left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right] * \left[\int_{\vartheta=0}^{180^\circ} \sin(\vartheta) d\vartheta \right]$$

$$A = a^2 * \left[\varphi \right]_{\varphi=0}^{2\pi} \left[-\cos(\vartheta) \right]_{\vartheta=0}^{180^\circ}$$

$$A = a^2 * 2\pi * [-(-1) - (-1)] = 4\pi a^2$$

Beispiel 3:

Die Mantelfläche eines Kegels ist zu berechnen.

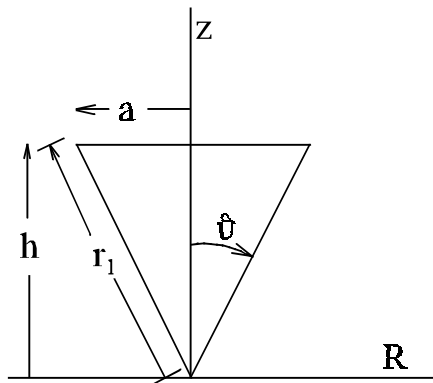


Bild MA7106A

$$A = \iint dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_1} r dr \sin(\vartheta) d\varphi$$

$$\sin(\vartheta) = \text{const} = \frac{a}{r_1}$$

$$A = \frac{a}{r_1} * \left[\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right] * \left[\int_{r=0}^{r_1} r dr \right]$$

$$A = \frac{a}{r_1} * 2\pi * \frac{1}{2} r_1^2 = \pi * a * r_1$$

Aufgabe 7.10.5 rechnen

7.11. Anwendung der Integralrechnung

7.11.1. Bogenlänge

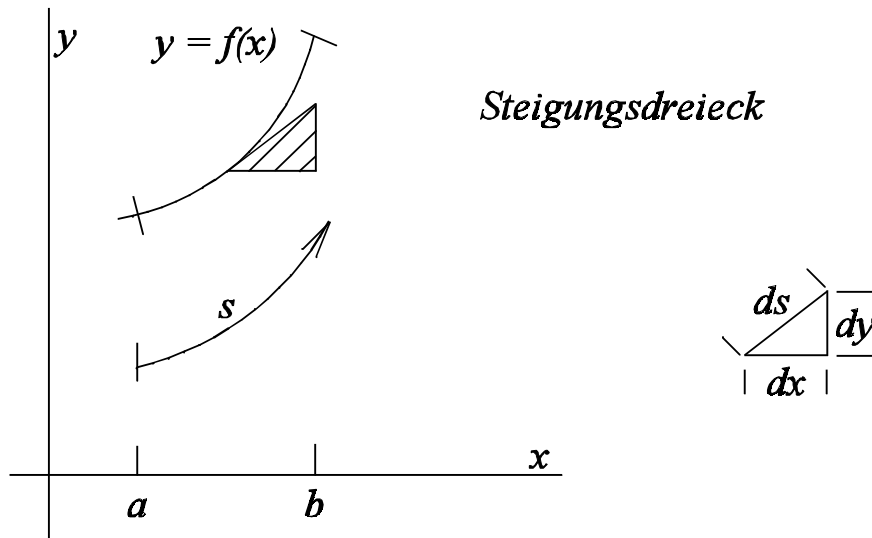


Bild MA7111A

Nach Bild MA7111A lässt sich die differentielle Bogenlänge ds mit Hilfe des Pythagoras bestimmen:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} * dx = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$s = \int ds$$

$$s = \int_{x=a}^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Die Bogenlänge einer Funktionskurve im Intervall $[a,b]$ ist nur abhängig von der Steigung im Intervall.

Aufgabe 7.11.1 a rechnen.

7.11.2. Volumen von Rotationskörpern

a) **Annahme:** Volumen begrenzt durch untere Angabe und rotiert um die x-Achse

$$x = a \quad y = f_1(x)$$

$$x = b \quad y = f_2(x)$$

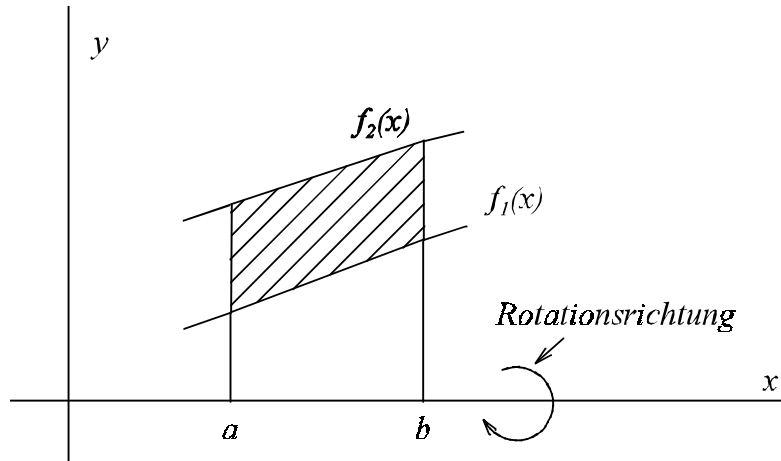


Bild MA7112A

Das Volumen der Anordnung nach Bild MA7112A lässt sich berechnen aus differentieller Länge in x-Richtung dx multipliziert mit der Fläche A senkrecht zur x-Richtung:

$$dV = A \cdot dx$$

Die Fläche A senkrecht zur x-Richtung ist die Fläche einer Kreisscheibe mit dem Außenradius $f_2(x)$ und dem Innenradius $f_1(x)$:

$$A = \pi [f_2^2(x) - f_1^2(x)]$$

Daraus ergibt sich das Volumen

$$V = \int dV = \int A dx$$

$$V = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx$$

Aufgabe 7.11.2 a rechnen.

b) **Annahme:** Volumen begrenzt durch untere Angabe rotiert um die y-Achse

$$x = a \quad y = f_1(x)$$

$$x = b \quad y = f_2(x)$$

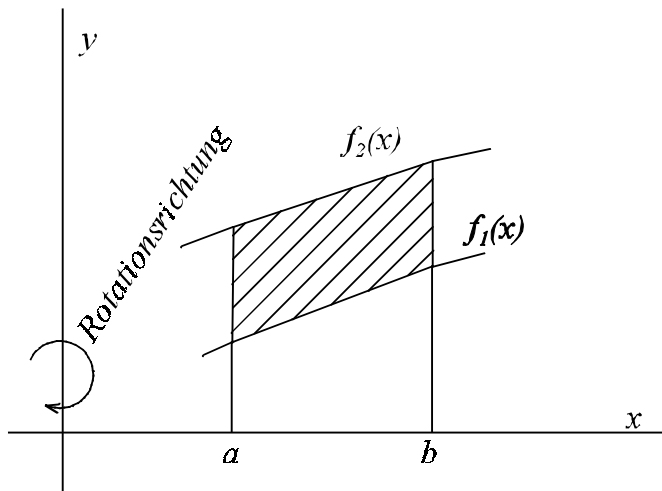


Bild MA7112B

Für das Volumenelement ergibt sich nach Bild MA7112B

$$dV = A \cdot dx$$

mit A als Mantelfläche eines Zylinders (Kreising)

$$A = 2\pi x [f_2(x) - f_1(x)]$$

Daraus ergibt sich das Volumen

$$V = \int dV = \int A dx$$

$$V = 2\pi \int_{x=a}^b [f_2(x) - f_1(x)] \cdot x \cdot dx$$

Aufgabe 7.11.3 a rechnen.

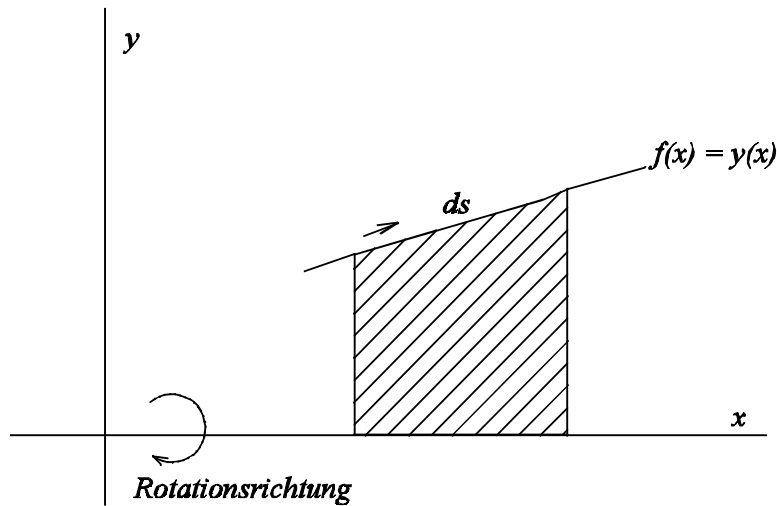
7.11.3. Oberfläche von Rotationskörpern

Bild MA7113A

Das Flächenelement des Rotationskörpers um die x-Achse nach Bild MA7113A ergibt sich der Länge ds multipliziert mit der Rotationslänge $l(x)$:

$$dA = l(x) \cdot ds$$

$$ds = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad (\text{Kap. 7.11.1})$$

$$l(x) = 2\pi \cdot y(x) \quad (\text{Kreisumfang})$$

$$A = \int dA = \int l(x) ds$$

$$A = 2\pi \int y(x) \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

Aufgabe 7.11.4 a rechnen.

7.11.4. Massenträgheitsmoment

Aus der Physik (Mechanik) bekannt ist das Massenträgheitsmoment eines punktförmigen Körpers im Abstand r_i .

$$\theta_i = R_i^2 * m_i$$

Für n Einzel-Massen ergibt sich das gesamte Massenträgheitsmoment durch Aufsummierung

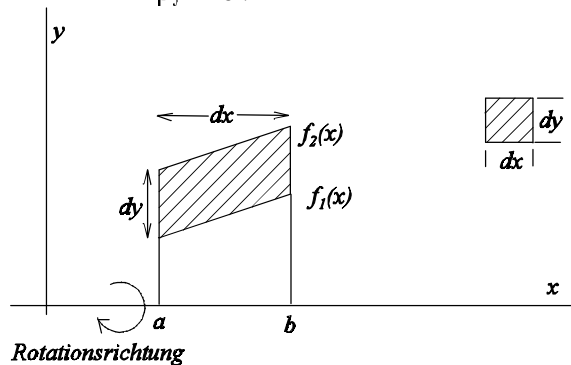
$$\theta = \sum_{i=1}^n R_i^2 * m_i$$

Aufsummierung, da denkt man mathematisch gesehen an den Grenzübergang zur Integralrechnung. Damit kann das Massenträgheitsmoment beliebiger Körper berechnet werden. Obige Gleichung als Integral geschrieben ergibt:

$$\theta = \int R^2 * dm$$

Bei Annahme konstanter Dichte ($dm = \rho dV$) gilt:

$$\Theta = \rho \int R^2 * dV \quad (1)$$



Interessant ist in erster Linie das Massenträgheitsmoment von Rotationskörpern, weil elektrische Antriebe meist aus Rotationskörpern bestehen. Bei Annahme eines Rotationskörpers um die x-Achse nach Bild MA7114A erhält man für das rotierende Element (dx, dy) das Volumenelement

Bild MA7114A

$$dV = dA * l(x,y) = dx * dy * l(x,y)$$

mit der Länge $l(x,y)$ als Rotationslänge des Elementes (dx, dy)

$$l(x,y) = 2\pi * y$$

Damit kann das Volumenelement in der Form

$$dV = 2\pi y dx dy \quad (2)$$

angegeben werden. In (1) ist R der Abstand zur Rotationsachse. Nach Bild MA7114A ist der Abstand zur Rotationsachse y

$$R = y \quad (3)$$

Mit (1), (2) und (3) ergibt sich

$$\Theta = \rho \int \int y^2 * 2\pi y dy dx$$

Erst wird über y integriert und dann über x . Die Grenzen lassen sich aus Bild MA7114A ablesen

$$\theta = 2\pi \rho \int_{x=a}^b \left[\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} y^3 dy \right] dx$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \rho \int_{x=a}^b [f_2^4(x) - f_1^4(x)] dx$$

Aufgabe 7.11.5. rechnen.

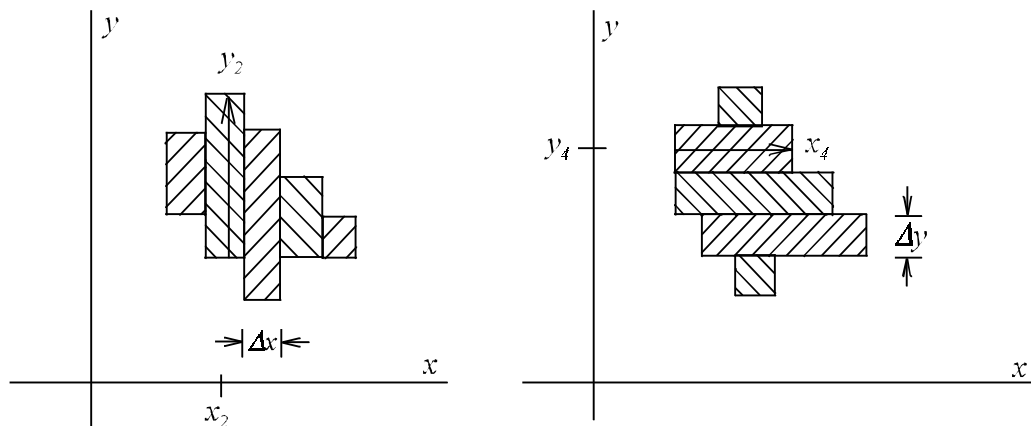
7.11.5. Flächenschwerpunkte

Bild MA7115A

Im Diskreten (endliche Flächen) erhält man den Flächenschwerpunkt in der einer bestimmten Richtung, indem die mit dem Abstand gewichteten Flächen aufsummiert werden und durch die Gesamtfläche dividiert wird:

$$x_s = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} \qquad y_s = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$$

Aus Bild MA7115A erhält man:

$$A_i = y_i \cdot \Delta x \qquad A_i = x_i \cdot \Delta y$$

Somit kann der Schwerpunkt angegeben werden als:

$$x_s = \frac{\sum x_i y_i \Delta x}{\sum y_i \Delta x} \qquad y_s = \frac{\sum y_i x_i \Delta y}{\sum x_i \Delta y}$$

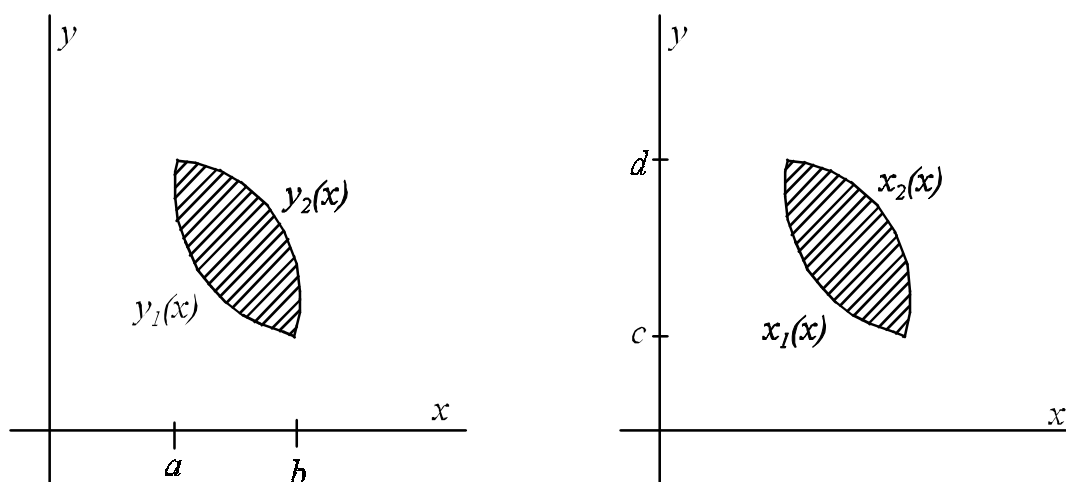


Bild MA7115B

Für die Bild MA7115B dargestellten Flächen ergeben sich mit dem Grenzübergang

$$\sum \rightarrow \int \qquad \Delta \rightarrow d$$

und der Fläche

$$A = \int_{x=a}^b [y_2(x) - y_1(x)] dx = \int_{y=c}^d [x_2(y) - x_1(y)] dy$$

die Schwerpunktkoordinaten

$$x_s = \frac{1}{A} \int_{x=a}^b [y_2(x) - y_1(x)] x dx \quad y_s = \frac{1}{A} \int_{y=c}^d [x_2(y) - x_1(y)] y dy$$

wobei durch den Grenzübergang auch ersetzt wurde (vergleiche Bild Ma7115A und MA7115B):

$$y_i = y_2(x) - y_1(x)$$

$$x_i = x_2(y) - x_1(y)$$

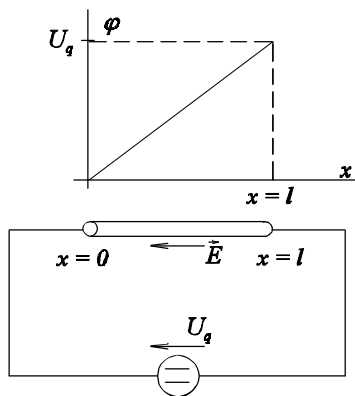
Aufgabe 7.11.8 b rechnen

7.12. Vektoren und Linienintegrale

7.12.1. Der Begriff Linienintegral an Beispielen

Beispiel 1:

Zusammenhang: Potential - Feldstärke eindimensional



$$\varphi = \frac{U}{l} * x$$

$$E = \frac{U}{l}$$

$$E_x = -\frac{U}{l}$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Bild MA7121A

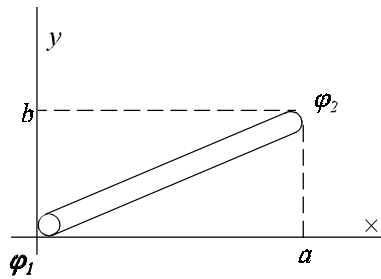
eindimensional: $d\varphi = -E_x dx$

$$\int_1^2 d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 E_x * dx$$

Obere Formel gilt nur für eindimensionales Linienintegral.

Beispiel 2:

zweidimensionales Beispiel



$$\varphi(x) = \frac{U_q}{a} * x$$

$$\varphi(y) = \frac{U_q}{b} * y$$

Bild MA7121B

$$E_x = -\frac{U_q}{a} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{U_q}{b} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi)$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -E_x * \Delta x = -E_x * a = U_q$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -E_y * \Delta y = -E_y * b = U_q$$

=> auf zwei verschiedenen geometrischen Wegen $\varphi_2 - \varphi_1$ berechnet

Beispiel 3:

Potentialberechnung, zweidimensional aus der Feldstärke

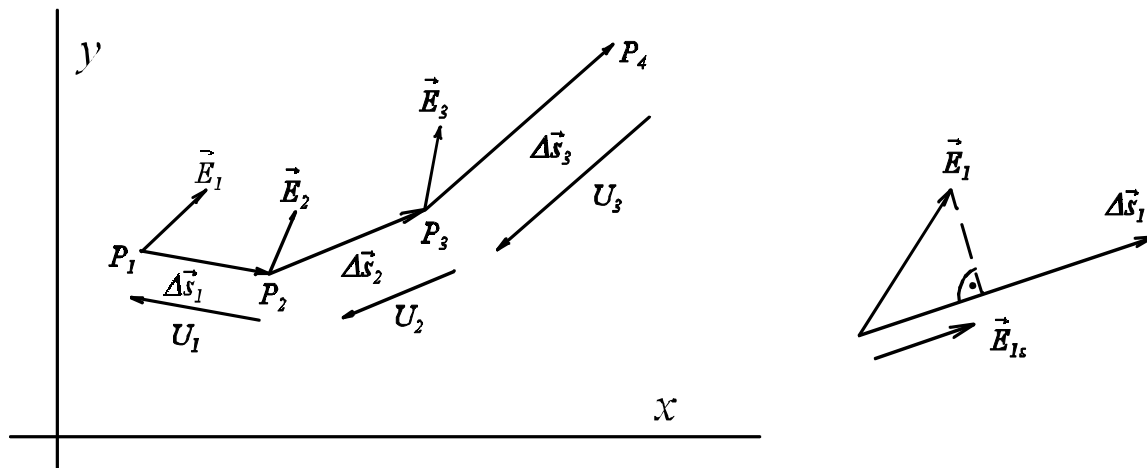
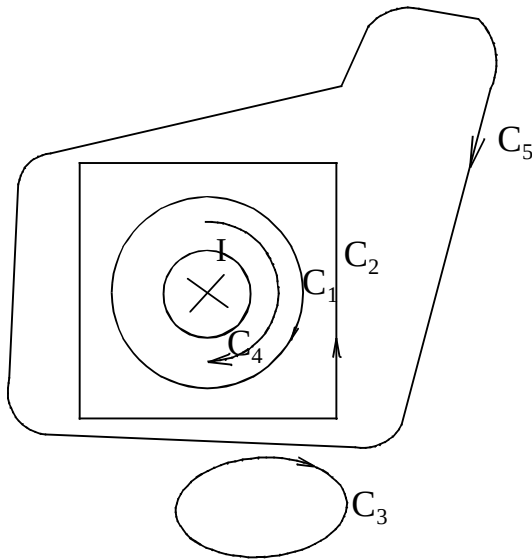


Bild MA7121C

$$U_1 = -E_{1s} * \Delta s_1 = -E_1 * \Delta s_1 * \cos(\angle \vec{E}_1, \Delta \vec{s}_1) = -\vec{E}_1 * \Delta \vec{s}_1$$

$$\varphi_4 - \varphi_1 = (U_1 + U_2 + U_3) = -(\vec{E}_1 * \Delta \vec{s}_1 + \vec{E}_2 * \Delta \vec{s}_2 + \vec{E}_3 * \Delta \vec{s}_3) = -\sum_{i=1}^3 \vec{E}_i * \Delta \vec{s}_i$$

$$\varphi_4 - \varphi_1 = -\int \vec{E} * d\vec{s}$$

Beispiel 4:

$$\int_{C_1} \vec{H} * d\vec{s} = I$$

$$\int_{C_2} \vec{H} * d\vec{s} = -I$$

$$\int_{C_3} \vec{H} * d\vec{s} = 0$$

$$\int_{C_4} \vec{H} * d\vec{s} = \frac{I}{2}$$

$$\int_{C_5} \vec{H} * d\vec{s} = I$$

Bild MA7121E

Aus Bild MA712E folgt, daß das Integral u.U. wegunabhängig ist.

$\text{rot } \vec{v} = 0$.

7.12.2. Definition

$$I = \int_C \vec{a} * d\vec{s}$$

Aussage: Es ist das Skalarprodukt aus Vektor $\vec{a}$ und Linienelement $d\vec{s}$ zu bilden und über den Weg C zu integrieren, wobei $d\vec{s}$ in Richtung des vorgegebenen Weges C gerichtet ist.

7.12.3. Parameterdarstellung des Weges C

Um oberes Integral zu berechnen, kann der Weg parametrisiert werden. Als Wiederholung der Parameterkurve des schiefen Wurfs (Erdbeschleunigung a wird in negativer z -Richtung):

$$\ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{x}} = \vec{v} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} - a * t \end{pmatrix} \quad \vec{s} = \vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x} * t \\ y_0 + v_{0y} * t \\ z_0 + v_{0z} * t - \frac{1}{2} a t^2 \end{pmatrix}$$

Oberes $\vec{x}$ ist die Parameterdarstellung der Bewegung des schiefen Wurfs.

Allgemeine Beschreibung des Weges

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Bildung des Linienelements $d\vec{s}$ durch Differenzieren

$$d\vec{s} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} * dt \\ \frac{dy}{dt} * dt \\ \frac{dz}{dt} * dt \end{pmatrix}$$

$$d\vec{s} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} * dt$$

Es gibt bekanntlich viele verschiedene Wege vom Punkt A nach Punkt B.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Weg in Koordinaten-Richtung

$$\vec{P}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow C_1 \rightarrow \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow C_2 \rightarrow \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow C_3 \rightarrow \vec{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Direkter Weg $\vec{P}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow C_0 \rightarrow \vec{P}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung: a) Der Weg wird aufgeteilt in die drei Einzelwege

$$C_1 \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad t = 0 \dots 1$$

$$C_2 \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad t = 0 \dots 1$$

$$C_3 \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \quad t = 0 \dots 1$$

b)

$$C_0 \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \quad t = 0 \dots 1$$

7.12.3.1. Zahlenwertbeispiele**Beispiel 1:**

Gegeben ist das Vektorfeld

$\vec{d} = \text{grad}(\varphi)$
mit

$$\varphi = x^2 \cdot y + z^3 \cdot y$$

a) Es ist das Linienintegral

$$I = \int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} \vec{d} \cdot d\vec{s}$$

zu bilden mit

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a1) Es ist der Weg in Koordinatenrichtungen (erst x dann y danach z) zu parametrisieren und anschließen I_A zu berechnen.a2) Es ist der direkte Weg zu parametrisieren und anschließend das Integral I_B zu bilden.

b) Es ist die Differenz

$$I_C = \varphi(\vec{P}_2) - \varphi(\vec{P}_1)$$

zu bilden

Lösung:

$$\vec{d} = \text{grad}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + z^3 \\ 3z^2 \cdot y \end{pmatrix}$$

a1)

$$I_1 \Rightarrow \text{Weg } C_1 \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad t = 0 \dots 2 \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_2 \Rightarrow \text{Weg } C_2 \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad t = 0 \dots 3 \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \cdot t \\ 2^2 + 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_3 \Rightarrow \text{Weg } C_3 \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \quad t = 0 \dots 4 \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ 2^2 t + t^3 \\ 3 \cdot t^2 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \int_{t=0}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

$$I_2 = \int_{t=0}^3 \begin{pmatrix} 4t \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_{t=0}^3 4 dt = 12$$

$$I_3 = \int_{t=0}^4 \begin{pmatrix} 12 \\ 4+t^3 \\ 9t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_{t=0}^4 9t^2 dt = \frac{9}{3} t^3 \Big|_{t=0}^4 = 192$$

$$I_A = I_1 + I_2 + I_3 = 204$$

$$\text{a2) } I_B \Rightarrow \text{Weg } C_0 \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} dt \quad t = 0 \dots 1$$

$$I_B = \int_{C_0} \vec{d} * d\vec{s}$$

$$I_B = \int_{t=0}^1 \begin{pmatrix} 2*(2t)*(3t) \\ (2t)^2 + (4t)^3 \\ 3*(4t)^2*(3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} dt$$

$$I_B = \int_{t=0}^1 \begin{pmatrix} 12t^2 \\ 4t^2 + 64t^3 \\ 144t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} dt = \int_{t=0}^1 (24t^2 + 12t^2 + 192t^3 + 576t^3) dt$$

$$I_B = \int_{t=0}^1 (36t^2 + 786t^3) dt = \left[12t^3 + 192t^4 \right]_{t=0}^1 = 204$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \varphi(\vec{P}_1) &= 0 \\ \varphi(\vec{P}_2) &= 2^2 * 3 + 4^3 * 3 = 204 \end{aligned}$$

Fazit: Das gleiche Ergebnis wurde auf drei verschiedenen Arten berechnet. Das Ergebnis ist wegunabhängig und lässt sich aus der Differenz der zu gehörigen Skalarfunktion bestimmen wenn gilt

$$\vec{d} = \text{grad}(\varphi)$$

$$\int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2} \vec{d} * d\vec{s} = \varphi(\vec{P}_2) - \varphi(\vec{P}_1)$$

Das einfachste wäre, wenn möglich, die Potentialfunktion φ zu suchen, siehe Kap. 7.12.3.2.

Beispiel 2: Für das Vektorfeld

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} y^2 \\ z^3 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

sind auf gleichen Wegen wie bei Beispiel 1 die Linienintegrale zu bilden

$$a) \quad I_A = \int_{C_A} \vec{d} * d\vec{s} \quad \text{und} \quad I_B = \int_{C_B} \vec{d} * d\vec{s}$$

$$a) \quad C_1 \Rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad t = 0 \dots 2$$

$$I_1 = \int_{t=0}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int 0 dt = 0$$

$$C_2 \Rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad t = 0 \dots 3$$

$$I_2 = \int_{t=0}^3 \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \\ 2^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int 0 dt = 0$$

$$C_3 \Rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \quad t = 0 \dots 4$$

$$I_3 = \int_{t=0}^4 \begin{pmatrix} 3^2 \\ t^3 \\ 2^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_{t=0}^4 16 dt = 64$$

$$I_A = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + 0 + 64$$

$$b) \quad C_B \Rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \\ 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} dt \quad t = 0 \dots 1$$

$$I_B = \int_{t=0}^1 \begin{pmatrix} (3t)^2 \\ (4t)^3 \\ (2t)^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} dt = \int_{t=0}^1 \begin{pmatrix} 9t^2 \\ 64t^3 \\ 16t^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} dt$$

$$I_B = \int_0^1 (18t^2 + 192t^3 + 64t^4) dt = \left[6t^3 + 48t^4 + 12.8t^5 \right]_{t=0}^1 = 66.8$$

Anmerkung: Wieso gibt es hier unterschiedliche Ergebnisse? Antwort darauf im folgenden Abschnitt.

7.12.3.2. Versuch: Darstellung des Vektorfeldes durch den Gradienten einer Skalarfunktion

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{a} = \vec{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(x,y,z) \\ a_y(x,y,z) \\ a_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Es soll versucht werden, eine skalare Funktion zu finden, für die gilt:

$$\vec{a} = \text{grad}(\varphi)$$

Einsetzen der Definition für den Gradienten liefert:

$$\text{grad}(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Ein komponentenweiser Vergleich ergibt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a_x$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = a_y$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = a_z$$

Wie kommt man von den partiellen Ableitungen zu der Funktion selbst? Antwort: durch Integration:

$$\varphi = \int a_x(x,y,z)dx + C_1(y,z)$$

$$\varphi = \int a_y(x,y,z)dy + C_2(x,z)$$

$$\varphi = \int a_z(x,y,z)dz + C_3(x,y)$$

Anmerkung 1: Da beim Bilden der partiellen Ableitung, Funktionen, die von anderen Koordinaten abhängig sind, wegfallen, muß die zugehörige Integrationskonstante als eine Funktion der restlichen Koordinaten angesetzt werden.

Anmerkung 2: Es gibt drei Bestimmungsgleichungen für φ . Alle drei müssen verglichen werden. Ist keine Übereinstimmung herzustellen, ist es nicht möglich die Vektorfunktion durch einen Gradienten darzustellen.

Beispiel 1: Es soll versucht werden, die Vektorfunktion aus Beispiel 1 (Kap. 7.12.3.1)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + z^3 \\ 3z^2y \end{pmatrix}$$

als Skalarfunktion darzustellen.

Lösung:

$$\begin{aligned} a_x &= 2xy & \varphi &= \int a_x dx = \int 2xy dx \\ a_y &= x^2 + z^3 & \varphi &= \int a_y dy = \int (x^2 + z^3) dy \\ a_z &= 3z^2y & \varphi &= \int a_z dz = \int 3z^2y dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= x^2y + C_1(y, z) \\ \varphi &= x^2y + z^3y + C_2(x, z) \\ \varphi &= z^3y + C_3(x, y) \end{aligned}$$

Umsortieren:

$$\begin{aligned} \varphi &= x^2y + C_1(y, z) \\ \varphi &= x^2y + z^3y + C_2(x, z) \\ \varphi &= C_3(x, y) + z^3y \end{aligned}$$

$$\text{Vergleich:} \quad C_1(y, z) = z^3y \quad C_2(x, z) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = x^2y + z^3y$$

Beispiel 2: Es soll versucht werden, das Vektorfeld aus Beispiel 2, Kap. 7.12.3.1

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} y^2 \\ z^3 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

als Skalarfunktion darzustellen.

Lösung:

$$\begin{aligned} a_x &= y^2 & \varphi &= \int a_x dx = \int y^2 dx \\ a_y &= z^3 & \varphi &= \int a_y dy = \int z^3 dy \\ a_z &= x^4 & \varphi &= \int a_z dz = \int x^4 dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= y^2x + C_1(y, z) \\ \varphi &= z^3y + C_2(x, z) \\ \varphi &= x^4z + C_3(x, y) \end{aligned}$$

Auch durch Umsortieren ist keine Übereinstimmung festzustellen. Damit ist die Funktion $\vec{a}$ nicht durch einen Gradienten darstellbar.

7.12.3.3. Rechenregeln Linienintegral

Die Vektorfunktion

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x(x,y,z) \\ a_y(x,y,z) \\ a_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

läßt sich als

$$\vec{a} = \text{grad}(\varphi)$$

darstellen, wenn gilt

$$\text{rot}(\vec{a}) = 0$$

Beweis: $\text{rot}[\text{grad}(\varphi)] = 0$

(Kap. 6.12.6)

In einem wirbelfreien Feld ($\text{rot}(\vec{a}) = 0$) ist das Linienintegral wegunabhängig, wenn sich die unterschiedlichen Wege in einem zusammenhängenden wirbelfreien Gebiet befinden.

Anschauliches Beispiel:

Im inneren eines Leiters gilt: $\text{rot}(\vec{H}) \neq 0$

Im äußeren eines Leiters gilt: $\text{rot}(\vec{H}) = 0$

Also ist das Linienintegral:

$$\int \vec{H} * d\vec{s}$$

außerhalb eines Leiters wegunabhängig, wenn sich die Wege in einem zusammenhängenden Gebiet befinden dazu siehe Bild MA71234A

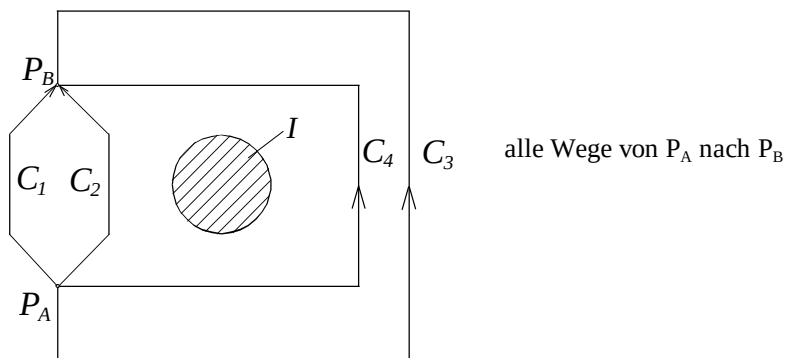


Bild MA71234A

$$\int_{C_1} \vec{H} * d\vec{s} = \int_{C_2} \vec{H} * d\vec{s} \neq \int_{C_3} \vec{H} * d\vec{s} = \int_{C_4} \vec{H} * d\vec{s}$$

Die Wege C_1 und C_2 sowie C_3 und C_4 sind in einem zusammenhängenden Gebiet, nicht aber die Wege C_2 und C_4 .

Eselsbrücke: Zusammenhängenden Gebiete lassen sich umkreisen und mit einem Band zusammenziehen.

Zweite Möglichkeit das Potential eines Vektorfeldes zu berechnen:

Wenn das Feld quellenfrei ist ($\text{rot}(\vec{a}) = 0$) kann, wie beim einführenden Beispiel, das Potential berechnet werden, indem in Koordinatenrichtung integriert wird:

$$\varphi = \int_{t=0}^x a_x(t, 0, 0) * dt + \int_{t=0}^y a_y(x, t, 0) * dt + \int_{t=0}^z a_z(x, y, t) * dt$$

Beispiel: Es soll versucht werden, die Vektorfunktion aus Beispiel 1, Kap. 7.12.3.1 und Kap. 7.12.3.2

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + z^3 \\ 3z^2y \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a_x(t, 0, 0) &= 0 \\ a_y(x, t, 0) &= x^2 \\ a_z(x, y, t) &= 3 * t^2 * y \end{aligned}$$

als Skalarfunktion darzustellen.

$$\text{rot}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 2xy & \vec{e}_x \\ \frac{\partial}{\partial y} & x^2 + z^3 & \vec{e}_y \\ \frac{\partial}{\partial z} & 3z^2y & \vec{e}_z \end{vmatrix}$$

$$\text{rot}(\vec{a}) = \vec{e}_x * \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & x^2 + z^3 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 3z^2y \end{vmatrix} - \vec{e}_y * \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 2xy \\ \frac{\partial}{\partial z} & 3z^2y \end{vmatrix} + \vec{e}_z * \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 2xy \\ \frac{\partial}{\partial y} & x^2 + z^3 \end{vmatrix}$$

$$\text{rot}(\vec{a}) = \vec{e}_x * (3z^2 - 3z^2) - \vec{e}_y * (0 - 0) + \vec{e}_z (2x - 2x)$$

$$\text{rot}(\vec{a}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \text{ ist durch Skalarfeld darstellbar}$$

nach obere Formel:

$$\varphi = \int_{t=0}^x 0 * dt + \int_{t=0}^y x^2 * dt + \int_{t=0}^z 3t^2 * y * dt$$

$$\varphi = 0 + \left[x^2 * t \right]_{t=0}^y + \left[t^3 * y \right]_{t=0}^z$$

$$\varphi = x^2 * y + z^3 * y$$

Zusammenfassung

$$\int_{(s_1)} \vec{a} * d\vec{s} = I \qquad s_1: \vec{P}_1 \rightarrow \vec{P}_2$$

A] $\text{rot}(\vec{a}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \text{grad}(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \text{wegunabhängig}$

$$I = \varphi(\vec{P}_2) - \varphi(\vec{P}_1)$$

A1]
$$\varphi(x, y, z) = \int_{t=0}^x a_x(t, 0, 0)dt + \int_{t=0}^y a_y(x, t, 0)dt + \int_{t=0}^z \varphi(x, y, t)dt$$

A2] $\varphi = \int a_x * dx + f_1(y, z)$

$$\varphi = \int a_y * dy + f_2(x, z)$$

$$\varphi = \int a_z * dz + f_3(x, y)$$

B] $\text{rot}(\vec{a}) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{wegabhängig}$

(Methode B immer möglich, aber aufwendiger)

$$s_1: \vec{P}_1 \rightarrow \vec{P}_2 \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} * t = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$x(t) = x_1 + (x_2 - x_1) * t$$

$$y(t) = y_1 + (y_2 - y_1) * t$$

$$z(t) = z_1 + (z_2 - z_1) * t$$

gerader Weg $t = 0 \dots 1$

$$d\vec{s} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} * dt$$

$$\int \vec{a} d\vec{s} = \int_{t=0}^1 \begin{pmatrix} a_x[x(t), y(t), z(t)] \\ a_y[x(t), y(t), z(t)] \\ a_z[x(t), y(t), z(t)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} * dt$$

Wenn der Weg aus mehreren Teilwegen besteht, müssen die einzelnen Integrale zum Gesamtweg addiert werden.

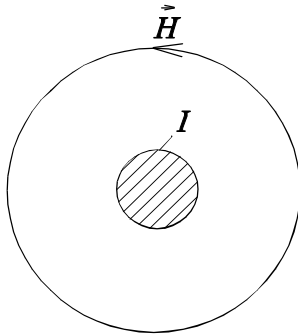
7.12.4. Umlaufintegral

anderer Namen:

- Ringintegral
- geschlossenes Integral

Dieses ist ein Linienintegral was für einen geschlossenen Weg von einem Punkt zum gleichen Punkt definiert ist. Dieses wird durch einen Kreis im Integralzeichen gekennzeichnet.

Beispiel Anwendung:



$$I = \oint \vec{H} * d\vec{s}$$

Bild MA7124A

Das geschlossen Integral $\vec{H} * d\vec{s}$ ist gleich dem umschlossenen Strom, 3. Semester.

Für wirbelfreie Felder [$\text{rot}(\vec{a})=0$] gilt:

$$\oint \vec{a} * d\vec{s} = 0$$

7.12.5. Integral-Sätze

Ohne Ableitung soll angegeben werden:

Satz von Green für die Ebene:

$$\oint_{R.v.G} (Pdx + Qdy) = \iint_{(G)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Satz von Stokes:

$$\iint_{(A)} \text{rot}(\vec{v}) d\vec{A} = \oint_{R.v.A} \vec{v} d\vec{s}$$

Satz von Gauß:

$$\oint_{A.u.G} \vec{v} d\vec{A} = \iiint_{(G)} \text{div}(\vec{v}) dx dy dz$$

8. Reihen

8.1 Einführung

Was sind Reihen? Dazu sollen in dieser Einführung einige Begriffe abgeklärt werden:

- Zahlenfolge und Reihe
- Bedeutung der Reihen
- Begriffe von Folgen
- Begriffe von Reihen

8.1.1. Zahlenfolge und Reihe

Am einfachsten zu verstehen ist der Begriff der Zahlenfolge. Die Zahlenfolge ist eine Aufzählung von Zahlen, nach einer bestimmten Vorschrift. Manchmal ist diese Zahlenfolge ein Abbild der natürlichen Zahlen. Die einfachste Zahlenfolge sind die natürlichen Zahlen selbst:

0, 1, 2, 3, 4, 5,

aber auch das Quadrat der natürlichen Zahlen

0, 1, 2, 4, 9, 16, 25,

oder die Inversen der natürlichen Zahlen

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

sind Zahlenfolgen. Allgemein läßt sich eine Zahlenfolge schreiben

$[a_0,] a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

Der Begriff der Zahlenfolge ist nun bekannt. Was ist nun eine Reihe?

Eine Reihe ist die Aufsummierung von Zahlenfolgen

$R = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

Die obere Grenze ist noch nicht bekannt. Diese soll im Abschnitt 8.1.4. behandelt werden.

8.1.2. Bedeutung der Reihen

In diesem Abschnitt soll die Bedeutung der Reihe erklärt werden.

Wenn man mit dem Taschenrechner e^x eintippt, was passiert dabei? Der Rechner berechnet den Funktionswert mit Hilfe einer Reihe.

Beispiel:

$$e^{0.2} = 1 + \frac{0.2}{1} + \frac{0.2^2}{1*2} + \frac{0.2^3}{1*2*3} + \frac{0.2^4}{1*2*3*4} + \frac{0.2^5}{1*2*3*4*5} + \dots$$

$$e^{0.2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{0.2^i}{i!}$$

Manchmal (Taschenrechner) erfolgt die Berechnung auch mit Hilfe von zwei Reihen, die durcheinander dividiert werden:

$$R = \frac{\sum a_i}{\sum b_i} \qquad R = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sum a_i}{\sum b_i}$$

Eine weitere Bedeutung erlangen die Reihen dadurch, daß komplizierte Ausdrücke durch Reihenentwicklung analytisch zugänglich gemacht werden können. Beispiel: Das Integral $\int [\sin(x)/x]dx$ hat keine Standardfunktion als Lösung. Durch Reihenentwicklung erhält man eine Lösung.

Eine weitere Anwendung ist diskrete Regelungstechnik und die digitale Signalverarbeitung, wo viel mit Summen, auch der Potenzen der natürlichen Zahlen gerechnet wird.

Nicht sinusförmige periodische Vorgänge lassen sich mit Hilfe einer Summe von Sinusschwingungen darstellen, Kap. 9, 3.Semester.

8.1.3. Begriffe von Folgen

a) Bildungsgesetz

Eine Zahlenfolge heißt **rekursiv**, wenn das folgende Element aus seinem Vorgänger mittels Bildungsgesetz berechnet wird.

Beispiel 1:

							Bildungsgesetz	
Nr.	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...	rekursiv	nicht rekursiv
1	2	4	8	16	32	...	$a_1 = 2 \quad a_{i+1} = a_i * 2$	$a_i = 2^i$
2	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	...	$a_1 = 1/2 \quad a_{i+1} = a_i / 2$	$a_i = (1/2)^i$
3	3	9	27	81	243	...	$a_1 = 3 \quad a_{i+1} = a_i * 3$	$a_i = 3^i$
4	6	12	24	48	96	...	$a_1 = 6 \quad a_{i+1} = a_i * 2$	$a_i = 3 * 2^i$
5	$a * q$	$a * q^2$	$a * q^3$	$a * q^4$	$a * q^5$	...	$a_1 = aq \quad a_{i+1} = a_i * q$	$a_i = a * q^i$
6	q^2	q^4	q^6	q^8	q^{10}	...	$a_1 = q \quad a_{i+1} = a_i * q^2$	$a_i = a * q^{2i}$
7	1	2	3	4	5	...	$a_1 = 1 \quad a_{i+1} = a_i + 1$	$a_i = i$
8	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	...	$a_1 = 1 \quad a_{i+1} = \frac{a_i}{a_i + 1}$	$a_i = 1/i$
9	1	4	9	16	25	...	$a_1 = 1 \quad a_{i+1} = a_i + 2\sqrt{a_i} + 1$	$a_i = i^2$
10	1/1	1/4	1/9	1/16	1/25	...	$a_1 = 1 \quad a_{i+1} = \frac{a_i}{1 + 2\sqrt{a_i} + a_i}$	$a_i = \frac{1}{i^2}$
11	1/3	1/5	1/7	1/9	1/11	...	$a_1 = 1/3 \quad a_{i+1} = \frac{a_i}{2a_i + 1}$	$a_i = \frac{1}{2i + 1}$
13	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1*2}$	$\frac{1}{1*2*3}$	$\frac{1}{1*2*3*4}$	$\frac{1}{1*2*3*4*5}$	...	$a_1 = 1 \quad a_{i+1} = \frac{a_i}{i + 1}$	$a_i = \frac{1}{i!}$

Manchmal gelingt es, das Bildungsgesetz von eine Form in die andere umzuformen.

Beispiel: (Umrechnung nicht rekursiv nach rekursiv)

Die Folge Nr. 8 des oberen Beispiels ist gegeben durch

$$a_i = \frac{1}{i}$$

Das folgende Element ergibt sich: $a_{i+1} = \frac{1}{i+1}$

Das Bildungsgesetz nach i umgestellt: $i = \frac{1}{a_i}$

und in a_{i+1} eingesetzt:

$$a_{i+1} = \frac{1}{\frac{1}{a_i} + 1} = \frac{a_i}{a_i + 1}$$

b) Beschränktheit

Eine Zahlenfolge heißt **beschränkt**, wenn alle Glieder der Zahlenfolge zwischen zwei festen Werten liegen:

$$A \leq a_i \leq B$$

c) Monotonie

Eine Zahlenfolge heißt **monoton fallend**, wenn jedes Glied der Folge kleiner als das vorangegangene oder ihm höchstens gleich ist.

$$a_{i+1} \leq a_i$$

Eine Zahlenfolge heißt **monoton steigend**, wenn jedes Glied der Folge größer als das vorangegangene oder ihm mindestens gleich ist.

$$a_{i+1} \geq a_i$$

d) Alternierende Folgen

Eine Folge heißt **alternierend**, wenn aufeinander folgende Glieder unterschiedliches Vorzeichen aufweisen.

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

e) Grenzwert

Eine Zahlenfolge kann, muß aber nicht einen Grenzwert (meist im Unendlichen) haben.

$$GW = \lim_{i \rightarrow \infty} (a_i) \quad \text{meist: } n = \infty$$

$$GW = \lim_{i \rightarrow \infty} (a_i)$$

Beispiel:

$$a_i = i^2 \quad \Rightarrow \quad 0, 1, 2, 4, 9, 16 \quad \Rightarrow \quad \text{kein Grenzwert vorhanden, da } \infty$$

$$a_i = \frac{2i}{i+1} \quad \Rightarrow \quad 0, 1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad GW = 2$$

f) Konvergenz und Divergenz von Folgen

Hat die Zahlenfolge einen Grenzwert, so ist die Folge **konvergent**, ansonsten divergent.

g) Nullfolge

Eine Folge heißt Nullfolge wenn der Grenzwert Null beträgt.

Beispiele:

$$a_i = i \quad \Rightarrow 1, 2, 3, 4, \dots$$

kein GW, divergent, keine Nullfolge, nicht alternierend

$$a_i = \frac{1}{i} \quad \Rightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

GW = 0, konvergent, Nullfolge, nicht alternierend

$$a_i = \frac{i}{i+1} \quad \Rightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

GW = 1, konvergent, keine Nullfolge, nicht alternierend

$$a_i = (-1)^i \frac{2i}{4i+1} \quad \Rightarrow -\frac{2}{5}, \frac{4}{9}, -\frac{6}{13}, \frac{8}{17}, \dots$$

kein GW, divergent, keine Nullfolge, alternierend

$$a_i = (-1)^i \frac{1}{2i+1} \quad \Rightarrow -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$$

GW = 0, konvergent, Nullfolge, alternierend

$$a_i = \frac{3i+2}{5i+1} \quad \Rightarrow \frac{5}{6}, \frac{8}{11}, \frac{11}{16}, \frac{14}{21}, \dots$$

GW = 3/5, konvergent, keine Nullfolge, nicht alternierend

Exakte Berechnung des letzten Grenzwertes:

$$GW = \lim_{i \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3i+2}{4i+1} \right\} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{i}}{5 + \frac{1}{i}}$$

$$GW = \frac{\lim_{i \rightarrow \infty} \{3\} + \lim_{i \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{i} \right\}}{\lim_{i \rightarrow \infty} \{5\} + \lim_{i \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{i} \right\}} = \frac{3 + 0}{5 + 0}$$

8.1.4. Begriffe von Reihen

a) Endliche und unendliche Reihe

Hier soll die in Abschnitt 8.1.1. offen gelassene Frage behandelt werden, welche obere Grenze bei der Summenbildung vorhanden ist. Bei einer **endlichen Reihe** werden nur eine endliche Anzahl von Reihengliedern berücksichtigt, während bei der **unendlichen Reihe** unendlich viele Reihenglieder aufsummiert werden.

Endliche Reihe:
$$R = \sum_{i=0}^n a_i \quad n - \text{endlich}$$

Unendliche Reihe:
$$R = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

Jeder weiß, daß ein Rechner nicht unendlich viele Operation ausführen kann, daher müssen an einer unendlichen Reihe gewisse Bedingungen gestellt werden.

b) Konvergente Reihe

Eine Reihe heißt **konvergent**, wenn der Wert der Reihe bei unendlich vielen Summengliedern gegen einen Grenzwert geht.

c) Divergente Reihe

Eine Reihe heißt **divergent**, wenn der Wert der Reihe bei unendlich vielen Summengliedern keinen oder einen unendlichen Grenzwert hat. Da Konvergenz und Divergenz wichtig sind, sollen diese in Kap. 8.2. noch einmal extra untersucht werden.

d) Teilsumme

Eine Teilsumme ist, wie der Name sagt, ein Teil einer Reihe.

$$R_T = \sum_{i=n_1}^{n_2} a_i$$

e) Restsumme

Die Restsumme R_n ist die Summe von $i = n$ bis ∞

$$R_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i$$

8.2. Konvergenz und Divergenz von Reihen

Satz: Eine nicht konvergente Reihe ist divergent.

Eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Reihe ist, daß die Zahlenfolge der Reihe eine Nullfolge ist.

Beispiele 1 bis 3:

$$R_1 = \sum i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots \quad \Rightarrow \quad \text{keine Nullfolge } R = \infty$$

$$R_2 = \sum \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \quad \Rightarrow \quad \text{Nullfolge, } R = \infty$$

$$R_3 = \sum \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \quad \Rightarrow \quad \text{Nullfolge, } R = \frac{\pi^2}{6}$$

R_1	keine Nullfolge, Folge divergent	$R_1 = \infty$	Reihe divergent
R_2	Nullfolge, Folge konvergent	$R_2 = \infty$	Reihe divergent
R_3	Nullfolge, Folge konvergent	$R_3 = \frac{\pi^2}{6}$	Reihe konvergent

Aus der oberen Tabelle folgt, daß für eine konvergente Reihe eine Nullfolge notwendig ist. Dieses reicht aber nicht aus.

Obwohl die mittlere Reihe eine Nullfolge ist, hat diese Reihe keine Konvergenz. Eine notwendige Bedingung sagt nur aus, wenn diese nicht erfüllt ist, daß dann die gegebene Voraussetzung (hier Konvergenz der Reihe) nicht gegeben ist. Zu jeder notwendigen Bedingung ist zusätzlich noch eine hinreichende Bedingung erforderlich, verschiedene hinreichende Bedingungen werden als nächstes vorgestellt. Erst muß immer die notwendige Bedingung erfüllt sein, dann kann mit Hilfe einer hinreichenden Bedingung, die Konvergenz festgestellt werden. Hinreichende und notwendige Bedingung sind schon aus Kap. 6.13. (Extremwerte bei mehreren Abhängigen) bekannt.

a) Quotientkriterium (hinreichende Bedingung)

Geht das Verhältnis der Beträge zweier aufeinanderfolgender Reihenglieder gegen einen Grenzwert kleiner eins, so ist die Reihe konvergent:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{i+1}}{a_i} \right) = q < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{konvergent}$$

b) Wurzel-Kriterium (hinreichende Bedingung)

Wenn der Betrag des Grenzwertes aus der i-ten Wurzel aus a_i kleiner als 1 ist, ist die Reihe konvergent.

konvergent: $\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{a_i} = q < 1$

divergent: $\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[i]{a_i} = q \geq 1$

c) Majorante und Minorante

Falls die Konvergenz der Reihen mit b_i und c_i bekannt ist und gilt

$$b_i \leq a_i \leq c_i$$

so ist auch die Reihe mit a_i konvergent. Das gleiche gilt für Divergenz. Bei der Reihe b_i spricht man dann von einer Minoranten und bei der Reihe c_i von einer Majoranten. Nach Bild MA82A erkennt man, daß die Majorante die obere und die Minorante die untere Einhüllende sind.

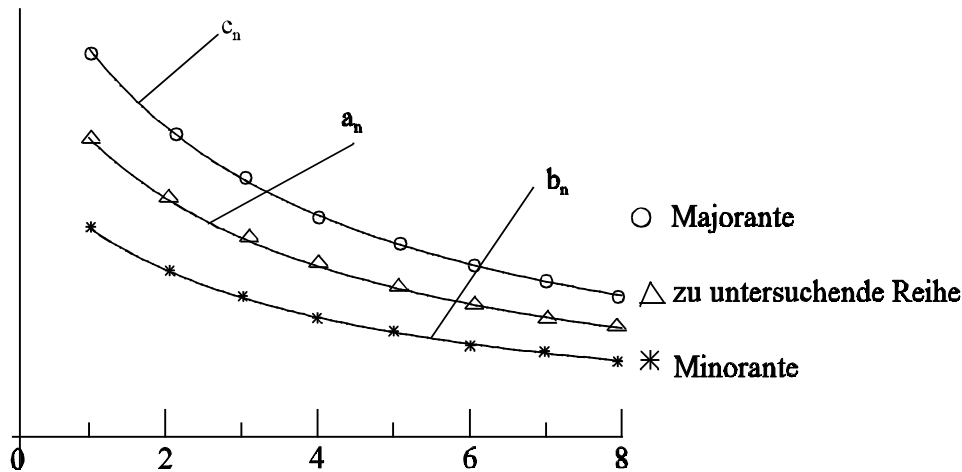


Bild MA82A

Beispiel

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{i^2 + 1} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10} \frac{1}{i}$$

=> divergent

$$\frac{1}{10} \frac{1}{i} < \frac{i}{i^2 + 1} < \frac{1}{i}$$

$$\text{für } i > 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^2 + 1} \Rightarrow \text{divergent}$$

d) Konvergenz alternierender Reihen

Die Konvergenzkriterien Quotienten- und Wurzel-Kriterium gelten nur für nicht alternierende Reihen. Eine alternierende Reihe ist aber eher konvergent als eine nicht alternierende. Sind also die Beträge einer alternierenden Reihe konvergent, so ist die Reihe konvergent. Ansonsten sollte man versuchen, die alternierende Reihe in eine nicht alternierende umzuformen.

Beispiel 4:

$$R = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \Rightarrow \text{divergent}$$

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i}$$

Beispiel 5:

$$R = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \quad \Rightarrow \quad \text{betragsmäßig nicht konvergent}$$

$$R = \sum (-1)^i \frac{1}{i} \quad \Rightarrow \quad \text{alternierend nicht zu beurteilen}$$

$$R = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \dots \quad \text{umgeformt}$$

$$R = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i} \right)$$

$$R = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i - (2i-1)}{(2i-1)2i}$$

$$R = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4i^2 - 2i}$$

$$a_i = \frac{1}{4i^2 - 2i} \quad \text{Reihe}$$

$$c_i = \frac{1}{i^2} \quad \text{Majorante}$$

$$b_i = \frac{1}{10} * \frac{1}{i^2} \quad \text{Minorante}$$

Majorante und Minorante sind konvergent. Zu beweisen wäre:

$$b_i \leq a_i \leq c_i$$

$$\frac{1}{10} * \frac{1}{i^2} \leq \frac{1}{4i^2 - 2i} \leq \frac{1}{i^2}$$

Linker Teil der Gleichung:

$$\frac{1}{10} * \frac{1}{i^2} \leq \frac{1}{4i^2 - 2i}$$

$$4i^2 - 2i \leq 10i^2$$

$$0 \leq 6i^2 + 2i \quad \text{mindestens erfüllt für alle } i > 1$$

Rechte Teil der Gleichung:

$$\frac{1}{4i^2 - 2i} \leq \frac{1}{i^2}$$

$$i^2 \leq 4i^2 - 2i$$

$$0 \leq 3i^2 - 2i \quad \text{mindestens erfüllt für alle } i > 1$$

e) Restsummenkriterium

Falls die Restsumme konvergent ist, ist die gesamte Reihe konvergent.

$$R_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i \leq q \quad q\text{-endlich} \quad \Rightarrow \quad \text{konvergent}$$

f) Güte der Konvergenz

Die theoretischen Mathematiker untersuchen größtenteils, ob eine Reihe konvergent ist. Im Ingenieurbereich werden Reihen aber auch als Näherungslösungen für komplizierte Ausdrücke eingesetzt. In diesem Fall will man keine unendliche Anzahl von Reihengliedern aufsummieren, sondern eine endliche. Man ist daran interessiert eine möglichst geringe Anzahl von Reihengliedern zu verwenden. Wenn also die Reihenglieder möglichst schnell gegen Null gehen, ist eine gute Konvergenz vorhanden.

g) Integralkriterium

Ein Reihe mit den Reihengliedern $a_i(i)$ ist genau dann konvergent, wenn das uneigentlich Integral

$$\int_{x=x_0}^{\infty} a(x) dx$$

einen endlichen Wert besitzt, bei den Reihengliedern a_i wird dabei das "i" durch x ersetzt.

Beispiel:

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i}$$

$$a_i = a(i) = \frac{1}{i}$$

$$a(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int_{x=x_0}^{x_1 \rightarrow \infty} a(x) dx = \int_{x=1}^{x_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_1^{x_1 \rightarrow \infty} = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \{\ln(x_1) - \ln(1)\} \rightarrow \infty \Rightarrow \text{divergent}$$

Beispiel:

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

$$a_i = a(i) = \frac{1}{i^2}$$

$$a(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\int_{x=x_0}^{x_1 \rightarrow \infty} a(x) dx = \int_{x_0}^{x_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{x_0}^{x_1 \rightarrow \infty} = \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{x_1} - (-1) \right\} = 1 \Rightarrow \text{konvergent}$$

Weitere Anwendungen der Konvergenzkriterien erfolgen in den nächsten Abschnitten.

8.3. Geometrische Reihe

Beispiele:

$$R_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots$$

$$R_2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots$$

$$R_3 = 4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} + \dots = 4 \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} \right)$$

Obere Beispiele lassen sich schreiben in der Form:

$$R = a \sum_{i=0}^n q^i$$

Die obere Reihe wird als geometrische Reihe bezeichnet.

Die Reihenglieder lassen sich explizit angeben

$$a_i = a \cdot q^i$$

oder auch rekursiv

$$a_{i+1} = a_i \cdot q$$

mit dem Anfangswert $a_0 = a$.

Die Summe der geometrischen Reihe lässt sich leicht bestimmen aus der Summe bis n

$$S_n = a(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n)$$

und obere Summe mit q multipliziert

$$S_n \cdot q = a(q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1})$$

Aus der Differenz der oberen beiden Gleichungen lässt sich die Summe für die geometrische Reihe bestimmen:

$$S_n - S_n \cdot q = a(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n) - a(q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1})$$

$$S_n(1-q) = a(1 - q^{n+1})$$

$$S_n = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

8.3.1. Endliche geometrische Reihe

Die obere Formel gibt schon die Summe der endlichen geometrischen Reihe an:

$$\sum_{i=0}^n a q^i = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Aufgabe 8.3.1 a rechnen

8.3.2. Unendliche geometrische Reihe

Für die unendliche geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} a q^i$$

soll die Summe mit Hilfe der endlichen Reihe (Kap.8.3.1) und mit Hilfe des Grenzübergangs $n \rightarrow \infty$ berechnet werden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \quad |q| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + q^{n+1}}{1 - q} = \infty \quad |q| > 1$$

Die Reihe ist somit konvergent für $|q| < 1$ und ergibt

$$\sum_{i=0}^{\infty} a q^i = \frac{1}{1 - q}$$

für $|q| < 1$

Für $|q| > 1$ ist die Reihe divergent, weil das Ergebnis unendlich wird. Da das Ergebnis in Form eines analytischen Ausdrucks vorhanden ist, bedarf es hier keiner Konvergenzkriterien aus Abschnitt 8.2.

Aufgabe 8.3.2 b rechnen.

8.4. Binomische Reihe und Fakultät

8.4.1. Definition

Der Ausdruck

$$f(x) = (1 + x)^m$$

in einer Reihe entwickelt, wird binomische Reihe genannt. Für ganzzahlige $m > 0$ ergibt sich:

$$\begin{array}{ll} m = 0 & \Rightarrow f(x) = 1 \\ m = 1 & \Rightarrow f(x) = 1 + x \\ m = 2 & \Rightarrow f(x) = 1 + 2x + x^2 \\ m = 3 & \Rightarrow f(x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \\ m = 4 & \Rightarrow f(x) = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 \\ m = 5 & \Rightarrow f(x) = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 \end{array}$$

Ausgehend von $m = 1$ lässt sich für $m + 1$ die Reihe berechnen, durch Multiplikation mit $(1 + x)$. Schreibt man das Ergebnis geschickt untereinander, ist die Bildungsvorschrift erkennbar, z.B. für $m = 4$

$$\begin{aligned} (1 + x)^4 &= (1 + x)^3 \cdot (1 + x) = && (1 + 3x + 3x^2 + x^3)(1 + x) = \\ &&& 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \\ &&& \quad x + 3x^2 + 3x^3 + x^4 \\ &= && 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + 1x^4 \end{aligned}$$

Es werden die Koeffizienten einmal verschoben und addiert. Das Ergebnis ist bekannt unter dem Namen:

Pascal'sche Dreieck

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & 1 & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

Die jeweils untere Zahl erhält man durch Addition der zwei oberen Zahlen.

Wie können die oberen Koeffizienten mathematisch beschrieben werden. Dazu die nächsten beiden Abschnitte.

8.4.2. Fakultät:

Die Fakultät ist eine Operation auf ganzzahlige positive Zahlen. Die Funktionsvorschrift besagt, daß die ersten n natürlichen Zahlen miteinander multipliziert werden müssen.

Beispiel:

$$5! = 1*2*3*4*5 = 120$$

Mathematische Beschreibung

Mathematisch wird die Fakultätoperation durch eine rekursive Zahlenfolge definiert. Der Fakultätsoperator ist "!". Als Anfangswert wird definiert:

$$0! = 1$$

Das Bildungsgesetz lautet: $(n+1)! = n!(n+1)$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 && \text{(Definition)} \\ 1! &= 0! * 1 = 1 \\ 2! &= 1! * 2 = 1 * 2 = 2 \\ 3! &= 2! * 3 = 1 * 2 * 3 = 6 \\ 4! &= 3! * 4 = 1 * 2 * 3 * 4 = 24 \\ 5! &= 4! * 5 = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120 \\ 6! &= 5! * 6 = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720 \end{aligned}$$

8.4.3. m über i

Schreibweise: $\binom{m}{i}$ spricht: "m über i"

Definition: Es müssen i -Brüche miteinander multipliziert werden.

- Im Nenner ist die erste Zahl 1, die zweite Zahl zwei, die dritte drei u.s.w.. Im Nenner wird beginnend mit 1 die Zahl inkrementiert.
- Im Zähler wird mit der Zahl m begonnen und um 1 dekrementiert.

$$\binom{m}{i} = \frac{m * \frac{m-1}{2} * \frac{m-2}{3} * \dots * \frac{m-i+3}{(i-2)} * \frac{m-i+2}{(i-1)} * \frac{m-i+1}{i}}$$

$$\binom{m}{i} = \frac{m * (m-1) * (m-2) * \dots * (m-i+3) * (m-i+2) * (m-i+1)}{1 * 2 * 3 * \dots * (i-2) * (i-1) * i}$$

Beispiel 1:

$$\binom{6}{4} = \frac{6 * 5 * 4 * 3}{1 * 2 * 3 * 4} = \frac{6 * 5 * 4 * 3}{1 * 2 * 3 * 4} * \frac{2 * 1}{2 * 1} = \frac{6!}{4! * (6-4)!}$$

Aus dem oberen Beispiel folgt:

$$\boxed{\binom{m}{i} = \frac{m!}{i!(m-i)!}}$$

Beispiel 2:

$$\binom{3}{5} = \frac{3 * 2 * 1 * 0 * (-1)}{1 * 2 * 3 * 4 * 5} = 0$$

Aus dem oberen Beispiel folgt:

$$\binom{m}{i} = 0 \quad i > m, (i, m) \in \mathbb{N}$$

Beispiel 3 (m - gebrochene Zahl):

$$\binom{0.5}{4} = \frac{0.5 * (-0.5) * (-1.5) * (2.5)}{1 * 2 * 3 * 4} = \frac{1/2 * -1/2 * -3/2 * -3/2 * -5/2}{1 * 2 * 3 * 4}$$

Hier wird eine Null als Multiplikation im Zähler nicht erreicht, somit ergibt sich bei gebrochenem m

$$\binom{m}{i} \neq 0 \quad \text{für } i > m, i \in \mathbb{N}, m \notin \mathbb{N}$$

Beispiel 4:

$$\binom{4.5}{4} = \frac{4.5 * 3.5 * 2.5 * 1.5}{1 * 2 * 3 * 4} =$$

Beispiel 5:

$$\binom{-1/2}{i} = ?$$

$$\binom{-1/2}{0} = 1$$

$$\binom{-1/2}{1} = \frac{-1/2}{1} = -\frac{1}{2}$$

$$\binom{-1/2}{2} = \frac{(-1/2)(-3/2)}{1 * 2} = \frac{1 * 3}{2 * 4}$$

$$\binom{-1/2}{3} = \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{1 * 2 * 3} = \binom{-1/2}{2} * \left(\frac{-5}{6}\right) = -\frac{1 * 3 * 5}{2 * 4 * 6}$$

$$\binom{-1/2}{4} = \frac{1 * 3 * 5 * 7}{2 * 4 * 6 * 8}$$

Beispiel 6:

$$\binom{1/2}{i} = ?$$

$$\binom{1/2}{0} = 1$$

$$\binom{1/2}{1} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\binom{1/2}{2} = \frac{(1/2)(-1/2)}{1 * 2} = \binom{1/2}{1} * \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1*1}{2*4}$$

$$\binom{1/2}{3} = \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{1 * 2 * 3} = \binom{1/2}{2} * \left(\frac{-3}{6}\right) = \frac{1*1*3}{2*4*6}$$

$$\binom{1/2}{4} = \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{1 * 2 * 3 * 4} = \binom{1/2}{3} * \left(\frac{-5}{8}\right) = -\frac{1*1*3*5}{2*4*6*8}$$

$$\binom{1/2}{5} = \frac{1*1*3*5*7}{2*4*6*8*10}$$

Beispiel 7:

$$\binom{-1/3}{i} = ?$$

$$\binom{-1/3}{0} = 1$$

$$\binom{-1/3}{1} = -\frac{1}{3}$$

$$\binom{-1/3}{2} = \frac{(-1/3)(-4/3)}{1 * 2} = \binom{-1/3}{1} * \left(-\frac{4}{6}\right) = \frac{1*4}{3*6}$$

$$\binom{-1/3}{3} = \frac{(-1/3)(-4/3)(-7/3)}{1 * 2 * 3} = \binom{-1/3}{2} * \left(\frac{-7}{9}\right) = -\frac{1*4*7}{3*6*9}$$

$$\binom{-1/3}{4} = \frac{1*4*7*10}{3*6*9*12}$$

Beispiel 8:

$$\binom{1/3}{i} = ?$$

$$\binom{1/3}{0} = 1$$

$$\binom{1/3}{1} = \frac{1/3}{1} = \frac{1}{3}$$

$$\binom{1/3}{2} = \frac{(1/3)(-2/3)}{1 * 2} = \binom{1/3}{1} * \left(-\frac{2/3}{2}\right) = -\frac{1}{3} * \frac{2}{6} = -\frac{1*2}{3*6}$$

$$\binom{1/3}{3} = \frac{(1/3)(-2/3)(-5/3)}{1 * 2 * 3} = \binom{1/3}{2} * \left(\frac{-5}{9}\right) = \frac{1*2*5}{3*6*9}$$

$$\binom{1/3}{4} = \frac{(1/3)(-2/3)(-5/3)(-8/3)}{1 * 2 * 3 * 4} = \binom{1/3}{3} * \left(\frac{-8}{12}\right) = -\frac{1*2*5*8}{3*6*9*12}$$

$$\binom{1/3}{5} = \binom{1/3}{4} * \left(\frac{-11/3}{5}\right) = \frac{1*2*5*8*11}{3*6*9*12*15}$$

Beispiel 9:

$$\binom{-1/2}{i} = \frac{-1/2 * -3/2 * -5/2 * -7/2 * \dots (2i-1)/2}{i}$$

$$\binom{-1/2}{i} = (-1)^i \frac{1}{2^i} * \frac{1*3*5*7*\dots(2i-1)}{1*2*3*4*\dots i}$$

$$\binom{-1/2}{i} = (-1)^i \frac{1}{2^i} * \frac{1*2*3*4*5*6*7*\dots(2i-2)*(2i-1)*2i}{1*2*3*4*\dots i * 2*4*6 * \dots * (2i-2)*(2i)}$$

$$\binom{-1/2}{i} = (-1)^i \frac{1}{2^i} * \frac{(2i)!}{i! * 2^i * 1*2*3*4*\dots}$$

$$\boxed{\binom{-1/2}{i} = \frac{(-1)^i * (2i)!}{4^i * (i!)^2}}$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\binom{-1/2}{i}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{35}{128}$	$-\frac{63}{256}$	$\frac{231}{1024}$	$-\frac{423}{2048}$	$\frac{6435}{32768}$

Beispiel 10:

$$\binom{1/2}{i} = \frac{1/2}{1} * \frac{-1/2}{2} * \frac{-3/2}{3} * \frac{-5/2}{4} \dots \frac{-(2i-3)/2}{i}$$

$$\binom{1/2}{0} = 1$$

$$\binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

für $i > 1$ gilt:

$$\binom{1/2}{i} = -(-1)^i \frac{1}{2^i} * \frac{1*1*3*5*\dots*(2i-3)}{i!}$$

$$\binom{1/2}{i} = -(-1)^i \frac{1}{2^i} * \frac{1*2*3*4*5*\dots*(2i-4)*(2i-3)}{i! * 2*4*\dots*(2i-4)}$$

$$\binom{1/2}{i} = -(-1)^i \frac{1}{2^i} * \frac{(2i-3)!}{(i-2)! * 2^{i-2}}$$

$\binom{1/2}{i} = - \frac{(-1)^i * (2i-3)!}{4^{i-1} * i! * (i-2)!}$	$i > 1$
---	---------

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\binom{1/2}{i}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{128}$	$\frac{7}{256}$	$-\frac{21}{1024}$	$\frac{33}{2048}$	$-\frac{429}{32768}$

Beispiel 11: Tabelle m über i

i \ m	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5
2	0	1	3	6	10
3	0	0	1	4	10
4	0	0	0	1	5
5	0	0	0	0	1

Aus oberer Tabelle folgt:

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0!m!} = 1$$

Außerdem ist in der oberen Tabelle das Pascal'sche Dreieck zu erkennen. Dazu mehr im folgenden Abschnitt.

8.4.4. Formel der binomischen Reihe

Die Binomialkoeffizienten lassen sich mit Hilfe des Pascal'schen Dreiecks bestimmen. Dieses ist in der Tabelle des Beispiels 11, Kap. 8.4.3, vorhanden. Die Tabelle aber ließ sich durch i über m beschreiben. Somit lassen sich auch die Binomialkoeffizienten mit Hilfe von i über m beschreiben. Damit kann man die binomische Reihe für ganzzahlige m angeben:

$$(1+x)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i = \sum_{i=0}^m \frac{m!}{i!(m-i)!} x^i \quad m \in \mathbb{N}$$

Besonders effektiv ist die Anwendung der binomischen Reihe, wenn $|x| \ll 1$, weil dann die Reihe sehr gut konvergiert. Der Laufindex von i beschränkt sich auf den Bereich $0 \leq i \leq m$, weil die Koeffizienten der restlichen Potenzen Null sind.

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} (1+x)^5 &= \sum_{i=0}^5 \binom{5}{i} x^i = \binom{5}{0} x^0 + \binom{5}{1} x^1 + \binom{5}{2} x^2 + \binom{5}{3} x^3 + \binom{5}{4} x^4 + \binom{5}{5} x^5 \\ &= 1 + \frac{5}{1}x + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}x^5 \\ (x+1)^5 &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 \end{aligned}$$

Bei gebrochenen Exponenten ergibt sich eine unendliche Reihe:

$$(1+x)^m = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} x^i \quad m \notin \mathbb{N}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= (1+x)^{0.5} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{0.5}{i} x^i \\ \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{0.5}{1}x + \frac{0.5 \cdot (-0.5)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{0.5 \cdot (-0.5) \cdot (-1.5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 \\ &\quad + \frac{0.5 \cdot (-0.5) \cdot (-1.5) \cdot (-2.5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \dots \\ &= 1 + 0.5x - 0.125x^2 + 0.0625x^3 - 0.0390625x^4 + \dots \end{aligned}$$

Hinweis: Die oberen Koeffizienten wurden auch schon in Beispiel 10, Abschnitt 8.4.3, berechnet.

Ist ein Ausdruck

$$[1+f(x)]^m$$

vorhanden muß x durch $f(x)$ ersetzt werden:

$$[1+f(x)]^m = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} [f(x)]^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{m!}{i!(m-i)!} [f(x)]^i$$

Praktische Bedeutung hat die obere Formel für $f(x) \approx 0$. Bei ganzzahligem m ist obere Summengrenze wieder m , weil die restlichen Koeffizienten Null werden.

Beispiel 3:

$$(1+x^2)^3 = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} [x^2]^i = 1 + \binom{3}{1} x^2 + \binom{3}{2} [x^2]^2 + \binom{3}{3} [x^2]^3 = 1 + \frac{3}{1} x^2 + \frac{3*2}{1*2} x^4 + \frac{3*2*1}{1*2*3} x^6$$

Ist ein Ausdruck

$$(a+x)^m$$

vorhanden, muß umgeformt werden:

$$(a+x^m) = a^m \left(1 + \frac{x}{a}\right)^m$$

Beispiel 4:

$$\sqrt[3]{2+x^2} = \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{1 + \frac{x^2}{2}} = \sqrt[3]{2} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{1/3}$$

$$\sqrt[3]{2+x^2} = \sqrt[3]{2} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/3}{i} \left(\frac{x^2}{2}\right)^i$$

$$\sqrt[3]{2+x^2} = \sqrt[3]{2} \left[1 + \frac{1/3}{1} \frac{x^2}{2} + \frac{(1/3)*(-2/3)}{1*2} \frac{x^4}{4} + \frac{(1/3)*(-2/3)*(-5/3)}{1*2*3} \frac{x^6}{8} + \dots \right]$$

Beispiel 5:

Der Ausdruck $y(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x}}$

soll durch eine binomische Reihe ersetzt werden. Im zweiten Schritt soll der Konvergenzbereich untersucht werden.

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x/4}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{-1/2}$$

$$y(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-1/2}{i} \left(\frac{x}{4}\right)^i$$

mit Hilfe des Beispiels 9 aus Kap. 8.4.3 kann zahlenwertmäßig angegeben werden:

$$y(x) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4}\right)^1 + \frac{3}{8} \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \frac{5}{16} \left(\frac{x}{4}\right)^3 + \frac{35}{128} \left(\frac{x}{4}\right)^4 - \frac{63}{256} \left(\frac{x}{4}\right)^5 + \dots \right]$$

$$y(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{16}x + \frac{3}{256}x^2 - \frac{5}{2048}x^3 + \dots$$

Damit ist die Reihe des oberen Ausdruckes bestimmt, aber noch nicht der Konvergenzbereich. Dazu wird der Ausdruck (siehe Beispiel 9 aus Kap. 8.4.3)

$$\binom{-1/2}{i} = (-1)^i \frac{(2i)!}{4^i (i!)^2}$$

allgemein ersetzt:

$$y(x) = \frac{1}{2} \sum (-1)^i \frac{(2i)!}{4^i (i!)^2} \left(\frac{x}{4}\right)^i$$

Nach der allgemein Reihe

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

ergibt sich durch Vergleich

$$|a_i| = \frac{1}{2} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left| \frac{x}{16} \right|^i$$

zur Auswertung des Quotientenkriteriums (siehe Abschnitt 8.2) wird a_{i+1} berechnet

$$|a_{i+1}| = \frac{1}{2} \frac{(2i+2)!}{[(i+1)!]^2} \left| \frac{x}{16} \right|^{(i+1)}$$

$$\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| = \frac{\frac{1}{2} \frac{(2i+2)!}{[(i+1)!]^2} \left| \frac{x}{16} \right|^{(i+1)}}{\frac{1}{2} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left| \frac{x}{16} \right|^i}$$

$$\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| = \frac{(2i+2)!}{(2i)!} \frac{(i!)^2}{[(i+1)!]^2} \left| \frac{x}{16} \right|$$

Laut Definition war

$$(i+1)! = i!(i+1) \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{i!}{(i+1)!} \right]^2 = \left(\frac{1}{i+1} \right)^2$$

$$(2i+2)! = (2i)!(2i+1)(2i+2) \quad \Rightarrow \quad \frac{(2i+2)!}{(2i)!} = (2i+1)(2i+2)$$

eingesetzt in den oberen Ausdruck:

$$\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| = \frac{(2i+1)(2i+2)}{(i+1)(i+1)} \left| \frac{x}{16} \right|$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| = 4 \left| \frac{x}{16} \right| = \left| \frac{x}{4} \right|$$

Laut Quotientenkriterium sollte der obere Ausdruck kleiner 1 sein:

$$\left| \frac{x}{4} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < 4$$

die obere Reihenanpassung gilt somit für $|x| < 4$.

8.5. Potenzreihen

Potenzreihen haben die Form:

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + \dots$$

oder als Summe geschrieben:

$$g(x) = \sum_{i=0}^n b_i \cdot x^i$$

Der Vergleich mit der allgemeinen Reihe ergibt:

$$R = \sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=0}^n b_i \cdot x^i \Rightarrow a_i = b_i x^i$$

Die Aufgabe ist nun, eine gegebene Funktion $f(x)$ durch eine Potenzreihe $g(x)$ anzunähern. Dazu werden für n Koeffizienten durch n Bedingungen benötigt:

Von der anzunähernden Funktion $f(x)$ sind die n -Ableitungen an der Stelle x_0 zu bilden und gleich den Ableitungen von $g(x)$ zu setzen. Am einfachsten ist dieses mit $x_0 = 0$ durchzuführen:

$$f(x=0) = g(x=0)$$

$$f'(x=0) = g'(x=0)$$

$$f''(x=0) = g''(x=0)$$

.....

.....

$$f^{(n)}(x=0) = g^{(n)}(x=0)$$

Die Ableitungen der Funktion $g(x)$ lauten:

$$\begin{aligned} g'(x) &= b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2 + 4b_4x^3 + 5b_5x^4 \\ g^{(2)}(x) &= 2b_2 + 2 \cdot 3b_3x + 3 \cdot 4b_4x^2 + 4 \cdot 5b_5x^3 \\ g^{(3)}(x) &= 2 \cdot 3b_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4b_4x + 3 \cdot 4 \cdot 5b_5x^2 \\ g^{(4)}(x) &= 2 \cdot 3 \cdot 4b_4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5b_5x \\ g^{(5)}(x) &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5b_5 \end{aligned}$$

und an Stelle $x = x_0 = 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} g(x=0) &= 1 \cdot b_0 &= 0! \cdot b_0 \\ g'(x=0) &= 1 \cdot b_1 &= 1! \cdot b_1 \\ g''(x=0) &= 1 \cdot 2 \cdot b_2 &= 2! \cdot b_2 \\ g^{(3)}(x=0) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot b_3 &= 3! \cdot b_3 \\ g^{(4)}(x=0) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot b_4 &= 4! \cdot b_4 \\ g^{(5)}(x=0) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot b_5 &= 5! \cdot b_5 \end{aligned}$$

oder allgemein geschrieben:

$$g^{(i)}(x=0) = i! \cdot b_i$$

Mit den Bedingungen, daß die Ableitungen von $g(x)$ und $f(x)$ gleich sein sollen, erhält man:

$$f^{(i)}(x=0) = g^{(i)}(x=0) = i! \cdot b_i$$

somit allgemein die Bestimmungsformel für die Koeffizienten b_i :

$$b_i = \frac{f^{(i)}(x=0)}{i!}$$

und speziell für die i Werte 0 bis 4

$$b_0 = f(x=0)$$

$$b_1 = f'(x=0)$$

$$b_2 = \frac{f''(x=0)}{2!}$$

$$b_3 = \frac{f'''(x=0)}{3!}$$

$$b_4 = \frac{f^{(4)}(x=0)}{4!}$$

usw.

Schema: Die gegebene Funktion $f(x)$ wird i mal abgeleitet und die Funktionswerte der Ableitung an der Stelle $x = 0$ werden und durch $n!$ dividiert. Dieses ergibt die Koeffizienten der Potenzreihe.

Beispiel:

$$f(x) = e^{ax}$$

$$f'(x) = a \cdot e^{ax}$$

$$f''(x) = a^2 \cdot e^{ax}$$

$$f^{(i)}(x) = a^i \cdot e^{ax}$$

$$f^{(i)}(x=0) = a^i$$

$$b^i = \frac{a^i}{i!}$$

$$e^{ax} \approx g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ax)^i}{i!} = 1 + \frac{a}{1!} x + \frac{a^2}{2!} x^2 + \frac{a^3}{3!} x^3 + \frac{a^4}{4!} x^4 + \dots$$

$$e^{ax} \approx 1 + \frac{a}{1} x + \frac{a^2}{2} x^2 + \frac{a^3}{6} x^3 + \frac{a^4}{24} x^4 + \dots$$

$$e^{ax} \approx 1 + (ax) + \frac{1}{2}(ax)^2 + \frac{1}{6}(ax)^3 + \frac{1}{24}(ax)^4 + \dots$$

8.5.1. Mac-Laurin Reihe

Unter dem Begriff Mac-Laurin-Reihe versteht man die Entwicklung einer Potenzreihe bei $x=x_0=0$, also genau das, was eben hergeleitet worden ist.

$$f(x) \approx f(x=0) + f'(x=0) \cdot x + \frac{f''(x=0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(x=0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(x=0)}{4!} x^4 + \dots$$

$$f(x) = f(x=0) + \sum_{i=1}^{\infty} f^{(i)}(x=0) \cdot \frac{x^i}{i!}$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(x=0) \cdot \frac{x^i}{i!} \quad \text{Mac-Laurin-Reihe}$$

Teile der Aufgabe 8.5.1 und 8.5.2 rechnen

8.5.2. Taylor-Reihe

Unter dem Begriff Taylor-Reihe versteht man die Entwicklung einer Potenzfunktion bei $x=x_0 \neq 0$. Man kann die Ergebnisse der Mac-Laurin-Reihe übernehmen, wenn man eine Koordinatenverschiebung durchführt:

$$f(x) = f(x=a) + f'(x=a) \cdot \frac{x-a}{1!} + f''(x=a) \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + f^{(3)}(x=a) \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + f^{(4)}(x=a) \cdot \frac{(x-a)^4}{4!} + \dots$$

$$f(x) = f(x=a) + \sum_{i=1}^{\infty} f^{(i)}(x=a) \cdot \frac{(x-a)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(x=a) \cdot \frac{(x-a)^i}{i!} \quad \text{1. Form der Taylor-Reihe}$$

Ein Ersetzen in obiger Gleichung von $x \rightarrow x + a$ oder Koordinatenverschiebung von $f(x)$ um den Wert a führt auf:

$$f(x+a) = f(x=a) + f'(x=a) \cdot \frac{x}{1!} + f''(x=a) \cdot \frac{x^2}{2!} + f^{(3)}(x=a) \cdot \frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(x=a) \cdot \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$f(x+a) = f(x=a) + \sum_{i=1}^{\infty} f^{(i)}(x=a) \cdot \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(x=a) \cdot \frac{x^i}{i!} \quad \text{2. Form der Taylor-Reihe}$$

Beispiel 1:

Die Funktion $y = x^2 + 5x + 7$

soll bei $x = 2$ durch eine Taylorreihe entwickelt werden

$$y = x^2 + 5x + 7 \quad y(2) = 21 \quad 21/0! = 21$$

$$y' = 2x + 5 \quad y'(2) = 9 \quad 9/1! = 9$$

$$y'' = 2 \quad y''(2) = 2 \quad 2/2! = 1$$

$$y''' = 0 \quad y'''(2) = 0$$

$$f(x) = 21 + \frac{9}{1!}(x-2) + \frac{2}{2!}(x-2)^2 = 21 + 9(x-2) + (x-2)^2$$

Ergebnis für die andere Form der Taylor-Reihe:

$$f(x+2) = 21 + 9x + x^2$$

Fazit: Mit Hilfe der Taylor-Reihe kann auch eine Koordinatenverschiebung durchgeführt werden.

Probe: (Koordinatenverschiebung mit Horner Schema)

$$\begin{array}{r} 1 \quad 5 \quad 7 \\ 2 \quad - \quad 2 \quad 14 \\ \hline 1 \quad 7 \quad 21 \\ 2 \quad - \quad 2 \\ \hline 1 \quad 9 \end{array}$$

Beispiel 2: $y(x)$ ist zu entwickeln in Potenzen von $(x-3) \Rightarrow$ Tayler-Reihe bei $x=3$ entwickeln

$$y = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 6x + 5 \quad y(3) = 167 \quad 167/0! = 167$$

$$y' = 4x^3 + 9x^2 + 4x - 6 \quad y'(3) = 195 \quad 195/1! = 195$$

$$y'' = 12x^2 + 18x + 4 \quad y''(3) = 166 \quad 166/2! = 83$$

$$y''' = 24x + 18 \quad y'''(3) = 90 \quad 90/3! = 15$$

$$y'''' = 24 \quad y''''(3) = 24 \quad 24/4! = 1$$

$$y^{(5)} = 0$$

$$y = 167 + 195(x-3) + 83(x-3)^2 + 15(x-3)^3 + (x-3)^4$$

Probe nach Horner:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 2 \quad -6 \quad 5 \\ 3 \quad - \quad 3 \quad 18 \quad 60 \quad 162 \\ \hline 1 \quad 6 \quad 20 \quad 54 \quad 167 \\ 3 \quad - \quad 3 \quad 27 \quad 141 \\ \hline 1 \quad 9 \quad 47 \quad 195 \\ 3 \quad - \quad 3 \quad 36 \\ \hline 1 \quad 12 \quad 83 \\ 3 \quad - \quad 3 \\ \hline 1 \quad 15 \end{array}$$

Beispiel 3:

Die Funktion $y = \sin(2x)$

soll an der Stelle $x = \frac{\pi}{4}$ entwickelt werden

$$f(x) = \sin(2x) \qquad f\left(x = \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$f'(x) = 2\cos(2x) \qquad f'\left(x = \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$f''(x) = -4\sin(2x) \qquad f''\left(x = \frac{\pi}{4}\right) = -4$$

$$f'''(x) = -8\cos(2x) \qquad f'''\left(x = \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 16\sin(2x) \qquad f^{(4)}\left(x = \frac{\pi}{4}\right) = 16$$

$$f^{(5)}(x) = 32\cos(2x) \qquad f^{(5)}\left(x = \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$f^{(6)}(x) = -64\sin(2x) \qquad f^{(6)}\left(x = \frac{\pi}{4}\right) = -64$$

$$f(x) = 1 - 4 \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + 16 \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} - 64 \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6}{6!} + - \dots$$

$$f(x) = 1 - 2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2}{3} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{8}{90} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6 + - \dots$$

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{90}x^6 + - \dots$$

8.5.3. Konvergenz von Funktionsreihen

Für die Taylor-Reihe

muß für jedes x (bzw. verschiedene x-Bereiche) die Konvergenz untersucht werden. Konvergenzkriterien aus Kap. 8.2 gelten für die Reihe

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

Ein Vergleich der oberen beiden Reihen liefert: $a_i = f^{(i)}(x=a) \cdot \frac{(x-a)^i}{i!}$

Den Index i um 1 erhöht ergibt: $a_{i+1} = f^{(i+1)}(x=a) \cdot \frac{(x-a)^{(i+1)}}{(i+1)!}$

Auf das obere a_i muß ein Konvergenzkriterium aus Kap. 8.2 angewandt werden. Am besten eignet sich das Quotienten-Kriterium:

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{f^{(i+1)'}(x=a) * \frac{(x-a)^{(i+1)}}{(i+1)!}}{f^{i'}(x=a) * \frac{(x-a)^i}{i!}}$$

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{f^{(i+1)'}(x=a) * (x-a)^{(i+1)} * i!}{f^{i'}(x=a) * (x-a)^i * (i+1)!} = \frac{f^{(i+1)'}(x=a) * (x-a)}{f^{i'}(x=a) * (i+1)}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(i+1)'}(x=a) * (x-a)}{f^{i'}(x=a) * (i+1)} \right| < 1$$

Beispiel: Die Funktion $y = f(x) = \ln(x)$ soll an der Stelle $x = 1$ mit Hilfe einer Taylorreihe entwickelt werden. Der Konvergenzbereich ist anzugeben.

$f(x) = \ln(x)$	$f(x=1) = 0$
$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x=1) = 1$
$f''(x) = -x^{-2}$	$f''(x=1) = -1$
$f^{(3)}(x) = 2x^{-3}$	$f^{(3)}(x=1) = 2$
$f^{(4)}(x) = -2*3*x^{-4}$	$f^{(4)}(x=1) = -2*3$
$f^{(5)}(x) = 2*3*4*x^{-5}$	$f^{(5)}(x=1) = 2*3*4$

Um a_i als Funktion von i analytisch anzugeben muß ein Bildungsgesetz der i -ten Ableitung an der Stelle $x_0 = 1$ erkannt werden. Für die obere Funktion läßt sich dieses mit Hilfe der Fakultät angeben:

$$f^{(i)}(x=1) = -(-1)^i (i-1)! \quad \text{für } i \geq 1$$

$$f(x) = g(x) = f(x=1) + \sum_{i=1}^{\infty} f^{i'}(x=1) * \frac{(x-1)^i}{i!}$$

$$f(x) = 0 + \sum_{i=1}^{\infty} -(-1)^i * (i-1)! * \frac{(x-1)^i}{i!}$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-(-1)^i}{i} (x-1)^i$$

$$\Rightarrow a_i = -(-1)^i \frac{1}{i} (x-1)^i$$

$$f(x) = \frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + - \dots$$

$$q = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{i+1}}{a_i} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x-1)^{i+1}}{i+1}}{\frac{(x-1)^i}{i}} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| (x-1) * \frac{i}{i+1} \right| = |x-1|$$

$$q = |x-1|$$

Der Reihe ist konvergent für $0 < x < 2$

8.6. Abelsche Summation

Eine Reihe, deren Elemente sich aus dem Produkt zweier einzelner Elemente ergibt

$$R_n = \sum_{i=0}^n c_i = \sum_{i=0}^n a_i * b_i \quad \text{mit } c_i = a_i * b_i$$

$$R_n = a_0 * b_0 + a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3 + \dots + a_{n-2} * b_{n-2} + a_{n-1} * b_{n-1} + a_n * b_n$$

wird umgeordnet. Was in der einen Zeile subtrahiert wird, muß in der nächsten Zeile wieder addiert werden. Der Term des Ausdrucks mit b_{n+1} wird der gleichen Zeile addiert.

$$\begin{array}{cccccccc}
 R_n = a_0(b_0 - b_1) & + a_1(b_1 - b_2) & + a_2(b_2 - b_3) & + a_3(b_3 - b_4) & + \dots & + a_{n-2}(b_{n-2} - b_{n-1}) & + a_{n-1}(b_{n-1} - b_n) & + a_n(b_n - b_{n+1}) & + a_n b_{n+1} \\
 & + a_0(b_1 - b_2) & + a_1(b_2 - b_3) & + a_2(b_3 - b_4) & + \dots & + a_{n-3}(b_{n-2} - b_{n-1}) & + a_{n-2}(b_{n-1} - b_n) & + a_{n-1}(b_n - b_{n+1}) & + a_{n-1} b_{n+1} \\
 & & + a_0(b_2 - b_3) & + a_1(b_3 - b_4) & + \dots & + \dots & + \dots & + \dots & + \dots \\
 & & & + a_0(b_3 - b_4) & + \dots & + \dots & + \dots & + \dots & + \dots \\
 & & & & & + a_0(b_{n-2} - b_{n-1}) & + a_1(b_{n-1} - b_n) & + a_2(b_n - b_{n+1}) & + a_3 b_{n+1} \\
 & & & & & & + a_0(b_{n-1} - b_n) & + a_1(b_n - b_{n+1}) & + a_2 b_{n+1} \\
 & & & & & & & + a_0(b_n - b_{n+1}) & + a_1 b_{n+1} \\
 & & & & & & & & + a_0 b_{n+1}
 \end{array}$$

Die untereinander stehenden Ausdrücke werden als Summe geschrieben:

$$R_n = \sum_{v=0}^0 a_v(b_0 - b_1) + \sum_{v=0}^1 a_v(b_1 - b_2) + \sum_{v=0}^2 a_v(b_2 - b_3) + \sum_{v=0}^3 a_v(b_3 - b_4) + \dots + \sum_{v=0}^{n-2} a_v(b_{n-2} - b_{n-1}) + \sum_{v=0}^{n-1} a_v(b_{n-1} - b_n) + \sum_{v=0}^n a_v(b_n - b_{n+1}) + \sum_{v=0}^n a_v * b_{n+1}$$

Die Terme mit $(b_j - b_{j+1})$ sind vom Laufindex v unabhängig und werden vor das Summenzeichen gezogen:

$$R_n = (b_0 - b_1) \sum_{v=0}^0 a_v + (b_1 - b_2) \sum_{v=0}^1 a_v + (b_2 - b_3) \sum_{v=0}^2 a_v + (b_3 - b_4) \sum_{v=0}^3 a_v + \dots + (b_{n-2} - b_{n-1}) \sum_{v=0}^{n-2} a_v + (b_{n-1} - b_n) \sum_{v=0}^{n-1} a_v + (b_n - b_{n+1}) \sum_{v=0}^n a_v + b_{n+1} \sum_{v=0}^n a_v$$

Mit den Summen $A_k = \sum_{v=0}^k a_v$ und $A_n = \sum_{v=0}^n a_v$ kann angegeben werden:

$$R_n = A_0 * (b_0 - b_1) + A_1 * (b_1 - b_2) + A_2 * (b_2 - b_3) + A_3 * (b_3 - b_4) + \dots + A_{n-1} * (b_{n-1} - b_n) + A_n * (b_n - b_{n+1}) + A_n * b_{n+1}$$

Damit kann die Summe berechnet werden:

$$R_n = \sum_{i=0}^n a_i * b_i = \sum_{k=0}^n A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n * b_{n+1}$$

Zusammenfassung Abelscher Summation

$$\sum_{i=0}^n a_i b_i = A_n b_{n+1} + \sum_{k=0}^n A_k (b_k - b_{k+1})$$

mit $A_k = \sum_{v=0}^k a_v$ und $A_n = \sum_{v=0}^n a_v$

Beispiel 1:

$$\sum_{i=0}^n i = \sum_{i=0}^n 1 \cdot i \quad a_i = 1 \quad b_i = i$$

Bei der Abelschen Summation muß die Summe a_v gebildet werden. D.h. diese Summe muß bekannt sein.

$$\sum_{i=0}^n i = A_n b_{n+1} + \sum_{k=0}^n A_k (b_k - b_{k+1})$$

$$b_k = k \quad b_{k+1} = k + 1 \quad b_k - b_{k+1} = -1 \quad b_{n+1} = (n + 1)$$

$$A_k = \sum_{v=0}^k a_v = \sum_{v=0}^k 1 = k + 1 \quad A_k = k + 1 \quad A_n = n + 1$$

$$\sum_{i=0}^n i = A_n b_{n+1} + \sum_{k=0}^n A_k (b_k - b_{k+1})$$

$$\sum_{i=0}^n i = (n + 1)(n + 1) + \sum_{k=0}^n (k + 1)(-1)$$

$$\sum_{i=0}^n i = (n + 1)(n + 1) - \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^n 1$$

$$2 \sum_{i=0}^n i = (n + 1)(n + 1) - (n + 1) = (n + 1)[(n + 1) - 1]$$

$\sum_{i=0}^n i = \frac{(n + 1)n}{2}$

Beispiel 2:

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \sum_{i=0}^n i * i \quad a_i = i \quad b_i = i$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 = A_n * b_{n+1} + \sum_{k=0}^n A_k * (b_k - b_{k+1})$$

$$b_k = k \quad b_{k+1} = k + 1 \quad b_k - b_{k+1} = -1 \quad b_{n+1} = n + 1 \quad a_v = v$$

$$A_k = \sum_{v=0}^k a_v = \sum_{v=0}^k v = \frac{(k+1)*k}{2} \quad A_n = \frac{(n+1)*n}{2} \quad (\text{aus Beispiel 1})$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 = A_n * b_{n+1} + \sum_{k=0}^n A_k * (b_k - b_{k+1})$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{(n+1)*n}{2}(n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(k+1)*k}{2}(-1)$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{(n+1)^2 * n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n k$$

$$\frac{3}{2} \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{(n+1)^2 * n}{2} - \frac{1}{2} \frac{(n+1)*n}{2}$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{1}{3}(n+1)[(n+1)n - \frac{1}{2}n] = \frac{1}{6}(n+1)[2(n+1)n - n] = \frac{1}{6}(n+1)[2n^2 + 2n - n]$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n)$$

$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)*n$

Beispiel 3:

$$\sum_{i=0}^n i \cdot q^i \quad a_i = q^i \quad b_i = i$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot b_i = A_n \cdot b_{n+1} + \sum_{k=0}^n A_k \cdot (b_k - b_{k+1})$$

$$b_k = k \quad b_{k+1} = k + 1 \quad b_k - b_{k+1} = -1 \quad b_{n+1} = n + 1$$

$$A_k = \sum_{v=0}^k a_v = \sum_{v=0}^k q^v = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} \quad A_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (\text{aus Kap. 8.3.1})$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot b_i = A_n \cdot b_{n+1} + \sum_{k=0}^n A_k \cdot (b_k - b_{k+1})$$

$$\sum_{i=0}^n i \cdot q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} (n + 1) + \sum_{k=0}^n \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} (-1) = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} (n + 1) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{1 - q} + \sum_{k=0}^n \frac{q^{k+1}}{1 - q}$$

$$\sum_{i=0}^n i \cdot q^i = \frac{1}{1 - q} \left[(1 - q^{n+1})(n + 1) - \sum_{k=0}^n 1 + q \sum_{k=0}^n q^k \right]$$

$$\sum_{i=0}^n i \cdot q^i = \frac{1}{1 - q} \left[(1 - q^{n+1})(n + 1) - (n + 1) + q \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right]$$

$$\sum_{i=0}^n i \cdot q^i = \frac{1}{1 - q} \left[(n + 1)(1 - q^{n+1} - 1) + q \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right]$$

$$\sum_{i=0}^n i \cdot q^i = \frac{1}{1 - q} \left[-(n + 1) \cdot q^{n+1} + q \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right]$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i q^i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=0}^n i q^i \right\} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (q^n) = 0 \quad \text{für } |q| < 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot q^i = \frac{q}{(1 + q)^2} \quad |q| < 1$$

8.7. Summe der natürlichen Zahlen und deren Potenzsumme

Die Ableitung erfolgt schon im Kap. 8.6, vorgestellt und wurde für i und i^2 mit Hilfe der Abelschen Summation:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \left[\sum_{i=0}^n i \right]^2$$

8.8. Reihenentwicklung der Standardfunktionen

Einige der folgenden Reihen sollten schon als Aufgabe 8.5.1 berechnet werden, darum hier keine Herleitung. Kap. 8.8.1 bis 8.8.6 sind schon als Arbeitsblatt MAI-17 und MAI-18 bekannt.

8.8.1. Exponential Reihen

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{für } |x| < \infty$$

8.8.2. Trigonometrische Reihen

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots \quad \text{für } |x| < \infty$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots \quad \text{für } |x| < \infty$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \dots \quad \text{für } 0 < |x| < \pi$$

8.8.3. Hyperbolische Reihen

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \frac{1}{11!}x^{11} + \dots \quad \text{für } |x| < \infty$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \frac{1}{10!}x^{10} + \dots \quad \text{für } |x| < \infty$$

$$\tanh(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\coth(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \dots \quad \text{für } 0 < |x| < \pi$$

8.8.4. Logarithmische Reihen

$$\ln(x) = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - + \dots \quad \text{für } 0 < x \leq 2$$

$$\ln(x) = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \dots \quad \text{für } x > \frac{1}{2}$$

$$\ln(x) = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \dots \right] \quad \text{für } x > 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{für } -1 < x \leq 1$$

$$\ln(1-x) = - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right) \quad \text{für } -1 \leq x < 1$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \operatorname{artanh}(x) = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right] \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\ln \frac{x+1}{x-1} = 2 \operatorname{arcoth}(x) = 2 \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots \right] \quad \text{für } |x| < 1$$

8.8.5. Reihen der Arcus-Funktionen

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1*3}{2*4} \frac{x^5}{5} + \frac{1*3*5}{2*4*6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{1*3}{2*4} \frac{x^5}{5} - \frac{1*3*5}{2*4*6} \frac{x^7}{7} - \dots \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{für } |x| \leq 1$$

$$\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - + \dots \quad \text{für } |x| \leq 1$$

8.8.6. Reihen der Areafunktionen

$$\operatorname{arsinh}(x) = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1*3}{2*4} \frac{x^5}{5} - \frac{1*3*5}{2*4*6} \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \pm \left[\ln(2x) - \frac{1}{2*2x^2} - \frac{1*3}{2*4*4x^4} - \frac{1*3*5}{2*4*6*6x^6} - \dots \right] \quad \text{für } x > 1$$

$$\operatorname{artanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots \quad \text{für } |x| > 1$$

8.8.7. Verwandtschaft der Reihen

Sehr eng miteinander verwandt sind:

- trigonometrische Reihen
- hyperbolische Reihen und
- Exponentialreihe

weil gilt: $e^{ix} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$

$$\cosh(jx) = \cos(x)$$

$$\sin(jx) = j\sinh(x)$$

Teilweise unterscheiden sich dadurch die Reihen nur im Vorzeichen.

Auch die

Arcus-Funktionen
Area-Funktionen und
Logarithmische Reihen

sind miteinander verwandt. Diese Problematik wurde auch schon in Kap. 2.3.9 im 1.Semester diskutiert.

8.8.8. Spezielle Binomische Reihen

Die Binomische Reihe ist schon aus Abschnitt 8.4 bekannt. Für einige Zahlenwerte soll diese hier noch einmal angegeben werden. Einige der unten angegebenen Binominalkoeffizienten wurden schon in Abschnitt 8.4.3 in den Beispielen berechnet.

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 \pm \binom{n}{3}x^3 + \dots$$

Die zweite Form

$$(a \pm x)^n = a^n \left(1 \pm \frac{x}{a} \right)^n$$

kann mit Hilfe der oberen Reihe entwickelt werden, indem x ersetzt wird durch x/a.

$$(1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1*1}{2*4}x^2 \pm \frac{1*1*3}{2*4*6}x^3 - \frac{1*1*3*5}{2*4*6*8}x^4 \pm \dots \quad \text{für } |x| \leq 1$$

$$(1 \pm x)^{1/3} = 1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1*2}{3*6}x^2 \pm \frac{1*2*5}{3*6*9}x^3 - \frac{1*2*5*8}{3*6*9*12}x^4 \pm \dots \quad \text{für } |x| \leq 1$$

$$(1 \pm x)^{1/4} = 1 \pm \frac{1}{4}x - \frac{1*3}{4*8}x^2 \pm \frac{1*3*7}{4*8*12}x^3 - \frac{1*3*7*11}{4*8*12*16}x^4 \pm \dots \quad \text{für } |x| \leq 1$$

$$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \dots \quad \text{für } |x| < 1$$

$$(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1*3}{2*4}x^2 \mp \frac{1*3*5}{2*4*6}x^3 + \frac{1*3*5*7}{2*4*6*8}x^4 \mp \dots \quad \text{für } |x| < 1$$

$$(1 \pm x)^{-1/3} = 1 \mp \frac{1}{3}x + \frac{1*4}{3*6}x^2 \mp \frac{1*4*7}{3*6*9}x^3 + \frac{1*4*7*10}{3*6*9*12}x^4 \mp \dots \quad \text{für } |x| < 1$$

$$(1 \pm x)^{-1/4} = 1 \mp \frac{1}{4}x + \frac{1*5}{4*8}x^2 \mp \frac{1*5*9}{4*8*12}x^3 + \frac{1*5*9*13}{4*8*12*16}x^4 \mp \dots \quad \text{für } |x| < 1$$

8.9. Näherungsformeln

Im Kap. 8.8 ist für viele Funktionen die Reihenentwicklung angegeben. Wird jetzt mit kleinen x -Werten gerechnet, können die anderen Terme vernachlässigt werden, weil diese das Reihenergebnis nicht wesentlich beeinflussen. Mit unten angegebenen Näherungsformeln wird in der Praxis häufig gerechnet. Unter der Voraussetzung $\epsilon \ll 1$ gilt:

$$(1 \pm \epsilon)^n \approx 1 \pm n\epsilon \quad \epsilon \ll 1$$

$$(a \pm x)^n \approx a^n \left(1 \pm n \frac{x}{a} \right) \quad \frac{x}{a} \ll 1$$

Für Spezielle n -Werte ergibt sich:

$(1 \pm \epsilon)^2 \approx 1 \pm 2\epsilon$	$(a \pm \epsilon)^2 \approx a^2 \left(1 \pm \frac{2\epsilon}{a} \right)$
$(1 \pm \epsilon)^3 \approx 1 \pm 3\epsilon$	$(a \pm \epsilon)^3 \approx a^3 \left(1 \pm \frac{3\epsilon}{a} \right)$
$\sqrt{1 \pm \epsilon} \approx 1 \pm \frac{1}{2}\epsilon$	$\sqrt{a \pm \epsilon} \approx \sqrt{a} \left(1 \pm \frac{\epsilon}{2a} \right)$
$\frac{1}{1 \pm \epsilon} \approx 1 \mp \epsilon$	$\frac{1}{a \pm \epsilon} \approx \frac{1}{a} \left(1 \mp \frac{\epsilon}{a} \right)$
$\frac{1}{\sqrt{1 \pm \epsilon}} \approx 1 \mp \frac{1}{2}\epsilon$	$\frac{1}{\sqrt{a \pm \epsilon}} \approx \frac{1}{\sqrt{a}} \left(1 \mp \frac{\epsilon}{2a} \right)$
$\sqrt[q]{1 \pm \epsilon} \approx 1 \pm \frac{p}{q}\epsilon$	
$\frac{1}{\sqrt[q]{1 \pm \epsilon}} \approx 1 \mp \frac{p}{q}\epsilon$	

Auch für andere Funktionen lassen sich Näherungen angeben:

$e^\epsilon \approx 1 + \epsilon$	$a^\epsilon \approx 1 + \epsilon \ln(a)$
$\ln(1 + \epsilon) \approx \epsilon$	
$\ln \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \approx 2\epsilon$	$\ln(\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 1}) \approx \epsilon$
$\sin(\epsilon) \approx \epsilon$	$\tan(\epsilon) \approx \epsilon$
$\cos(\epsilon) \approx 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2$	$\cot(\epsilon) \approx \frac{1}{\epsilon}$
$\arcsin(\epsilon) \approx \epsilon$	$\arctan(\epsilon) \approx \epsilon$
$\sinh(\epsilon) \approx \epsilon$	$\tanh(\epsilon) \approx \epsilon$
$\cosh(\epsilon) \approx 1 + \frac{\epsilon^2}{2}$	$\coth(\epsilon) \approx \frac{1}{\epsilon}$
$\operatorname{arsinh}(\epsilon) \approx \epsilon$	$\operatorname{artanh}(\epsilon) \approx \epsilon$

Allgemein lassen sich Näherungen mit Hilfe einer abgebrochenen Taylor Reihe berechnen:

$$f(x+\epsilon) \approx f(x) + f'(x) \cdot \epsilon$$

8.10. Einige Werte von unendlichen Reihen

Die Zahl π und auch die Zahl e lassen sich durch Reihenentwicklung bestimmen. Weitere interessante Reihewerte sind unten angegeben.

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(2)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = 1$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

8.11. Integration durch Reihenentwicklung

Für einige Funktionen ist es schwer eine Stammfunktion zu finden. Einfacher ist es, diese in eine Reihe zu entwickeln und die Reihe zu integrieren.

Beispiel 1:

Das wohl bekannteste Beispiel ist:

$$\int \frac{\sin(x)}{x} dx = \text{si}(x)$$

Hier wird als Stammfunktion der Integralsinus $\text{si}(x)$ als zusätzliche Funktion eingeführt. Aber zum Berechnen der si -Funktion benötigt man auch eine Reihe. Bei diesen Beispiel hat man den Vorteil, dass die Reihe $\sin(x)$ bekannt ist

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + - \dots$$

$$\int \frac{\sin(x)}{x} dx = x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{5!} - \frac{1}{7} \frac{x^7}{7!} + -$$

Beispiel 2:

$$I = \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2(x)} dx$$

Das obige Integral hat als Lösung keine bekannte Stammfunktion. Es wird als elliptisches Integral bezeichnet. In der Literatur werden unter dem Namen elliptische Integrale in Tafeln geführt. Anwendung z.B. Umfang einer Ellipse.

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2(x)} = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} k^4 \sin^4(x)$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} k^6 \sin^6(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} k^8 \sin^8(x) - \dots$$

Die Ausdrücke mit den Termen $\int \sin^n(x) dx$ lassen sich durch Mehrfachenwendungen für der partiellen Integration analytisch berechnen. In Aufgabe 8.11.2, wird für diese Ausdrücke eine rekursive Formel entwickelt.

Aufgaben 8.11.1, 8.11.2, 8.11.3 und 8.11.4 rechnen

Anhang

Aufgaben

Aufgabe 6.1.1

Zu berechnen ist die Funktion der Tangente $y_T = a_0 + a_1 \cdot x$ und der Normalen $y_N = b_0 + b_1 x$ für die folgenden Funktionen an der Stelle x_0 .

- | | | |
|----|-------------------------|---------------|
| a) | $y = x^2 + 2x + 5$ | $x_0 = 2$ |
| b) | $y = \ln(x)$ | $x_0 = 5$ |
| c) | $y = \sin(x)$ | $x_0 = 0.5$ |
| d) | $y = \tan(x)$ | $x_0 = \pi/4$ |
| e) | $y = x^3 + 2 + e^{-2x}$ | $x_0 = 2$ |

Aufgabe 6.1.2

Skizzieren Sie die folgenden Funktionen für $x > 0$.

- | | | | | | |
|----|-------------------------|----|------------------------|----|-----------------------|
| a) | $y = 10 \cdot e^{-x/2}$ | b) | $y = 4 \cdot e^{-x/4}$ | c) | $y = 3 \cdot e^{-2x}$ |
|----|-------------------------|----|------------------------|----|-----------------------|

Aufgabe 6.2.1

Der Schnittwinkel und der Schnittpunkt zwischen den zwei Funktionen y_1 und y_2 sind zu bestimmen.

- | | | |
|----|--------------------|----------------------|
| a) | $y_1 = \ln(x) + 5$ | $y_2 = e^x$ |
| b) | $y_1 = \cosh(x)$ | $y_2 = 3 \arctan(x)$ |
| c) | $y_1 = x^3 + 3x$ | $y_2 = 4 - x^2$ |
| d) | $y_1 = \arccos(x)$ | $y_2 = x + 0.5$ |

Aufgabe 6.3.1

Man diskutiere den Verlauf der folgenden Funktionen:

- | | | | |
|----|--|----|--|
| a) | $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 20}{x + 2}$ | b) | $y = \frac{x^3 - 4x^2 + 7x + 38}{x - 4}$ |
| c) | $y = \frac{x^3 + 4x + 100}{x + 4}$ | d) | $y = x^3 + 12x^2 + 21x + 20$ |
| e) | $y = x^3 - 18x^2 + 33x - 30$ | f) | $y = x^3 + 21x^2 - 45x + 15$ |
| g) | $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ | h) | $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ |
| i) | $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ | | |

Aufgabe 6.3.2

Von den folgenden Funktionen sind Pole, Nullstellen und Lücken zu bestimmen.

- | | | | | | |
|----|---|----|---|----|---|
| a) | $y = \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - 5x + 6}$ | b) | $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 20}$ | c) | $y = \frac{x^2 + 9x + 20}{x^2 + 2x - 24}$ |
|----|---|----|---|----|---|

Aufgabe 6.3.3

Bei den folgenden Funktionen ist erste Ableitung an der Stelle $x = 0$ gleich Null ($y'(x = 0) = 0$). Bestimmen Sie ob es sich um ein Maximum, Minimum, Wendepunkt oder Sattelpunkt handelt.

- | | | | | | |
|----|------------------------|----|--------------------|----|------------------|
| a) | $y = x^5 + 2x^2$ | b) | $y = x^3 - 2x^2$ | c) | $y = -x^3 + x^6$ |
| d) | $y = \cosh(x) - x^2/2$ | e) | $y = \sinh(x) - x$ | | |

Aufgabe 6.3.4

Im Punkt x_q soll die Krümmung k und der Krümmungsradius ρ der Funktion $y(x)$ berechnet werden.

- | | | |
|----|--------------------|-----------|
| a) | $y = \cosh(x)$ | $x_q = 2$ |
| b) | $y = \cos(x)$ | $x_q = 0$ |
| c) | $y = x^2 - 4x + 1$ | $x_q = 3$ |
| d) | $y = \frac{1}{x}$ | $x_q = 5$ |

Aufgabe 6.4.1

Aus einem Blech der Länge a und Breite b soll ein nach oben offener und rechteckiger Kasten gebogen werden. Wie groß muß die Höhe h gewählt werden, damit das Volumen V des Kastens ein Maximum wird.

Aufgabe 6.4.2

Eine zylinderförmige Konservendose soll ein Volumen von $V = 1\text{ l}$ bekommen. Wie groß müssen Höhe und Durchmesser gewählt werden, damit möglichst wenig Blech verbraucht wird?

- a) ohne Abfall
b) mit Abfall

Aufgabe 6.4.3

James Bond (007) befindet sich mit seinem Amphibienfahrzeug auf einer geraden Küstenstraße auf dem Weg zu einer Insel um Pläne zu suchen, bevor der gegnerische Geheimdienst diese auffindet. Die Zeit eilt. Sein Fahrzeug fährt zu Land 108 km/h und zu Wasser hat es eine Geschwindigkeit von 36 km/h . Die Insel ist an der dichtesten Stelle 5 km von der Küste entfernt. In welcher Entfernung von der Insel muß James Bond die Küstenstraße verlassen, damit er möglichst schnell die Insel erreicht.

Aufgabe 6.4.4

Eine Spannungsquelle mit der Quellenspannung $U_q = 100\text{ V}$ und den Innenwiderstand $R_i = 10\ \Omega$ soll bezüglich des Verbraucherwiderstandes R optimiert werden.

- a) Die maximale Leistung $P_{\max}$ und der dazu erforderliche Verbraucherwiderstand R sind zu berechnen.
b) Nun soll der Verbraucherwiderstand bestimmt werden, wo der Wirkungsgrad ($\eta = P_R/P_{\text{ges}}$) addiert mit der Leistung im Verbraucher bezogen auf $P_{\max}$ ein Maximum erreicht.
 $\eta + P/P_{\max} \rightarrow \text{Max}$

Aufgabe 6.4.5

Ein Blech der Breite $b = 3a$ soll bei jeweils a zu einer Rinne geknickt werden. Um welchen Winkel α muß geknickt werden, damit die Rinne einen maximalen Querschnitt erhält.

Aufgabe 6.5.1

Man löse folgende Gleichungen mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens.

- | | | | |
|----|----------------------------|----|----------------------------|
| a) | $x^3 + x^2 + 5 = 0$ | b) | $\cosh(x) + x - 4 = 0$ |
| c) | $\sin(x) - 0.5 + 0.3x = 0$ | d) | $\frac{1}{x} + 2x - 5 = 0$ |
| e) | $\ln(x) + 7 - x = 0$ | | |

Aufgabe 6.5.2

Die folgenden Gleichungen sind durch wiederholtes Einsetzen zu berechnen. Man prüfe die Konvergenz. Evtl. ist die Gleichung umzuformen.

- | | | | |
|----|---------------------|----|---------------|
| a) | $x^2 - 4x - 5 = 0$ | b) | $x^3 - 5 = 0$ |
| c) | $\cos(x) = 0.5 + x$ | | |

Aufgabe 6.6.1

Die folgenden unbestimmten Ausdrücke sind zu bestimmen.

a)
$$y_g = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

b)
$$y_g = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2}$$

c)
$$y_g = \lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x) * x^2]$$

d)
$$y_g = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

e)
$$y_g = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right]$$

f)
$$y_g = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{3 - \sqrt{x+1}}{x^2 - 64}$$

g)
$$y_g = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 16x + 20}{x^2 - 4x + 4}$$

h)
$$y_g = \lim_{x \rightarrow \infty} [e^{-x} * x^5]$$

i)
$$y_g = \lim_{x \rightarrow 0} [\sin(x)]^{3x}$$

j)
$$y_g = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{\cos(x)} \right) \right]$$

l)
$$y_g = \lim_{x \rightarrow \infty} [\cosh(x) - \sinh(x)]$$

k)
$$y_g = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \cot(x) \right]$$

Aufgabe 6.7.1

Berechnen Sie die erste $y'(t) = dy(t)/dx$ und die zweite Ableitung $y''(t) = d^2[y(t)]/dx^2$. Zur Probe berechnen Sie bitte $y = f(x)$, $y' = f'(x)$ und $y'' = f''(x)$ durch eliminieren des Parameters t und durch differenzieren.

a)
$$y(t) = t^2$$

$$x(t) = t$$

b)
$$y(t) = a * \sin(t)$$

$$x(t) = a * \cos(t)$$

c)
$$y(t) = t^2$$

$$x(t) = t^4$$

d)
$$y(t) = a[t - \sin(t)]$$

$$x(t) = a[1 - \cos(t)]$$

Aufgabe 6.7.2

Berechnen Sie die erste $y'(t) = dy(t)/dx$ und die zweite Ableitung $y''(t) = d^2[y(t)]/dx^2$.

a)
$$x(t) = a * \cos(t) * e^{-t}$$

$$y(t) = a * \sin(t) * e^{-t}$$

b)
$$x(t) = t^2 + 2t + 4$$

$$y(t) = t^2 - 6t + 5$$

Aufgabe 6.8.1

Die erste Ableitung $y' = dy/dx$ der folgenden Funktionen in Polarkoordinaten sind zu bilden:

a)
$$r = a * e^{-\varphi}$$

b)
$$r = 3 * \varphi + 5\varphi^2$$

c)
$$r = \sin(\varphi) + 1$$

Aufgabe 6.9.1

Von den folgenden Funktion sind die partiellen Ableitungen z_x und z_y zu bilden. Die Funktion sind in der Nähe von x_0, y_0 durch eine Ebene anzunähern.

a)
$$z = x^2 + 4xy + 5y^2$$

$$x_0 = 2$$

$$y_0 = 3$$

b)
$$z = y * \sin(x)$$

$$x_0 = \pi/4$$

$$y_0 = 2$$

c)
$$z = y^2 * \cos(x)$$

$$x_0 = \pi/3$$

$$y_0 = -3$$

d)
$$z = x^2 + y^2$$

$$x_0 = 2$$

$$y_0 = 3$$

Aufgabe 6.9.2

Bilden Sie die vier zweiten partiellen Ableitungen von der Funktion $z = f(x,y)$.

a) $z = x^3 + 3x^2y + y^2$

b) $z = \sin(x) \cdot \cos(y)$

c) $z = 3x^2 + 4y^2$

d) $z = x^4 + 2x \cdot y^3 + \cos(y)$

Aufgabe 6.10.1

Berechnen Sie das totale Differential dz der folgenden Funktionen:

a) $z = x^2 + x^2 \cdot y^3 + y^4$

b) $z = x \cdot \sin(y)$

c) $z = ax + by + cxy$

d) $z = \cos(x) \cdot \cosh(y)$

Aufgabe 6.10.2

Die Abweichung der Funktion $z = f(x,y)$ von Arbeitspunkt (x_0, y_0) ist zu bestimmen.

a) $z = 3x^2 + 5x + 7xy$

$x_0 = 2$

$y_0 = 3$

b) $z = \sin(x) \cdot e^y$

$x_0 = \pi/6$

$y_0 = \ln(4)$

c) $z = y^2 \cdot x^3$

$x_0 = 2$

$y_0 = -3$

d) $z = \arctan(x) \cdot y^4$

$x_0 = 1$

$y_0 = 2$

Aufgabe 6.11.1

Eine Spannung wurde meßtechnisch zu 227 V bestimmt. Der wahre Wert der Spannung beträgt aber 231 V. Wie groß sind absoluter, relativer und relativer Fehler in %?

Aufgabe 6.11.2

Ein Strom wurde meßtechnisch zu $I_m = 160$ A bestimmt. Die Genauigkeit der Messung beträgt 2 %. Man gebe die Grenzen des wahren Stromwertes an.

Aufgabe 6.11.3

Ein Widerstandswert R soll mit Hilfe von Strom- und Spannungsmessung bestimmt werden. Der Strom wurde zu $I = 2$ A bei einer Genauigkeit von 2 % bestimmt, die Spannung zu $U = 10$ V bei 0.5 % Genauigkeit. In welchen Grenzen läßt sich der Widerstand R bestimmen.

Aufgabe 6.11.4

Die minimale und maximale Wirkleistung einer Spule aus Kupfer ($\rho = 0.018 \Omega \text{mm}^2/\text{m}$, 2 % genau) mit einer Länge von $l = 80$ m (0.1 % genau) und einem Durchmesser von $d = 0.1$ mm (4 % genau) sollen bestimmt werden. Die Spule liegt an einer Gleichspannung von 200 V, die um ± 10 V schwankt.

Aufgabe 6.11.5

Für die Größe $z = f(x, y, v, w)$ ist der , mittlere und der maximale relative Fehler $(\Delta z_{\text{rel}})_{\text{max}}$ $(\Delta z_{\text{rel}})_{\text{mit}}$ zu berechnen.

a) $z = \frac{x^3 \cdot y^2}{v \cdot w^5}$

$\Delta x/x = 0.01$

$\Delta y/y = 0.03$

$\Delta v/v = 0.05$

$\Delta w/w = 0.02$

b) $z = \frac{x^5 \cdot y}{v^2 \cdot w^2}$

$\Delta x/x = 0.02$

$\Delta y/y = 0.04$

$\Delta v/v = 0.05$

$\Delta w/w = 0.03$

c) $z = \frac{x^6 \cdot y^3}{v^7 \cdot w^2}$

$\Delta x/x = 0.01$

$\Delta y/y = 0.02$

$\Delta v/v = 0.04$

$\Delta w/w = 0.05$

d) $z = \frac{x \cdot y^2 \cdot v^3}{w}$

$\Delta x/x = 0.02$

$\Delta y/y = 0.03$

$\Delta v/v = 0.01$

$\Delta w/w = 0.05$

Aufgabe 6.11.6

Mittelwerte und Standardabweichung der folgenden Meßreihen sind zu bestimmen.

- | | | | | | |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| a) | $x_1 = 2$ | $x_2 = 2.1$ | $x_3 = 2.2$ | $x_4 = 1.9$ | $x_5 = 2.0$ |
| b) | $x_1 = 4.5$ | $x_2 = 3.9$ | $x_3 = 4.2$ | $x_4 = 4.3$ | |
| c) | $x_1 = 51$ | $x_2 = 53$ | $x_3 = 54$ | | |
| d) | $x_1 = 7$ | $x_2 = 7.5$ | $x_3 = 6.5$ | $x_4 = 6.8$ | |

Aufgabe 6.11.7

Die Meßreihen aus Aufgabe 6.11.6 sollen einer Gaußschen Normalverteilung gehorchen. Wie groß ist die Meßtoleranz bei gegebener Meßsicherheit mit den Meßwerten von Aufgabe 6.11.6.

- | | | |
|----|--------------------|-------------------------|
| a) | Meßsicherheit 90 % | (Meßwerte von 6.11.6 a) |
| b) | Meßsicherheit 80 % | (Meßwerte von 6.11.6 b) |
| c) | Meßsicherheit 70 % | (Meßwerte von 6.11.6 c) |
| d) | Meßsicherheit 95 % | (Meßwerte von 6.11.6 d) |

Aufgabe 6.11.8

Bei unten gegebener Meßtoleranz soll die Meßsicherheit der Meßreihen aus Aufgabe 6.11.7 bestimmt werden.

- | | |
|----|---|
| a) | $\bar{x} \pm 0.2$ (Meßwerte von 6.11.6 a) |
| b) | $\bar{x} \pm 0.4$ (Meßwerte von 6.11.6 b) |
| c) | $\bar{x} \pm 0.2$ (Meßwerte von 6.11.6 c) |
| d) | $\bar{x} \pm 0.7$ (Meßwerte von 6.11.6 d) |

Aufgabe 6.12.1

Differenzieren Sie die folgenden Vektoren nach dem Parameter t.

- | | |
|----|--|
| a) | $\vec{P} = (t^2 + 2t + 1, \quad t + 6, \quad t^3 - 2t)^t$ |
| b) | $\vec{P} = (\cos(\omega t), \quad \sin(\omega t), \quad 2t)^t$ |
| c) | $\vec{P} = (\cosh(at), \quad \sin(bt), \quad 5t^4)^t$ |
| d) | $\vec{P} = (at^2, \quad bt, \quad \ln(t + 1))^t$ |

Aufgabe 6.12.2

Bilden Sie den Gradienten grad(s) der Funktion $s = f(x, y, z)$.

- | | | | |
|----|-----------------------------|----|---|
| a) | $s = x^2 + 4y^3 + 6y^2z^3$ | b) | $s = x \cdot \sin(y) + z \cdot \cos(y)$ |
| c) | $s = x^2 + y^5 + z \cdot y$ | d) | $s = y \cdot x + x^2 \cdot z^2 + y^2 \cdot z^3$ |

Aufgabe 6.12.3

Berechnen Sie die Divergenz der folgenden Vektor-Funktionen.

- | | |
|----|---|
| a) | $\vec{v} = (x^2 \cdot y, \quad y \cdot x, \quad z \cdot x \cdot y)^t$ |
| b) | $\vec{v} = (y \cdot \cos(x), \quad y \cdot \sin(x), \quad z^2 \cdot y \cdot x)^t$ |
| c) | $\vec{E} = (x \cdot y \cdot z, \quad x^2 \cdot y^2 \cdot z^2, \quad x^3 \cdot y^3 \cdot z^3)^t$ |
| d) | $\vec{E} = (\cos(y), \quad \sin(y), \quad \cos(z))^t$ |

Aufgabe 6.12.4

Bestimmen Sie die Rotation der Vektorfunktionen aus Aufgabe 6.12.3.

Aufgabe 6.14.2

Die Aufgabe 6.13.1 a) und b) gegebenen Tabellen sind abschnittsweise durch Funktionen anzupassen, bei denen die zweite Ableitung an den Stützstellen stetig ist.

Aufgabe 6.14.3

Die Funktion $y = \sin(x)$ ist mit Hilfe der Stützstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 45^\circ$, $x_3 = 90^\circ$, $x_4 = 135^\circ$ und $x_5 = 180^\circ$ abschnittsweise anzunähern. Die Koeffizienten für die einzelnen Abschnitte sind anzugeben.

- Durch lineare Interpolation.
- Mit der Bedingung y' soll stetig sein.
- Mit der Bedingung y' und y'' sollen stetig sein.
- An den Stellen $x_6 = 22.5^\circ$, $x_7 = 67.5^\circ$, $x_8 = 112.5^\circ$ und $x_9 = 157.5^\circ$ soll der relative Fehler von a) b) und c) in Bezug auf die Originalfunktion $\sin(x)$ angegeben werden.

Aufgabe 6.14.4

Gesucht ist die Gerade, die von den unten aufgeführten Meßpunkten als Abweichung die geringsten Fehlerquadrate aufweist.

a)

x	0	2	3	5
y	2	5	7	9

b)

x	0	5	7	9
y	6	8	7	10

c)

x	4	5	6	7	8
y	10	9	7	6	5

d)

x	-4	-3	-1	1	2
y	10	8	6	5	4

Aufgabe 6.14.5

Geben Sie die Parabel 2.Ordnung an, die mit den Tabellenwerten aus Aufgabe 6.14.4 die geringsten Fehlerquadrate als Abweichung aufweist.

Aufgabe 6.14.6

Stellen Sie die Bestimmungsgleichung in Matrix- und Vektorform auf, um die folgende Wertetabelle mit Hilfe von least square durch ein Polynom 4.Ordnung anzunähern. Auch hier geben Sie alle Matrix- und Vektorelemente an die notwendig sind um die Koeffizienten a_0 bis a_4 zu berechnen. Geben Sie die Berechnungsvorschrift für diese an.

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	2	5	5	3	-1	-1	6

b)

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
y	10	8	3	2	5	12	14

Aufgabe 6.14.7

Stellen Sie die Bestimmungsgleichung in Matrix- und Vektorform auf, um die folgende Funktion bei $x = 0, 0.1\pi, 0.2\pi, \dots, 1.0\pi$ mit Hilfe von least square durch ein Polynom 4. Ordnung anzunähern. Geben Sie alle Matrix- und Vektorelemente an die notwendig sind um die Koeffizienten a_0 bis a_6 zu berechnen. Geben Sie die Berechnungsvorschrift für diese an.

a) $y = \sin(x)$

b) $y = \cosh(x)$

Aufgabe 7.2.1

Versuchen Sie eine Stammfunktion $F(x)$ der Funktion $f(x)$ zu finden für die gilt $F(x) = \int f(x)dx$.

a) $f(x) = \cos(ax)$

b) $f(x) = \sin(ax)$

c) $f(x) = \cosh(ax)$

d) $f(x) = \sinh(ax)$

e) $f(x) = x^4$

f) $f(x) = x^7$

Aufgabe 7.3.1

Bestimmen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $I = \int_{x=0}^5 x^3 dx$

b) $I = \int_{x=2}^2 \sin(x) dx$

c) $I = \int_{x=0}^1 e^x dx$

d) $I = \int_{x=2}^{2.5} \cosh(x) dx$

e) $I = \int_{x=2}^1 x^4 dx$

f) $I = \int_{x=5}^5 x^2 \cdot \sinh(x) dx$

Aufgabe 7.4.1

Der Wert des bestimmten Integrals ist zu berechnen

$$I = \int_{x=2}^3 (5x^3 + 4x^4) dx$$

Aufgabe 7.4.2

Berechnen Sie das folgende bestimmte Integral.

$$I = \int_{x=2}^8 f(x) dx$$

mit $f(x) = f_1(x) = 4 - x$ für $2 \leq x \leq 4$
 und $f(x) = f_2(x) = x^2 - 4x$ für $4 \leq x \leq 8$

Aufgabe 7.4.3

Berechnen Sie Fläche, die sich ergibt durch folgende Begrenzungen:

$$x = 2 \text{ cm}$$

$$y = 0$$

$$x = 4 \text{ cm}$$

$$y = 9 \text{ cm} - 6x + \frac{x^2}{1 \text{ cm}}$$

Aufgabe 7.5.1

Die folgenden bestimmten Integrale sind zu bestimmen:

$$\text{a) } I = \int_{x=4}^8 e^x dx$$

$$\text{b) } I = \int_{x=2}^3 \cos(x) dx$$

$$\text{c) } I = \int_{x=4}^5 \sin(x) dx$$

$$\text{d) } I = \int_{x=-3}^4 \sinh(x) dx$$

$$\text{f) } I = \int_{x=0}^5 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\text{g) } I = \int_{x=0}^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aufgabe 7.6.1

Der Mittelwert der Funktion $y = f(x)$ soll für das Intervall $[a, b]$ berechnet werden.

$$\text{a) } y = x^2$$

$$a = 0$$

$$b = 1$$

$$\text{b) } y = x^n$$

$$a = 0$$

$$b = 1$$

$$\text{c) } y = \cos(x)$$

$$a = \frac{\pi}{4}$$

$$b = a = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{d) } y = x^3$$

$$a = -2$$

$$b = +2$$

$$\text{e) } y = e^x$$

$$a = 1$$

$$b = 2$$

$$\text{f) } y = \sin(x)$$

$$a = 0$$

$$b = \pi$$

$$\text{g) } y = \sin(x)$$

$$a = 0$$

$$b = 2\pi$$

$$\text{h) } y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$a = 0.5$$

$$b = 0.7$$

Aufgabe 7.7.1

Man löse durch Substitution:

$$\text{a) } F(x) = \int (3x + 4)^5 dx$$

$$\text{b) } F(x) = \int \cos(ax) dx$$

$$\text{c) } F(x) = \int e^{ax} dx$$

$$\text{d) } F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{e) } F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{f) } F(x) = \int \sin^3(x) * \cos(x) dx$$

$$\text{g) } F(x) = \int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

$$\text{h) } F(x) = \int \tan(x) dx$$

$$\text{i) } F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$\text{j) } F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$$

$$\text{k) } F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$$

$$\text{l) } F(x) = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} dx$$

$$\text{m) } F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x - 4x + 13}} dx$$

Aufgabe 7.7.2

Man löse durch Substitution:

a) $F(x) = \int \frac{1}{7x - 3} dx$

b) $F(x) = \int \cosh(3x) dx$

c) $F(x) = \int (5x)^7 dx$

d) $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx$

e) $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{16 + x^2}} dx$

f) $F(x) = \int \frac{1}{4 - x^2} dx$

g) $F(x) = \int \frac{1}{0.25 + x^2} dx$

h) $F(x) = \int \frac{1}{x^2 + 6x + 34} dx$

i) $F(x) = \int \sin^5(x) \cdot \cos(x) dx$

j) $F(x) = \int \cosh[(x + 5)^3] \cdot (x + 5)^2 dx$

Aufgabe 7.7.3

Man löse durch Substitution:

a) $F(x) = \int (0.5x + 6)^4 dx$

b) $F(x) = \int \sinh(8x) dx$

c) $F(x) = \int \frac{(x + 3)}{(x + 3)^2 + 5^2} dx$

d) $F(x) = \int \cos(x^2 + 5) \cdot 2x dx$

e) $F(x) = \int x e^{x^2} dx$

f) $F(x) = \int \frac{1}{x^2 + 8x - 20} dx$

Aufgabe 7.7.4

Die folgenden unbestimmten Integrale sind durch Produktintegration zu lösen.

a) $F(x) = \int x \cdot \cos(x) dx$

b) $F(x) = \int x^2 \cdot \sin(x) dx$

c) $F(x) = \int x^2 \cdot \ln(x) dx$

d) $F(x) = \int \ln(x) dx$

e) $F(x) = \int \arcsin(x) dx$

f) $F(x) = \int \cosh^2(x) dx$

g) $F(x) = \int x \cdot \operatorname{arcosh}(x) dx$

Aufgabe 7.7.5

Die folgenden unbestimmten Integrale sind durch Produktintegration zu lösen.

a) $F(x) = \int x \sin(x) dx$

b) $F(x) = \int x^2 \cdot e^x dx$

c) $F(x) = \int x \ln(x) dx$

d) $F(x) = \int \operatorname{arcosh}(x) dx$

e) $F(x) = \int \sin^2(x) dx$

f) $F(x) = \int x \cdot \arcsin(x) dx$

Aufgabe 7.7.6

Die folgenden unbestimmten Integrale sind durch Produktintegration zu lösen.

a) $F(x) = \int x \cdot e^x dx$

b) $F(x) = \int x^2 \cos(x) dx$

c) $F(x) = \int x^3 \ln(x) dx$

d) $F(x) = \int \arccos(x) dx$

e) $F(x) = \int \cos^2(x) dx$

f) $F(x) = \int x \cdot \arccos(x) dx$

Aufgabe 7.7.7

a) $F(x) = \int \frac{8x - 13}{(x - 1)(x - 2)} dx$

b) $F(x) = \int \frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 6}{(x - 3)^4} dx$

c) $F(x) = \int \frac{x^2 + 4x + 7}{(x - 2)^2(x + 3)} dx$

Aufgabe 7.7.8

Man zerlegt in Partialbrüche

$$\text{a) } f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{(x-3)(x^2 - 8x + 25)}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{5x^2 - 6x + 4}{(x+6)(x^2 - 4x + 40)}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 7}{(x-2)(x^2 + 6x + 25)}$$

Aufgabe 7.7.9

$$\text{a) } F(x) = \int \frac{x^3 - x^2 - 18x + 10}{x + 4} dx$$

$$\text{c) } F(x) = \int \frac{3x - 1}{(x - 5)^2} dx$$

$$\text{b) } F(x) = \int \frac{7x^2 + 47x + 150}{(x+1)(x+3)(x-6)} dx$$

$$\text{d) } F(x) = \int \frac{x^2 + 4x + 5}{(x+2)^3} dx$$

Aufgabe 7.7.10

$$\text{a) } F(x) = \int \frac{x dx}{(x+5)^3}$$

$$\text{j) } F(x) = \int x * e^{-3x} dx$$

$$\text{b) } F(x) = \int \frac{x dx}{(x-3)^2}$$

$$\text{k) } F(x) = \int x^2 * e^{5x} dx$$

$$\text{c) } F(x) = \int (x-5) \sqrt{9-x^2} dx$$

$$\text{l) } F(x) = \int (x-5)^3 dx$$

$$\text{d) } F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$\text{m) } F(x) = \int x * \arcsin(5x) dx$$

$$\text{e) } F(x) = \int \sqrt{16+x^2} dx$$

$$\text{n) } F(x) = \int \frac{\sin^3(6x)}{\cos(6x)} dx$$

$$\text{f) } F(x) = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$$

$$\text{o) } F(x) = \int e^{2x} * \sin(3x) dx$$

$$\text{g) } F(x) = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$\text{p) } F(x) = \int \frac{x dx}{9-x^2}$$

$$\text{h) } F(x) = \int (x-5) \sin(4x) dx$$

$$\text{q) } F(x) = \int \frac{x^3 dx}{x^2 - 16}$$

$$\text{i) } F(x) = \int \frac{x+3}{x^2-16} dx$$

Aufgabe 7.7.11Für die in Aufgabe 7.7.8 partialbruchzerlegten Funktionen ist das Integral $F(x) = \int f(x) dx$ zu bilden.

Aufgabe 7.8.1

Für die unten angegebenen Funktionen $f(x)$ ist das Integral I in den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ zu bestimmen. Für die numerische Integration sind $n + 1$ Funktionswerte ($y_0, \dots, y_n$) zu berechnen. Das bestimmte Integral I_1 soll mit Hilfe der Trapezregel und I_2 mit Hilfe der Simpsonregel bestimmt werden. Zum Vergleich ist das Integral I_3 analytisch auszuwerten. Der relative Fehler für I_1 und I_2 ist anzugeben.

a) $f(x) = \sin(x)$ $a = 0$ $b = \frac{\pi}{2}$ $n = 4$

b) $f(x) = \sin(x)$ $a = 0$ $b = \frac{\pi}{2}$ $n = 8$

c) $f(x) = \sin(x)$ $a = 0$ $b = \frac{\pi}{2}$ $n = 16$

d) $f(x) = x^2$ $a = 4$ $b = 6$ $n = 4$

e) $f(x) = x^5$ $a = 0$ $b = 2$ $n = 4$

f) $f(x) = \cos(x)$ $a = 0$ $b = \pi/2$ $n = 4$

Aufgabe 7.9.1

Für die folgenden Verläufe mit Sprungstellen ist das bestimmte Integral

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

zu bilden.

Für folgende Abschnitte gilt

$a \leq x < c$		$f(x) = f_1(x)$		
$c < x \leq b$		$f(x) = f_2(x)$		
a) $a = 0,$	$c = 2,$	$b = 3,$	$f_1(x) = 4x^2,$	$f_2(x) = e^{-0.2x}$
b) $a = 2,$	$c = 4,$	$b = 5,$	$f_1(x) = \sin(0.2x),$	$f_2(x) = \cos(0.5x)$
c) $a = 4,$	$c = 6,$	$b = 10,$	$f_1(x) = x^4,$	$f_2(x) = x^6$
d) $a = 3,$	$c = 5,$	$b = 9,$	$f_1(x) = \sinh(0.1x),$	$f_2(x) = 3x-1$

Aufgabe 7.9.2

Die folgenden uneigentlichen bestimmten Integrale sind zu bilden:

Hinweis: Der Wert einiger Integrale ist ∞ .

a) $I = \int_{x=0}^1 \frac{1}{x^n} dx$ e) $I = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

b) $I = \int_0^1 \ln(x) dx$ f) $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

c) $I = \int_{x=0}^{\infty} x * e^{-ax} dx$ g) $I = \int_1^{\infty} \frac{x}{1-x^2} dx$

d) $I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

Aufgabe 7.10.1

Das Volumen im x-y-z-kartesische Raum mit den unten angegebenen Grenzen soll berechnet werden. (dimensionslos)

- | | | | |
|----|----------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|
| a) | $x_1 = 3$
$x_2 = 6$ | $y_1 = 1$
$y_2 = 4$ | $z_1 = 0$
$z_2 = x*y$ |
| b) | $x_1 = 2$
$x_2 = 5$ | $y_1 = 3$
$y_2 = 7$ | $z_1 = 0$
$z_2 = y + 5x^2$ |
| c) | $x_1 = 1$
$x_2 = 2$ | $y_1 = 4$
$y_2 = 12$ | $z_1 = 0$
$z_2 = e^{y/3}*x$ |
| d) | $x_1 = 0$
$x_2 = 5$ | $y_1 = 1$
$y_2 = 3$ | $z_1 = 4$
$z_2 = x^2y + 6$ |
| e) | $x_1 = 0$
$x_2 = 2$ | $y_1 = 0$
$y_2 = x$ | $z_1 = 0$
$z_2 = x^2 + y$ |
| f) | $x_1 = -1$
$x_2 = 2y^2$ | $y_1 = -1$
$y_2 = 1$ | $z_1 = x*y$
$z_2 = 2x^2 + y^2 + 2$ |
| g) | $x_1 = 0$
$x_2 = 2$ | $y_1 = 1 - x$
$y_2 = 1 + x$ | $z_1 = 0$
$z_2 = \cos(x)*\cosh(y)$ |
| h) | $x_1 = 3$
$x_2 = 5$ | $y_1 = 1 - x^2$
$y_2 = 1 + x^2$ | $z_1 = 1$
$z_2 = 2 + x^2 + y^2$ |

Aufgabe 7.10.2

Die Fläche die von den folgenden Spiralen im Bereich $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ eingeschlossen wird, soll berechnet werden.

- | | | | |
|----|--|----|---|
| a) | $R = 10 \text{ cm} * e^{-\varphi/2\pi}$ | b) | $R = \frac{10 \text{ cm}}{1 + \frac{\varphi}{2\pi}}$ |
| c) | $R = 10 \text{ cm} * \frac{\varphi}{2\pi}$ | d) | $R = \frac{10 \text{ cm}}{\left(1 + \frac{\varphi}{2\pi}\right)^2}$ |

Aufgabe 7.10.3

Das Volumen eines Hohlzylinders mit dem Außenradius R_2 , dem Innenradius R_1 ist zu berechnen. Die Höhe $h = f(R, \varphi)$ des Hohlzylinder ist radius- und winkelabhängig.

- | | | | |
|----|-----------------------|----------------------|--|
| a) | $R_1 = 2 \text{ cm}$ | $R_2 = 4 \text{ cm}$ | $h = 10 \text{ cm} \frac{R}{4 \text{ cm}} * [2 + \sin(\varphi)]$ |
| b) | $R_1 = 0.5 \text{ m}$ | $R_2 = 2 \text{ m}$ | $h = (R + 1 \text{ m})[4 + \cos^2(\varphi)]$ |

Aufgabe 7.10.4

Welche Mantelfläche besitzt ein Zylinder mit dem Radius 5 cm und der Höhe $h = 10 \text{ cm}[1 + (\varphi/2\pi) + \sin(\varphi)]$ $\varphi = 0 \dots 2\pi$

Aufgabe 7.10.5

Aus einer Kugel mit dem Radius $r = 5 \text{ cm}$ wird ein Kegel unter einem Öffnungswinkel von 120° ($\vartheta = 60^\circ$) herausgeschnitten bis in den Mittelpunkt.

- Das Volumen der Rest-Kugel ist zu berechnen.
- Die gesamte Oberfläche des Körpers ist zu bestimmen.

Aufgabe 7.10.6

Berechnen Sie das Volumen der Hohlkugel mit dem Außenradius $r_2 = 9 \text{ cm}$ und dem Innenradius

$$\text{a) } r_1 = 3 \text{ cm } \sqrt[3]{[\sin(\vartheta) * \cos(\varphi) + 2]}$$

$$\text{b) } r_1 = 3 \text{ cm } \sqrt[3]{[\sin(\vartheta) + \cos(\varphi) + 2]}$$

Aufgabe 7.11.1

Die Bogenlängen der Funktion $y = f(x)$ im Bereich $x = a$ bis $x = b$ soll bestimmt werden.

$$\text{a) } a = 2 \text{ cm} \quad b = 4 \text{ cm} \quad y = \frac{2x^2}{\text{cm}} + 6 \text{ cm}$$

$$\text{b) } a = 1 \text{ cm} \quad b = 2 \text{ cm} \quad y = 3 \text{ cm} + 1 \text{ cm} * \cosh\left(\frac{x}{1 \text{ cm}}\right)$$

$$\text{c) } a = 1 \text{ cm} \quad b = 4 \text{ cm} \quad y = \ln\left(\frac{x}{1 \text{ cm}}\right) \text{ cm}$$

Aufgabe 7.11.2

Das Volumen des Rotationskörpers um die x-Achse mit den folgenden Begrenzungen ist zu bestimmen.

$$\text{a) } \begin{array}{ll} x_1 = 2 \text{ cm} & y_1 = x + 1 \text{ cm} \\ x_2 = 3 \text{ cm} & Y_2 = x + 4 \text{ cm} \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{array}{ll} x_1 = 2 \text{ cm} & y_1 = 3 \text{ cm} \\ x_2 = 3 \text{ cm} & Y_2 = 3 + (x - 5 \text{ cm})^2 / 1 \text{ cm} \end{array}$$

$$\text{c) } \begin{array}{ll} x_1 = 5 \text{ cm} & y_1 = 0 \\ x_2 = 10 \text{ cm} & Y_2 = \sinh(x/2 \text{ cm}) \end{array}$$

$$\text{d) } \begin{array}{ll} x_1 = 0 \text{ cm} & y_1 = x \\ x_2 = 3 \text{ cm} & Y_2 = x^2 / 1 \text{ cm} + 1 \text{ cm} \end{array}$$

Aufgabe 7.11.3

Berechnen Sie das Volumen eines Rotationskörpers um die y-Achse mit den folgenden Begrenzungen.

$$\text{a) } \begin{array}{ll} x_1 = 5 \text{ cm} & y_1 = 1 \text{ cm} - x \\ x_2 = 8 \text{ cm} & y_2 = 1 \text{ cm} + x \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{array}{ll} x_1 = 2 \text{ cm} & y_1 = x * \sin(x/17 \text{ cm}) \\ x_2 = 7 \text{ cm} & y_2 = x^3 / 100 \text{ cm}^2 + 10 \text{ cm} \end{array}$$

Aufgabe 7.11.4

Gesucht ist die Mantelfläche eines Rotationskörpers um die x-Achse mit der Funktion $y = f(x)$ in Bereich zwischen $x = a$ bis $x = b$.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } & y = 5 \text{ cm} + 0.5x & a = 5 \text{ cm} \quad b = 10 \text{ cm} \\ \text{b) } & y = 5 \text{ cm} + 0.5x^2 / 1 \text{ cm} & a = 1 \text{ cm} \quad b = 2 \text{ cm} \end{array}$$

Aufgabe 7.11.5

Das Massenträgheitsmoment eines Rotationskörpers um die x-Achse mit der Dichte $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ und den folgenden Begrenzungen soll bestimmt werden.

$$\text{a) } \begin{array}{ll} x_1 = 1 \text{ cm} & y_1 = 2 \text{ cm} \\ x_2 = 5 \text{ cm} & y_2 = 4 \text{ cm} + x \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{array}{ll} x_1 = 2 \text{ cm} & y_1 = 1 \text{ cm}(x/6 \text{ cm})^2 \\ x_2 = 6 \text{ cm} & y_2 = 1 \text{ cm}(x/6 \text{ cm}) \end{array}$$

Aufgabe 7.11.6

Das Massenträgheitsmoment mit dem Außenradius r_2 (R_2) und dem Innenradius r_1 (R_1) ist in allgemeiner Form zu berechnen.

- eines Hohlzylinders der Länge h
- einer Hohlkugel

Aufgabe 7.11.7

Berechnen Sie die Schwerpunktkoordinaten des Dreiecks mit folgenden Eckpunkten.

- $x_1 = 0 \text{ cm}$ $x_2 = 0 \text{ cm}$ $x_3 = 12 \text{ cm}$
 $y_1 = 0 \text{ cm}$ $y_2 = 8 \text{ cm}$ $y_3 = 0 \text{ cm}$
- $x_1 = 5 \text{ cm}$ $x_2 = 10 \text{ cm}$ $x_3 = 10 \text{ cm}$
 $y_1 = 4 \text{ cm}$ $y_2 = 1 \text{ cm}$ $y_3 = 7 \text{ cm}$

Aufgabe 7.11.8

Bestimmen Sie die Schwerpunktskoordinaten der durch die folgenden Funktionen begrenzten Flächen.

- $x_1 = 0$ $y_1 = -x$
 $x_2 = 1$ $Y_2 = x^2$
- $x_1 = 2$ $y_1 = 0$
 $x_2 = 4$ $Y_2 = x$

Aufgabe 7.12.1

Gegeben ist die Vektorfunktion

$$\vec{d} = \text{grad}(\varphi) \quad I = \int_{P_1}^{P_2} \vec{d} ds$$

Bilden Sie das Linienintegral

- $\varphi = x^2 + y^2 + z^2$ $\vec{P}_1(1,1,1)^t$ $\vec{P}_2(2,2,2)^t$
- $\varphi = x*y^2*z^3 + x^3*y*z^2 + x^2*y^3*z$ $\vec{P}_1(1,2,3)^t$ $\vec{P}_2(4,5,6)^t$

Aufgabe 7.12.2

Versuchen Sie, wenn möglich, die Vektorfunktion $\vec{d}$ darzustellen durch:

$$\text{grad}(\varphi) = \vec{d}$$

- $\vec{d}_t = (y*z, 2*x*y, x^2)$
- $\vec{d}_t = (x^2*y, z*x^3, y*x^5)$
- $\vec{d}_t = (3x^2*y, 4y^3*z, 2*z*x)$
- $\vec{d}_t = (x*z^2, y*z^3, x*y^2)$
- $\vec{d}_t = (2x, 3y^2, 4z^3)$
- $\vec{d}_t = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$
- $\vec{d}^t = (y*z, x*z, x*y)$

Aufgabe 7.12.3

Für die Vektorfunktionen von Aufgabe 7.12.2 ist das Linienintegral von $\vec{P}_1(0,0,0)^t$ bis $\vec{P}_2(5,3,8)^t$

$$I = \int_{C_1} \vec{d} ds$$

zu bilden. Der Weg C_1 soll auf einer Geraden liegen.

Aufgabe 8.1.1

Man bestimme das nicht rekursive und das rekursive Bildungsgesetz der Folgen.

- a) $a_1 = 6$ $a_2 = -18$ $a_3 = 54$ $a_4 = -162$ $a_5 = 486$
- b) $a_1 = \frac{3}{2}$ $a_2 = \frac{3}{4}$ $a_3 = \frac{3}{8}$ $a_4 = \frac{3}{16}$ $a_5 = \frac{3}{32}$
- c) $a_1 = \frac{3}{10}$ $a_2 = \frac{3}{20}$ $a_3 = \frac{3}{40}$ $a_4 = \frac{3}{80}$ $a_5 = \frac{3}{160}$
- d) $a_1 = \frac{1}{5}$ $a_2 = \frac{1}{8}$ $a_3 = \frac{1}{11}$ $a_4 = \frac{1}{14}$ $a_5 = \frac{1}{17}$
- e) $a_1 = \frac{2}{5}$ $a_2 = \frac{4}{9}$ $a_3 = \frac{6}{13}$ $a_4 = \frac{8}{17}$ $a_5 = \frac{10}{21}$

Aufgabe 8.1.2

Geben Sie das nicht rekursive Bildungsgesetz der unteren Folgen an.

- a) $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{5}, a_4 = \frac{1}{7}, a_5 = \frac{1}{9}, a_6 = \frac{1}{11}, \dots$
- b) $a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = -\frac{4}{5}, a_3 = \frac{6}{7}, a_4 = -\frac{8}{9}, a_5 = \frac{10}{11}, a_6 = -\frac{12}{13}, \dots$
- c) $a_1 = 1, a_2 = -2, a_3 = 3, a_4 = -4, a_5 = 5, a_6 = -6, \dots$
- d) $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{9}, a_4 = \frac{1}{16}, a_5 = \frac{1}{25}, a_6 = \frac{1}{36}, \dots$
- e) $a_1 = \frac{4}{7}, a_2 = \frac{7}{11}, a_3 = \frac{10}{15}, a_4 = \frac{13}{19}, a_5 = \frac{16}{23}, a_6 = \frac{19}{27}, \dots$
- f) $a_1 = \frac{5}{2}, a_2 = \frac{7}{3}, a_3 = \frac{9}{4}, a_4 = \frac{11}{5}, a_5 = \frac{13}{6}, a_6 = \frac{15}{7}, \dots$
- g) $a_1 = \frac{4}{3}, a_2 = -1, a_3 = \frac{4}{5}, a_4 = -\frac{2}{3}, a_5 = \frac{4}{8}, a_6 = -\frac{1}{2}, \dots$
- h) $a_1 = -\frac{4}{3}, a_2 = \frac{4}{4}, a_3 = -\frac{4}{5}, a_4 = \frac{4}{6}, a_5 = -\frac{4}{7}, a_6 = \frac{4}{8}, \dots$

Aufgabe 8.1.3

Teilen Sie die Folgen der Aufgabe 8.1.2 ein in alternierende und nicht alternierende.

Aufgabe 8.1.4

Teilen Sie die Folgen der Aufgabe 8.1.2 ein in Nullfolgen und nicht Nullfolgen.

Aufgabe 8.1.5

Teilen Sie die Folgen der Aufgabe 8.1.2 ein in konvergente und divergente.

Aufgabe 8.1.6

Gegen Sie den Grenzwert der Folgen aus Aufgabe 8.1.2 an.

$$GW = \lim_{i \rightarrow \infty} (a_i)$$

Aufgabe 8.3.1

Die folgenden endlichen geometrischen Reihen sind zu berechnen:

- a) $R = \sum_{i=5}^9 2187 * \left(\frac{1}{3}\right)^i$ b) $R = \sum_{i=6}^{13} 768 * \left(\frac{1}{2}\right)^i$
- c) $R = \sum_{i=7}^{20} \frac{1}{8} * 2^i$ d) $R = \sum_{i=3}^7 3072 * \left(\frac{1}{4}\right)^i$

Aufgabe 8.3.2

Bestimmen Sie den Wert der folgenden unendlichen geometrischen Reihen:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & R = \sum_{i=0}^{\infty} 8 * \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ \text{b)} & R = \sum_{i=5}^{\infty} 486 * \left(\frac{1}{3}\right)^i \\ \text{c)} & R = \sum_{i=2}^{\infty} 8 * \left(\frac{1}{4}\right)^i \\ \text{d)} & R = \sum_{i=6}^{\infty} 10 * \left(\frac{1}{5}\right)^i \end{array}$$

Aufgabe 8.4.1

Berechnen Sie die ersten drei Reihenglieder der folgenden Binomischen Reihen:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & R = (1 + x)^8 \\ \text{b)} & R = (1 + x)^6 \\ \text{c)} & R = (1 - x)^7 \\ \text{d)} & R = (1 - x)^9 \\ \text{e)} & R = \sqrt{1 + x} \\ \text{f)} & R = \sqrt[3]{1 + x^2} \\ \text{g)} & R = \sqrt[4]{1 + x^3} \\ \text{h)} & R = (1 + x)^{3/2} \end{array}$$

Aufgabe 8.4.2

Bestimmen Sie die ersten drei Reihenglieder der folgenden Binomischen Reihen.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & R = (a + x)^8 \\ \text{b)} & R = (a + x)^6 \\ \text{c)} & R = (a - x)^5 \\ \text{d)} & R = (a - x^2)^9 \\ \text{e)} & R = \sqrt{a^2 + x^2} \\ \text{f)} & R = \sqrt{a^4 - x^4} \end{array}$$

Aufgabe 8.5.1

Man entwickle die folgenden Funktionen bei $x=0$ durch eine Potenzfunktion.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = e^x \\ \text{h)} & f(x) = \arctan(x) \\ \text{b)} & f(x) = a^x \\ \text{i)} & f(x) = \sinh(x) \\ \text{c)} & f(x) = \sin(x) \\ \text{j)} & f(x) = \cosh(x) \\ \text{d)} & f(x) = \cos(x) \\ \text{k)} & f(x) = \tanh(x) \\ \text{e)} & f(x) = \tan(x) \\ \text{l)} & f(x) = \operatorname{arsinh}(x) \\ \text{f)} & f(x) = \arcsin(x) \\ \text{m)} & f(x) = \operatorname{arcosh}(x) \\ \text{g)} & f(x) = \arccos(x) \\ \text{n)} & f(x) = \operatorname{artanh}(x) \end{array}$$

Aufgabe 8.5.2

Die folgenden Ausdrücke $f(x)$ sind bei $x=0$ durch eine Potenzfunktion zu entwickeln. Geben Sie die ersten fünf Terme der Mac Laurin Reihe an.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & f(x) = \sqrt{1 + x} & \text{b)} & f(x) = \sin(x) * e^x & \text{c)} & f(x) = \frac{1 + x}{1 - x} \\ \text{d)} & f(x) = \frac{x}{1 + x^2} & \text{e)} & f(x) = \cos(x) * \sinh(x) & \text{f)} & f(x) = \sin(x) * \cosh(x) \end{array}$$

Aufgabe 8.5.3

Entwickeln Sie bei $x=a$ durch eine Potenzfunktion. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = \ln(x) \quad a = 1 \\ \text{b)} & f(x) = \arctan(x) \quad a = 1 \\ \text{c)} & f(x) = \sqrt{x} \quad a = 4 \\ \text{d)} & f(x) = \cos(x) \quad a = \frac{\pi}{4} \end{array}$$

Aufgabe 8.6.1

Berechnen Sie mit Hilfe der Abelschen Summation

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & R_n = \sum_{i=0}^n i^3 & \text{b)} & R_n = \sum_{i=0}^n i^4 & \text{c)} & R_n = \sum_{i=0}^n i^2 * q^i \end{array}$$

Aufgabe 8.7.1

Berechnen Sie die Summe der natürlichen Zahlen von n_1 bis n_2 :

$$s = \sum_{n=n_1}^{n_2} n$$

- a) $n_1 = 10$ $n_2 = 17$
 b) $n_1 = 18$ $n_2 = 27$

Aufgabe 8.7.2

Bestimmen Sie die Summe der Quadratzahlen von n_1 bis n_2 :

$$s = \sum_{n=n_1}^{n_2} n^2$$

- a) $n_1 = 12$ $n_2 = 18$
 b) $n_1 = 53$ $n_2 = 78$

Aufgabe 8.7.3

Die Summe der Kubikzahlen von n_1 bis n_2 :

$$s = \sum_{n=n_1}^{n_2} n^3$$

ist zu bestimmen.

- a) $n_1 = 8$ $n_2 = 13$
 b) $n_1 = 13$ $n_2 = 25$

Aufgabe 8.11.1

Bestimmen Sie den Wert der folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe von Reihenentwicklung und Integration. Zur Probe sollte das Ergebnis direkt berechnet werden.

a) $I = \int_0^1 x^2 * e^x dx$

b) $I = \int_0^{0.5} x^2 * \cos(x) dx$

c) $I = \int_0^{0.1} \frac{x}{1+x^2} dx$

d) $I = \int_0^{0.3} \sqrt{1+x^2} dx$

Aufgabe 8.11.2

(Vorbereitung für Aufgabe 8.11.3 und 8.11.4)

Das Integral

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx$$

ist in allgemeiner Form für gerade und ungerade Exponenten zu bestimmen.

- a) Berechnen Sie die bestimmten Integrale I_0 und I_1 .
 b) Ein Ausdruck für die unbestimmten Integrale I_n ($n \geq 2$) ist in rekursiver Form zu ermitteln.
 c) Der rekursive Ausdruck für I_2 und I_4 ist anzugeben. Daraus ist eine universelle Angabe für I_n (n-gerade) zu ermitteln.
 d) Der rekursive Ausdruck für I_3 und I_5 ist anzugeben. Daraus ist eine universelle Angabe für I_n (n-ungerade) zu ermitteln.
 e) Versuchen Sie den Ausdruck I_n (n-gerade) mit Hilfe von Fakultäten darzustellen.

Aufgabe 8.11.3

Bestimmen Sie den Umfang einer Ellipse mit dem Halbachsen a in x-Richtung und b in y-Richtung unter der Voraussetzung $a > b$. $e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$.

Aufgabe 8.11.4

Berechnen Sie die Länge der Funktionskurve $y = \sin(x)$ im Bereich $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Ergebnisse

Aufgabe 6.1.1

a)	$y_T = 1 + 6x$	$x \approx 2$	$y_N = 13.33 - 0.1667 \cdot x$
b)	$y_T = 0.609 + 0.2x$	$x \approx 5$	$y_N = 26.609 - 5 \cdot x$
c)	$y_T = 0.0406 + 0.8776x$	$x \approx 0.5$	$y_N = 1.049 - 1.139 \cdot x$
d)	$y_T = -0.5708 + 2x$	$x \approx \pi/4$	$y_N = 1.393 - 0.5 \cdot x$
e)	$y_T = -13.90 + 11.96x$	$x \approx 2$	$y_N = 10.185 - 0.08359 \cdot x$

Aufgabe 6.1.2

Aufgabe 6.2.1

a)	$x_s = 1.7115$	$\varphi_s = -49.467^\circ$	$x_s = 0.01866$	$\varphi_s = 43.396^\circ$
b)	$x_s = 0.3727$	$\varphi_s = -48.335^\circ$	$x_s = 1.83632$	$\varphi_s = 37.429^\circ$
c)	$x_s = 0.86637$	$\varphi_s = 139.23^\circ$		
d)	$x_s = 0.52182$	$\varphi_s = -94.534^\circ$		

Aufgabe 6.3.1

Aufgabe 6.3.2

a)	Nullstellen:	$x_{N1} = -6$	$x_{N2} = 1$
	Pole:	$x_{p1} = 3$	$x_{p2} = 2$
b)	Nullstellen:	$x_{N1} = 2$	$x_{N2} = 3$
	Pole:	$x_{p1} = -5$	$x_{p2} = 4$
c)	Nullstellen:	$x_{N1} = -4$	$x_{N2} = -5$
	Pole:	$x_{p1} = -6$	$x_{p2} = 4$

Aufgabe 6.3.3

a)	Minima	b)	Maxima	c)	Sattelpunkt
d)	Minima	e)	Sattelpunkt		

Aufgabe 6.3.4

a)	$k(2) = 0.07065$	$q(2) = 14.15$	b)	$k(0) = -1$	$q(0) = 1$
c)	$k(3) = 0.1789$	$q(3) = 5.590$	d)	$k(5) = 0.01596$	$q(5) = 62.65$

Aufgabe 6.4.1 $x_{\max} = \frac{1}{6} \left[a + b - \sqrt{(a-b)^2 + a \cdot b} \right]$

Aufgabe 6.4.2

a)	$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 5.42 \text{ cm}$	$h = \sqrt[3]{4 \frac{V}{\pi}} = 10.83 \text{ cm}$
b)	$r = \frac{1^3}{2} \sqrt[3]{V} = 5 \text{ cm}$	$h = \frac{4^3}{\pi} \sqrt[3]{V} = 12.73 \text{ cm}$

Aufgabe 6.4.3

$$x = \frac{b}{\sqrt{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 - 1}} = 1.77 \text{ km}$$

Aufgabe 6.4.4

a)	$R = R_i$	$P_{\max} = \frac{1}{4} \frac{U_q^2}{R_i}$	b)	$R = \frac{5}{3} \cdot R_i = 16.7 \Omega$
----	-----------	--	----	---

Aufgabe 6.4.5

$\alpha = 60^\circ$

Aufgabe 6.5.1

- a) $x = -2.1163$
 b) $x = 1.5463$ $x = -2.5698$
 c) $x = 0.3923$ $x = 3.8596$
 d) $x = 0.2192$ $x = 2.2808$
 e) $x = 9.2215$ $x = 0.000913$

Aufgabe 6.5.2

- a) $x = 5$ $x = -1$
 b) $x = 1.710$
 c) $x = 0.4151$

Aufgabe 6.6.1

- a) $y_g = 1$ b) $y_g = 1$ c) $y_g = 0$
 d) $y_g = e = 2.7183$ e) $y_g = \frac{1}{2}$ f) $y_g = -\frac{1}{96}$
 g) $y_g = 7$ h) $y_g = 0$ i) $y_g = 1$
 j) $y_g = -\frac{1}{2}$ k) $y_g = 0$ e) $y_g = 0$

Aufgabe 6.7.1

- a) $y' = 2t$ $y'' = 2$ $t = x$ $y = x^2$ $y' = 2x$ $y'' = 2$
 b) $y' = -\frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ $y'' = -\frac{1}{a \sin^3(t)}$
 $\cos(t) = \frac{x}{a}$ $\sin(t) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$
 $y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $y'' = \frac{-a^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$
 c) $y' = \frac{1}{2t^2}$ $y'' = -\frac{1}{4t^3}$ $t^2 = x^{1/2}$ $y = x^{1/2}$ $y' = 0.5 x^{-1/2}$ $y'' = -0.25 x^{-3/2}$
 d) $y' = \frac{1 - \cos(t)}{\sin(t)}$ $y'' = \frac{1 - \cos(t)}{a \sin^3(t)}$
 $\cos(t) = 1 - \frac{x}{a}$ $t = \arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right)$
 $\sin(t) = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2}$ $y = a \left[\arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2} \right]$
 $y' = \frac{x/a}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2}}$ $y'' = \frac{1}{a} \frac{x/a}{\left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} - 1\right)^2} \right]^3}$

Aufgabe 6.7.2

- a) $y' = \frac{\sin(t) - \cos(t)}{\sin(t) + \cos(t)}$ $y'' = \frac{2e^t}{a [\sin(t) + \cos(t)]^3}$
 b) $y' = \frac{t-3}{t+1}$ $y'' = \frac{2}{(t+1)^3}$

Aufgabe 6.8.1

$$a) \quad y' = \frac{\sin(\varphi) - \cos(\varphi)}{\sin(\varphi) + \cos(\varphi)}$$

$$b) \quad y' = \frac{(3\varphi + 5\varphi^2)\cos(\varphi) + (3 + 10\varphi) * \sin(\varphi)}{(3 + 10\varphi)\cos(\varphi) - (3\varphi + 5\varphi^2) * \sin(\varphi)}$$

$$c) \quad y' = \frac{\cos(\varphi)[1 + 2\sin(\varphi)]}{\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) - \sin(\varphi)}$$

Aufgabe 6.9.1

$$a) \quad z_x = 2x + 4y \quad z_y = 4x + 10y$$

für $x \approx 2$ und $y \approx 3$

$$z \approx -73 + 16x + 38y$$

$$b) \quad z_x = y * \cos(x) \quad z_y = \sin(x)$$

für $x \approx \frac{\pi}{4}$ und $y \approx 2$

$$z \approx \sqrt{2} \left[-\frac{\pi}{4} + x + \frac{1}{2}y \right]$$

$$c) \quad z_x = -y^2 * \sin(x) \quad z_y = 2y * \cos(x)$$

für $x \approx \frac{\pi}{3}$ und $y \approx -3$

$$z \approx -4.5 + 1.5\sqrt{3}\pi - 4.5\sqrt{3} * x - 3y$$

$$d) \quad z_x = 2x \quad z_y = 2y$$

für $x \approx 2$ und $y \approx 3$

$$z \approx -13 + 4x + 6y$$

Aufgabe 6.9.2

$$a) \quad z_{xx} = 6x + 6y$$

$$z_{xy} = 6x$$

$$z_{yx} = 6x$$

$$z_{yy} = 2$$

$$b) \quad z_{xx} = -\sin(x) * \cos(y)$$

$$z_{xy} = -\cos(x) * \sin(y)$$

$$z_{yx} = -\cos(x) * \sin(y)$$

$$z_{yy} = -\sin(x) * \cos(y)$$

$$c) \quad z_{xx} = 6$$

$$z_{xy} = 0$$

$$z_{yx} = 0$$

$$z_{yy} = 8$$

$$d) \quad z_{xx} = 12x^2$$

$$z_{xy} = 6y^2$$

$$z_{yx} = 6y^2$$

$$z_{yy} = 12 * x * y - \cos(y)$$

Aufgabe 6.10.1

$$a) \quad dz = (2x + 2x * y^3) dx + (3x^2 y^2 + 4y^3) dy$$

$$b) \quad dz = \sin(y) dx + x * \cos(y) dy$$

$$c) \quad dz = (a + cy) dx + (b + cx) dy$$

$$d) \quad dz = -\sin(x) * \cosh(y) dx + \cos(x) * \sinh(y) dy$$

Aufgabe 6.10.2

$$a) \quad \Delta z = 38 * \Delta x + 14 * \Delta y$$

$$b) \quad \Delta z = 2\sqrt{3} * \Delta x + 2 * \Delta y$$

$$c) \quad \Delta z = 108 * \Delta x - 48 * \Delta y$$

$$d) \quad \Delta z = 8 * \Delta x + 8\pi * \Delta y$$

Aufgabe 6.11.1.

$$f_{\text{abs}} = -4V$$

$$f_{\text{rel}} = -0.01732$$

$$f_{\text{rel}\%} = -1.732\%$$

Aufgabe 6.11.2.

$$156.8 \text{ A} \leq I \leq 163.3 \text{ A}$$

Aufgabe 6.11.3.

$$4.877 \Omega < R < 5.128 \Omega$$

Aufgabe 6.11.4.

$$(\Delta P/P)_{\text{max}} = 0.201$$

$$174.3 \text{ W} \leq P \leq 262.1 \text{ W}$$

Aufgabe 6.11.5.

- a) $(\Delta z_{\text{rel}})_{\text{max}} = 0.24$ $(\Delta z_{\text{rel}})_{\text{mit}} = 0.1304$
 b) $(\Delta z_{\text{rel}})_{\text{max}} = 0.3$ $(\Delta z_{\text{rel}})_{\text{mit}} = 0.1587$
 c) $(\Delta z_{\text{rel}})_{\text{max}} = 0.5$ $(\Delta z_{\text{rel}})_{\text{mit}} = 0.3092$
 d) $(\Delta z_{\text{rel}})_{\text{max}} = 0.16$ $(\Delta z_{\text{rel}})_{\text{mit}} = 0.08602$

Aufgabe 6.11.6.

- a) $x_{\text{mit}} = 2.04$ $s = 0.1140$ b) $x_{\text{mit}} = 4.2250$ $s = 0.2500$
 c) $x_{\text{mit}} = 52.667$ $s = 1.5275$ d) $x_{\text{mit}} = 6.9500$ $s = 0.4203$

Aufgabe 6.11.7.

- a) $\Delta x = 0.1882$ b) $\Delta x = 0.3003$ c) $\Delta x = 1.589$ d) $\Delta x = 0.8265$

Aufgabe 6.11.8.

- a) 91.96 % b) 89.04 % c) 10.4 % d) 90.28 %

Aufgabe 6.12.1.

- a) $\frac{d\vec{p}}{dt} = \begin{pmatrix} 2t+2 \\ 1 \\ 3t^2-2 \end{pmatrix}$ b) $\dot{\vec{p}} = \begin{pmatrix} -\omega \cdot \sin(\omega t) \\ \omega \cdot \cos(\omega t) \\ 2 \end{pmatrix}$
 c) $\dot{\vec{p}} = \begin{pmatrix} a \cdot \sinh(at) \\ b \cdot \cos(bt) \\ 20t^3 \end{pmatrix}$ d) $\dot{\vec{p}} = \begin{pmatrix} 2at \\ b \\ \frac{1}{t+1} \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.12.2.

- a) $\text{grad}(s) = \begin{pmatrix} 2x \\ 12y^2 + 12y \cdot z^3 \\ 18y^2 \cdot z^2 \end{pmatrix}$ b) $\text{grad}(s) = \begin{pmatrix} \sin(y) \\ x \cdot \cos(y) - z \cdot \sin(y) \\ \cos(y) \end{pmatrix}$
 c) $\text{grad}(s) = \begin{pmatrix} 2x \\ 5y^4 + z \\ y \end{pmatrix}$ d) $\text{grad}(s) = \begin{pmatrix} y + 2x \cdot z^2 \\ x + 2y \cdot z^3 \\ 2x^2 \cdot z + 3y^3 \cdot z^2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.12.3.

- a) $\text{div}(\vec{v}) = 3xy + x$ b) $\text{div}(\vec{v}) = -y \cdot \sin(x) + \sin(x) + 2zyx$
 c) $\text{div}(\vec{E}) = y \cdot z + 2x^2 \cdot y \cdot z^2 + 3x^3 \cdot y^3 \cdot z^2$ d) $\text{div}(\vec{E}) = \cos(y) - \sin(z)$

Aufgabe 6.12.4.

- a) $\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} z \cdot x \\ -y \cdot z \\ y - x^2 \end{pmatrix}$ b) $\text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} z^2 \cdot x \\ -z^2 \cdot y \\ y \cdot \cos(x) - \cos(x) \end{pmatrix}$
 c) $\text{rot}(\vec{E}) = \begin{pmatrix} 3x^3 \cdot y^2 \cdot z^3 - 2x^2 \cdot y^2 \cdot z \\ xy - 3x^2 \cdot y^2 \cdot z^3 \\ 2x \cdot y^2 \cdot z^2 - x \cdot z \end{pmatrix}$ d) $\text{rot}(\vec{E}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(y) \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.13.1

- a) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ ist Minimum
 b) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ ist Sattelpunkt
 c) $x_0 = 5$, $y_0 = 3$ ist Minimum
 d) $x_0 = -\frac{4}{3}$, $y_0 = \frac{2}{3}$ ist Minimum
 e) $x_0 = \frac{1}{3}$, $y_0 = -\frac{2}{3}$ ist Sattelpunkt
 f) $x_{01} = 1$, $y_{01} = -1$ ist Minimum
 $x_{02} = -1$, $y_{02} = 1$ ist Minimum
 $x_{03} = 0$, $y_{03} = 0$ ist Sattelpunkt
 g) $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $z_0 = 4$ ist Maximum
 h) $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $z_0 = 4$ ist Sattelpunkt

Aufgabe 6.13.2 $x = \frac{b}{3}$ $\alpha = 60^\circ$

Aufgabe 6.13.3

$$b = \sqrt[3]{\frac{8}{3}V} \quad a = \sqrt[3]{\frac{9}{8}V} \quad h = \sqrt[3]{\frac{V}{3}}$$

b = 20 LE a = 15 LE h = 10 LE

Aufgabe 6.13.4

a = 2.00268 LE b = 1495.99 LE keine technische Lösung vorhanden: h = 1.001 LE
 h < 2 LE nicht sinnvoll

Aufgabe 6.14.1

- | | | | | | | | | | | |
|----|---|---------|---------|----------|--|----|---|---------|---------|----------|
| a) | i | a[i] | b[i] | c[i] | | b) | i | a[i] | b[i] | c[i] |
| | 1 | 1.00000 | 2.00000 | 0.00000 | | | 1 | 0.00000 | 4.00000 | 0.00000 |
| | 2 | 3.00000 | 2.00000 | -1.00000 | | | 2 | 4.00000 | 4.00000 | -1.00000 |
| | 3 | 4.00000 | 0.00000 | 3.00000 | | | 3 | 7.00000 | 2.00000 | -1.00000 |
-
- | | | | | | | | | | | |
|----|---|---------|---------|----------|--|----|---|----------|----------|----------|
| c) | i | a[i] | b[i] | c[i] | | d) | i | a[i] | b[i] | c[i] |
| | 1 | 1.00000 | 2.00000 | 0.00000 | | | 1 | 10.00000 | -1.00000 | 0.00000 |
| | 2 | 3.00000 | 2.00000 | -1.00000 | | | 2 | 9.00000 | -1.00000 | -1.00000 |
| | 3 | 4.00000 | 0.00000 | 3.00000 | | | 3 | 7.00000 | -3.00000 | -1.00000 |
| | 4 | 7.00000 | 6.00000 | -3.00000 | | | 4 | 3.00000 | -5.00000 | 7.00000 |

Aufgabe 6.14.2

- | | | | | | |
|----|---|---------|---------|----------|----------|
| a) | i | a[i] | b[i] | c[i] | d[i] |
| | 1 | 1.00000 | 2.40000 | 0.00000 | -0.40000 |
| | 2 | 3.00000 | 1.20000 | -1.20000 | 1.00000 |
| | 3 | 4.00000 | 1.80000 | 1.80000 | -0.60000 |
-
- | | | | | | |
|----|---|---------|---------|----------|----------|
| b) | i | a[i] | b[i] | c[i] | d[i] |
| | 1 | 0.00000 | 4.13333 | 0.00000 | -0.13333 |
| | 2 | 4.00000 | 3.73333 | -0.40000 | -0.33333 |
| | 3 | 7.00000 | 1.93333 | -1.40000 | 0.46667 |
-
- | | | | | | |
|----|---|---------|---------|----------|----------|
| c) | i | a[i] | b[i] | c[i] | d[i] |
| | 1 | 1.00000 | 2.41071 | 0.00000 | -0.41071 |
| | 2 | 3.00000 | 1.17857 | -1.23214 | 1.05357 |
| | 3 | 4.00000 | 1.87500 | 1.92857 | -0.80357 |
| | 4 | 7.00000 | 3.32143 | -0.48214 | 0.16071 |
-
- | | | | | | |
|----|---|----------|----------|----------|----------|
| d) | i | a[i] | b[i] | c[i] | d[i] |
| | 1 | 10.00000 | -0.98214 | 0.00000 | -0.01786 |
| | 2 | 9.00000 | -1.03571 | -0.05357 | -0.91071 |
| | 3 | 7.00000 | -3.87500 | -2.78571 | 2.66071 |
| | 4 | 3.00000 | -1.46429 | 5.19643 | -1.73214 |

Aufgabe 6.14.3 $f(x) = \sin(x)$

a) i a[i] b[i] c[i] d[i] lineare Interpolation

1	0.00000	0.70711	0.00000	0.00000
2	0.70711	0.29289	0.00000	0.00000
3	1.00000	-0.29289	0.00000	0.00000
4	0.70711	-0.70711	0.00000	0.00000

b) i a[i] b[i] c[i] d[i] y'stetig

1	0.00000	0.70711	0.00000	0.00000
2	0.70711	0.70711	-0.41421	0.00000
3	1.00000	-0.12132	-0.17157	0.00000
4	0.70711	-0.46447	-0.24264	0.00000

c) i a[i] b[i] c[i] d[i] y'stetig

2	0.70711	0.55410	-0.22951	-0.03169
3	1.00000	0.00000	-0.32458	0.03169
4	0.70711	-0.55410	-0.22951	0.07650

d) Funktionswerte $f(x_i)$

x_i	zu a)	zu b)	zu c)	$\sin(x)$
22.5°	0.35355	0.35355	0.38224	0.38268
67.5°	0.85355	0.95711	0.92282	0.92388
112.5°	0.85355	0.89645	0.92282	0.92388
157.5°	0.35355	0.41421	0.38224	0.38268

Aufgabe 6.14.4

$$a) \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 38 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 76 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.19231 \\ 1.42308 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 4 & 21 \\ 21 & 155 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 179 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.84358 \\ 0.36313 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 5 & 30 \\ 30 & 190 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 209 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.2 \\ -1.3 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 31 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ -57 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.67692 \\ -0.92308 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.14.5

$$a) \begin{pmatrix} 4 & 10 & 38 \\ 10 & 38 & 160 \\ 38 & 160 & 722 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 76 \\ 308 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.94231 \\ 1.83974 \\ -0.08333 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 4 & 21 & 155 \\ 21 & 155 & 1197 \\ 155 & 1197 & 9587 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 179 \\ 1353 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.10541 \\ 0.00217 \\ 0.04215 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 5 & 30 & 190 \\ 30 & 190 & 1260 \\ 190 & 1260 & 8674 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 209 \\ 1251 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.62857 \\ -2.15714 \\ 0.07143 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 5 & -5 & 31 \\ -5 & 31 & -83 \\ -83 & -83 & 355 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ -57 \\ 259 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.21978 \\ -0.70539 \\ 0.10884 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.14.6.

Matrix B				
a)	7.00000	0.00000	28.00000	0.00000
	0.00000	28.00000	0.00000	196.00000
	28.00000	0.00000	196.00000	0.00000
	0.00000	196.00000	0.00000	1588.00000
	196.00000	0.00000	1588.00000	0.00000
				13636.00000
Vektor k		Vektor a		
	19.00000	$a_0 = 2.65368$		
	-6.00000	$a_1 = -3.32540$		
	92.00000	$a_3 = -0.46212$		
	54.00000	$a_4 = 0.44444$		
	716.00000	$a_5 = 0.06818$		
$a = B^{-1} * k$				
b) Matrix B				
	7.00000	0.00000	112.00000	0.00000
	0.00000	112.00000	0.00000	3136.00000
	112.00000	0.00000	3136.00000	0.00000
	0.00000	3136.00000	0.00000	101632.00000
	3136.00000	0.00000	101632.00000	0.00000
				3490816.00000
Vektor k		Vektor a		
	54.00000	$a_0 = 1.65368$		
	44.00000	$a_1 = 0.58730$		
	1216.00000	$a_2 = 0.69697$		
	1136.00000	$a_3 = -0.00694$		
	36352.00000	$a_4 = -0.01136$		
$a = B^{-1} * k$				

Aufgabe 6.14.7.

a)	Matrix B				
	11.00000	17.27876	37.99798	93.79399	246.76645
	17.27876	37.99798	93.79399	246.76645	675.76797
	37.99798	93.79399	246.76645	675.76797	1902.01719
	93.79399	246.76645	675.76797	1902.01719	5460.81852
	246.76645	675.76797	1902.01719	5460.81852	15915.23956
	Vektor k		Vektor a		
	6.31375	a = B ⁻¹ *k	a ₀ = 0.00020		
	9.91762		a ₁ = 0.98738		
	18.42524		a ₂ = 0.04848		
	37.88542		a ₃ = -0.23095		
	83.32142		a ₄ = 0.03676		
b)	Matrix B				
	11.00000	17.27876	37.99798	93.79399	246.76645
	17.27876	37.99798	93.79399	246.76645	675.76797
	37.99798	93.79399	246.76645	675.76797	1902.01719
	93.79399	246.76645	675.76797	1902.01719	5460.81852
	246.76645	675.76797	1902.01719	5460.81852	15915.23956
	Vektor k		Vektor a		
	43.35860	a = B ⁻¹ *k	a ₀ = 1.00722		
	101.20498		a ₁ = -0.16068		
	266.57443		a ₂ = 0.88395		
	735.91369		a ₃ = -0.29539		
	2089.70185		a ₄ = 0.11822		

Aufgabe 7.2.1

a) $F(x) = \frac{\sin(ax)}{a} + C$

b) $F(x) = \frac{-\cos(ax)}{a} + C$

c) $F(x) = \frac{\sinh(ax)}{a} + C$

d) $F(x) = \frac{\cosh(ax)}{a} + C$

e) $F(x) = \frac{x^5}{5} + C$

f) $F(x) = \frac{x^8}{8} + C$

Aufgabe 7.3.1

a) $I = 156.25$

b) $I = 0$

c) $I = e - 1 = 1.7183$

d) $I = 2.423$

e) $I = -6.2$

Aufgabe 7.4.1

$I = 250.05$

Aufgabe 7.4.2

$I = 55.333$

Aufgabe 7.4.3

$A = 0.66667 \text{ cm}^2$

Aufgabe 7.5.1

a) $I = 2926.36$

b) $I = -0.76818$

c) $I = -0.93731$

d) $I = 17.241$

f) $I = 1.3734$

g) $I = 0.52360$

Aufgabe 7.6.1

a) $\bar{y}_m = 0.33333$

b) $\bar{y}_m = \frac{1}{n+1}$

c) $\bar{y}_m = 0.37292$

d) $\bar{y}_m = 0$

e) $\bar{y}_m = 4.6708$

f) $\bar{y}_m = 0.63662$

g) $\bar{y}_m = 0$

h) $\bar{y}_m = 1.2590$

Aufgabe 7.7.1

a) $F(x) = \frac{1}{18}(3x+4)^6 + C$

b) $F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$

c) $F(x) = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

d) $F(x) = \arcsin(x) + C$ $F(x) = -\arccos(u) + C_1$

e) $F(x) = -\sqrt{1-x^2} + C$

f) $F(x) = \frac{1}{4} \sin^4(x) + C$

g) $F(x) = \frac{1}{2} \ln^2(x) + C$

h) $F(x) = -\ln |\cos(x)| + C$

i) $F(x) = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$

j) $F(x) = \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

k) $F(x) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

l) $F(x) = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

m) $F(x) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{x-2}{3}\right) + C$

Aufgabe 7.7.2

a) $F(x) = \frac{1}{7} \ln|7+3| + C$

b) $F(x) = \frac{1}{3} \sinh(3x) + C$

c) $F(x) = \frac{1}{40} (5x)^8 + C$

d) $F(x) = -\arccos\left(\frac{x}{3}\right) + C$

e) $F(x) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{4}\right) + C$

f) $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{artanh}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

g) $F(x) = 2 \arctan(2x)$

h) $F(x) = \frac{1}{5} \arctan\left(\frac{x+3}{5}\right) + C$

$$\text{i)} \quad F(x) = \frac{1}{6} \sin^6(x) + C$$

$$\text{j)} \quad F(x) = \frac{1}{3} \sinh(x + 5)^3 + C$$

Aufgabe 7.7.3

$$\text{a)} \quad F(x) = \frac{2}{5} (0.5x + 6)^5 + C$$

$$\text{b)} \quad F(x) = \frac{1}{8} \cosh(8x) + C$$

$$\text{c)} \quad F(x) = \frac{1}{2} \ln[(x + 3)^2 + 5^2] + C$$

$$\text{d)} \quad F(x) = \sin(x^2 + 5) + C$$

$$\text{e)} \quad F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$\text{f)} \quad F(x) = -\frac{1}{6} \operatorname{artanh}\left(\frac{x+4}{6}\right) + C$$

Aufgabe 7.7.4

$$\text{a)} \quad F(x) = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C$$

$$\text{b)} \quad F(x) = -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2\cos(x) + C$$

$$\text{c)} \quad F(x) = \frac{1}{3} x^3 \ln(x) - \frac{1}{9} x^3 + C$$

$$\text{d)} \quad F(x) = x \ln(x) - x + C$$

$$\text{e)} \quad F(x) = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\text{f)} \quad F(x) = 0.5(\sinh(x) \cosh(x) + x) + C$$

$$\text{g)} \quad F(x) = \frac{1}{4} \{ \operatorname{arcosh}(x) [2x^2 - 1] - x \sqrt{x^2 - 1} \} + C$$

Aufgabe 7.7.5

$$\text{a)} \quad F(x) = -x \cos(x) + \sin(x) + C$$

$$\text{b)} \quad F(x) = e^x [x^2 - 2x + 2] + C$$

$$\text{c)} \quad F(x) = 0.5 x^2 \ln(x) - 0.25 x^2 + C$$

$$\text{d)} \quad F(x) = x \cdot \operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2 - 1} + C$$

$$\text{e)} \quad F(x) = 0.5[-\sin(x) \cos(x) + x] + C$$

$$\text{f)} \quad F(x) = \frac{1}{2} x^2 \arcsin(x) - \frac{1}{4} \arcsin(x) + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + C$$

Aufgabe 7.7.6

$$\text{a)} \quad F(x) = e^x (x - 1) + C$$

$$\text{b)} \quad F(x) = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2\sin(x) + C$$

$$\text{c)} \quad F(x) = 0.25 x^4 \ln(x) - \frac{1}{16} x^4 + C$$

$$\text{d)} \quad F(x) = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\text{e)} \quad F(x) = 0.5[\sin(x) \cos(x) + x] + C$$

$$\text{f)} \quad F(x) = \frac{1}{2} x^2 \arccos(x) - \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4} \arccos(x) + C$$

Aufgabe 7.7.7

$$\text{a)} \quad F(x) = 5 \ln|x-1| + 3 \ln|x-2| + C$$

$$\text{b)} \quad F(x) = \ln|x-3| - 11 \frac{1}{x-3} - 22 \frac{1}{(x-3)^2} - 22 \frac{1}{(x-3)^3} + C$$

$$\text{c)} \quad F(x) = -\frac{19}{5} \frac{1}{x-2} + \frac{21}{25} \ln|x-2| + \frac{4}{25} \ln|x+3| + C$$

Aufgabe 7.7.8

$$\text{a)} \quad f(x) = \frac{4.1}{x-3} + \frac{-1.1x + 33.5}{(x-4)^2 + 3^2}$$

$$\text{b)} \quad f(x) = \frac{2.2}{x+6} + \frac{2.8x - 14}{(x-2)^2 + 6^2}$$

$$c) \quad f(x) = -\frac{5}{41} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{41} \frac{87x+81}{(x+3)^2+4^2}$$

Aufgabe 7.7.9

$$a) \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + 2\ln|x+4|$$

$$b) \quad F(x) = -\frac{55}{7} \ln|x+1| + 4\ln|x+3| + \frac{76}{7} \ln|x-6| + C$$

$$c) \quad F(x) = -14 \frac{1}{x-5} + 3\ln|x-5| + C$$

$$d) \quad F(x) = \ln|x+2| - \frac{1}{2} \frac{1}{(x+2)^2} + C$$

Aufgabe 7.7.10

$$a) \quad F(x) = -\frac{1}{x+5} + \frac{5}{2} \frac{1}{(x+5)^2} + C$$

$$b) \quad F(x) = \ln|x-3| - \frac{3}{x-3} + C$$

$$c) \quad F(x) = -\frac{1}{3}(9-x^2)^{3/2} - \frac{45}{2} \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{5}{2}x\sqrt{9-x^2} + C$$

$$d) \quad F(x) = \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

$$e) \quad F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+16} + 8\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{4}\right) + C$$

$$f) \quad F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{16+x^2} - 8\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{4}\right) + C$$

$$g) \quad F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-9}x + \frac{9}{2}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

$$h) \quad F(x) = -\frac{1}{4}x\cos(4x) + \frac{1}{16}\sin(4x) + \frac{5}{4}\cos(4x) + C$$

$$i) \quad F(x) = \frac{7}{8}\ln|x-4| + \frac{1}{8}\ln|x+4| + C$$

$$j) \quad F(x) = -\left[\frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right]e^{-3x} + C$$

$$k) \quad F(x) = e^{5x}\left[\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{25} + \frac{2}{125}\right] + C$$

$$l) \quad F(x) = \frac{1}{4}(x-5)^4 + C$$

$$m) \quad F(x) = \frac{1}{2}x^2\arcsin(5x) - \frac{1}{100}\arcsin(5x) + \frac{x}{4}\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 - x^2} + C$$

$$n) \quad F(x) = -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\sin^2(6x) + \ln|\cos(6x)|\right] + C$$

$$o) \quad F(x) = -\frac{3}{13}e^{2x}\cos(3x) + \frac{2}{13}e^{2x}\sin(3x) + C$$

$$p) \quad F(x) = -\frac{1}{2}\ln|9-x^2| + C$$

$$q) \quad F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 8\ln|x-4| + 8\ln|x+4| + C$$

Aufgabe 7.7.11

$$a) \quad F(x) = 4.1 \ln|x-3| - 0.55\ln(x^2-8x+25) + 9.7\arctan\left(\frac{x-4}{3}\right) + C$$

$$b) \quad F(x) = 2.2 \ln|x+6| + 1.4 \ln(x^2 - 4x + 40) - 1.4 \arctan\left(\frac{x-2}{6}\right) + C$$

$$c) \quad F(x) = \frac{1}{41} \left[-5 \ln|x-2| + 43.5 \ln(x^2 + 6x + 25) - 45 \arctan\left(\frac{x+3}{4}\right) \right] + C$$

Aufgabe 7.8.1

	Trapez	Simpson	I_3	f_{R1}	f_{R2}
a)	0.987116	1.000135	1.0	$-1.2 \cdot 10^{-2}$	$1.35 \cdot 10^{-4}$
b)	0.996785	1.000008	1.0	$-0.32 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-6}$
c)	0.999197	1.0000005	1.0	$-8 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-7}$
d)	50.7500	50.6667	50.6667	$1.6 \cdot 10^{-3}$	0
e)	12.3125	10.7500	10.6667	0.15	$0.78 \cdot 10^{-2}$
f)	0.987116	1.000135	1.0	$-1.3 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$

Aufgabe 7.9.1

a)	$I = 11.2742$	b)	$I = 0.500121$	c)	$I = 1389931$	d)	$I = 80.8229$
----	---------------	----	----------------	----	---------------	----	---------------

Aufgabe 7.9.2

a)	$I = \frac{1}{1-n}$	$n < 1$	$I = \infty$	$n \geq 1$		
b)	$I = -1$		c)	$I = \frac{1}{a^2}$	d)	$I = 1$
e)	$I = \infty$		f)	$I = \frac{\pi}{2}$	g)	$I = \infty$

Aufgabe 7.10.1

a)	$V = 101.25$	b)	$V = 840$	c)	$V = 228.62$
d)	$V = 186.67$	e)	$V = 5.3333 = 16/3$	f)	$V = 10.990$
g)	$V = 1.1298$	h)	$V = 8515.7$		

Aufgabe 7.10.2

a)	$A = 135.82 \text{ cm}^2$	b)	$A = 157.08 \text{ cm}^2$
c)	$A = 104.72 \text{ cm}^2$	d)	$A = 91.63 \text{ cm}^2$

Aufgabe 7.10.3

a)	$V = 586.43 \text{ cm}^3$	b)	$V = 127.23 \text{ m}^3$
----	---------------------------	----	--------------------------

Aufgabe 7.10.4

$$A = 471.24 \text{ cm}^2$$

Aufgabe 7.10.5

a)	$V = \pi r_1^3$		
b)	$O_1 = 3\pi r_1^2$	$O_2 = \sqrt{3} r_1^2 \cdot \frac{\pi}{2}$	$O = r_1^2 \pi \left[3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$

Aufgabe 7.10.6

a)	$V = 2827.43 \text{ cm}^3$	b)	$V = 2738.61 \text{ cm}^3$
----	----------------------------	----	----------------------------

Aufgabe 7.11.1

a)	$S = 24.0864 \text{ cm}$	b)	$S = 2.4517 \text{ cm}$	c)	$S = 3.3428 \text{ cm}$
----	--------------------------	----	-------------------------	----	-------------------------

Aufgabe 7.11.2

a) $V = 94.248 \text{ cm}^3$
 c) $V = 17175 \text{ cm}^3$

b) $V = 251.96 \text{ cm}^3$
 d) $V = 190.38 \text{ cm}^3$

Aufgabe 7.11.3

a) $V = 1621.1 \text{ cm}^3$

b) $V = 1408.3 \text{ cm}^3$

Aufgabe 7.11.4

a) $M = 307.34 \text{ cm}^2$

b) $M = 70.785 \text{ cm}^2$

Aufgabe 7.11.5

a) $\Theta = 0.013975 \text{ kgm}^2$

b) $\Theta = 6.6404 \text{ gcm}^2$

Aufgabe 7.11.6

a) $\Theta = \frac{\pi \rho}{2} * (R_2^4 - R_1^4) * h$

b) $\Theta = \frac{8}{15} \pi \rho (r_2^5 - r_1^5)$

Aufgabe 7.11.7

a) $x_s = 4 \text{ cm}$

$y_s = 2.667 \text{ cm}$

b) $x_s = 8.333 \text{ cm}$

$y_s = 4 \text{ cm}$

Aufgabe 7.11.8

a) $x_s = 0.7$

$y_s = -0.08$

b) $x_s = 3.1111$

$y_s = 1.5556$

Aufgabe 7.12.1

a) $I = 9$

b) $I = 44970$

Aufgabe 7.12.2

a) bis d) nicht möglich

f) $\varphi = x * y^2 * z^3 + C$

e) $\varphi = x^2 + y^3 + z^4 + C$

g) $\varphi = x * y * z * C$

Aufgabe 7.12.3

a) $I = 136.667$

b) $I = 11408.04$

c) $I = 1012.98$

d) $I = 1411.6$

e) $I = 4148$

f) $I = 23040$

g) $I = 120$

Aufgabe 8.1.1

a) $a_i = -2 * (-3)^i$

$a_{i+1} = -3 * a_i$

b) $a_i = 3 * \left(\frac{1}{2}\right)^i$

$a_{i+1} = \frac{a_i}{2}$

$a_1 = \frac{3}{2}$

c) $a_i = \frac{3}{5} * \left(\frac{1}{2}\right)^i$

$a_{i+1} = \frac{a_i}{2}$

$a_1 = \frac{3}{10}$

d) $a_i = \frac{1}{3i + 2}$

$a_{i+1} = \frac{a_i}{1 + 3a_i}$

e) $a_i = \frac{2i}{4i + 1}$

$a_{i+1} = \frac{-3a_i + 2}{-8a_i + 5}$

Aufgabe 8.1.2

a) $a_i = \frac{1}{2i - 1}$

b) $a_i = \frac{-2i}{2i + 1} (-1)^{-1}$

c) $a_i = -(-1)^{i*i}$

d) $a_i = \frac{1}{i^2}$

e) $a_i = \frac{3i + 1}{4i + 3}$

f) $a_i = \frac{2i + 3}{i + 1}$

g) $a_i = \frac{4}{i + 2} (-1)^i$

h) $a_i = \frac{-4}{i + 2} (-1)^i$

Aufgabe 8.1.3

- | | | | | | |
|----|--------------------|----|--------------------|----|--------------------|
| a) | nicht alternierend | b) | alternierend | c) | alternierend |
| d) | nicht alternierend | e) | nicht alternierend | f) | nicht alternierend |
| g) | alternierend | h) | alternierend | | |

Aufgabe 8.1.4

- | | | | | | |
|----|-----------|----|-----------------|----|-----------------|
| a) | Nullfolge | b) | nicht Nullfolge | c) | nicht Nullfolge |
| d) | Nullfolge | e) | nicht Nullfolge | f) | nicht Nullfolge |
| g) | Nullfolge | h) | Nullfolge | | |

Aufgabe 8.1.5 und 8.1.6

- | | | | |
|----|----------|----|------------------|
| a) | GW = 0 | => | konvergent |
| b) | kein GW | => | nicht konvergent |
| c) | kein GW | => | nicht konvergent |
| d) | GW = 0 | => | konvergent |
| e) | GW = 3/4 | => | konvergent |
| f) | GW = 2 | => | konvergent |
| g) | GW = 0 | => | konvergent |
| h) | GW = 0 | => | konvergent |

Aufgabe 8.3.1

- | | | | | | | | |
|----|--------------|----|--------------|----|------------|----|-------------|
| a) | R = 13.44444 | b) | R = 23.90625 | c) | R = 262128 | d) | R = 63.9375 |
|----|--------------|----|--------------|----|------------|----|-------------|

Aufgabe 8.3.2

- | | | | | | | | |
|----|--------|----|-------|----|--------------|----|------------|
| a) | R = 16 | b) | R = 3 | c) | R = 0.666667 | d) | R = 0.0008 |
|----|--------|----|-------|----|--------------|----|------------|

Aufgabe 8.4.1

- | | | | |
|----|--|----|---|
| a) | $R = 1 + 8x + 28x^2 + \dots$ | b) | $R = 1 + 6x + 15x^2 + \dots$ |
| c) | $R = 1 - 7x + 21x^2 + \dots$ | d) | $R = 1 - 9x + 36x^2 + \dots$ |
| e) | $R = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$ | f) | $R = 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + \dots$ |
| g) | $R = 1 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{32}x^6 + \dots$ | h) | $R = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$ |

Aufgabe 8.4.2

- | | |
|----|---|
| a) | $(a+x)^8 = a^8 + 8a^7x + 28a^6x^2 + \dots$ |
| b) | $(a+x)^6 = a^6 + 6a^5x + 15a^4x^2 + \dots$ |
| c) | $(a-x)^5 = a^5 - 5a^4x + 10a^3x^2 + \dots$ |
| d) | $(a-x^2)^9 = a^9 - 9a^8x^2 + 36a^7x^4 + \dots$ |
| e) | $\sqrt{(a^2+x^2)} = a \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{x}{a} \right)^4 + \dots \right]$ |
| f) | $\sqrt{a^4-x^4} = a^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} \right)^4 - \frac{1}{8} \left(\frac{x}{a} \right)^8 + \dots \right]$ |

Aufgabe 8.5.1

Lösungen siehe Formelsammlung oder Vorlesungsskript S.8-25 bis S.8-28.

Aufgabe 8.5.2

- | | |
|----|--|
| a) | $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots$ |
| b) | $f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} - \dots$ |
| c) | $f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \dots$ |
| d) | $f(x) = x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - x^{11} + \dots$ |
| e) | $f(x) = x - \frac{2}{3!}x^3 - \frac{4}{5!}x^5 + \frac{8}{7!}x^7 + \frac{16}{9!}x^9 - \dots$ |

$$f) \quad f(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{4}{5!}x^5 - \frac{8}{7!}x^7 + \frac{16}{9!}x^9 + \dots$$

Aufgabe 8.5.3

$$a) \quad \ln(x+1) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots \quad |x| < 1$$

$$b) \quad \arctan(1+x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{48}x^6 - \frac{1}{112}x^7 + \dots \quad 0 < x < 2$$

$$c) \quad \sqrt{x+4} = 2 + \left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{x}{4}\right)^3 - \frac{5}{64}\left(\frac{x}{4}\right)^4 + \dots \quad 0 < x < 8$$

$$d) \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \quad \text{für alle } x$$

Aufgabe 8.7.1

a) $s = 108$

b) $s = 225$

Aufgabe 8.7.2

a) $s = 1603$

b) $s = 113009$

Aufgabe 8.7.3

a) $s = 7497$

b) $s = 99541$

Aufgabe 8.11.1

a) $I = 0.71828$

c) $I = 0.0049752$

b) $I = 0.038588$

d) $I = 0.30444$

Aufgabe 8.11.2

$$\int \sin^n(x) dx = -\frac{1}{n} \cos(x) \sin^{(n-1)}(x) + \frac{(n-1)}{n} \int \sin^{(n-2)}(x) dx$$

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \sin^n(x) dx = \frac{n-1}{n} \int_{x=0}^{\pi/2} \sin^{n-2}(x) dx$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad I_0 = \frac{\pi}{2} \quad I_1 = 1$$

$$\text{n-gradzahlig:} \quad I_n = \frac{(n-1)(n-3)\dots 3 \cdot 1}{n(n-2)\dots 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{n!}{2^n \left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2}$$

$$\text{n-ungradzahlig:} \quad I_n = \frac{(n-1)(n-3)\dots 4 \cdot 2}{n(n-2)\dots 5 \cdot 3} 1 = \frac{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2 2^{n-1}}{n!}$$

Aufgabe 8.11.3

$$S = 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\epsilon^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{\epsilon^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{\epsilon^6}{5} - \dots \right]$$

Aufgabe 8.11.4

$S = 1.91035$

(5 Reihenglieder)

$S_{\text{exakt}} = 1.910098$