

Zugelassene Hilfsmittel : alle eigenen, Literatur.
Dauer / Punkte : 90 min / 107 Punkte

Berechnungen sind nachvollziehbar zu dokumentieren, nur einfache Taschenrechnerergebnisse (Grundrechenarten, Funktionsberechnungen) werden gewertet. Ergebnisse sind doppelt zu unterstreichen. Jedes Blatt ist mit Name, Matrikel-Nr. und Seite zu beschriften. Die Bearbeitungsreihenfolge ist beliebig. Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseite ist nicht zu beschriften.

Aufgabe 1 (12 P)

Gegeben ist das folgende Skalarfeld

$$\varphi = x \cdot y \cdot z + x^2 \cdot y^2 \cdot z^2$$

- Bilden Sie den Gradienten des oben angegebenen Skalarfeldes. (4 P)
 $\vec{a} = \text{grad}(\varphi)$
- Gesucht ist der Wert des geschlossenen Linienintegrals. Der Weg ist beschrieben durch einen Kreis mit dem Radius $R = 1$ in der Ebene $z = 2$. Geben Sie eine Begründung an. (2 P)
- Bilden Sie die Divergenz des Vektors $\vec{a}$. (4 P)
- Geben Sie die Rotation des Vektors $\vec{a}$ an. Die Berechnung (aufwendig) oder eine Begründung ist anzugeben. (2 P)

Aufgabe 2 (20 P)

Berechnen Sie das folgende unbestimmte Integral:

$$F(x) = \int \frac{8x^2 + 27x - 11}{(x^2 + x - 6)(x + 3)} dx$$

Aufgabe 3 (15 P)

Das dimensionslose Volumen in Zylinderkoordinaten mit den unten angegebenen Begrenzungen ist zu bestimmen.

$$\begin{array}{lll} R_1 = 0 & \varphi_1 = 0 & z_1 = 0 \\ R_2 = 1 & \varphi_2 = 2\pi & z_2 = R^2 \cdot \sin(\varphi/2) \end{array}$$

Aufgabe 4 (20 P)

Entwickeln Sie für den folgenden Ausdruck die **ersten drei** Terme einer **Taylor-Reihe** bei $x = 3$.

$$y(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$$

Aufgabe 5 (15 P)

Entwickeln Sie für den folgenden Ausdruck die **ersten fünf** Terme einer **Reihe** bei $x = 0$. Hinweis: Der Aufwand richtet sich nach der Wahl der Methode.

$$y(x) = \sqrt[4]{(16 + 32x)^3}$$

Aufgabe 6 (15 P)

Berechnen Sie das folgende Integral **analytisch**. Hinweis: Zur Lösung sind nur Grundintegrale zu verwenden und keine Tabellen (ein Integrationsverfahren ist zu wählen).

$$I = \int_{x=0}^{0.1} x^2 \cdot \cos(2x) dx$$

Aufgabe 7 (10 P)

Das folgende bestimmte Integral ist mit Hilfe von **Reihenentwicklung** auf vier Genauigkeitsstellen zu berechnen. Hinweis: Hier dürfen Ergebnisse von Tabellen benutzt werden.

$$I = \int_{x=0}^{0.1} x^2 \cdot \cos(2x) dx$$

Aufgabe 1

a) $\text{grad}(\varphi) = \begin{pmatrix} y*z + 2x*y^2*z^2 \\ x*z + 2x^2*y*z^2 \\ x*y + 2x^2*y^2*z \end{pmatrix}$

b) $I = 0$

c) $\text{div}(\vec{a}) = 2y^2*z^2 + 2x^2*z^2 + 2x^2*y^2$

d) $\text{rot}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

$$F(x) = -4\frac{1}{x+3} + 5\ln|x+3| + 3\ln|x-2| + C$$

Aufgabe 3

$$V = 1$$

Aufgabe 4

$$y(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2$$

Aufgabe 5

$$y(x) = 8 + 12x - 3x^2 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{45}{16}x^4 + \dots$$

Aufgabe 6

$$I = 3.2934 \cdot 10^{-4}$$

Aufgabe 7

$$I = 0.3293 \cdot 10^{-3}$$