

Pflichtvorlesung

Mathematik I

für Studierende
des
1. Semesters

Fachhochschule
Oldenburg/Ostfriesland/**Wilhelmshaven**

Standort Wilhelmshaven

Fachbereich Elektrotechnik

Prof. Dr.-Ing. H. Ahlers

Literaturhinweise

- /1/ Brauch, W.; Dreyer, H.J.; Haacke, W. :
Mathematik für Ingenieure;
Teubner Verlag, Stuttgart 1990.
- /2/ Papula, L.:
Mathematik für Ingenieure 1;
Vieweg Verlag, Braunschweig 1990.
- /3/ Papula, L.:
Mathematik für Ingenieure 2;
Vieweg Verlag, Braunschweig 1990.
- /4/ Bartsch, H.J.:
Taschenbuch mathematischer Formeln;
Hanse Verlag; Leipzig
- /5/ Bronstein, I.N; Semendjajew, K.A.:
Taschenbuch der Mathematik;
Harri Deutsch Verlag; Zürich, Frankfurt, Thun; 1977.
- /6/ Stöcker, H.:
Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren
Harri Deutsch Verlag; Thun und Frankfurt/Main; 1993.
- /7/ Gradstein; Ryschik, I.
Summen-, Produkt und Integraltafeln
Thun-Frankfurt; 1991.
- /8/ Dirschmid, H.J. :
Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik;
Vieweg Verlag, Braunschweig 1989.
- /9/ Zurmühl, R.:
Praktische Mathematik für Ingenieure un Physiker;
Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1984.

Kommentar:

- /1/ 1. Lehrbuch in etwa Vorlesung
- /2/ und /3/ 2. Lehrbuch in etwa Vorlesung
- /4/ Übersichtliche Formelsammlung (reicht aus)
- /5/ Etwas umfangreichere Formelsammlung, schlechter lesbar.
- /6/ Kombination aus Formelsammlung und Lehrbuch. Eignet sich nicht zum Selbststudium. Wenn der Stoff einmal verstanden wurde, ist es ein hervorragendes Nachschlagewerk.
- /7/ Sehr umfangreiche Formelsammlung, insbesondere für Integrale, etwa 2000 Seiten, nur in Sonderfällen zu verwenden.
- /8/ Sehr theoretisches Werk, über Vorlesungsniveau, zur mathematischen Weiterbildung für Ingenieure bestens geeignet.
- /9/ Standardwerk der numerischen Mathematik

Ein Lehrbuch ist nicht vorlesungsbegleitend erforderlich. Allerdings ist eine Formelsammlung, insbesondere im zweiten und dritten Semester, sehr zu empfehlen.

Übersicht Mathematik I bis III

- 1. Semester: (8 Stunden)
 - 1. Algebra
 - 2. Funktionen
 - 3. Komplexe Zahlen
 - 4. Analytische Geometrie
 - 5. Grundlagen der Differentialrechnung
- 2. Semester: (6 Stunden)
 - 6. Anwendungen der Differentialrechnung
 - 7. Integralrechnung
 - 8. Reihen
- 3. Semester: (6 Stunden)
 - 9. Frequenzanalyse
 - 10. Differentialgleichungen
 - 11. Laplace Transformation

Gliederung Mathematik I

1. Algebra

- 1.1. Einleitung
 - Begriffe: "Algebra", "mathematischer Ausdruck", "Variable" und "Konstante", "mathematische Verknüpfung", "Koeffizient", "linear" und "nichtlinear", "lineare Gleichung" und "nichtlineare Gleichung", "Gleichungssystem"
- 1.2. Lineare Gleichungssysteme:
 - Einführung, Wiederholung bekannter Verfahren aus der Schule: Einsetzen, Gleichsetzen, Additions- methode, Schematisierung von Gleichungssystemen, Determinanten, Rechenregeln für Matrizen, Lö- sungsmethode: Inverse Matrix, Lösungsmethode: Cramersche Regel, Lösungsmethode: Gaußscher Algo- rithmus, Numerische Inversion von Matrizen
- 1.3. Vektoralgebra
 - Einführung, Einfache Vektoroperationen, Skalarprodukt, Rechtsdrehendes Koordinatensystem, Vektor- produkt
- 1.4. Algebraische Gleichungen
 - Allgemeine Form der algebraischen Gleichung n. Grades, Algebraische Gleichungen 1. Grades, Quadra- tische Gleichungen, kubische Gleichungen, Algebraische Gleichung 4. Grades, Algebraische Gleichun- gen n. Grades
- 1.5. Transzendente Gleichungen
 - Goniometrische Gleichungen, Exponential-Gleichungen, Logarithmische-Gleichungen
- 1.6. Grafische Lösung
 - Newton-Methode, Regula Falsi
- 1.7. Numerische Lösung

2. Funktionen

- 2.1. Grundbegriffe der Funktionslehre
- 2.2. Analytische Funktionen
 - Ganze rationale Funktionen, Horner Schema, Gebrochen rationale Funktionen
- 2.3. Transzendente Funktionen
 - Trigonometrische Funktionen, Arcus-Funktionen, Exponential-Funktion, Logarithmus-Funktionen, Hyperbel-Funktionen, Area-Funktion, Reihen der transzendenten Funktionen, Zusammenhang zwischen den transzendenten Funktionen
- 2.4. Gerade und ungerade Funktionen
- 2.5. Funktionen in Polardarstellung
- 2.6. Funktionen mehrerer Veränderlicher
- 2.7. Funktionen in logarithmischer Darstellung

3. Komplexe Zahlen

- 3.1. Erweiterung des Zahlenbegriffs
- 3.2. Einführung in die komplexen Zahlen
- 3.3. Potenzen komplexer Zahlen
- 3.4. Wurzel aus komplexen Zahlen
- 3.5. Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl
- 3.6. e-Funktion komplexer Argumente
- 3.7. Zusammenfassung der Rechenregeln der komplexen Rechnung
- 3.8. Ortskurven

4. Analytische Geometrie

- 4.1. Koordinatensysteme
 - Zweidimensionale Koordinatensysteme, Dreidimensionale Koordinatensysteme
- 4.2. Lineare Gebilde in kartesischen Koordinaten
 - Lineare Gebilde in der Ebene: Die Gerade, Lineare Gebilde im dreidimensionalen Raum
- 4.3. Flächen 2. Ordnung im dreidimensionalen Raum
 - Kugel, Ellipsoid, Zylinder in z-Richtung, Doppelkegel in z-Richtung
- 4.4. Kegelschnitte: Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel,

5. Grundlagen der Differentialrechnung

- 5.1. Einführung
 - Beispiel Geschwindigkeit-Weg, Differenzen- und Differentialquotient,
- 5.2. Rechenregeln der Differentialrechnung:
 - Grundregeln, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, Logarithmische Differentiation
- 5.3. Ableitung bekannter Funktionen
 - Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion, Trigonometrische Funktion, Arcus-Funktion, Hyperbel- funktion, Area-Funktion
- 5.4. Höhere Ableitungen
- 5.5. Differenzierbarkeit

Inhaltsverzeichnis Mathematik I

1. Algebra	1
1.1. Einleitung	1
1.1.1. Der Begriff "Algebra"	1
1.1.2. Der Begriff "mathematischer Ausdruck"	1
1.1.3. Die Begriffe "Variable" und "Konstante"	1
1.1.4. Der Begriff "mathematische Verknüpfung"	2
1.1.5. Der Begriff "Koeffizient"	2
1.1.6. Die Begriffe "linear" und "nichtlinear"	2
1.1.7. Die Begriffe "lineare Gleichung" und "nichtlineare Gleichung"	2
1.1.8. Der Begriff "Gleichungssystem"	2
1.2. Lineare Gleichungssysteme	3
1.2.1. Einführung	3
1.2.1.1. Beispiele von Gleichungssystemen	3
1.2.1.2. Ordnung des Gleichungssystems	4
1.2.1.3. Wichtigkeit und Aufstellung von Gleichungssystemen	5
1.2.2. Wiederholung bekannter Verfahren aus der Schule	6
1.2.2.1. Einsetzen	6
1.2.2.2. Gleichsetzen	8
1.2.2.3. Addition und Subtraktion	10
1.2.3. Schematisierung von Gleichungssystemen	12
1.2.3.1. Einleitung: Warum Schematisierung	12
1.2.3.2. Der Begriff des Vektors	12
1.2.3.3. Vektormultiplikation: Zeilenvektor mal Spaltenvektor	15
1.2.3.4. Der Begriff der Matrix	16
1.2.3.5. Matrix multipliziert mit Spaltenvektor	18
1.2.3.6. Schreibweise von Gleichungssystemen	19
1.2.4. Determinanten	20
1.2.4.1. Notwendigkeit von Determinanten	20
1.2.4.2. Schreibweise von Determinanten	21
1.2.4.3. Determinante einer 2*2 Matrix	21
1.2.4.4. Regel von Sarrus (nur für dreireihige Determinante)	22
1.2.4.5. Unterdeterminanten	22
1.2.4.6. Adjunkte Elemente	25
1.2.4.7. Adjunkte Matrix	25
1.2.4.8. Entwicklung von Determinanten mit Hilfe der Unterdeterminanten	26
1.2.4.9. Rechenregeln für Determinanten	27
1.2.4.10. Berechnung von Determinanten mit Rechenregeln	28
1.2.4.11. Welches Verfahren für welche Determinante?	28
1.2.5. Rechenregeln für Matrizen	29
1.2.5.1. Dimension	29
1.2.5.2. Addition von Matrizen	30
1.2.5.3. Transponierte Matrix	30
1.2.5.4. Adjungierte Matrix	31
1.2.5.5. Wiederholung: Multiplikation einer Matrix mit Spaltenvektor	32
1.2.5.6. Multiplikation zweier Matrizen	33
1.2.5.7. Einheitsmatrix	35
1.2.5.8. Inverse Matrix	36
1.2.5.9. Rang einer Matrix	40
1.2.6. Lösungsmethode: Inverse Matrix	41
1.2.7. Lösungsmethode: Cramersche Regel	43
1.2.8. Lösungsmethode: Gaußscher Algorithmus	45
1.2.9. Numerische Inversion von Matrizen	49
1.2.10. Anwendung welcher Methode?	51
1.3. Vektoralgebra	52
1.3.1. Einführung	52
1.3.2. Einfache Vektoroperationen	53
1.3.3. Skalarprodukt	57
1.3.4. Rechtsdrehendes Koordinatensystem	59

1.3.5. Vektorprodukt	60
1.3.6. Zusammenfassung der Rechenregeln der Vektoralgebra	63
1.4. Algebraische Gleichungen	64
1.4.1. Allgemeine Form der algebraischen Gleichung n-ten Grades	64
1.4.2. Algebraische Gleichungen 1. Grades	64
1.4.3. Algebraische Gleichungen 2. Grades	64
1.4.4. Algebraische Gleichung 3. Grades, kubische Gleichungen	67
1.4.5. Algebraische Gleichung 4. Grades	70
1.4.6. Algebraische Gleichungen n-ten Grades	72
1.5. Transzendente Gleichungen	75
1.5.1. Goniometrische Gleichungen	75
1.5.2. Exponential-Gleichungen	78
1.5.3. Logarithmische-Gleichungen	79
1.6. Grafische Lösung	80
1.7. Iterative Lösung	82
1.7.1. Newton-Methode	82
1.7.2. Regula Falsi	83
2. Funktionen	86
2.1. Grundbegriffe der Funktionslehre	86
2.1.1. Funktionsbegriff	86
2.1.1.1. Allgemeiner Funktionsbegriff	86
2.1.1.2. Mathematischer Funktionsbegriff	86
2.1.2. Darstellungsmöglichkeiten einer Funktion	87
2.1.3. Grafische Darstellung	88
2.1.3.1. Achsen	88
2.1.3.2. Abhängige und unabhängige Variable	88
2.1.3.3. Funktionsgraf	88
2.1.3.4. Mathematisch positive Richtung	89
2.1.3.5. Quadrant	89
2.1.4. Definitions- und Wertebereich	89
2.1.5. Intervall	90
2.1.6. Extremwerte	91
2.1.7. Monotonie	91
2.1.8. Grenzwerte	92
2.1.9. Stetigkeit von Funktionen	94
2.1.10. Umkehrfunktion	95
2.1.11. Koordinatentransformation	96
2.1.11.1. Verschiebung des Punktes oder der Funktion	96
2.1.11.2. Verschiebung des Koordinatensystems	97
2.1.11.3. Streckung	97
2.1.11.4. Drehung des Koordinatensystems	98
2.1.11.5. Zusammenfassung: Koordinaten-Transformation	99
2.1.12. Explizite und implizite Form	99
2.1.13. Parameterdarstellung einer Funktion	100
2.2. Analytische Funktionen	101
2.2.1. Ganze rationale Funktionen	101
2.2.1.1. Funktion 0. Grades, Konstante	101
2.2.1.2. Funktion 1. Grades, Gerade	102
2.2.1.2.1. Steigung der Geraden	102
2.2.1.2.2. Nullstelle	102
2.2.1.2.3. Gerade durch zwei Punkte	103
2.2.1.2.4. Achsen-Abschnitts-Formel der Geraden	103
2.2.1.2.5. Zwei-Punkte-Form der Geraden	104
2.2.1.2.6. Punkt-Richtungs-Form der Geraden	104
2.2.1.2.7. Welche Formel für welche Gerade anwenden ?	105
2.2.1.2.8. Schnittpunkt zweier Geraden	105
2.2.1.3. Funktion 2. Grades	106
2.2.1.3.1. Allgemeines	106
2.2.1.3.2. Scheitelpunkt der Parabel	106
2.2.1.3.3. Einfluß der Koeffizienten a_0 , a_1 und a_2	107

2.2.1.3.4. Berechnung des Scheitelpunktes und der Streckung aus der allgemeinen Form	109
2.2.1.3.5. Parabel durch drei Punkte	112
2.2.1.3.6. Nullstellen	115
2.2.1.3.7. Zerlegung in Linearfaktoren	116
2.2.1.4. Funktion 3. Grades	117
2.2.1.5. Funktion 4. Grades	119
2.2.1.5.1. Allgemeine Form	119
2.2.1.5.2. Eigenschaften	119
2.2.1.5.3. Parabel 4. Ordnung durch 5 Punkte	121
2.2.1.6. Funktion n-ter Ordnung	122
2.2.2. Horner Schema	123
2.2.2.1. Funktionswert-Berechnung	123
2.2.2.2. Polynomdivision	125
2.2.2.3. Koordinaten-Verschiebung	127
2.2.3. Gebrochen rationale Funktionen	129
2.2.3.1. Allgemeine Form	129
2.2.3.2. Echt und unecht gebrochen	129
2.2.3.3. Pole, Nullstellen, Lücken	130
2.2.3.4. Asymptote	131
2.2.3.5. Exemplarische Darstellung	131
2.2.4. Algebraische Funktionen	136
2.2.4.1. Definition	136
2.2.4.2. Potenzfunktion	136
2.2.4.3. Algebraische Funktionen 2. Ordnung	138
2.2.4.3.1. Allgemeine Form	138
2.2.4.3.2. Einfluß des gemischten Terms	138
2.2.4.3.3. Parabel	138
2.2.4.3.4. Gerade	138
2.2.4.3.5. Allgemeine Form von Kreis, Ellipse und Hyperbel (Punkt)	139
2.3. Transzendente Funktionen	143
2.3.1. Einleitung	143
2.3.2. Trigonometrische Funktionen	143
2.3.2.1. Bogenmaß und Einheitskreis	143
2.3.2.2. Definition der Winkelfunktionen	145
2.3.2.2.1. Definition am rechtwinkligen Dreieck	145
2.3.2.2.2. Definition am Einheitskreis (EK)	146
2.3.2.2.3. Definition über Differential-Gleichungen (DGL)	146
2.3.2.3. Funktionswerte und Funktionsgrafen	147
2.3.2.4. Zusammenhang zwischen den Winkelfunktionen	150
2.3.2.5. Additionstheoreme	151
2.3.2.6. Vielfache von Winkelfunktionen	151
2.3.2.7. Addition zweier Cousins-Schwingungen gleicher Frequenz	151
2.3.2.8. Sinus- und Kosinussatz	154
2.3.3. Arcus-Funktionen	155
2.3.4. Exponential-Funktion	158
2.3.5. Logarithmus-Funktionen	161
2.3.5.1. Rechenregeln der Exponential- und Logarithmus-Rechnung	163
2.3.6. Hyperbel-Funktionen	164
2.3.7. Area-Funktion	168
2.3.8. Reihen der transzendenten Funktionen	168
2.3.9. Zusammenhang zwischen den transzendenten Funktionen	172
2.3.9.1. Zusammenhang: Exponential und trigonometrische Funktionen	172
2.3.9.2. Zusammenhang: Exponential und Hyperbel-Funktionen	173
2.3.9.3. Zusammenhang: Trigonometrische und Hyperbel-Funktionen	173
2.3.9.4. Komplexe Additionstheoreme	174
2.3.9.5. Zusammenhang Area- und ln-Funktionen	174
2.3.9.6. Zusammenhang Arcus und ln-Funktionen	175
2.3.9.7. Zusammenhang: Area- und Arcus-Funktionen	176
2.3.9.8. Mehrdeutigkeit	176
2.3.9.9. Beispiele	178

2.4. Gerade und ungerade Funktionen	179
2.5. Funktionen in Polardarstellung	180
2.6. Funktionen mehrerer Veränderlicher	182
2.7. Funktionen in logarithmischer Darstellung	183
3. Komplexe Zahlen	186
3.1. Erweiterung des Zahlenbegriffs	186
3.2. Einführung in die komplexen Zahlen	187
3.2.1. Definition der imaginären Einheit j	187
3.2.2. Komplexe Zahlen	187
3.2.3. Gauß'sche Zahlenebene	188
3.2.4. Darstellungsarten	188
3.2.4.1. Einführung von Betrag und Winkel	188
3.2.4.2. Umrechnung Betrag und Phase nach Komponenten	189
3.2.4.3. Umrechnung Komponenten nach Betrag und Phase	189
3.2.4.4. Potenzen von j	190
3.2.4.5. Euler-Form	191
3.2.4.6. Schreibweise der komplexen Zahl	191
3.2.5. Mathematische Operation mit komplexen Zahlen	192
3.2.5.1. Addition	192
3.2.5.2. Negative komplexe Zahl	193
3.2.5.3. Subtraktion	194
3.2.5.4. Multiplikation komplexer Zahlen	195
3.2.5.5. Konjugiert komplexe Zahl	196
3.2.5.6. Inversion einer komplexen Zahl	197
3.2.5.7. Division komplexer Zahlen	197
3.2.5.8. Gleichheit komplexer Zahlen	198
3.2.6. Einfache Beispiele	198
3.3. Potenzen komplexer Zahlen	203
3.4. Wurzeln aus komplexen Zahlen	204
3.5. Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl	207
3.6. e -Funktion komplexer Argumente	208
3.7. Zusammenfassung der Rechenregeln der komplexen Rechnung	209
3.8. Ortskurven	210
3.8.1. Einleitung	210
3.8.2. Komplexe Gerade	211
3.8.3. Inversion der komplexen Geraden	212
3.8.4. Allgemeine Inversion von Kreis und Gerade	218
3.8.5. Allgemeine Ortskurven	221
3.8.5.1. Analytische Beschreibung	221
3.8.5.2. Nicht analytische Konstruktion	221
4. Analytische Geometrie	224
4.1. Koordinatensysteme	224
4.1.1. Zweidimensionale Koordinatensysteme	224
4.1.1.1. Rechtwinklige Koordinaten	224
4.1.1.2. Schiefwinklige Koordinaten	224
4.1.1.3. Polar-Koordinaten	225
4.1.2. Dreidimensionale Koordinatensysteme	226
4.1.2.1. Rechtwinklige kartesische Koordinaten	226
4.1.2.2. Zylinder Koordinaten	226
4.1.2.3. Kugel Koordinaten (Sphärische Polar-Koordinaten)	227
4.2. Lineare Gebilde in kartesischen Koordinaten	228
4.2.1. Lineare Gebilde in der Ebene: Die Gerade	228
4.2.2. Lineare Gebilde im dreidimensionalen Raum	229
4.2.2.1. Gerade im Raum	229
4.2.2.2. Ebene im Raum	230
4.2.2.3. Achsenabschnittsform der Ebene	232
4.2.2.4. Schnitt zweier Ebenen	233
4.2.2.5. Schnitt zwischen Gerade und Ebene	235
4.2.2.6. Kürzeste Entfernung zu einer Geraden	236

4.2.2.7. Kürzeste Entfernung zu einer Ebene	237
4.3. Flächen 2. Ordnung im dreidimensionalen Raum	238
4.3.1. Kugel	238
4.3.2. Ellipsoid	238
4.3.3. Zylinder in z-Richtung	238
4.3.4. Doppelkegel in z-Richtung	238
4.4. Kegelschnitte	239
4.4.1. Kreis	240
4.4.2. Ellipse	240
4.4.3. Hyperbel	241
4.4.4. Parabel	242
5. Grundlagen der Differentialrechnung	243
5.1. Einführung	243
5.1.1. Beispiel Geschwindigkeit-Weg	243
5.1.2. Differenzen- und Differentialquotient	245
5.1.3. Differenzieren der Potenzfunktionen $y = x^n$	246
5.1.4. Ableitung der Transzendenten Funktion (Teil 1)	248
5.1.4.1. Sinus-Funktion	248
5.1.4.2. Kosinus Funktion	249
5.1.4.3. Logarithmus Funktion	250
5.1.4.4. Prinzip: Ableitung mit Hilfe der Umkehrfunktion bilden	251
5.1.4.5. Exponential-Funktion	251
5.2. Rechenregeln der Differentialrechnung	252
5.2.1. Ableitung der bekanntesten Funktionen	252
5.2.2. Grundregeln	252
5.2.3. Produktregel	253
5.2.4. Quotientenregel	254
5.2.5. Kettenregel	255
5.2.6. Logarithmische Differentiation	257
5.3. Ableitung bekannter Funktionen	259
5.3.1. Exponentialfunktion	259
5.3.2. Logarithmusfunktion	259
5.3.3. Trigonometrische Funktionen	260
5.3.4. Arcus-Funktionen	261
5.3.5. Hyperbelfunktionen	262
5.3.6. Area-Funktionen	263
5.4. Höhere Ableitungen	266
5.5. Differenzierbarkeit	267
Anhang	269
Aufgaben	269
Ergebnisse	280

1. Algebra

1.1. Einleitung

1.1.1. Der Begriff "Algebra"

Was ist Algebra ?

Duden : "Lehre von den mathematischen Gleichungen"
 Brockhaus : "Ursprünglich : die Lehre von den Gleichungen,
 volkstümlich : das Buchstabenrechnen,
 jetzt : die Theorie der Gruppen, Ringe, Körper, linearen Räume, deren
 Struktur und wechselseitige Beziehungen untersucht werden. Große
 Bedeutung hat die Algebra in der Quantentheorie und der Relativi-
 tätstheorie erlangt."

1.1.2. Der Begriff "mathematischer Ausdruck"

Ein mathematischer Ausdruck ist ein Teil einer Gleichung. Der einfachste mathematische Ausdruck ist eine Variable oder Konstante. Kompliziertere mathematische Ausdrücke sind Verknüpfungen von Variablen und Konstanten. Was bedeuten die mathematischen Begriffe "Variable", "Konstante" und "Verknüpfung"? Siehe dazu die folgenden Abschnitte.

1.1.3. Die Begriffe "Variable" und "Konstante"

In mathematischen und physikalischen Formeln werden in Ausdrücken (z.B. Gleichungen) u.a. Buchstaben verwendet. Diese repräsentieren u.a. **Konstante** oder **Variable**.

Konstante : Diese sind mathematische Größen, wie der Name schon hinweist, die konstant sind. Vorstellen läßt sich dieses am besten, daß man anstelle einer Zahl mit 8 Kommastellen eine Konstante schreibt.

Beispiel : $c_1 = 1.8978912$
 $c_2 = 3.3333333$

Variable : Diese sind mathematische Größen, wie der Name schon hinweist, die veränderlich, bzw variabel sind. Der Wert der Variablen muß in der Regel noch bestimmt werden (Lösung von Gleichungen), oder wird in Abhängigkeit einer anderen Variablen angegeben (Funktionen).

Vereinbarung in Mathematik I (und nur hier)

Variable : $x, y, z, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$
 Konstante : $a, b, c, a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, k_1, k_2, k_3$

Vorlesungsübung

Bestimmen Sie ob es sich um eine Variable oder um eine Konstante handelt:

Vorgabe	Ergebnis
x	Variable
a	Konstante
z	Variable
y	Variable
b1	Konstante

1.1.4. Der Begriff "mathematische Verknüpfung"

Mathematische Verknüpfungen sind u.a.:

- | | |
|--------------------------|-----------------------|
| - Grundrechenart "+" | Beispiel: $x+y$ |
| - Grundrechenart "-" | Beispiel: $x-y$ |
| - Grundrechenart "*" | Beispiel: $x*y$ |
| - Grundrechenart ":" | Beispiel: $x:y = x/y$ |
| - Potenzierung | Beispiel: x^y |
| - mathematische Funktion | Beispiel: $\sin(x)$ |

Der Begriff Funktion soll ausführlich in Kap. 2 behandelt werden.

1.1.5. Der Begriff "Koeffizient"

Ein Koeffizient ist eine mathematische Größe, mit der ein Ausdruck multipliziert wird. In der Regel sind Koeffizienten konstant.

Beispiele:	$a_1 * x^3$	a_1 - Koeffizient
	$c_2 * x$	c_2 - Koeffizient
	$10 * x^5 + b_2 * x$	10 und b_2 - Koeffizienten

1.1.6. Die Begriffe "linear" und "nichtlinear"

Linear sind Ausdrücke, wenn die **Variablen** nicht miteinander multipliziert oder dividiert werden, noch in Potenzen auftreten die ungleich null oder eins sind. **Konstanten** miteinander oder mit einer Variablen multipliziert, ergeben lineare Ausdrücke. Entscheidend für die Linearität ist die Variable.

1.1.7. Die Begriffe "lineare Gleichung" und "nichtlineare Gleichung"

Unterscheiden wird zwischen linearen und nichtlinearen Gleichungen, die in der Algebra behandelt werden. **Linear ist eine Gleichung, wenn die Ausdrücke in den Gleichungen linear sind.**

Vorlesungsübung

$y = a_0 + a_1 * x$	linear
$y = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2$	nichtlinear
$y * y = a + b * x$	nichtlinear
$y = a * b + x$	linear
$y = \text{abs}(x)$	nichtlinear
$a = y * x$	nichtlinear

1.1.8. Der Begriff "Gleichungssystem"

bekannt:	1 Gleichung mit einer Unbekannten	Beispiel: $5x + 8 = 7x + 9$
auch bekannt:	2 Gleichungen mit zwei Unbekannten	Beispiel: $2x + 4y = 8$ $4x + 3y = 9$

Gleichungssysteme enthalten mehrere Unbekannte und mehrere Gleichungen. **In der Regel** sind Gleichungssysteme lösbar, wenn bei n unbekannten Variablen auch n Gleichungen vorhanden sind. Eine allgemeine Methode zum Lösen nichtlinearer Gleichungssysteme gibt es nicht. Lineare Gleichungssysteme sind analytisch lösbar, diese sollen im Rahmen der linearen Algebra im nächsten Abschnitt behandelt werden.

1.2. Lineare Gleichungssysteme

1.2.1. Einführung

Folgende Fragen sind zu klären:

- Was ist ein Gleichungssystem?
- Was gibt die Ordnung eines Gleichungssystems an?
- Wichtigkeit und Aufstellen von Gleichungssystem.

1.2.1.1. Beispiele von Gleichungssystemen

Hier werden Gleichungssystemen verschiedener Ordnung angegeben, mit Zahlen und allgemein.

Gleichungssystem 1. Ordnung mit Zahlen

$$5x_1 = 20$$

Ein lineares Gleichungssystem 1. Ordnung mit einer Variablen ist schon fast trivial und wird hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt.

Gleichungssystem 2. Ordnung mit Zahlen

$$5x_1 + 6x_2 = 7$$

$$5x_1 + 4x_2 = 9$$

Bei einem Gleichungssystem 2. Ordnung sind die zwei Variablen x_1 und x_2 vorhanden und es sind zwei Gleichungen vorhanden.

Gleichungssystem 3. Ordnung mit Zahlen

$$8x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 10$$

$$4x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 12$$

$$5x_1 + 11x_2 + 9x_3 = 13$$

Das Gleichungssystem 3. Ordnung hat drei Gleichungen mit den drei Unbekannten (Variablen) x_1 , x_2 und x_3 .

Allgemeines Gleichungssystem 4. Ordnung

In allgemeiner Form sind hier 4x4 Koeffizienten vorhanden, mit denen die Variablen x_1 bis x_4 zu multiplizieren sind. Auf der rechten Seite sind 4 Konstanten vorhanden. Die Koeffizienten der Variablen werden mit a_{ij} bezeichnet und die Konstanten der rechten Seite mit k_i . Dieses ist eine willkürliche Annahme. Bei einer physikalischen Beschreibung eines Systems bekommen die Koeffizienten die Bedeutung einer physikalischen Größe, wo auch dann der entsprechende Formelbuchstabe verwendet wird. Aus den oberen Annahmen und dem Vergleich mit den Gleichungssystemen 2. und 3. Ordnung ergibt sich das lineare Gleichungssystem 4. Ordnung:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = k_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = k_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = k_3$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = k_4$$

Die k_i 's werden von oben nach unten mit 1, 2, 3, 4 durchnummeriert. Die a_{ij} 's benötigen zwei Indizes, einen für die Zeile und einen für die Spalte.

Allgemeine mathematische Vereinbarung

1. Index: Zeilennummer

2. Index: Spaltennummer

1.2.1.2. Ordnung des Gleichungssystems

Mathematisch korrekt ausgedrückt gibt die Ordnung eines Gleichungssystems die Anzahl der voneinander unabhängigen Gleichungen an. Dieses ist aber im Moment noch zu früh zu erklären, weil noch einige Begriffe fehlen.

Ordnung für den Praktiker: Ein Gleichungssystem ist von n. Ordnung, wenn bei n verschiedenen Gleichungen und n verschieden Variablen das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

In manchen Ausnahmefällen ist ein Gleichungssystem mit z.B. 4 Variablen und auch 4 Gleichungen nicht lösbar, siehe später.

Beispiel überbestimmt: 5 Gleichungen, 4 Unbekannte

Beispiel unterbestimmt: 4 Gleichungen, 5 Unbekannte

Bei physikalischen Aufgabenstellungen erhält man in der Regel, bei korrekter Gleichungsaufstellung für n Variable (Unbekannte) auch n Gleichungen.

1.2.1.3. Wichtigkeit und Aufstellung von Gleichungssystemen

Gleichungssysteme mit mehreren Variablen ergeben sich bei verschiedenen physikalischen und mathematischen Problemen.

Beispiel aus der Elektrotechnik, Herleitung der Gleichungen in EG I:

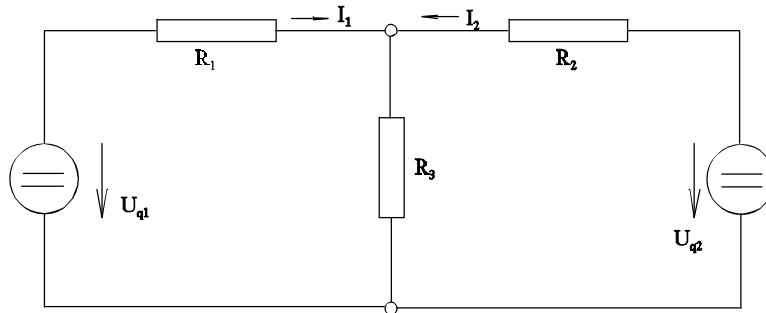


Bild MA1213A

Für das obere Netzwerk gilt für die Variablen I_1 und I_2 das folgende Gleichungssystem:

$$(R_1 + R_3)I_1 + R_3 I_2 = U_{q1}$$

$$R_3 I_1 + (R_2 + R_3)I_2 = U_{q2}$$

Vergleich mit der allgemeinen Form aus dem letzten Kapitel liefert:

$$a_{11} = R_1 + R_2 \quad a_{12} = R_3 \quad k_1 = U_{q1}$$

$$a_{21} = R_3 \quad a_{22} = R_2 + R_3 \quad k_2 = U_{q2}$$

Die a_{ij} und k_i ergeben sich also im oberen Beispiel zu physikalischen Größen.

In EG I wird das obere Gleichungssystem aufgrund eines Schemas direkt aus Netzwerk heraus aufgestellt, ohne längere Gleichungsaufstellung.

Um ein physikalisches Problem mit Hilfe von Gleichungssystemen zu lösen ergibt sich folgende Vorgehensweise:

1. Gleichungssystem aufstellen
2. Gleichungssystem lösen

Oben wurde schon gezeigt, das Aufstellen von Gleichungssystemen läßt sich schematisieren. Hauptinhalt des Kapitels 1.2. "Lineare Gleichungssysteme" ist die Schematisierung von Gleichungssystemen. Nur die Lösung und die Darstellung sollen hier in Mathematik I aufgezeigt werden, nicht das Aufstellen des Gleichungssystems. Dieses ergibt sich, wie schon angedeutet, aus physikalischen oder mathematischen Problemstellungen. Ein sehr wichtiges Anwendungsgebiet in der Praxis für lineare Gleichungssysteme sind die linearen elektrischen Netzwerke.

Der Inhalt für "Lineare Gleichungssysteme" (Kap. 1.2):

- Wiederholung bekannter Methoden aus der Schule
- Einführung des Begriffes Vektor
- Einführung des Begriffes Matrix
- Determinanten
- Lösungsmethode: Matrixinversion
- Lösungsmethode: Gauß'scher Algorithmus
- Lösungsmethode: Cramersche Regel

1.2.2. Wiederholung bekannter Verfahren aus der Schule

Aus der Schule sollten die folgenden drei Methoden bekannt sein:

- Einsetzen
- Gleichsetzen und
- Addition

Die oberen Methoden sollen jeweils an einem Beispiel 2. und 3.Ordnung wiederholt werden.

1.2.2.1. Einsetzen

Prinzip: Eine Gleichung wird nach einer Variablen aufgelöst und in die anderen Gleichungen eingesetzt. Dadurch ergibt sich ein Gleichungssystem, daß um eine Ordnung verringert ist. Dieses wird solange fortgesetzt bis ein Gleichungssystem 1. Ordnung vorhanden ist, deren Lösung sofort angegeben werden kann. Die anderen Variablen werden danach aus schon vorhandenen Gleichungen durch Rückwärts-Einsetzen bestimmt.

Beispiel 2. Ordnung

gegeben:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 &= 7 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 9 \end{aligned}$$

gesucht: x_1, x_2

Lösung:

2. Gleichung nach x_2 auflösen: $4x_2 = 9 - 3x_1$

$$x_2 = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}x_1$$

x_2 in die erste Gleichung einsetzen:

$$5x_1 + 6\left(\frac{9}{4} - \frac{3}{4}x_1\right) = 7$$

Umformen:

$$5x_1 + \frac{27}{2} - \frac{9}{2}x_1 = 7$$

$$10x_1 + 27 - 9x_1 = 14$$

$$x_1 = -13$$

Einsetzen in der nach x_2 aufgelösten Gleichung: $x_2 = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}x_1 = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}(-13) = 12$

Ergebnis: $x_1 = -13$ $x_2 = 12$

Probe: (durch Einsetzen in die gegebenen Gleichungen)

$$5x_1 + 6x_2 = 7 = 5*(-13) + 6*12 = -65 + 72 \Rightarrow \text{OK}$$

$$3x_1 + 4x_2 = 9 = 3*(-13) + 4*12 = -39 + 48 \Rightarrow \text{OK}$$

Beispiel 3. Ordnung

gegeben:

$$\begin{aligned} -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 7x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -6 \end{aligned}$$

gesucht: x_1, x_2, x_3

Lösung:

3. Gleichung nach x_3 auflösen: $x_3 = -3 - 2x_1 + x_2$

x_3 in 1. und 2. Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} -3x_1 + 3x_2 - 2(-3 - 2x_1 + x_2) &= 5 \\ 7x_1 + 5x_2 + (-3 - 2x_1 + x_2) &= 1 \end{aligned}$$

umgeformt ergibt sich ein Gleichungssystem 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -1 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Verfahren für ein Gleichungssystem 2. Ordnung: 1. Gleichung nach x_2 auflösen:

$$x_2 = -1 - x_1$$

Einsetzen in die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 &= 4 \\ 5x_1 + 6(-1 - x_1) &= 4 \\ 5x_1 - 6 - 6x_1 &= 4 \\ -x_1 &= 10 \\ x_1 &= -10 \end{aligned}$$

x_2 Bestimmung:

$$\begin{aligned} x_2 &= -1 - x_1 \\ x_2 &= -1 - (-10) \\ x_2 &= 9 \end{aligned}$$

x_3 Bestimmung:

$$\begin{aligned} x_3 &= -3 - 2x_1 + x_2 \\ x_3 &= -3 - 2(-10) + 9 \\ x_3 &= 26 \end{aligned}$$

Ergebnis: $x_1 = -10$ $x_2 = 9$ $x_3 = 26$

Probe: (durch Einsetzen in die gegebenen Gleichungen)

$$\begin{aligned} -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5 = -3(-10) + 3 \cdot 9 - 2 \cdot 26 = 30 + 27 - 52 &=> \text{OK} \\ 7x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 = 7(-10) + 5 \cdot 9 + 1 \cdot 26 = -70 + 45 + 26 &=> \text{OK} \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -6 = 4(-10) - 2 \cdot 9 + 2 \cdot 26 = -40 - 18 + 52 &=> \text{OK} \end{aligned}$$

1.2.2.2. Gleichsetzen**Prinzip**

Fast das gleiche Prinzip als bei der Einsetzmethode ist bei dieser Methode anzutreffen. Nicht nur eine Gleichung wird nach einer bestimmten Variablen aufgelöst, sondern alle Gleichungen werden nach einer bestimmten Variablen aufgelöst. Eine Gleichung wird dann ausgewählt, die den anderen gleichgesetzt wird. Durch dieses Verfahren wird wiederum in einem Schritt die Anzahl der Gleichungen und der Variablen um "1" reduziert. Die Ordnung des Gleichungssystems wird solange um "1" reduziert, bis die Ordnung 1 beträgt. Danach wieder Rückwärts-Einsetzen zur Bestimmung der restlichen Variablen.

Beispiel 2.Ordnung

gegeben:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 8x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 3 \end{aligned}$$

gesucht: x_1, x_2

Lösung:

Beide Gleichungen nach x_2 auflösen:

$$x_2 = \frac{5}{8} - \frac{5}{8}x_1$$

$$x_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x_1$$

Obere Gleichungen gleichsetzen und umformen:

$$\frac{5}{8} - \frac{5}{8}x_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}x_1$$

$$5 - 5x_1 = 6 - 4x_1$$

$$-1 = x_1$$

Ergebnis:

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = \frac{5}{4}$$

Probe:

$$5x_1 + 8x_2 = 5 = 5(-1) + 8 \cdot \frac{5}{4} = -5 + 10 \qquad \Rightarrow \text{OK}$$

$$2x_1 + 4x_2 = 3 = 2(-1) + 4 \cdot \frac{5}{4} = -2 + 5 \qquad \Rightarrow \text{OK}$$

Beispiel 3. Ordnung

gegeben:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= -8 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 7 \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

gesucht: x_1, x_2, x_3

Lösung: Alle Gleichungen werden nach x_3 aufgelöst:

$$x_3 = -\frac{1}{3}(-8 - 3x_1 - 5x_2) = \frac{8}{3} + x_1 + \frac{5}{3}x_2$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(7 + 2x_1 + 4x_2) = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(2 - 8x_1 - 6x_2) = 1 - 4x_1 - 3x_2$$

Die letzte der oberen drei Gleichungen wird den anderen beiden gleichgesetzt und umgeformt:

$$1 - 4x_1 - 3x_2 = \frac{8}{3} + x_1 + \frac{5}{3}x_2$$

$$1 - 4x_1 - 3x_2 = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2$$

$$3 - 12x_1 - 9x_2 = 8 + 3x_1 + 5x_2$$

$$3 - 12x_1 - 9x_2 = 7 + 2x_1 + 4x_2$$

$$-15x_1 - 14x_2 = 5$$

$$-14x_1 - 13x_2 = 4$$

Das obere Gleichungssystem 2. Ordnung wird nun wiederum durch Gleichsetzen gelöst. Auflösen der beiden letzten Gleichungen nach x_2 ergibt:

$$x_2 = -\frac{1}{14}(5 + 15x_1) = -\frac{5}{14} - \frac{15}{14}x_1$$

$$x_2 = -\frac{1}{13}(4 + 14x_1) = -\frac{4}{13} - \frac{14}{13}x_1$$

Gleichsetzen der beiden oberen Gleichungen und Umformen:

$$-\frac{5}{14} - \frac{15}{14}x_1 = -\frac{4}{13} - \frac{14}{13}x_1 \quad \Bigg/ \cdot 13 \cdot 14$$

$$-65 - 195x_1 = -56 - 196x_1$$

$$x_1 = 9$$

Die anderen Variablen (x_2 und x_3) werden rückwärts eingesetzt in die entsprechenden Gleichungen:

$$x_2 = -\frac{5}{14} - \frac{15}{14}x_1 = -\frac{5}{14} - \frac{15}{14} \cdot 9 = -10$$

$$x_3 = 1 - 4x_1 - 3x_2 = 1 - 4 \cdot 9 - 3 \cdot (-10) = -5$$

Ergebnis: $x_1 = 9$ $x_2 = -10$ $x_3 = -5$

Probe:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= -8 = 3 \cdot 9 + 5 \cdot (-10) - 3 \cdot (-5) = 27 - 50 + 15 && \Rightarrow \text{OK} \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 7 = -2 \cdot 9 - 4 \cdot (-10) + 3 \cdot (-5) = -18 + 40 - 15 && \Rightarrow \text{OK} \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 2 = 8 \cdot 9 + 6 \cdot (-10) + 2 \cdot (-5) = 72 - 60 - 10 && \Rightarrow \text{OK} \end{aligned}$$

1.2.2.3. Addition und Subtraktion**Prinzip**

Das Grundprinzip ist wieder das gleiche als bei anderen beiden Methoden: Die Ordnung des Gleichungssystems wird solange um "1" verringert bis eine Gleichung 1. Ordnung sich ergibt. Die restlichen Variablen werden durch Rückwärts-Einsetzen in schon umgeformte Gleichungen bestimmt. Der Unterschied zu den anderen Verfahren besteht darin, wie die Ordnung des Gleichungssystems reduziert wird.

Bei der Additions- und Subtraktionsmethode erfolgt die Reduzierung der Ordnung durch Addition und Subtraktion vollständiger Gleichungen.

Beispiel 2. Ordnung

gegeben:	$3x_1 + 4x_2 = 5$	$/*5$
	$2x_1 + 5x_2 = -6$	$/*(-4)$

gesucht: x_1, x_2

Lösung:

Soll beim oberen Gleichungssystem die Variable x_2 durch Addition eliminiert werden, muß die obere Gleichung mit "5" und die untere mit "-4" multipliziert werden:

$$\begin{aligned} 15x_1 + 20x_2 &= 25 \\ -8x_1 - 20x_2 &= 24 \end{aligned}$$

Durch die Addition der oberen beiden Gleichungen wird die Variable x_2 eliminiert:

$$\begin{aligned} 7x_1 &= 49 \\ x_1 &= 7 \end{aligned}$$

Durch eine der oberen Gleichungen muß x_2 bestimmt werden:

$$x_2 = \frac{1}{4}(5 - 3x_1) = \frac{1}{4}(5 - 3 \cdot 7) = -4$$

Ergebnis: $x_1 = 7$ $x_2 = -4$

Probe:	$3x_1 + 4x_2 = 5 = 3 \cdot 7 + 4 \cdot (-4) = 21 - 16$	=> OK
	$2x_1 + 5x_2 = -6 = 2 \cdot 7 + 5 \cdot (-4) = 14 - 20$	=> OK

Beispiel 3. Ordnung

gegeben:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 4 & (1) \\ -3x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 20 & (2) \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 & (3) \end{aligned}$$

gesucht: x_1, x_2, x_3

Lösung:

Verknüpfung von (1) und (3) durch Addition, wobei (3) mit "-3" multipliziert wird:

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 & = & 4 \\ \underline{6x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -3} & & \\ 10x_1 + 10x_2 & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} /+ \\ /+ \\ /= \end{array} \quad (1.1)$$

Verknüpfung von (2) und (3) durch Subtraktion, wobei (3) hier mit "7" multipliziert wird:

$$\begin{array}{rcl} -3x_1 + 5x_2 + 7x_3 & = & 20 \\ \underline{-14x_1 - 7x_2 + 7x_3 = 7} & & \\ 11x_1 + 12x_2 & = & 13 \end{array} \quad \begin{array}{l} /+ \\ /- \\ /= \end{array} \quad (2.1)$$

Somit erhält man 2 Gleichungen für die Variablen x_1 und x_2 :

$$\begin{aligned} 10x_1 + 10x_2 &= 1 & /*12 & (1.1) \\ 11x_1 + 12x_2 &= 13 & /*(-10) & (2.1) \end{aligned}$$

Additionsmethode auf (1.1) und (2.1) angewandt:

$$\begin{array}{rcl} 120x_1 + 120x_2 & = & 12 \\ \underline{-110x_1 - 120x_2 = -130} & & \\ 10x_1 & = & -118 \\ x_1 & = & -11.8 \end{array} \quad \begin{array}{l} + \\ \pm \\ = \end{array}$$

x_2 und x_3 werden durch Rückwärts-Einsetzen bestimmt, z.B. nach Benutzung von (1.1) und (1):

$$10x_1 + 10x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{10}(1 - 10x_1) = \frac{1}{10}[1 - 10*(-11.8)] = 11.9$$

$$4x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{1}{3}(4 - 7x_2 - 4x_1) = \frac{1}{3}[4 - 7*11.9 - 4*(-11.8)] = -10.7$$

Ergebnis: $x_1 = -11.8 \qquad x_2 = 11.9 \qquad x_3 = -10.7$

Probe:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 4 = 4*(-11.8) + 7*11.9 + 3*(-10.7) & \Rightarrow \text{OK} \\ -3x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 20 = -3*(-11.8) + 5*11.9 + 7*(-10.7) & \Rightarrow \text{OK} \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 = -2*(-11.8) - 1*11.9 + 1*(-10.7) & \Rightarrow \text{OK} \end{aligned}$$

1.2.3. Schematisierung von Gleichungssystemen

1.2.3.1. Einleitung: Warum Schematisierung

- Der Aufwand für ein Gleichungssystem 2. Ordnung war noch relativ gering, der Aufwand für ein Gleichungssystem 3. Ordnung war schon sehr viel größer. Ein Gleichungssystem 4. Ordnung ist wegen des größeren Aufwandes nicht gelöst worden. Größerer **Aufwand** bedeutet auch, daß die **Fehlerwahrscheinlichkeit** steigt. Bei einem vorgegebenen Schema (u.U. mit Problemöglichkeit) wäre die Fehlerwahrscheinlichkeit geringer.
- Heutzutage werden **größere Gleichungssysteme mit Zahlen** als Koeffizienten mit **Rechnern** gelöst. Um ein Gleichungssystem in den Rechner einzugeben muß das Gleichungssystem mit Hilfe eines Schemas eingegeben werden.
- Enthält ein Gleichungssystem noch Koeffizienten die nicht zahlenwertmäßig gegeben sind, sondern als Konstante, ergibt sich ein Gleichungssystem in allgemeiner Form. Dieses kann nicht numerisch mit Hilfe eines Rechners gelöst werden. In den Abschnitten 1.2.6 und 1.2.7 werden Lösungsverfahren angegeben, mit deren auch allgemeine Gleichungssysteme lösbar sind.

In Kap. 1.2.1.1 wurde schon das lineare **Gleichungssystem** 4. Ordnung in allgemeiner Form angegeben:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = k_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = k_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = k_3$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = k_4$$

In kleinen Schritten soll versucht werden, das obere Gleichungssystem mathematisch einfacher zu beschreiben.

1.2.3.2. Der Begriff des Vektors

Was ist ein Vektor ?

Physikalisch ist ein Vektor eine gerichtete physikalische Größe mit Komponenten. Üblich ist die Komponenten in Richtung der Koordinatenrichtung x, y, und z anzugeben. Z.B. wird die Kraft F, die eine gerichtete Größe ist, beschrieben durch die Komponenten F_x , F_y und F_z . Gerichtete Größen (Vektoren) werden üblicherweise durch einen Pfeil über der physikalischen Größe angedeutet.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

Die Komponenten für das Beispiel der Kraft werden mit einer Klammer zusammengefaßt. Statt des Pfeils werden in alten Lehrbüchern auch deutsche Buchstaben verwendet (sehr schwer zu lesen). Vereinzelt werden auch in Lehrbüchern Vektoren nur durch Fettdruck gekennzeichnet.

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Bei mathematischen Anwendungen ist ein Vektor als gerichtete Größe meist ein Ortsvektor mit den Komponenten x, y, z. Der Vektor ist auch eine gerichtete Größe. Der obere Vektor zeigt von Koordinatenursprung (x=0, y=0, z=0) zum Punkt x, y und z. Dieser mathematische Vektor wird, wie der physikalische Vektor durch einen Pfeil über der Größe (hier z.B. $\vec{P}$) gekennzeichnet. Zu gerichteten Ortsvektoren später mehr in Kap. 1.3 und in Kap. 4.2.

Es gibt aber noch eine zweite Art von Vektoren: die Zusammenfassung mehrerer skalarer Komponenten zu einem Vektor. Dabei haben diese Komponenten nicht unbedingt in der Zusammenfassung den Charakter einer gerichteten Größe. Da gibt es zwei Möglichkeiten mehrere Komponenten zu einem Vektor zusammenzufassen, als die nächstes untersucht werden sollen.

Der Spaltenvektor

In einer Spalte können zum Beispiel die Variablen eines linearen Gleichungssystems zu einem Vektor zusammengefaßt werden. Ein Gleichungssystem 3. Ordnung besitzt die Variablen x_1 , x_2 und x_3 , die zum Spaltenvektor $\bar{x}$ zusammengefaßt werden:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Der Zeilenvektor

Im Gegensatz zum Spaltenvektor werden die zusammengefaßten Elemente in einer Zeile angeordnet. Die Koeffizienten a_1 , a_2 und a_3 zum Zeilenvektor $\bar{a}$ zusammengefaßt ergibt:

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

Kennzeichnung des Formelbuchstabens

In dieser Vorlesung wird die nicht gerichtete Zusammenfassung von Komponenten mit einem Strich über den Formelbuchstaben gekennzeichnet.

Beispiel: $\bar{a}, \bar{x}, \bar{b}$

Bei einem Vektor, der eine gerichtete Größe darstellt, wird über der Größe ein Pfeil angeordnet.

Beispiel: $\vec{p}, \vec{F}$

In gedruckten Texten findet man Vektoren auch fett dargestellt. Mathematiker kennzeichnen Vektoren als Zusammenfassung von Komponenten mit einem Strich unter dem Formelbuchstaben. Dieses aber führt in der Elektrotechnik zu Verwechslungen, da auch komplexe Zahlen (im Gegensatz zu den Mathematikern) von Ingenieuren mit einem Strich darunter gekennzeichnet werden.

Kennzeichnung der Komponenten

Die Komponenten eines Vektors werden mit Klammern zusammengefaßt.

Vier Beispiele für Spaltenvektoren:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\bar{k} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vier Beispiele für Zeilenvektoren:

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\bar{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$$

$$\bar{k} = (1, 4, -4, 6)$$

$$\bar{k} = (8, 9, -3, -4, -5)$$

In der Praxis (Tafel und handschriftlich) eignen sich die Klammern für Vektoren nicht so besonders. Darum kann die praktische Schreibweise der oberen Vektoren auch mit Kästchen erfolgen.

Vier Beispiele für Spaltenvektoren in Kästchenschreibweise:

y_1
y_2
y_3
y_4

x_1
x_2
x_3

0
8
9
0
5

1
4
-6
5

Vier Beispiele für Zeilenvektoren in Kästchenschreibweise:

a_1	a_2	a_3
-------	-------	-------

b_1	b_2	b_3	b_4
-------	-------	-------	-------

1	4	-4	6
---	---	----	---

8	9	-3	-4	-5
---	---	----	----	----

Im Vorlesungsskript wird meistens die Klammerschreibweise bevorzugt, während an der Tafel die Kästchenschreibweise praktischer ist.

Beispiel für eine Vektorzuweisung:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ein Gleichsetzen von Vektoren bedeutet, daß alle Komponenten des Vektors gleich sind:

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -8$$

$$x_3 = 5$$

1.2.3.3. Vektormultiplikation: Zeilenvektor mal Spaltenvektor

Welchen Sinn macht die Zusammenfassung von Komponenten? Antwort: Auf dem Weg zur allgemeinen formelmäßigen Darstellung von Gleichungssystemen soll eine Gleichung des Gleichungssystems mit Hilfe einer Vektormultiplikation definiert werden. Dazu soll die erste der drei Gleichungen (eine von dreien) des allgemeinen linearen Gleichungssystem 3. Ordnung betrachtet werden:

$$a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + a_{13} * x_3 = k_1$$

Die Koeffizienten a_{11} , a_{12} und a_{13} lassen sich zum Zeilenvektor $\bar{a}_1$ zusammenfassen:

$$\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$$

Die Variablen x_1 , x_2 und x_3 werden zum Spaltenvektor $\bar{x}$ zusammenfaßt:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Definition:

Die Multiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor erfolgt, indem die Komponenten miteinander multipliziert werden und anschließend addiert. Das Ergebnis ist ein Skalar.

Für die erste Zeile des allgemeinen Gleichungssystems 3. Ordnung von oben ergibt sich:

$$\bar{a}_1 * \bar{x} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + a_{13} * x_3$$

Eselsbrücke: Der rechte Vektor wird auf den linken Vektor geklappt, die sich treffenden Komponenten werden miteinander multipliziert und danach addiert.

Da diese Vektormultiplikation die Basis der linearen Gleichungssysteme ist, muß diese ohne größere Überlegung ausgeführt werden können. Deshalb wird hier in der Vorlesung ausführlich geübt.

Beispiel 1:

$$(1, 2, 3) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 * 4 + 2 * 5 + 3 * 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

Beispiel 2:

$$(a, b, c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a * x + b * y + c * z$$

Beispiel 3: (Studenten)

$$(2, 5) \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = 2*7 + 5*8 = 14 + 40 = 54$$

Beispiel 4: (Studenten)

$$(-2, 4, 5, -6) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = -2*3 + 4*(-2) + 5*(-1) - 6*(-5) = -6 - 8 - 5 + 30 = 11$$

Beispiel 5: (Studenten)

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a_{11}*x_1 + a_{12}*x_2 + a_{13}*x_3 + a_{14}*x_4$$

1.2.3.4. Der Begriff der Matrix

Der Vektor war die Zusammenfassung von Komponenten in einer Dimension entweder zur Zeile oder zur Spalte. In einer zweidimensionalen Zusammenfassung, der Matrix, werden mehrere Zeilen und Spalten zusammengefaßt.

Beispiele für Matrizen

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 7 & 9 & 2 \\ 8 & 1 & -8 \end{pmatrix} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 5 & 7 \\ \hline 7 & 9 & 2 \\ \hline 8 & 1 & -8 \\ \hline \end{array}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & -5 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 & 4 \\ 3 & -4 & -7 & 8 \\ 2 & 3 & -10 & 15 \end{pmatrix} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 9 & 4 \\ \hline 3 & -4 & -7 & 8 \\ \hline 2 & 3 & -10 & 15 \\ \hline \end{array}$$

Schreibweise

Die Kennzeichnung der Matrizen und die der Vektoren ist fast gleich. Die Matrizen werden, wie die Vektoren, mit Strichen über den Formelbuchstaben gekennzeichnet. Im allgemeinen (Ausnahmen möglich) werden Vektoren mit kleinen Buchstaben und Matrizen mit großen Buchstaben gekennzeichnet.

Die Komponentenzusammenfassung erfolgt ebenfalls wieder mit Klammerschreibweise oder Kästchenschreibweise. Insbesondere bei elektrotechnischen Anwendungen (lineare Netzwerke) empfiehlt sich die Kästchenschreibweise.

Komponentenschreibweise:

Die Komponenten der Matrix $\bar{A}$ werden im allgemeinen mit a_{ij} gekennzeichnet:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 8 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} a_{11} &= 9 & a_{12} &= 1 & a_{13} &= 3 \\ a_{21} &= 2 & a_{22} &= 7 & a_{23} &= 4 \\ a_{31} &= 8 & a_{32} &= 6 & a_{33} &= 5 \end{aligned}$$

Der erste Index gibt die Zeile an, der zweite Index die Spalte

$$\mathbf{a}_{\text{zeile,spalte}}$$

Zwei Matrizen sind einander gleich, wenn alle Elemente a_{ij} der Matrizen gleich sind.

Matrix als Zusammenfassung von Vektoren

Die drei Zeilenvektoren

$$\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$$

$$\bar{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$$

$$\bar{a}_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$$

können zu einer Matrix zusammengefaßt werden:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \\ (a_{21}, a_{22}, a_{23}) \\ (a_{31}, a_{32}, a_{33}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1.2.3.5. Matrix multipliziert mit Spaltenvektor

Ziel: Ein lineares Gleichungssystem soll sich mit Hilfe der Multiplikation von Matrix und Vektor beschreiben lassen. Dazu werden die Zeilen eines linearen Gleichungssystems 3. Ordnung durch die Multiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor beschrieben:

$$a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + a_{13} * x_3 = k_1 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a}_1 * \bar{x} = k_1$$

$$a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + a_{23} * x_3 = k_2 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a}_2 * \bar{x} = k_2$$

$$a_{31} * x_1 + a_{32} * x_2 + a_{33} * x_3 = k_3 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a}_3 * \bar{x} = k_3$$

Die oberen rechten drei Gleichungen zu einer Vektorgleichung zusammengefaßt:

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_1 * \bar{x} \\ \bar{a}_2 * \bar{x} \\ \bar{a}_3 * \bar{x} \end{pmatrix} = \bar{k}$$

Den Vektor $\bar{x}$ ausgeklammert ergibt:

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{pmatrix} * \bar{x} = \bar{k}$$

wobei der Spaltenvektor vom Zeilenvektor oben schon als Matrix $\bar{A}$ zusammengefaßt wurde:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}, & a_{12}, & a_{13}) \\ (a_{21}, & a_{22}, & a_{23}) \\ (a_{31}, & a_{32}, & a_{33}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \end{pmatrix} * \bar{x} = \bar{A} * \bar{x} = \bar{k} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

Der Vergleich zu oben liefert das Ergebnis der Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + a_{13} * x_3 \\ a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + a_{23} * x_3 \\ a_{31} * x_1 + a_{32} * x_2 + a_{33} * x_3 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor ergibt einen Spaltenvektor. **Schema:** Die Komponenten der Multiplikation erhält man durch Multiplikation eines Zeilenvektors der Matrix mit dem zu multiplizierenden Spaltenvektor. Dieser sich ergebende Skalar steht im neuen Vektor in der Zeile, wo sich auch der Zeilenvektor der Matrix befindet.

Eselsbrücke: Bei der Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor werden die Elemente des Zeilenvektors jeweils auf eine Zeile geklappt. Die sich treffenden Element werden multipliziert und anschließend addiert. Das Ergebnis erscheint an der entsprechenden Zeile des Spaltenvektors.

Beispiel 1:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3*6 + 2*7 \\ 4*6 + 5*7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 + 14 \\ 24 + 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 59 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 8 & 6 \\ 5 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3*5 + 2*2 + 1*(-3) \\ -2*5 + 8*2 + 6*(-3) \\ 5*5 + 4*2 + (-6)*(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 + 4 - 3 \\ -10 + 16 - 18 \\ 25 + 8 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 51 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a*x + b*y + c*z \\ d*x + e*y + f*z \\ g*x + h*y + i*z \end{pmatrix}$$

1.2.3.6. Schreibweise von Gleichungssystemen

Hier erfolgt die Zusammenfassung, dessen was in Abschnitt 1.2.3 erarbeitet wurde. Betrachtet wird das allgemeine Gleichungssystem 3. Ordnung:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = k_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = k_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = k_3$$

Das obere Gleichungssystem lässt sich als Vektorgleichung mit Matrix schreiben:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

oder in Kurzform

$$\bar{A} * \bar{x} = \bar{k}$$

mit dem Vektor- bzw. Matrixabkürzungen

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \bar{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

1.2.4. Determinanten

1.2.4.1. Notwendigkeit von Determinanten

Dazu soll das lineare Gleichungssystem 2. Ordnung in allgemeiner Form gelöst werden:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = k_1 \quad /* \ a_{22}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = k_2 \quad /* \ a_{12}$$

$$a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = k_1 * a_{22} \quad /+$$

$$a_{21}a_{12}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = k_2 * a_{12} \quad /-$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = k_1 * a_{22} - k_2 * a_{12}$$

$$x_1 = \frac{k_1 * a_{22} - k_2 * a_{12}}{a_{11} * a_{22} - a_{21} * a_{12}}$$

$$x_2 = \frac{k_2 * a_{11} - k_1 * a_{21}}{a_{11} * a_{22} - a_{21} * a_{12}}$$

Die Variable x_2 kann durch Vertauschen der Indizes "1" und "2" ermittelt werden. Im Nenner von x_1 und x_2 ist jeweils der gleiche Ausdruck vorhanden. Der Nenner ist die Determinante der Matrix A 2. Ordnung:

$$\det(\bar{A}) = a_{11} * a_{22} - a_{21} * a_{12}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Somit läßt sich die Lösung schreiben:

$$x_1 = \frac{1}{\det(\bar{A})} * (a_{22} * k_1 - a_{12} * k_2)$$

$$x_2 = \frac{1}{\det(\bar{A})} * (-a_{21} * k_1 + a_{11} * k_2)$$

oder in Form des Produktes Matrix mal Vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\bar{A})} * \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Folgerung: Die Lösung eines linearen Gleichungssystems ergibt sich aus der Multiplikation einer noch zu bestimmenden Matrix mit den Anregungsvektor $\bar{k}$, dividiert durch die Determinante der Matrix $\bar{A}$. Die Bestimmung der Determinanten soll in diesem Kapitel 1.2.4 erfolgen, die Bestimmung der Matrix in Kap. 1.2.6.

Auch für Gleichungssysteme höherer Ordnung gibt es Determinanten, siehe Rechenregeln der folgenden Abschnitte.

Was sagen die Determinanten aus? Am oberen Gleichungssystem sieht man, daß wenn die Determinante Null wird, das Gleichungssystem nicht lösbar ist, weil durch Null dividiert wird.

1.2.4.2. Schreibweise von Determinanten

Die Determinante ist ein Skalar. Die folgende Formel sagt aus: Dem Skalar s wird der Wert der Determinanten zugewiesen

$$s = \det(\bar{A})$$

Die Kennzeichnung, daß die Determinante gebildet werden soll, wird durch senkrechte Striche angedeutet. Zwischen den Strichen werden die Matrix-Elemente platziert. Beispiel für eine Determinante 2. Ordnung.

$$s = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Beispiel:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$s = \det(\bar{A}) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 - 6 \cdot 7 = -6$$

1.2.4.3. Determinante einer 2*2 Matrix

Die Determinante einer 2*2 Matrix ist schon bekannt:

$$\det(\bar{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Die Elemente der Hauptdiagonalen werden miteinander multipliziert und das Produkt der Nebendiagonalen davon subtrahiert.

Beispiele: (Studenten)

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 - 3 \cdot 6 = 40 - 18 = 22$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - 5 \cdot (-3) = -8 + 15 = 7$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-8) - (-2) \cdot (-4) = -48 - 8 = -56$$

1.2.4.4. Regel von Sarrus (nur für dreireihige Determinante)

Die Determinante der allgemeinen Matrix mit drei Zeilen und drei Spalten soll bestimmt werden:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Dazu wird die Matrix mit Wiederholung der ersten zwei Spalten in folgender Form angeordnet:

Die Determinante ergibt sich durch Multiplikation der Diagonalelemente. Die drei Hauptdiagonalen werden dabei positiv summiert, während die drei Nebendiagonalen negativ aufsummiert werden.

$$\det(\bar{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Beispiel: (Studenten)

gegeben: $\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 \\ -3 & 5 & 7 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

gesucht: $\det(\bar{A})$

Lösung:

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 7 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 7 & -3 & 5 \\ -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{array}$$

$$\det(\bar{A}) = 4 \cdot 5 \cdot 1 - 7 \cdot 7 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 - (-3 \cdot 5 \cdot 2 - 4 \cdot 7 \cdot 1 - 3 \cdot 7 \cdot 1)$$

$$\det(\bar{A}) = 20 - 98 + 9 + 30 + 28 + 21 = 10$$

1.2.4.5. Unterdeterminanten

Die Determinanten von Matrizen der Ordnung 2 und 3 waren noch relativ einfach zu bestimmen. Dort gab es bestimmte Schema zum Bestimmen der Determinanten. Ab 4. Ordnung gibt es kein spezielles Schema mehr, außer der Entwicklung nach Unterdeterminanten.

Was ist nun eine Unterdeterminante? Zu einem jeden Matricelement einer $n \times n$ Matrix gibt es eine Unterdeterminante. Der Wert dieser Unterdeterminanten ergibt sich aus einer Determinanten einer $(n-1) \times (n-1)$ Matrix. Die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix erhält man, indem in der $n \times n$ Originalmatrix eine Zeile und eine Spalte weggelassen wird. Zum Bilden der Unterdeterminanten u_{ij} wird in der Matrix die Zeile i und die Spalte j gestrichen, vom Rest wird die Determinante gebildet.

Beispiel: Um die Unterdeterminante u_{23} zu bestimmen, wird in der Originalmatrix die zweite Zeile und die dritte Spalte gestrichen, die Determinante der Restmatrix ist die Unterdeterminante u_{23} .

Beispiel 1:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$u_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} * a_{33} - a_{23} * a_{32}$$

$$u_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} * a_{33} - a_{23} * a_{31}$$

$$u_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21} * a_{32} - a_{22} * a_{31}$$

$$u_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} * a_{33} - a_{13} * a_{32}$$

$$u_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{33} - a_{13} * a_{31}$$

$$u_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{32} - a_{12} * a_{31}$$

$$u_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12} * a_{23} - a_{13} * a_{22}$$

$$u_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{23} - a_{13} * a_{21}$$

$$u_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}$$

Beispiel 2: (Studenten)

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$u_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = -2*8 - 5*(-3) = -16 + 15 = -1$$

$$u_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 3*8 - 5*5 = 24 - 25 = -1$$

$$u_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 3*(-3) - (-2)*5 = -9 + 10 = 1$$

$$u_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 4*8 - 4*(-3) = 32 + 12 = 44$$

$$u_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = (-2)*8 - 4*5 = -16 - 20 = -36$$

$$u_{23} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -2*(-3) - 4*5 = 6 - 20 = -14$$

$$u_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4*5 - 4*(-2) = 20 + 8 = 28$$

$$u_{32} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-2)*5 - 4*3 = -10 - 12 = -22$$

$$u_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-2)*(-2) - 4*3 = 4 - 12 = -8$$

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 44 & -36 & -14 \\ 28 & -22 & -8 \end{pmatrix} \quad \bar{A}_{adj} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -44 & -36 & 14 \\ 28 & 22 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{zu } \bar{A}_{adj} \text{ Erklärung später}$$

1.2.4.6. Adjunkte Elemente

Das adjunkte Element einer Matrix ist fast das gleiche als die Unterdeterminante. Unterschied: Die Unterdeterminante wird mit "1" oder "-1" multipliziert und wird zum adjunkten Element deklariert.

Formel:

$$a_{ij}^{adj} = (-1)^{(i+j)} * u_{ij}$$

Besser zu merken als die obere Formel ist das **Schachbrettmuster**, welches die obere Formel erzeugt:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Für eine 5*5 Matrix wird jede Unterdeterminante nach oberem Schachbrettmuster multipliziert und ergibt damit das adjunkte Element.

1.2.4.7. Adjunkte Matrix

Die Zusammenfassung aller adjunkten Elemente der Matrix $\bar{A}$ ergibt die Adjungierte der Matrix $\bar{A}$ oder die adjungierte Matrix $\bar{A}^{adj}$:

$$\bar{A}^{adj} = \begin{pmatrix} a_{11}^{adj} & a_{12}^{adj} & a_{13}^{adj} \\ a_{21}^{adj} & a_{22}^{adj} & a_{23}^{adj} \\ a_{31}^{adj} & a_{32}^{adj} & a_{33}^{adj} \end{pmatrix}$$

oder mit Hilfe der Unterdeterminanten ausgedrückt ergibt die adjungierte Matrix:

$$\bar{A}^{adj} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_{12} & u_{13} \\ -u_{21} & u_{22} & -u_{23} \\ u_{31} & -u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}$$

Beispiel: **gegeben:** Matrix der Unterdeterminanten der Matrix $\bar{A}$

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} u_1 & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -9 \\ 4 & -6 & 8 \\ 8 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

gesucht: adjungierte Matrix $\bar{A}^{adj}$

Lösung:
$$\bar{A}^{adj} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -9 \\ -4 & -6 & -8 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.4.8. Entwicklung von Determinanten mit Hilfe der Unterdeterminanten

Satz: Die Determinante einer Matrix lässt sich berechnen, indem man nach einer beliebigen Zeile oder Spalte entwickelt. Die Elemente einer Zeile oder Spalte der gegebenen Matrix werden mit denen der adjungierten Matrix multipliziert, die Addition ergibt die Determinante der Matrix.

Formel für die Berechnung der Determinante einer Matrix $n \times n$:

$$\begin{aligned} \det(\bar{A}) &= \sum_{i=1}^n a_{mi} * a_{mi}^{adj} && \text{nach Zeile m} && \det(\bar{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{m+i} * a_{mi} * u_{mi} \\ \det(\bar{A}) &= \sum_{i=1}^n a_{im} * a_{im}^{adj} && \text{nach Spalte m} && \det(\bar{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+m} * a_{im} * u_{im} \end{aligned}$$

Beispiel 1: Matrix 3×3 , Entwicklung nach Zeile 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} * a_{21}^{adj} + a_{22} * a_{22}^{adj} + a_{23} * a_{23}^{adj} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det(\bar{A}) = -a_{21} * a_{12} * a_{33} + a_{21} * a_{13} * a_{32} + a_{22} * a_{11} * a_{33} - a_{22} * a_{13} * a_{31} - a_{23} * a_{11} * a_{32} + a_{23} * a_{12} * a_{31}$$

Beispiel 2: Matrix 4×4 , Entwicklung nach Spalte 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{43} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Beispiel 3: Matrix 3×3 , Entwicklung nach Zeile 3: (Studenten)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5(1*4 - 3*3) + 6(1*2 - 2*3) = -5(4 - 9) + 6(2 - 6) = -5(-5) + 6(-4) = 25 - 24 = 1$$

Hier ist es vorteilhaft nach der ersten Spalte oder der untersten Zeile zu entwickeln, weil wegen der "0" der Aufwand geringer wird.

Achtung: Immer nach der Zeile oder Spalte entwickeln mit den meisten Nullen!

Beispiel Matrix 4×4 : (Studenten)

$$\begin{vmatrix} 12 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 * 4 \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 * 4 (12 * 2 - 3 * 5) = 2 * 4 * 9 = 72$$

1.2.4.9. Rechenregeln für Determinanten

Mit Hilfe der folgenden Rechenregeln ist es auch möglich, den Wert einer Determinanten zu bestimmen. Die Anwendung erfolgt nächsten Abschnitt.

- A] Der Wert der Determinanten ändert sich nicht, wenn an der Hauptdiagonalen gespiegelt wird.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- B] Man multipliziert eine Determinante, wenn man die Elemente einer Zeile (Spalte) mit einem Faktor multipliziert.

$$k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k*a_{11} & k*a_{12} & k*a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k*a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k*a_{22} & a_{23} & a_{23} \\ k*a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- C] Der Wert einer Determinante bleibt unverändert, wenn man zu den Elementen einer Zeile (Spalte) ein Vielfaches einer anderen Zeile (Spalte) addiert.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+k*a_{11} & a_{22}+k*a_{12} & a_{23}+k*a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+k*a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+k*a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+k*a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- D] Der Wert einer Determinanten ist gleich Null, wenn die Elemente einer Zeile (Spalte) ein Vielfaches der Elemente einer anderen Zeile (Spalte) sind.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & k*a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & k*a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & k*a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k*a_{11} & k*a_{12} & k*a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- E] Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man die Elemente von zwei Zeilen (Spalten) miteinander vertauscht.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- F] Werden alle Elemente der Matrix mit dem Faktor k multipliziert, muß die Determinante mit kⁿ multipliziert werden.

$$\begin{vmatrix} k*a_{11} & k*a_{12} & k*a_{13} \\ k*a_{21} & k*a_{22} & k*a_{23} \\ k*a_{31} & k*a_{32} & k*a_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

1.2.4.10. Berechnung von Determinanten mit Rechenregeln

Prinzip: Durch Anwendung der Rechenregeln, insbesondere bei höherer Ordnung, möglichst viele Zeilen oder Spalten zu Null werden lassen und anschließend nach dieser Zeile oder Spalte die Determinante entwickeln.

Beispiel 1: $\det(\bar{A}) = \begin{vmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 * \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Die 1. Aktion war den Faktor 3 aus der oberen Zeile auszuklammern. Die 2. Aktion ist, die erste Zeile substituieren durch die Differenz der beiden ersten Zeilen, wobei Zeile 2 und 3 erhalten bleiben:

$$3 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 * \begin{vmatrix} 3-4 & 4-2 & 5-5 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 * \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Addiert man nun das Zweifache der ersten Spalte zur zweiten Spalte, erhält man:

$$3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 * \begin{vmatrix} -1 & 2-2 & 0 \\ 4 & 2+8 & 5 \\ 6 & 2+12 & 3 \end{vmatrix} = 3 * \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 5 \\ 6 & 14 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det(\bar{A}) = -3 * (10 * 3 - 5 * 14) = -3(30 - 70) = 120$$

Beispiel 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 7 & 3 & 5 & 8 \\ -2 & 5 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Die obere Determinante ist Null, weil die zweite Zeile ein Vielfaches der ersten Zeile beträgt.

Beispiel 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 5 & 2 \\ -4 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3-3 & 6-6 & 1-9 & 3-12 \\ 2-2 & 8-4 & 5-6 & 2-8 \\ -4+4 & 6+8 & 2+12 & 1+16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & -9 \\ 0 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 14 & 14 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 0 & -8 & -9 \\ 4 & -1 & -6 \\ 14 & 14 & 17 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -8 & -9 \\ 14 & 17 \end{vmatrix} + 14 \begin{vmatrix} -8 & -9 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = -4[-8*17 + 9*14] + 14(6*8 - 9*1) = 586$$

1.2.4.11. Welches Verfahren für welche Determinante?

Determinanten niedriger Ordnung lassen sich, auch im Rechner, noch mit Hilfe von Unterdeterminanten berechnen. Der Aufwand der Berechnung mit Hilfe von Unterdeterminanten steigt mit $n!$ an.

$$n! = 1*2*3*4*...*(n-1)*n$$

$$4! = 1*2*3*4 = 24$$

$$8! = 40320$$

$$12! = 0.479*10^9$$

$$16! = 209*10^{13}$$

Darum werden Determinanten höherer Ordnung, wie oben ausgeführt, mit Rechenregeln berechnet, wo der Aufwand nur mit n^2 steigt.

1.2.5. Rechenregeln für Matrizen

1.2.5.1. Dimension

Eine Matrix besteht aus einer zweidimensionalen Anordnung von Elementen (Zahlen oder allgemeine Formelbuchstaben). Die Matrix besteht aus m Zeilen und n Spalten.

Matrix allgemein

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Dimension von A wird folgendermaßen angegeben:

$$Dim(\bar{A}) = (m,n)$$

Es wird immer erst die Zeilenzahl und dann die Spaltenzahl angegeben. Zur Erinnerung: Das Element

$$a_{ij} = a_{\text{Zeile, Spalte}}$$

steht an der i-ten Zeile und an der j-ten Spalte der Matrix. Die Zeile wird immer erst erwähnt.

Für **n=m** ergibt sich die **quadratische Matrix**. Diese ist besonders wichtig für die linearen Gleichungssysteme.

Vektoren sind Matrizen mit einer Dimension gleich 1:

Beispiel 1:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Dim(\bar{x}) = (3,1)$$

Beispiel 2:

$$\bar{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4) \quad \Rightarrow \quad Dim(\bar{z}) = (1,4)$$

Beispiel 3:

$$\bar{s} = (a) = \boxed{a} \quad \Rightarrow \quad Dim(\bar{s}) = (1,1)$$

Skalare sind Matrizen mit zwei Dimensionen gleich 1:

1.2.5.2. Addition von Matrizen

Matrizen werden miteinander addiert indem die Einzelelemente miteinander addiert werden.

$$\bar{C} = \bar{A} + \bar{B}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{für } i = 1 \dots m \quad j = 1 \dots n$$

Dimension: $Dim(\bar{A}) = (m_A, n_A)$
 $Dim(\bar{B}) = (m_B, n_B)$

Bedingung: $Dim(\bar{A}) = Dim(\bar{B})$
 $m_A = m_B$
 $n_A = n_B$

Ergebnis: $Dim(\bar{C}) = Dim(\bar{A}) = Dim(\bar{B})$
 $m_C = m_A = m_B$
 $n_C = n_A = n_B$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

1.2.5.3. Transponierte Matrix

Transponieren heißt, Zeilen und Spalten vertauschen. Bei einer quadratischen Matrix wird an der Hauptdiagonalen gespiegelt.

Schreibweise: $\bar{A}^T$ oder $\bar{A}_T$ oder $\bar{A}_t$ oder $\bar{A}^t$

Dimension: $Dim(\bar{A}) = (m, n)$
 $Dim(\bar{A}_T) = (n, m)$

Rechenvorschrift: $a_{ij}^T = a_{ji} \quad i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$

Beispiel 1: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Beispiel 2: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

1.2.5.4. Adjungierte Matrix

Diese wurde schon in Kap. 1.2.4.7 behandelt, hier wird nur die Zusammenfassung angegeben.

Schreibweise: $\bar{A}^{adj}$ oder $\bar{A}_{adj}$

Dimension: $Dim(\bar{A}) = Dim(\bar{A}_{adj})$

Bedingung: Matrix quadratisch: $Dim(\bar{A}) = (n, n)$

$$\bar{A}_{adj} \begin{pmatrix} a_{11}^{adj} & a_{12}^{adj} & a_{13}^{adj} \\ a_{21}^{adj} & a_{22}^{adj} & a_{23}^{adj} \\ a_{31}^{adj} & a_{32}^{adj} & a_{33}^{adj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & -u_{12} & u_{13} \\ -u_{21} & u_{22} & -u_{23} \\ u_{31} & -u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}$$

Die adjunkte Matrix ergab sich aus dem adjunkten Elementen, diese wiederum aus dem Unterdeterminanten unter Berücksichtigung des Vorzeichens mit Schachbrettmuster:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{vmatrix}$$

u_{ij} - Unterdeterminanten durch Streichen der Zeile i und der Spalte j (siehe Kap. 1.2.4.5)

a_{ij}^{adj} - adjungiertes Element

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot u_{ij} \quad (\text{siehe auch Schachbrettmuster})$$

1.2.5.5. Wiederholung: Multiplikation einer Matrix mit Spaltenvektor

siehe auch Kap. 1.2.3.5

Die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}k_1 &= a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\k_2 &= a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \\k_3 &= a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2\end{aligned}$$

konnten mit Hilfe von zwei Vektoren und einer Matrix zu einer Gleichung zusammengefaßt werden:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{k} = \vec{A} \cdot \vec{x}$$

Die obere Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor war als Eselsbrücke folgendermaßen zu merken:
Der Spaltenvektor $\vec{x}$ wird auf die Matrix $\vec{A}$ geklappt. Die sich treffenden Elemente werden miteinander multipliziert und danach addiert. Dieses erfolgt für jede Zeile.

Für k_2 des oberen Beispiels läßt sich die Multiplikation in einer Skizze andeuten:

x_1
x_2
x_3

0	0	0
a_{21}	a_{22}	a_{23}
0	0	0

k_2

$$k_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3$$

Der Vektor $\vec{x}$ wird nach oben geschoben und dann auf die Matrix geklappt. An dem Kreuzungspunkt Matrixzeile und Spaltenvektor erscheint die Summe der Produkte (Skalarprodukt). Skalarprodukt zweier Vektoren: Die Komponenten der Vektoren werden miteinander multipliziert und danach addiert.

Mathematische Schreibweise:

$$\vec{A} \cdot \vec{x} = \vec{k}$$

$$\dim(\vec{A}) = (m_A, n_A)$$

$$\dim(\vec{x}) = (m_x, 1)$$

Bedingung für die Multiplikation Matrix mal Spaltenvektor:

$$n_A = m_x$$

Dimension des zu berechnenden Vektors $\vec{k}$:

$$\dim(\vec{k}) = (m_A, 1)$$

Formel zur Berechnung von der k_i :

$$k_i = \sum_{j=1}^{n_A} a_{ij} \cdot x_j \quad i = 1 \dots m_A$$

Tip zur praktischen Berechnung des Matrix-Produktes $\bar{A} * \bar{B}$: Die Matrizen $\bar{A}$ und $\bar{B}$ werden wie in der oberen Skizze angeordnet. Am jeweiligen Kreuzungspunkt wird das Produkt des Zeilenvektors aus $\bar{A}$ und des Spaltenvektors aus $\bar{B}$ gebildet. Auch hier werden die Spaltenvektoren der Matrix $\bar{B}$ auf die Matrix $\bar{A}$ geklappt.

Schema: Multiplikation zweier Matrizen

gegeben:

zwei Matrizen: $\bar{A}, \bar{B}$

Dimension: $\dim(\bar{A}) = (m_A, n_A)$
 $\dim(\bar{B}) = (m_B, n_B)$

gesucht: $\bar{C} = \bar{A} * \bar{B}$

Bedingung: $n_A = m_B$

Ergebnis:

Dimension: $\dim(\bar{C}) = (m_A, n_B)$

Formel für die Elemente: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n_A=m_B} a_{ik} * b_{kj} \quad i = 1 \dots m_A, j = 1 \dots n_B$

Achtung: $\bar{A} * \bar{B} \neq \bar{B} * \bar{A}$

Beispiel 1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} & a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} \\ a_{21} * b_{11} + a_{22} * b_{21} & a_{21} * b_{12} + a_{22} * b_{22} \end{pmatrix}$$

Beispiel 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*3+3*7 & 2*4+3*9 \\ 1*3+5*7 & 1*4+5*9 \\ 7*3+6*7 & 7*4+6*9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 35 \\ 38 & 49 \\ 63 & 82 \end{pmatrix}$$

1.2.5.7. Einheitsmatrix**Definition**

Die Einheitsmatrix ist definiert als mit nur "1" in der Hauptdiagonalen. Die anderen Elemente sind Null.

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{2. Ordnung}$$

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{3. Ordnung}$$

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{4. Ordnung}$$

Welche Nutzen hat die Einheitsmatrix? Dazu zwei Beispiele:

Beispiel: Einheitsmatrix multipliziert mit einem Spaltenvektor:

$$\bar{E} * \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{E} * \bar{x} = \bar{x}$$

Beispiel: Einheitsmatrix multipliziert mit Matrix $\bar{A}$:

$$\bar{E} * \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{E} * \bar{A} = \bar{A}$$

Aus den Beispielen folgt: Multipliziert man einen Vektor oder eine Matrix mit der Einheitsmatrix, so ergibt sich wieder der gleiche Vektor oder die gleiche Matrix. **Die Multiplikation mit der Einheitsmatrix hat keine Auswirkung.** Vergleich: Ein Skalar mit "1" multipliziert hat auch keine Auswirkung. **Achtung:** Auf die Dimension der Einheitsmatrix ist zu achten.

1.2.5.8. Inverse Matrix**Schreibweise der inversen Matrix von $\bar{A}$:**

$$\bar{A}^{-1}$$

Definition der inversen Matrix von $\bar{A}$:

$$\bar{A}^{-1} * \bar{A} = \bar{E}$$

Die inverse Matrix multipliziert mit der Originalmatrix ergibt die Einheitsmatrix.

Sinn der inversen Matrix:

Wird das lineare Gleichungssystem

$$\bar{A} * \bar{x} = \bar{k}$$

von links mit $\bar{A}^{-1}$ multipliziert

$$\bar{A}^{-1} \bar{A} * \bar{x} = \bar{A}^{-1} \bar{k}$$

ergibt sich mit

$$\bar{A}^{-1} * \bar{A} = \bar{E} \quad \text{und} \quad \bar{E} * \bar{x} = \bar{x} \quad \text{und} \quad \bar{A} * \bar{A}^{-1} \bar{x} = \bar{x}$$

die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\bar{x} = \bar{A}^{-1} * \bar{k}$$

als die Multiplikation der inversen Matrix $\bar{A}^{-1}$ mit dem Anregungsvektor $\bar{k}$. Diese Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor ist nicht das Aufwendigste der oberen Gleichung. Die inverse Matrix zu bestimmen, ist der größere Aufwand.

Inverse Matrix in allgemeiner Form

Die Formel zur Berechnung der inversen Matrix soll hier nur angegeben und nicht abgeleitet werden:

$$\bar{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\bar{A})} * \bar{A}_{adj}^T$$

Zur Berechnung der inversen Matrix wird die Adjunkte gebildet, transponiert und durch die Determinante dividiert. Damit kann die inverse Matrix mit Hilfe der folgenden Teilschritte berechnet werden:

- für alle Elemente Unterdeterminanten bilden (Kap. 1.2.4.5)
- Adjunkte bilden (Unterdeterminante und Schachbrettmuster, Kap 1.2.4.7)
- Adjunkte Matrix transponieren (Kap. 1.2.5.3)
- durch die Determinante dividieren (Kap. 1.2.4).

Alle oben aufgeführten Aktionen sind in den Einzelabschnitten schon beschrieben worden. In Kap. 1.2.6 werden mit Hilfe der inversen Matrix lineare Gleichungssysteme gelöst.

Inverse 2*2 Matrix in allgemeiner Form

gegeben: $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

gesucht: $\bar{A}^{-1} = ?$

Lösung: $\bar{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\bar{A})} * \bar{A}_{adj}^T$

Determinante: $\det(\bar{A}) = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}$

Unterdeterminanten: $\bar{u} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$

adjunkte Matrix: $\bar{A}_{adj} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$

transponieren: $\bar{A}_{adj}^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

Inverse Matrix als Ergebnis: $\bar{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\bar{A})} * \bar{A}_{adj}^T$

$$\bar{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Kommentar: Die Berechnung der inversen 2*2 Matrix ist relativ einfach. Das Schema sollte man sich auswendig merken.

Schema zur Bestimmung der inversen Matrix 2*2:

- In der Originalmatrix die zwei Elemente der Hauptdiagonalen vertauschen
- die zwei Nebenelemente negieren
- durch die Determinante dividieren

Inverse 3*3 Matrix in allgemeiner Form

gegeben: $\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

gesucht: $\bar{A}^{-1} = ?$

Determinante: (siehe Kap. 1.2.4.4)

$$\det(\bar{A}) = a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{12} * a_{23} * a_{31} + a_{13} * a_{21} * a_{32} - a_{13} * a_{22} * a_{31} - a_{11} * a_{23} * a_{32} - a_{12} * a_{21} * a_{33}$$

Unterdeterminanten: (siehe Kap. 1.2.4.5)

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} a_{22} * a_{33} - a_{23} * a_{32} & a_{21} * a_{33} - a_{23} * a_{31} & a_{21} * a_{32} - a_{22} * a_{31} \\ a_{12} * a_{33} - a_{13} * a_{32} & a_{11} * a_{33} - a_{13} * a_{31} & a_{11} * a_{32} - a_{12} * a_{31} \\ a_{12} * a_{23} - a_{13} * a_{22} & a_{11} * a_{23} - a_{13} * a_{21} & a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21} \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung der inversen Matrix A muß die obere Matrix der Unterdeterminanten mit Schachbrettmuster versehen werden, transponiert werden (Zeilen und Spalten tauschen) und anschließend muß durch die Determinante dividiert werden. Da dieses viel Schreibarbeit bedeutet, können die erwähnten drei Schritte auf einmal durchgeführt werden:

$$\bar{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\bar{A})} \begin{pmatrix} a_{22} * a_{33} - a_{23} * a_{32} & a_{13} * a_{32} - a_{12} * a_{33} & a_{12} * a_{23} - a_{13} * a_{22} \\ a_{23} * a_{31} - a_{21} * a_{33} & a_{11} * a_{33} - a_{13} * a_{31} & a_{13} * a_{21} - a_{11} * a_{23} \\ a_{21} * a_{32} - a_{22} * a_{31} & a_{12} * a_{31} - a_{11} * a_{32} & a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21} \end{pmatrix}$$

Beispiele mit Zahlenwerten werden nicht mit der oberen Formel gerechnet, siehe nächstes Beispiel. Obere allgemeine Form ist geeignet um Rechner zu programmieren. Auch wenn Koeffizienten noch allgemein gehalten sind, eignet sich die obere Gleichung zur Lösung von linearen Gleichungssystemen. Die Formeln vereinfachen sich erheblich, wenn mehrere Matricelemente a_{ij} zu Null oder gleich werden.

Beispiel: Inverse Matrix 3*3 mit Zahlen

gegeben: $\bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

gesucht: $\bar{A}^{-1} = ?$

Unterdeterminanten:

$$u_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = -16 + 15 = -1$$

$$u_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 25 = -1$$

$$u_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 10 = 1$$

$$u_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 12 = 44$$

$$u_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -16 - 20 = -36$$

$$u_{23} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 20 = -14$$

$$u_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 8 = 28$$

$$u_{32} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22$$

$$u_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8$$

Matrix der Unterdeterminanten:

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 44 & -36 & -14 \\ 28 & -22 & -8 \end{pmatrix}$$

Adjunkte Matrix:

$$\bar{A}_{adj} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -44 & -36 & 14 \\ 28 & 22 & -8 \end{pmatrix}$$

Adjungierte Matrix transponieren:

$$\bar{A}_{adj}^T = \begin{pmatrix} -1 & -44 & 28 \\ 1 & -36 & 22 \\ 1 & 14 & -8 \end{pmatrix}$$

Determinante: Diese kann durch das Skalarprodukt einer beliebigen Zeile (oder Spalte) der Originalmatrix mit der entsprechenden Zeile (oder Spalte) der adjungierten Matrix erfolgen (Determinantenentwicklung mit Hilfe von Unterdeterminanten). Der Vorteil hier: Die Unterdeterminanten müssen auf jeden Fall berechnet werden. Hier Wahl der 1. Zeile:

$$\det(\bar{A}) = a_{11} * a_{11}^{adj} + a_{12} * a_{12}^{adj} + a_{13} * a_{13}^{adj}$$

$$\det(\bar{A}) = (-2) * (-1) + 4 * 1 + 4 * 1 = 10$$

$$\bar{A}^{-1} = \frac{1}{\det} * \bar{A}_{adj}^T$$

$$\bar{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.1 & -4.4 & 2.8 \\ 0.1 & -3.6 & 2.2 \\ 0.1 & 1.4 & -0.8 \end{pmatrix}$$

1.2.5.9. Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix gibt die maximale Anzahl der unabhängigen Zeilen oder Spalten einer Matrix an.

Nicht quadratische Matrix $\bar{A}$

$$\text{Dim}(\bar{A}) = (m, n)$$

In der Regel: $\text{Rang}(\bar{A}) = \text{Minimum}(m, n)$

Mathematisch: $\text{Rang}(\bar{A}) \leq \text{Minimum}(m, n)$ Anzahl der nicht linear abhängigen Spalten oder Zeilen

Besondere Bedeutung des Rangs einer Matrix für quadratische Matrizen

$$\text{Dim}(\bar{A}) = (n, n)$$

Normalfall

$$\text{Rang}(\bar{A}) = n$$

$$\det(\bar{A}) \neq 0$$

Gleichungssystem lösbar

Spezialfall

$$\text{Rang}(\bar{A}) < n$$

$$\det(\bar{A}) = 0$$

Gleichungssystem nicht allgemein lösbar

1.2.6. Lösungsmethode: Inverse Matrix

Theorie

Die Theorie wurde schon in Abschnitt 1.2.5.8 beschrieben, hier erfolgt nur die Wiederholung. Das lineare Gleichungssystem

$$\bar{A} * \bar{x} = \bar{k}$$

wird von links mit $\bar{A}^{-1}$ multipliziert:

$$\bar{A}^{-1} \bar{A} * \bar{x} = \bar{E} * \bar{x} = \bar{x} = \bar{A}^{-1} \bar{k}$$

Daraus folgt die Lösung

$$\bar{x} = \bar{A}^{-1} * \bar{k}$$

als Multiplikation der inversen Matrix $\bar{A}^{-1}$ mit dem Anregungsvektor $\bar{k}$.

Diese Methode ist besonders anzuwenden bei

- kleinen Gleichungssystemen
- Berechnung verschiedener Systeme mit gleicher Matrix $\bar{A}$ und verschiedener Anregung $\bar{k}$

Allgemeine Lösung eines Gleichungssystems 2. Ordnung

gegeben:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

gesucht:
$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\bar{x} = \bar{A}^{-1} * \bar{k} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \bar{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \quad \text{merken (siehe Kap. 1.2.5.8)}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{a_{22} * k_1 - a_{12} * k_2}{a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{-a_{21} * k_1 + a_{11} * k_2}{a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}}$$

Beispiel: (Studenten)

gegeben:
$$\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Methode: Inverse Matrix

Ergebnis:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Lösung 3. Ordnung mit Zahlen

gegeben:
$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{A} * \bar{x} = \bar{k}$$

gesucht:
$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\bar{x} = \bar{A}^{-1} * \bar{k} \qquad \bar{A}^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(\bar{A})} * \bar{A}_t^{adj}$$

$$\bar{k} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Aus Kap. 1.2.4.5, Beispiel 2 kann für $\bar{A}$ die Matrix der Unterdeterminanten $\bar{U}$ übernommen werden:

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 44 & -36 & -14 \\ 28 & -22 & -8 \end{pmatrix}$$

Die adjungierte Matrix ergibt sich unter Berücksichtigung des Schachbrettmusters aus der Matrix der Unterdeterminanten:

$$\bar{A}_{adj} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -44 & -36 & 14 \\ 28 & 22 & -8 \end{pmatrix}$$

Transponieren heißt, Zeilen und Spalten vertauschen:

$$\bar{A}_{adj}^t = \begin{pmatrix} -1 & -44 & 28 \\ 1 & -36 & 22 \\ 1 & 14 & -8 \end{pmatrix}$$

Da die Unterdeterminanten schon bestimmt sind, erfolgt die Berechnung der Determinanten durch Entwicklung nach der ersten Spalte. Unterdeterminanten und adjunkte Elemente sind schon bestimmt.

$$\det(\bar{A}) = a_{11} * u_{11} - a_{21} * u_{21} + a_{31} * u_{31} = a_{11} * a_{11}^{adj} + a_{21} * a_{21}^{adj} + a_{31} * a_{31}^{adj}$$

$$\det(\bar{A}) = (-2) * (-1) + 3 * (-44) + 5 * (28) = 10$$

$$\bar{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\bar{A})} * \bar{A}_t^{adj} = \begin{pmatrix} -0.1 & -4.4 & 2.8 \\ 0.1 & -3.6 & 2.2 \\ 0.1 & 1.4 & -0.8 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \bar{A}^{-1} * \bar{k} = \begin{pmatrix} -0.1 & -4.4 & 2.8 \\ 0.1 & -3.6 & 2.2 \\ 0.1 & 1.4 & -0.8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8 - 8.8 + 8.4 \\ 0.8 - 7.2 + 6.6 \\ 0.8 + 2.8 - 2.4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2 \\ 0.2 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

1.2.7. Lösungsmethode: Cramersche Regel

Theorie

Die Lösung für Variablen des linearen Gleichungssystems n-ter Ordnung, $\dim(\bar{A}) = (n, n)$

$$\bar{A} * \bar{x} = \bar{k}$$

ergeben sich aus den Quotienten zweier Determinanten n-ter Ordnung

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

wobei D die Determinante der Matrix $\bar{A}$ ist.

$$D = \det(\bar{A})$$

D_i ist die Determinante der modifizierten Matrix $\bar{A}_i$, wobei die i-Spalte der Matrix $\bar{A}$ durch den Spaltenvektor $\bar{k}$ ersetzt wird:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1,i-1} & \mathbf{k}_1 & a_{1,i+1} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{n,i-1} & \mathbf{k}_n & a_{n,i+1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Beispiel 2. Ordnung allgemein

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Beispiel 2. Ordnung mit Zahlen

gegeben: $\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

gesucht: x_1, x_2

Lösung:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \det(\bar{A}) = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 27 = 5$$

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \det(\bar{A}_1) = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 36 = -16$$

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \det(\bar{A}_2) = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 15 = 17$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-16}{5} = -3.2$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{17}{5} = 3.4$$

Beispiel 3. Ordnung

gegeben: $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

gesucht: x_2

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot (8 - 35) - 3 \cdot (16 - 42) = 4 \cdot (-27) - 3 \cdot (-26) = -30$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 5 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot (40 - 30) - 3 \cdot (32 - 36) = 4 \cdot 10 - 3 \cdot (-4) = 52$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{52}{-30} = -\frac{26}{15}$$

1.2.8. Lösungsmethode: Gaußscher Algorithmus

Diese Lösungsmethode basiert auf der konsequenten (in der immer gleichen Form) Anwendung der schon behandelten Additionsmethode. Das Gleichungssystem n-ter Ordnung wird in immer gleicher Weise gelöst. Dieser Algorithmus ist auch für programmierbare Rechner bestens geeignet. Für ein Beispiel 3. Ordnung soll die Additionsmethode konsequent angewandt werden. Anhand dieses Beispiels soll ein Schema entwickelt werden.

Beispiel 1:

$$\begin{pmatrix} 10 & -40 & 80 \\ -3 & 15 & -30 \\ 4 & -14 & 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ -33 \\ 35 \end{pmatrix}$$

Das obere Beispiel wird in Einzelgleichungen angegeben. Ein Abstand dazwischen wird eingehalten um die Additionsmethode anzuwenden zu können. Die gegebenen Gleichungen werden in der unteren Angabe fett dargestellt.

$$\begin{array}{rrcr} \mathbf{10x_1} & - \mathbf{40x_2} & + \mathbf{80x_3} & = \mathbf{70} \\ x_1 & - 4x_2 & + 8x_3 & = 7 \\ \\ \mathbf{- 3x_1} & + \mathbf{15x_2} & - \mathbf{30x_3} & = \mathbf{-33} \\ 3x_1 & - 12x_2 & + 24x_3 & = 21 \\ \\ \mathbf{+ 4x_1} & - \mathbf{14x_2} & + \mathbf{31x_3} & = \mathbf{35} \\ - 4x_1 & + 16x_2 & - 32x_3 & = -28 \end{array}$$

Die obere Gleichung wird durch den Faktor an der ersten Stelle, also "10", dividiert und unter die erste Gleichung geschrieben. Um x_1 aus den unteren beiden Gleichungen zu eliminieren, muß bei der zweiten "3" mal die untere erste und bei der unteren "-4" mal die untere erste addiert werden. Dazu werden die Vielfachen der oberen durch "10" dividierten Gleichung unter die zweite bzw. dritte Gleichung geschrieben. Nun können die zweiten und dritten Gleichungen jeweils addiert werden und wieder mit Abstand geschrieben werden, wobei x_1 nicht mehr auftritt. Das Ergebnis wird fett dargestellt:

$$\begin{array}{rrcr} \mathbf{3x_2} & - \mathbf{6x_3} & = \mathbf{-12} \\ x_2 & - 2x_3 & = -4 \\ \\ \mathbf{2x_2} & - \mathbf{x_3} & = \mathbf{7} \\ - 2x_2 & + 4x_3 & = 8 \end{array}$$

Die oberen fett dargestellten Gleichungen ergeben wieder ein Gleichungssystem, um eine Ordnung verringert, hier zweiter Ordnung, was wiederum nach dem gleichen Schema gelöst werden kann. Obere Zeile durch "3" dividieren. Diese Zeile mal "-2" multiplizieren und unter die untere schreiben. Die Addition der unteren beiden Gleichungen ergibt, wobei x_2 eliminiert wird, schon die Lösung für x_3 :

$$\begin{array}{rr} \mathbf{3x_3} & = \mathbf{15} \\ x_3 & = 5 \end{array}$$

x_2 und x_1 müssen durch Rückwärtseinsetzen bestimmt werden. Dazu wird immer die obere, auf "eins" normierte Gleichung eines Abschnittes verwendet:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x_2 - Bestimmung:} & x_2 - 2x_3 = -4 \\ & x_2 = -4 + 2x_3 = -4 + 2 \cdot 5 = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{x_1 - Bestimmung:} & x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 7 \\ & x_1 = 7 + 4x_2 - 8x_3 = 7 + 4 \cdot 6 - 8 \cdot 5 = -9 \end{array}$$

Schema

Es ist nicht nötig, die Gleichungen mit x_i zu schreiben. In Kästchenschreibweise denkt nun sich die Spalten für x_1 , x_2 , x_3 und den Vektor k . Zusätzlich wird zur Probe die Zeilensumme in einem extra Kästchen notiert. Die Fehler-Wahrscheinlichkeit steigt mit der Anzahl der ausgeführten mathematischen Operationen. Das obere Gleichungssystem, mit dem im Beispiel 1 ausgeführten Operationen wird in einem Kästchenschema geschrieben (Erläuterung unten):

x_1	x_2	x_3	k_i	Σ
10 1	-40 -4	80 8	70 7	120 12
-3 3	15 -12	-30 24	-33 21	-51 36
4 -4	-14 16	31 -32	35 -28	56 -48
	3 1	-6 -2	-12 -4	-15 -5
	2 -2	-1 4	7 8	8 10
		3 1	15 5	18 6

Die Aktionen der Reihenfolge nach:

- Das Gleichungssystem in oberen drei Zeilen eintragen (Fettdruck der ersten drei Zeilen)
- Zeilensumme bilden (auch Fettdruck)
- obere Zeile durch 10 dividieren
- diese Zeile mal "3" und mal "-4" unter die anderen Gleichungen schreiben.
- Zur Probe: Alle drei Zeilensummen kontrollieren. Falls ein Fehler vorhanden ist, wird dieses bei der Zeilensumme bemerkt.
- Die Gleichungen in den unteren zwei Zeilen des Systems 3. Ordnung werden addiert und ein System (2. Ordnung) tiefer eingetragen (Fettdruck)
- Kontrolle der zwei Zeilensummen (Fettdruck)
- Division durch "3" der oberen Zeile des Systems 2. Ordnung.
- Kontrolle dieser Zeilensumme.
- Diese Zeile mal "-2" .
- Kontrolle Zeilensumme.
- Wieder Verringerung der Ordnung zu "1": Die beiden Gleichungen des unteren Zeile addieren.
- Kontrolle Zeilensumme.
- Division durch "3"
- Kontrolle Zeilensumme.

Aus der unteren Zeile folgt:

$$x_3 = 5$$

Die erste nicht fettgedruckte Zeile der 2. Ordnung sagt aus:

$$\begin{aligned} x_2 - 2x_3 &= -4 \\ x_2 &= -4 + 2x_3 = -4 + 2 \cdot 5 = 6 \end{aligned}$$

Die erste nicht fettgedruckte Gleichung (3. Ordnung) sagt aus:

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= 7 \\ x_1 &= 7 + 4x_2 - 8x_3 = 7 + 4 \cdot 6 - 8 \cdot 5 = -9 \end{aligned}$$

Beispiel 2: (4. Ordnung)

$$\begin{pmatrix} 3.82 & 2.55 & -1.43 & 1.08 \\ 2.71 & 4.95 & 2.60 & -0.65 \\ -1.08 & 2.44 & 5.15 & 1.76 \\ 1.36 & -0.84 & 2.36 & 3.90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.65 \\ 2.77 \\ 1.08 \\ 3.87 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	k_i	Σ
3.82	2.55	-1.43	1.08	4.65	10.67
1.00	0.6675	-0.3743	0.2827	1.2173	2.7932
2.71	4.95	2.6	-0.65	2.77	12.38
-2.71	-1.809	1.0145	-0.7662	-3.2988	-7.5696
-1.08	2.44	5.15	1.76	1.08	9.35
1.08	0.7209	-0.4043	0.3053	1.3147	3.0166
1.36	-0.84	2.36	3.9	3.87	10.65
-1.36	-0.9079	0.5091	-0.3845	-1.6555	-3.7987
	3.141	3.6145	-1.4162	-0.5288	4.8104
	1.0	1.1508	-0.4509	-0.1684	1.5315
	3.1609	4.7457	2.0653	2.3947	12.3666
	-3.1609	-3.6375	1.4252	0.5322	-4.841
	-1.7479	2.8691	3.5155	2.2145	6.8513
	1.7479	2.0113	-0.7881	-0.2943	2.6769
		1.1082	3.4905	2.9268	7.5256
		1.0	3.1496	2.641	6.7906
		4.8805	2.7274	1.9202	9.5281
		-4.8805	-15.3715	-12.8891	-33.1411
			-12.644	-10.9689	-23.6129
			1.0	0.8675	1.8675

$x_4 = 0.8675$

$x_3 = -0.0914$

$x_2 = 0.3279$

$x_1 = 0.7189$

Beispiel 3: (Studenten)

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ -7 & 5 & -5 \\ 5 & -8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	k_i	Σ
3.0	-4.0	8.0	7.0	14.0
1.0	-1.3333	2.6667	2.3333	4.6667
-7.0	5.0	-5.0	-8.0	-15.0
7.0	-9.3333	18.6667	16.3333	32.6667
5.0	-8.0	3.0	4.0	4.0
-5.0	6.6667	-13.3333	-11.6667	-23.3333
	-4.3333	13.6667	8.3333	17.6667
	1.0	-3.1538	-1.9231	-4.0769
	-1.3333	-10.3333	-7.6667	-19.3333
	1.3333	-4.2051	-2.5641	-5.4359
		-14.5385	-10.2308	-24.7692
		1.0	0.7037	1.7037

$x_3 = 0.7037$

$x_2 = 0.2963$

$x_1 = 0.8519$

Beispiel 4:

(Division durch Null)

$$\begin{pmatrix} 0 & -9 & -2 \\ -8 & -6 & -5 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Trägt man das obere Gleichungssystem in das bekannte Schema ein, müßte man zur Normierung durch Null dividieren. Ein Ausweg wäre: Zeilentauschen. Im Prinzip am Anfang möglich. Nur wenn dieses Gleichungssystem bei Verringerung der Ordnung erzeugt wird, müßte man die Zeilen noch einmal schreiben. Diesen Aufwand kann man sich sparen. Es kann auch auf eine andere Zeile normiert werden, als auf die jeweils erste. Beim Beispiel 4 wird die 3. Zeile auf 1 normiert..

x_1	x_2	x_3	k_i	Σ
0 0	-9.0 0	-2.0 0	3.0 0	-8.0 0
-8.0 8.0	-6.0 -3.2	-5.0 4.8	-2.0 -8.0	-21.0 1.6
5.0 1.0	-2.0 -0.4	3.0 0.6	-5.0 -1.0	1.0 0.2
	-9.0 92.0	-2.0 2.0	3.0 100.0	-8.0 194.0
	-9.2 46.0	-0.2 1.0	-10.0 50.0	-19.4 97.0
	83.0 1.0		103.0 103/83	186.0

Im zweiten Abschnitt beim Gleichungssystem 2. Ordnung wurde sogar auf das Element unten rechts normiert, weil eine Multiplikation mit "-5" besser schreibbare Zahlen ergibt. Damit wird erst x_3 eliminiert. Dadurch wird x_2 als erstes bestimmt:

$$x_2 = 103/83 = 1.241$$

$$x_3 = 50 - 46 \cdot x_2 = 50 - 46 \cdot 1.241 = -7.086$$

$$x_1 = -1 + 0.4 \cdot x_2 - 0.6 \cdot x_3 = -1 + 0.4 \cdot 1.241 - 0.6 \cdot (-7.086) = 3.748$$

Falls das Gleichungssystem nicht lösbar ist, $\det(\bar{A}) = 0$, findet man irgendwann keine Zahl zur Normierung mehr. Der Rang einer quadratischen Matrix ist identisch mit der Schrittzahl in der keine Normierung mehr möglich ist. Falls bei einem Gleichungssystem n-ter Ordnung n Schritte möglich sind ist der Rang der Matrix n.

1.2.9. Numerische Inversion von Matrizen

Der numerische **Gaußsche Algorithmus** ist schon aus dem letzten Abschnitt bekannt. Dort wurde im ersten Schritt angegeben:

Gaußsche Algorithmus $\rightarrow (\bar{A}, \bar{k}, \bar{s})$

mit dem linearen Gleichungssystem $\bar{A} * \bar{x} = \bar{k}$

und dem Spaltenvektor $\bar{s}$ als Summe der Zeile.

Bei der **numerischen Inversion von Matrix** wird zusätzlich die Einheitsmatrix $\bar{E}$ im ersten Schnitt angegeben

1. Schritt: $(\bar{A}, \bar{k}, \bar{E}, \bar{s})$

Das Prinzip: Die Matrix $\bar{A}$ in die Einheitsmatrix umformen. Dort, wo vorher die Einheitsmatrix stand, ist nachher die inverse Matrix $\bar{A}^{-1}$ vorhanden. Wie erhält man an der Stelle $\bar{A}$ die Einheitsmatrix? Antwort: Indem man die Hauptdiagonale zu "1" setzt und die Nebenelemente zu "0" setzt. Falls beim Gaußschen Algorithmus die nicht mehr interessanten Zeilen wieder mit geschrieben werden, erhält man an der Stelle $\bar{A}$ eine Dreiecksmatrix mit "1" in der Diagonalen und in der unteren Hälfte "0". Dieses ist ein Teil der numerischen Matrixinversion. Der andere Teil muß auch die oberen Matrix-Elemente außerhalb der Hauptdiagonale zu Null setzen. Erläuterung am besten per Beispiel.

Beispiel:**gegeben:** $\bar{A} * \bar{x} = \bar{k}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} \quad \bar{k} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gesucht: $\bar{x}, \bar{A}^{-1}$ Eintragen in das Schema: $(\bar{A}, \bar{k}, \bar{E}, \bar{s})$ (Normaldruck erste drei Zeilen)

-2.0	4.0	4.0	8.0	1.0	0	0	15.0
1.0	-2.0	-2.0	-4.0	-0.5	0	0	-7.5
3.0	-2.0	5.0	2.0	0	1.0	0	9.0
-3.0	6.0	6.0	12.0	1.5	0	0	22.5
5.0	-3.0	8.0	3.0	0	0	1.0	14.0
-5.0	10.0	10.0	20.0	2.5	0	0	37.5
1.0	-2.0	-2.0	-4.0	-0.5	0	0	-7.5
0	2	5.5	7	0.75	0.5	0	15.75
0	4.0	11.0	14.0	1.5	1.0	0	31.5
0	1.0	2.75	3.5	0.375	0.25	0	7.875
0	7.0	18.0	23.0	2.5	0	1.0	51.5
0	-7.0	-19.25	-24.5	-2.625	-1.75	0	-55.125
1.0	0	3.5	3.0	0.25	0.5	0	8.25
0	0	-3.5	-4.2	-0.35	-4.9	2.8	-10.15
0	1.0	2.75	3.5	0.375	0.25	0	7.875
0	0	-2.75	-3.3	-0.275	-3.85	2.2	-7.975
0	0	-1.25	-1.5	-0.125	-1.75	1.0	-3.625
0	0	1.0	1.2	0.1	1.4	-0.8	2.9
1.0	0	0	-1.2	-0.1	-4.4	2.8	-1.9
0	1.0	0	0.2	0.1	-3.6	2.2	-0.1
0	0	1.0	1.2	0.1	1.4	-0.8	2.9

Ein Teil der Lösung ist vom Gaußschen Algorithmus bekannt. Dabei wird im ersten Schritt die erste Spalte unterhalb der Hauptdiagonalen zu Null berechnet. Im zweiten Schritt wird die zweite Spalte unterhalb der Hauptdiagonalen, zu Null umgeformt, u.s.w.....

Hier werden im gleichem Schritt auch die Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen zu Null gesetzt.

Beiden gemeinsam: Zu der Zeile dessen Element zu Null werden soll, wird negativ addiert die Zeile mit dem Diagonalelement "1" multipliziert mit dem Faktor addiert.

Am Ende der Berechnung ist sowohl der Lösungsvektor $\bar{x}$ als auch die inverse Matrix vorhanden:

$\bar{x}$ - dort wo am Anfang $\bar{k}$ vorhanden war

$\bar{A}^{-1}$ - dort wo am Anfang $\bar{E}$ vorhanden war

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -1.2 \\ 0.2 \\ 1.2 \end{pmatrix} \quad \bar{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.1 & -4.4 & 2.8 \\ 0.1 & -3.6 & 2.2 \\ 0.1 & 1.4 & -0.8 \end{pmatrix}$$

1.2.10. Anwendung welcher Methode?

Die Ordnung von Gleichungssystemen kann, insbesondere bei Feldberechnungen, bis zu über 2000 sein.

Über $n = 1000$ sind die vorgestellten Verfahren nicht mehr anwendbar. Dort werden iterative Suchverfahren mit Iterationsbeschleunigung angewendet, siehe nur Literatur.

Bei Zahlenwertrechnung funktioniert bis $n = 100$ der Gaußsche Algorithmus noch sehr gut.

Falls mehrere Gleichungssysteme mit gleicher Matrix $\bar{A}$ aber verschiedener Anregung $\bar{k}$ vorhanden sind, empfiehlt es sich, die inverse Matrix zu berechnen. Dieses entspricht einem elektrischen Netzwerk mit konstanten Widerständen und veränderlichen Spannungsquellen.

Die Berechnung mit Determinanten empfiehlt sich nur bei niedriger Ordnung $n < 4$ oder bei sehr viel Nullen in der Matrix.

Achtung Rechenzeitbedarf

Gauß	$\sim n^2$
Determinanten mit Unterdeterminanten	$\sim n!$

Falls ein allgemeiner Formelausdruck gewünscht wird, am besten mit Determinanten rechnen.

1.3. Vektoralgebra

1.3.1. Einführung

Schon im Kap. 1.2.3.2 sind zwei Versionen von Vektoren vorgestellt worden:

- $\vec{x}$ - Zusammenfassung von Komponenten
- $\vec{x}$ - gerichtete mathematische oder physikalische Größe

Die zweite Art, gerichtete mathematische und physikalische Größen sollen in diesem Abschnitt behandelt werden.

Beispiel Kraft

Der bekannteste physikalische Vektor ist die Kraft. Die Kraft wirkt in eine bestimmte Richtung, siehe Bild MA131A.

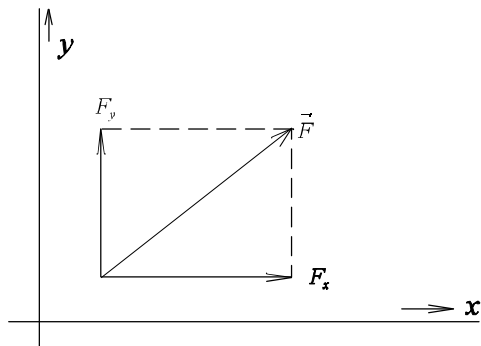


Bild MA131A

Komponenten

Die Eigenschaft einer gerichteten Größe ist aus Bild MA131A erkennbar. Die Kraft hat eine Richtung im Koordinatensystem. Am einfachsten ist es, die Kraft, oder einen beliebigen Vektor, zu beschreiben durch Komponenten in den Koordinatenrichtungen. Da allgemein der Raum dreidimensional ist, fehlt im Bild MA131A die z-Komponente. Somit erhält man zur vollständigen Beschreibung der Kraft die drei Komponenten

F_x , F_y und F_z

Schreibweise

Die Schreibweise ist fast die gleiche wie bei der mathematischen Zusammenfassung von Komponenten. Anstelle des Striches über dem Formelbuchstaben wird der gerichtete Vektor mit einem Pfeil über der Formelgröße gekennzeichnet. Auch die Komponenten werden in der gleichen Weise zusammengefasst, üblich ist die Klammer Schreibweise, die Kästchenschreibweise ist bei gerichteten Größen nicht üblich. Nach DIN sind fette Buchstaben für Vektoren vorgesehen. In alten Lehrbüchern findet man, für uns heute schwer lesbar, noch deutsche Buchstaben. Beispiel für die Kraft:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

Aus Platzgründen wird auch manchmal die transponierte Schreibweise bevorzugt:

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$$

Unterscheidung physikalischer Größen

Physikalische Größen lassen sich einteilen in Vektoren und Skalare.

Vektor: gerichtete Größe, zeigt in eine bestimmte Richtung

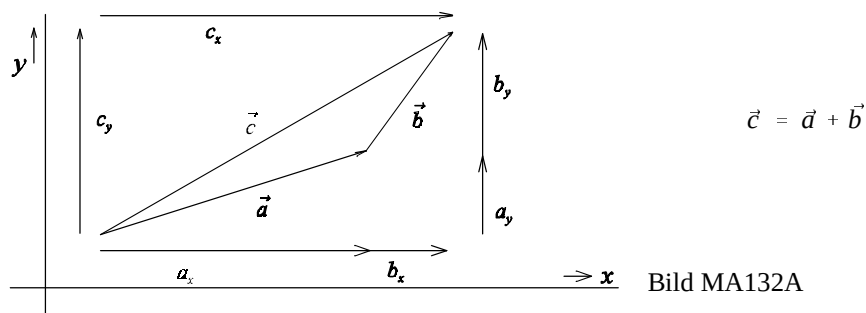
Skalar: ist keiner bestimmten Richtung zugeordnet

In der folgenden Tabelle sind bekannte physikalische Größen aufgeführt mit der Klassifizierung Skalar oder Vektor.

Größe	Formelzeichen	Skalar oder Vektor
Kraft	$\vec{F}$	Vektor
Temperatur	T	Skalar
Geschwindigkeit	$\vec{v}$	Vektor
Beschleunigung	$\vec{a}$	Vektor
Masse	m	Skalar
Druck	p	Skalar
Leistung	P	Skalar
Energie	W	Skalar
Länge	$\vec{l}$	Vektor
Fläche	$\vec{A}$	Vektor
zurückgelegter Weg	s	Skalar
Strom	I	Skalar
Stromdichte	$\vec{J}$	Vektor

1.3.2. Einfache Vektoroperationen

Addition



Vektoren werden geometrisch addiert

Aus Bild MA132A folgt:

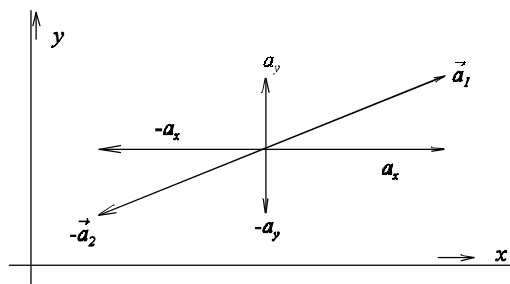
$$c_x = a_x + b_x$$

$$c_y = a_y + b_y$$

Vektoren werden addiert, indem die Komponenten addiert werden:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit "-1"



$$\vec{a}_2 = -\vec{a}_1$$

Bild MA132B

Wird der Vektor mit "-1" multipliziert, zeigt er in genau die entgegengesetzte Richtung.

$$-\vec{a} = - \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix}$$

Subtraktion

Die Subtraktion von Vektoren kann angesehen werden als Addition eines Vektors mit einem negativen Vektor.

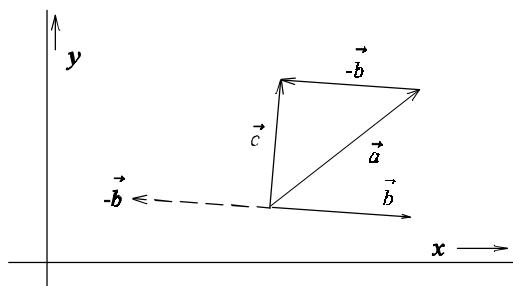


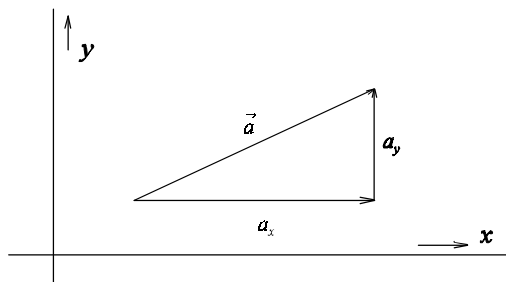
Bild MA132C

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_x \\ -b_y \\ -b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

Sowohl Bild MA132C als auch die mathematische Ableitung zeigen: **Vektoren werden voneinander subtrahiert, indem ihre Komponenten voneinander subtrahiert werden.**

Betrag des Vektors

Aus Bild MA132D ist zu erkennen, daß für den Zweikomponenten-Vektor sich der Betrag nach Pythagoras ergibt:



$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Bild MA132D

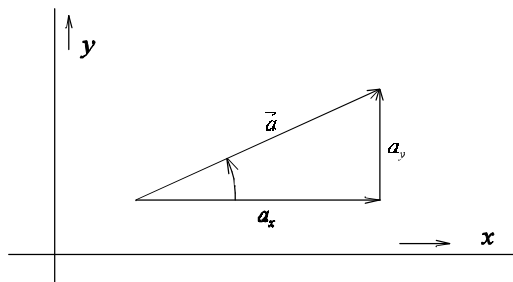
Im dreidimensionalen ergibt sich der Betrag

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

aus der Wurzel der Summe der Komponenten zum Quadrat. Wobei für den Betrag zwei Schreibweisen äquivalent sind:

1. Betrag wird durch senkrechte Striche angedeutet mit Pfeil über dem Vektor.
2. Die Vektorgroße ohne Pfeil und ohne senkrechte Striche wird üblicherweise für die Angabe des Betrages genutzt.

Richtung des Vektors in der x-y-Ebene, Umrechnung Komponenten nach Betrag und Winkel



$$a = |\vec{a}|$$

Bild MA132E

Die folgenden Umrechnungen ergeben sich nach Bild MA132E über die trigonometrischen Funktionen.

Umrechnung: Betrag und Winkel nach Komponenten

$$a_x = a \cdot \cos(\varphi)$$

$$a_y = a \cdot \sin(\varphi)$$

Umrechnung: Komponenten nach Betrag und Winkel

$$\varphi = \arctan \frac{a_y}{a_x} \quad a_x > 0$$

$$\varphi = \arctan \frac{a_y}{a_x} + \pi \quad a_x < 0$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Multiplikation mit einem Skalar

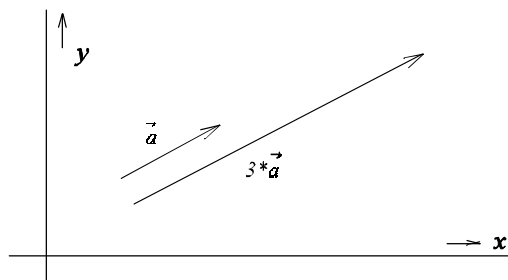


Bild MA132F

$$3 * \vec{a} = 3 * \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_x \\ 3a_y \\ 3a_z \end{pmatrix}$$

Man multipliziert einen Vektor mit einem Skalar, indem alle Komponenten des Vektors mit dem Skalar multipliziert werden.

Einheitsvektoren

Definition:

Die Einheitsvektoren zeigen in Richtung der Koordinaten-Achsen. Der Betrag der Einheitsvektoren ist eins.

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$$

Jeder Vektor kann mit Hilfe von Einheitsvektoren angegeben werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x * \vec{e}_x + a_y * \vec{e}_y + a_z * \vec{e}_z = a_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

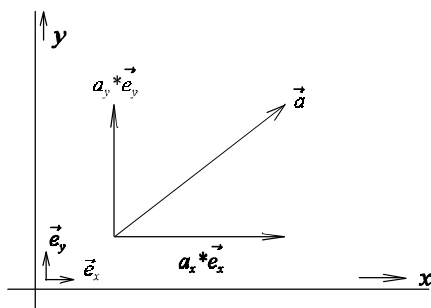


Bild MA132G

1.3.3. Skalarprodukt

Das Skalarprodukt wird auch als inneres Produkt bezeichnet.

Definition

$$s = \vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x * b_x + a_y * b_y + a_z * b_z$$

Ähnlich als bei der Multiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor werden die zugehörigen Komponenten miteinander multipliziert und danach addiert.

Aussage, Deutung

Für zwei Vektoren in der x-y-Ebene (z-Komponente Null) soll das Skalarprodukt mit Hilfe von Bild MA133A untersucht werden.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

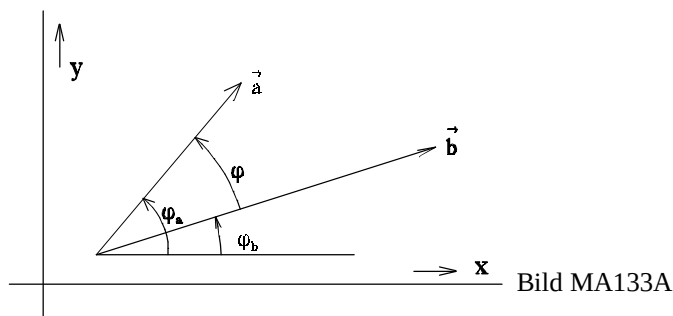


Bild MA133A

Aus Bild MA133A können die Komponenten der Vektoren mit Hilfe trigonometrischer Funktionen bestimmt werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos(\varphi_a) \\ \sin(\varphi_a) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} \cos(\varphi_b) \\ \sin(\varphi_b) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bilden des Skalarproduktes ergibt:

$$s = \vec{a} * \vec{b} = a \begin{pmatrix} \cos(\varphi_a) \\ \sin(\varphi_a) \end{pmatrix} * b \begin{pmatrix} \cos(\varphi_b) \\ \sin(\varphi_b) \end{pmatrix} = a * b * [\cos(\varphi_a) * \cos(\varphi_b) + \sin(\varphi_a) * \sin(\varphi_b)]$$

Vorgriff auf Kap. 2.3.2.5:

$$\cos(\varphi_a) * \cos(\varphi_b) + \sin(\varphi_a) * \sin(\varphi_b) = \cos(\varphi_a - \varphi_b)$$

Somit ergibt das Skalarprodukt:

$$s = \vec{a} * \vec{b} = a * b * \cos(\varphi_a - \varphi_b) = a * b * \cos(\varphi) \quad \text{mit} \quad \varphi = \varphi_a - \varphi_b$$

Das Skalarprodukt ist das Produkt der Beträge multipliziert mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels.

Was kann man nun mit dem Skalarprodukt anfangen? Dazu die nächsten beiden Betrachtungen.

Komponente in Richtung eines Vektors

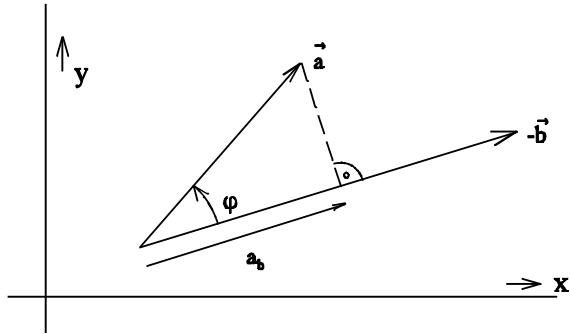


Bild MA133B

Soll die Komponente a_b des Vektors $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{b}$ berechnet werden, so ergibt sich aus Bild MA133B:

$$a_b = a \cdot \cos(\varphi)$$

Aus der Definition des Skalarproduktes folgt:

$$a \cdot b \cdot \cos(\varphi) = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \Rightarrow \quad a \cdot \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b}$$

Der Vergleich der letzten beiden Formeln liefert:

$$a_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b}$$

Physikalisches Beispiel $P = f(\vec{v}, \vec{F})$

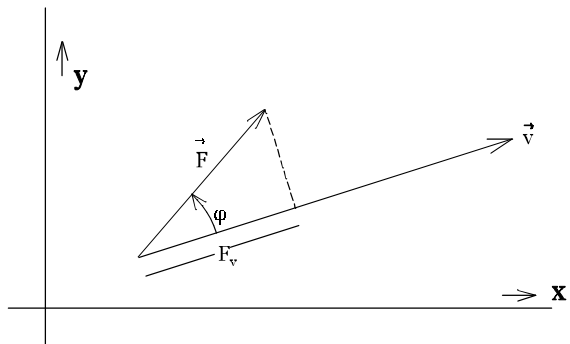


Bild MA133C

Die mechanische Leistung ergibt sich aus dem Betrag der Geschwindigkeit mit der Kraftkomponente in Richtung der Geschwindigkeit:

$$P = F_v \cdot v = \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{v} \cdot v$$

Somit lässt sich die mechanische Leistung schreiben als das Skalarprodukt der Kraft und der Geschwindigkeit:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Andere Deutung der mechanischen Leistung: Betrag der Kraft mal Betrag der Geschwindigkeit mal Kosinus des eingeschlossenen Winkel, was auch dem Skalarprodukt entspricht.

Betragsquadrat eines Vektors

Das Skalarprodukt des Vektors $\vec{a}$ mit sich selbst ergibt:

$$\vec{a} * \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x * a_x + a_y * a_y + a_z * a_z$$

Vergleich mit den Betrag eines Vektors (Kap. 1.3.2) liefert

$$\vec{a} * \vec{a} = a^2$$

Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ergibt das Betragsquadrat des Vektors.

1.3.4. Rechtsdrehendes Koordinatensystem

Bevor der nächste Abschnitt behandelt werden kann, muß der Ausdruck "rechtsdrehendes Koordinatensystem" definiert werden. Normalerweise wird immer mit einem rechtsdrehenden Koordinatensystem gerechnet. Was ist das?

Da gibt es drei Erklärungen:

- Mathematische Richtung
- Rechtsschraubenregel
- Rechte-Hand-Regel

Die drei Regeln sollen anhand von Bild MA134A erklärt werden.

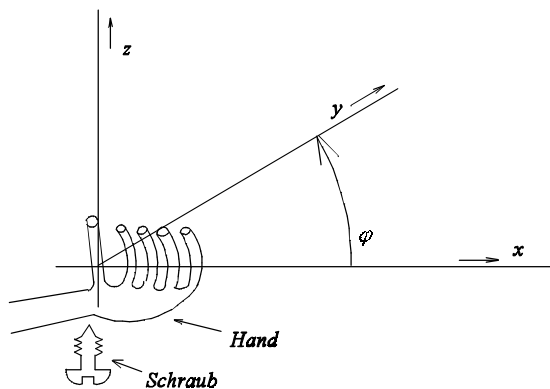


Bild MA134A

Mathematische Richtung

Dreht man einen Pfeil (Position in z-Richtung) von der ersten Koordinate (x) in mathematisch positiver Richtung (Winkelrichtung φ ist linksrum) zur zweiten Koordinate (y) so zeigt der Pfeil in Richtung der dritten Koordinate (z).

Rechtsschrauben Regel

Dreht man eine Schraube mit Rechtsgewinde in die x-y-Ebene am Koordinatenursprung von x nach y, so dreht die Schraube in z-Richtung. Die Koordinatenrichtung (x, y, z) bilden dabei ein rechtsdrehendes Koordinatensystem.

Rechte-Hand-Regel

Zeigen die vier Finger der rechten Hand von x nach y, so zeigt der Daumen in z-Richtung.

1.3.5. Vektorprodukt

Das Vektorprodukt wird auch äußeres Produkt oder auch Kreuzprodukt genannt.

Definition

Wiederholung Skalarprodukt

$$s = \vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\varphi_a - \varphi_b)$$

Das Skalarprodukt ergab als Ergebnis einen Skalar. Der Wert ergab sich aus Produkt der beiden Beträge mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels.

Das Vektorprodukt ergibt demnach einen Vektor. Der Betrag des Vektors ergibt sich aus dem Produkt der Beträge mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

$$|\vec{c}| = a \cdot b \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

Fehlt noch die Richtung. Definition: Die Richtung des Vektorproduktes steht senkrecht auf den Ausgangsvektoren (hier $\vec{a}$ und $\vec{b}$).

Das Vektorprodukt zweier Vektoren steht senkrecht auf den zwei Vektoren. Der Betrag berechnet sich aus dem Produkt der Beträge der Vektoren mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$c = a \cdot b \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{c} \perp (\vec{a}, \vec{b})$$

Schreibweise:

Zur Unterscheidung zum Skalarprodukt wird das Vektor- oder Kreuzprodukt mit einem Kreuz gekennzeichnet:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Aussage

Untersucht sollen die zwei Vektoren ($\vec{a}$ und $\vec{b}$) in der x-y-Ebene, nach Bild MA135A.

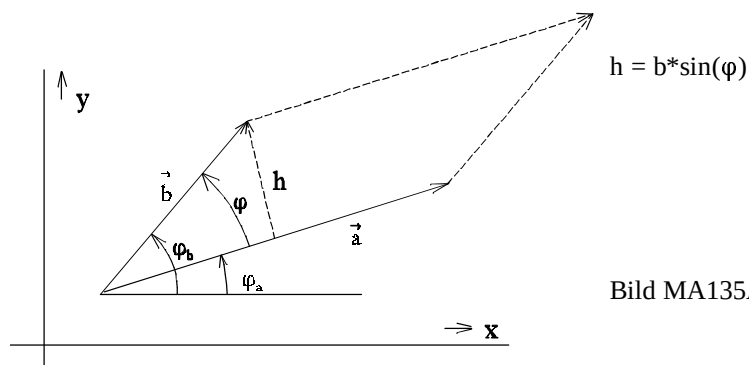


Bild MA135A

Nach Bild MA135A lässt sich die Fläche des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms berechnen:

$$A = a \cdot h = a \cdot [b \cdot \sin(\varphi)] = a \cdot b \cdot \sin(\varphi_b - \varphi_a)$$

Somit lässt sich A auch als Betrag des Vektorproduktes berechnen.

Das Vektorprodukt gibt die von zwei Vektoren aufgespannte Fläche an. Die Richtung des Vektorproduktes steht senkrecht auf den erzeugenden Vektoren. Fehlt noch das Vorzeichen der Richtung. Dazu gleiche Regeln wie bei rechtsdrehenden Koordinatensystemen, siehe Kap. 1.3.4. Beim Vektorprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} * \vec{b}$$

kann $\vec{a}$ als erste Koordinatenrichtung angesehen werden, $\vec{b}$ als zweite und das Ergebnis $\vec{c}$ als dritte. Rechte-Hand-Regel (zum Beispiel) ergibt, daß die Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$ in Bild MA135A aus der Zeichenebene heraus gerichtet ist, also in z-Richtung. Auch die zwei anderen Regeln aus Kap. 1.3.4 ergeben die gleiche Aussage.

Rechenvorschrift

$$\text{Vorgriff auf Kap. 2.3.2.5:} \quad \sin(\varphi_b - \varphi_a) = \sin(\varphi_b) * \cos(\varphi_a) - \cos(\varphi_b) * \sin(\varphi_a)$$

Einsetzen des oberen Additionstheorems in die Definition

$$|\vec{c}| = a * b * \sin(\varphi_b - \varphi_a)$$

und Umformung ergibt:

$$|\vec{c}| = a * b * [\sin(\varphi_b) * \cos(\varphi_a) - \cos(\varphi_b) * \sin(\varphi_a)]$$

$$|\vec{c}| = [a * \cos(\varphi_a)] * [b * \sin(\varphi_b)] - [a * \sin(\varphi_a)] * [b * \cos(\varphi_b)]$$

Die oberen Ausdrücke enthalten die Vektorkomponenten:

$$a_x = a * \cos(\varphi_a)$$

$$b_x = b * \cos(\varphi_b)$$

$$a_y = a * \sin(\varphi_a)$$

$$b_y = b * \sin(\varphi_b)$$

Durch Einsetzen der oberen Ausdrücke läßt sich der Betrag des Vektorproduktes zweier Vektoren in der x-y-Ebene angeben durch die Vektorkomponenten: Der Vektor zeigt in die positive z-Richtung:

$$|\vec{c}| = c_z = a_x * b_y - a_y * b_x$$

Die Richtung des oberen Vektors ist die z-Richtung, was sich durch den Einheitsvektor beschreiben läßt. Der Betrag sieht sehr nach Determinante aus. Daraus folgt:

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} * \vec{e}_z$$

Unter Berücksichtigung auch der anderen Komponenten ergibt sich die folgende Berechnungsvorschrift für das Vektorprodukt:

$$\vec{c} = \vec{a} * \vec{b} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & \vec{e}_x \\ a_y & b_y & \vec{e}_y \\ a_z & b_z & \vec{e}_z \end{vmatrix}$$

Achtung: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Beispiel

Flächenberechnung eines Dreiecks

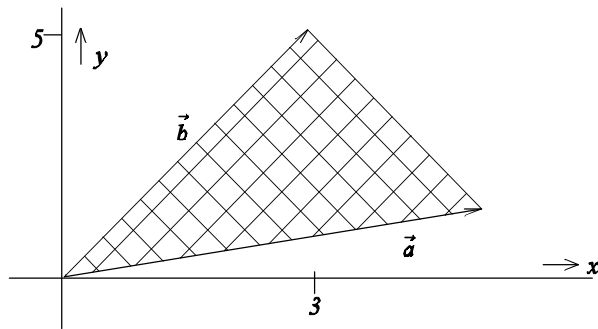


Bild MA135B

gegeben: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

gesucht: Die Fläche des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks in der x-y-Ebene soll berechnet werden, siehe Bild MA135B.

Lösung:

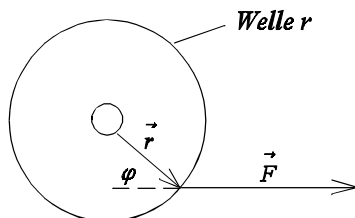
Die Fläche des Dreiecks in vektorieller Form ist die Hälfte des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{a} \times \vec{b} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 7 & 3 & e_x \\ 2 & 5 & e_y \\ 0 & 0 & e_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} * \vec{e}_z = \frac{1}{2} (35 - 6) \vec{e}_z = 14.5 * \vec{e}_z$$

$$A = 14.5$$

Achtung: Fläche, x und y besitzen normalerweise Einheiten!

Physikalisches Beispiel $\vec{M} = f(\vec{r}, \vec{F})$ 

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| * |\vec{r}| * \sin(\varphi)$$

Bild MA135C

Das Drehmoment und auch die Winkelgeschwindigkeit sind Vektoren die bei einer Welle in Richtung der Wellenachse gerichtet sind. Die Formel zur Berechnung des Drehmomentes ergibt sich aus dem Kreuzprodukt von Radius und Kraft:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Arbeitsblatt MAI-1

1.3.6. Zusammenfassung der Rechenregeln der Vektoralgebra

Schreibweise
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = (a_x, a_y, a_z)^T = (a_x, a_y, a_z)_T$$

Addition
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Subtraktion
$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

Betrag
$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\vec{a} * \vec{a}}$$

Multiplikation mit einem Skalar
$$\lambda * \vec{a} = \lambda * \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$$

Einheitsvektoren
$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1 = |\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z|$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x * \vec{e}_x + a_y * \vec{e}_y + a_z * \vec{e}_z$$

Skalarprodukt
$$s = \vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x * b_x + a_y * b_y + a_z * b_z$$

$$s = a * b * \cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$$

$$b_a = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{a} \quad \text{Komponente von } \vec{b} \text{ in Richtung } \vec{a}$$

Vektorprodukt
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & \vec{e}_x \\ a_y & b_y & \vec{e}_y \\ a_z & b_z & \vec{e}_z \end{vmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$|\vec{c}| = a * b * \sin(\angle \vec{a}, \vec{b}) \quad \vec{c} \perp (\vec{a}, \vec{b})$$

Bedeutung: Fläche des aufgespannten Parallelogramms.

1.4. Algebraische Gleichungen

1.4.1. Allgemeine Form der algebraischen Gleichung n-ten Grades

$$a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2 + a_3 * x^3 + \dots a_{n-1} * x^{(n-1)} + a_n * x^n = 0$$

Die allgemeine Form der algebraischen Gleichung n-ten Grades ist die Summe des Produktes Koeffizient mit einer x- Potenz von Null bis n.

$$\sum_{i=0}^n a_i * x^i = 0$$

Ausgehend von der Gleichung 1. Grades werden anschließend die Lösung der algebraischen Gleichungen 2., 3. und 4. Grades behandelt. Danach soll die allgemeine Lösung n-ten Grades diskutiert werden.

1.4.2. Algebraische Gleichungen 1. Grades

Diese lineare Form ist trivial und ist schon im Kap. 1.2 "Lineare Gleichungssysteme", hier 1. Ordnung, behandelt worden:

gegeben: $a_0 + a_1 * x = 0$

Lösung: $x = -\frac{a_0}{a_1}$

1.4.3. Algebraische Gleichungen 2. Grades

Die **Allgemeine Form**

$$a_2 * x^2 + a_1 * x + a_0 = 0$$

ist auch als quadratische Gleichung bekannt.

Lösungsmethode: quadratische Ergänzung

Beispiel

gegeben: $x^2 - 8x + 7 = 0$

gesucht: x_0

Lösung:

bekannt: $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$

ergänzen: $x^2 - 8x + 16 + 7 - 16 = 0$
 $(x - 4)^2 = 9$
 $x - 4 = \pm 3$
 $x_{1,2} = 4 \pm 3$
 $x_1 = 7 \quad x_2 = 1$

Lösungsformel

gegeben: $b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$

umformen: $x^2 + a_1x + a_0 = 0$

bekannt:
$$\left(x + \frac{a_1}{2}\right)^2 = x^2 + a_1x + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2$$

ergänzen: $x^2 + a_1x + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 = 0$

umformen:
$$\left(x + \frac{a_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0$$

$$x + \frac{a_1}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$$

$$x_{12} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$$

Diskussion der Lösungsformel:

Die obere Formel müßte schon aus der Schule bekannt sein, eventuell mit p und q. Besser als die quadratische Ergänzung ist die Anwendung der Lösungsformel. Der Koeffizient a_1 des linearen Terms x^1 muß durch -2 dividiert werden. Dazu muß addiert werden muß $\pm$ die Wurzel aus dem gleichen Term zum Quadrat minus dem linearen Teil a_0

Welche Arten der Lösung gibt es? Dieses hängt von den Koeffizienten a_0 und a_1 ab:

$$\frac{a_1^2}{4} > a_0 \quad \Rightarrow \quad \text{zwei verschieden reelle Lösungen}$$

$$\frac{a_1^2}{4} = a_0 \quad \Rightarrow \quad \text{eine reelle Doppel-Lösung}$$

$$\frac{a_1^2}{4} < a_0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wurzel aus einer negativen Zahl}$$

Da die Wurzel aus einer negativen Zahl (imaginäre Einheit) erst im Kapitel 3 behandelt wird, soll jetzt erst Abschnitt 1.5 behandelt werden, danach Die Kapitel 2 und 3 und erst dann wird das Kapitel 1 an dieser Stelle fortgesetzt.

Algebraische Gleichung 2. Grades, quadratische Gleichungen, Wiedereinstieg nach Kap. 3

gegeben: $x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Lösung: $x_{12} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$ $x_{12} = -\frac{a_1}{2} \pm j\sqrt{a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}$

Art der Lösung

$a_0 > \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 \Rightarrow$ konjugiert komplexe Lösung

$a_0 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 \Rightarrow$ doppelt reelle Lösung

$a_0 < \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 \Rightarrow$ zwei verschieden reelle Lösungen

Zusammenfassung

Gleichung 1. Grades $\Rightarrow$ 1 reelle Lösung

Gleichung 2. Grades $\Rightarrow$ zwei Lösungen

Beispiel 1:

gegeben: $x^2 - 6x + 25 = 0$

Lösung: $x_{12} = 3 \pm \sqrt{9 - 25} = 3 \pm \sqrt{-16} = 3 \pm j4$

Probe: $x_1^2 - 6x_{12} + 25 = 0$ $x_{12} = 3 \pm j4$ $-6x_{12} = -18 \mp j24$

$x_{12}^2 = 9 \pm 2 \cdot 3 \cdot j4 - 16 = -7 \pm j24$

$(-7 \pm j24) + (-18 \mp j24) + 25 = 0$

$(-7 - 18 + 25) + j(\pm 24 \mp 24) = 0$ $\Rightarrow$ OK

Beispiel 2: (Studenten)

gegeben: $x^2 - 10x + 41 = 0$

Lösung: $x_{12} = 5 \pm j4$

1.4.4. Algebraische Gleichung 3. Grades, kubische Gleichungen

Die allgemeine Form

$$b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0 = 0$$

wird durch b_3 dividiert:

$$z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = 0$$

Bei der Verschiebung in z um $-\frac{c_2}{3}$ fällt der quadratische Term weg. Substitution (Horner Schema) von

$$z = x - \frac{c_2}{3}$$

ergibt sich

$$x^3 + a_1 x + a_0 = 0$$

Die analytische Lösung ist mit der Substitution $x = a \cdot \cos(\varphi)$ möglich. Hier soll nur das Ergebnis angegeben werden.

Ergebnis: für $x^3 + a_1 x + a_0 = 0$

$$D = \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 + \left(\frac{a_1}{3} \right)^3$$

$D > 0 \Rightarrow$ eine reelle, eine konjugiert komplexe Lösung

$D = 0 \Rightarrow$ eine reelle, eine reelle Doppellösung

$D < 0 \Rightarrow$ drei verschieden reelle Lösungen

Kardanische Lösungsformel	
$D > 0$	$D < 0$
$u = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} + \sqrt{D}}$ $v = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} - \sqrt{D}}$	$\cos(\varphi) = -\frac{\frac{a_0}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{a_1}{3}\right)^3}}$
$x_1 = u + v$ $x_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}j\sqrt{3}$ $x_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}j\sqrt{3}$	$x_1 = 2\sqrt{-\frac{a_1}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)$ $x_2 = 2\sqrt{-\frac{a_1}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right)$ $x_3 = 2\sqrt{-\frac{a_1}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right)$

Beispiel 2:

gegeben: $z^3 + 6z^2 - 6z - 136 = 0$

gesucht: z_{123}

Lösung:

Koordinatenverschiebung: $x = z + \frac{6}{3} = z + 2 \quad \Leftrightarrow \quad z = x - 2$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 1 & 6 & -6 & -136 \\
 -2 & - & -2 & -8 & 28 \\
 \hline
 & 1 & 4 & -14 & -108 \\
 -2 & - & -2 & -4 & \\
 \hline
 & 1 & 2 & -18 & \\
 -2 & - & -2 & & \\
 \hline
 & 1 & 0 & &
 \end{array}$$

$$x^3 - 18x - 108 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = -108 \quad a_1 = -18$$

$$\frac{a_0}{2} = -54 \quad \frac{a_1}{3} = -6$$

$$D = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{3}\right)^3 = (-54)^2 + (-6)^3 = 2916 - 216 = 2700$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} + \sqrt{D}} = \sqrt[3]{54 + \sqrt{2700}} = 4.73205$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{a_0}{2} - \sqrt{D}} = \sqrt[3]{54 - \sqrt{2700}} = 1.26795$$

$$u + v = 4.73205 + 1.26795 = 6$$

$$(u - v) \frac{\sqrt{3}}{2} = (4.73205 - 1.26795) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$x_1 = u + v = 6$$

$$x_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}j\sqrt{3} = -3 + j3$$

$$x_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}j\sqrt{3} = -3 - j3$$

Rückverschiebung: $z = x - 2$

$$z_1 = x_1 - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$z_2 = x_2 - 2 = (-3 + j3) - 2 = -5 + j3$$

$$z_3 = x_3 - 2 = (-3 - j3) - 2 = -5 - j3$$

Praktische Lösung von Gleichungen 3. Ordnung

Die analytische Lösung von Gleichungen 3. Ordnung ist nicht üblich, weil der Aufwand groß ist. Erst muß eine Koordinatenverschiebung durchgeführt werden, dann die Koordinatenverschiebung rückgängig gemacht werden.

Prinzip: Eine Lösung wird iterativ bestimmt (Verfahren wird später in Kap. 1.7 erläutert). Durch Polynomdivision kann anschließend die Gleichung auf 2. Ordnung reduziert werden. Die sich ergebende quadratische Gleichung wird gelöst.

Beispiel 3:

gegeben: $z^3 + 6z^2 - 6z - 136 = 0$ $z_1 = 4$ iterativ bestimmt (siehe Kap. 1.7)

gesucht: z_2, z_3

Lösung:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 6 \quad -6 \quad -136 \\ 4 \quad - \quad 4 \quad 40 \quad 136 \\ \hline 1 \quad 10 \quad 34 \quad 0 \end{array}$$

$$(z^3 + 6z^2 - 6z - 136) : (z - 4) = z^2 + 10z + 34$$

$$z^2 + 10z + 34 = 0$$

$$z_{2,3} = -5 \pm \sqrt{5^2 - 34} = -5 \pm \sqrt{-9} = -5 \pm j3$$

1.4.5. Algebraische Gleichung 4. Grades

Die allgemeine Form lautet:

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Eine analytische Lösung ist möglich, aber nicht üblich. Trotzdem soll die Methode ohne Ableitung angegeben werden. Mit Hilfe der oberen Koeffizienten a_0 bis a_3 wird eine Gleichung 3. Grades in y aufgestellt:

$$8y^3 - 4a_2y^2 + [2a_3a_1 - 8a_0]y + [a_0(4a_2 - a_3^2) - a_1^2] = 0$$

Die obere Gleichung in y wird für ein y gelöst und anschließend mit Hilfe von y der Wert A berechnet:

$$A = \sqrt{8y + a_3^2 - 4a_2}$$

Dann kann eine quadratische Gleichung in x angegeben werden:

$$x^2 + (a_3 \pm A)\frac{x}{2} + y + \frac{a_3 \cdot y - a_1}{\pm A} = 0$$

Die obere Gleichung hat wegen $\pm A$ vier Lösungen, diese sind auch die Lösung der oben angegebenen allgemei-

nen Form.

Beispiel:

gegeben: $x^4 + 18x^3 + 119x^2 + 342x + 360 = 0$

gesucht: x_{1234}

Lösung:

Ablesen der Koeffizienten:

$$a_3 = 18$$

$$a_2 = 119$$

$$a_1 = 342$$

$$a_0 = 360$$

Bestimmen eines y:

$$8y^3 - 4a_2y^2 + [2a_3a_1 - 8a_0]y + [a_0(4a_2 - a_3^2) - a_1^2] = 0$$

$$8y^3 - 4 \cdot 119y^2 + [2 \cdot 18 \cdot 342 - 8 \cdot 360]y + [360(4 \cdot 119 - 18^2) - 342^2] = 0$$

$$8y^3 - 476y^2 + 9432y - 62244 = 0$$

$$y^3 - 59.5y^2 + 1179y - 7780.5 = 0$$

Eine Lösung der oberen Gleichung kann bestimmt werden zu (hier ohne Herleitung):

$$y = 21$$

Bestimmung der Größe A:

$$A = \sqrt{8y + a_3^2 - 4a_2}$$

$$A = \sqrt{8 \cdot 21 + 18^2 - 4 \cdot 119} = \sqrt{16} = 4$$

x-Bestimmung:

$$x^2 + (a_3 \pm A)\frac{x}{2} + y + \frac{a_3 \cdot y - a_1}{\pm A}$$

$$x^2 + (18 \pm 4)\frac{1}{2}x + \left[21 + \frac{18 \cdot 21 - 342}{\pm 4}\right] = 0$$

$$x^2 + (9 \pm 2)x + [21 \pm 9] = 0$$

$$x_{12}^2 + 11x_{12} + 30 = 0$$

$$x_{34}^2 + 7x_{34} + 12 = 0$$

$$x_{12} = -5.5 \pm \sqrt{5.5^2 - 30} = -5.5 \pm 0.5$$

$$x_{34} = -3.5 \pm \sqrt{3.5^2 - 12} = -3.5 \pm 0.5$$

$$x_1 = -5$$

$$x_2 = -6$$

$$x_3 = -3$$

$$x_4 = -4$$

1.4.6. Algebraische Gleichungen n-ten Grades

Allgemeines

Ab $n = 5$ ist eine analytische Lösung nur in Sonderfällen möglich.

=> Iterative Methode anwenden

Eine allgemeine Gleichung n-ten Grades

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

kann mit Hilfe von Linearfaktoren umgeformt werden in:

$$a_n (x - x_{01})(x - x_{02}) \dots (x - x_{0n}) = 0$$

wobei x_{01}, x_{02} bis x_{0n} die Nullstellen der oberen Gleichung n-ter Ordnung sind.

Eine algebraische Gleichung n-ter Ordnung weist n Nullstellen auf.

Die Nullstellen können entweder **reell** oder paarweise **konjugiert komplex** sein.

Bei ungerader Ordnung n (1, 3, 5... usw.) bleibt auf jeden Fall eine reelle Lösung übrig. Bei gerader Ordnung besteht die Möglichkeit, daß keine reelle Lösung vorhanden ist.

Iterative Lösung

Prinzip: Von der Funktion

$$y(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

wird eine Nullstelle gesucht. Ein Näherungswert x_0 ist bekannt.

Nach dem Newton-Verfahren (Herleitung im 2. Semester) ergibt sich ein verbesserter Näherungswert im nächsten Schritt

$$x_1 = x_0 - \frac{y(x_0)}{y'(x_0)}$$

Für eine algebraische Gleichungen n-ten Grades mit Anfangswert x_i ergibt sich ein verbesserter Wert:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + a_3 x_i^3 + a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0}{n a_n x_i^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x_i^{(n-1)} + \dots + 3 a_3 x_i^2 + 2 a_2 x_i + a_1}$$

Die Verbesserung (Iteration) muß solange durchgeführt werden, bis sich der Wert x nicht mehr merkbar ändert.

$$|x_{i+1} - x_i| < \text{Schranke}$$

Anmerkung 1: Oberes Verfahren funktioniert auch für komplexe Nullstellen. Nur dann müssen alle x durch komplexe Zahlen ersetzt werden.

Anmerkung 2: Bei mehreren Lösungsmöglichkeiten ist die Lösung vom Anfangswert abhängig.

Anmerkung 3: Insbesondere bei iterativer Lösung im Komplexen kann es sein, daß man sich von der Lösung entfernt. Man spricht dann von "**nicht konvergenter Iteration**". Abhilfe: Wahl eines anderen Anfangswertes. Für die meisten Anfangswerte ist die Lösung konvergent, aber nicht für alle.

Tip: Bei komplexer Lösung: Anfangswert Imaginärteil und Realteil zuordnen.

Anmerkung 4: Die Iteration verläuft in der Nähe der Lösung wesentlich schneller. (Anfangswert evtl. grafisch ermitteln).

Schema zur Bestimmung der n Lösungen

Problematik:

Eine algebraische Gleichung n-ter Ordnung hat im Komplexen auch n Lösungen. Diese sind allgemein verschieden, können aber auch gleich sein. Bei der Iteration ist die Lösung vom Anfangswert abhängig. Die komplexe Ebene für den Anfangswert kann in n Gebiete aufgeteilt werden. Ordnungs-Kriterium: Zuordnung des Anfangswertes zur Nummer der Lösungen. Dieses ist von den Koeffizienten abhängig und man kann dieses nicht übersehen. Wie stellt man sicher, daß man auch n verschiedene Lösungen erhält? Hat man eine gefunden, kann das Polynom dividiert werden:

Beispiel

x_{01} ist gefunden

$$(x - x_{01})(x - x_{02})(x - x_{03}) = (x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)$$

$$(x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)/(x - x_{01}) = (x - x_{02})(x - x_{03}) = x^2 + b_1x + b_0$$

Obere Division kann als Polynomdivision (von Hand mit Horner Schema) durchgeführt werden. Als Ergebnis bleibt ein Polynom (n-1). Ordnung zurück, aus dem dann weitere Nullstellen bestimmt werden können. Somit ist sicher, daß n verschiedene Lösungen (die auch gleich sein können) gefunden werden. Dieses Verfahren ist auch im Komplexen möglich. Bei Polynomdivision einer Lösung ergeben sich komplexe Koeffizienten des neuen Polynoms. Es ist auch möglich gleich durch Lösung und die konjugiert komplexe Lösung zu dividieren. Dann sind die Polynom-Koeffizienten wieder reell.

Zusammenfassung Schema

- A] eine Lösung iterativ bestimmen, notieren
- B] Ordnung der Gleichung durch Polynom-Division um 1(2) reduzieren.
- C] Falls noch nicht n Lösungen vorhanden, gehe zu A.

Hinweis: Das Schema eignet sich eher zur Programmierung auf Rechner als zur manuellen Berechnung.

Beispiel zur iterativen Lösung

gegeben: $x^3 + 6.875x^2 + 43x - 58.5 = 0$

gesucht: x_1, x_2, x_3

Lösung:

Ansatz: $y = x^3 + 6.875x^2 + 43x - 58.5 = 0$

Ableitung: $y' = 3x^2 + 13.75x + 43 = 0$

Anfangswert: $x_1 = 0$

Formel: $x_2 = x_1 - \frac{y(x_1)}{y'(x_1)}$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 + 6.875x_1^2 + 43x_1 - 58.5}{3x_1^2 + 13.75x_1 + 43} = 0 - \frac{-58.5}{43} = 1.360465$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 + 6.875x_2^2 + 43x_2 - 58.5}{3x_2^2 + 13.75x_2 + 43}$$

$$x_3 = 1.360465 - \frac{1.360465^3 + 6.875 \cdot 1.360465^2 + 43 \cdot 1.360465 - 58.5}{3 \cdot 1.360465^2 + 13.75 \cdot 1.360465 + 43} = 1.133838$$

$$x_4 = 1.125013$$

$$x_5 = 1.125000$$

$$x_6 = 1.125000$$

Polynom-Division: nach Horner Schema (siehe Kap. 2.2.2.2)

	1	6.875	43	-58.5
1.125	-	1.125	9	58.5
	1	8	52	0

$$(x^3 + 6.875x^2 + 43x - 58.5):(x - 1.125) = x^2 + 8x + 52$$

$$x_{2,3} = -4 \pm \sqrt{4^2 - 52} = -4 \pm \sqrt{-36} = -4 \pm j6$$

Ergebnis: $x_1 = 1.125$

$x_{2,3} = -4 \pm j6$

1.5. Transzendente Gleichungen

Transzendente Gleichungen sind Gleichungen, die transzendente Funktionen enthalten.

Im allgemeinen sind diese transzendenten Gleichungen nicht lösbar, sondern nur in Ausnahmefällen. Diese Ausnahmefälle sollen anhand der verschiedenen transzendenten Funktionen in den nächsten Abschnitten an Beispielen aufgezeigt werden.

1.5.1. Goniometrische Gleichungen

Goniometrische Gleichungen sind Gleichungen in denen trigonometrischen Funktionen enthalten sind.

Beispiel 1:

gegeben: $\sin(x) + 1 = x$

gesucht: x

Nicht analytisch lösbar, nur iterativ, siehe Kap. 1.7.

Lösungs-Prinzip 1: Falls Sinus- und Kosinus-Terme in der Gleichung vorhanden sind, dann wird ein Term ersetzt mit Hilfe der Gleichung: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Beispiel 2: (Aufgabe 1.13a)

gegeben: $\sin(x) + \cos(x) = 1$

gesucht: alle Lösungen im Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$

Lösung:

$$1 - \sin(x) = \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

$$1 - 2\sin(x) + \sin^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

$$2\sin^2(x) - 2\sin(x) = 0$$

$$2\sin(x)[1 - \sin(x)] = 0$$

$$\Rightarrow \sin(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_2 = \pi \quad x_3 = 2\pi$$

$$\sin(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{\pi}{2}$$

Probe: $x_1:$	$\sin(0) + \cos(0) = 1$	$\Rightarrow$	OK
$x_2:$	$\sin(\pi) + \cos(\pi) = -1$	$\Rightarrow$	keine Lösung
$x_3:$	$\sin(2\pi) + \cos(2\pi) = 1$	$\Rightarrow$	OK
$x_4:$	$\sin(\pi/2) + \cos(\pi/2) = 1$	$\Rightarrow$	OK

Die eine nicht korrekte Lösung wurde durch das obere Quadrieren erhalten. Achtung: **Falls quadriert wird, müssen die Lösungen überprüft werden.**

Beispiel 3:**gegeben:** $2\sin(x) + \cos(x) = -1.5$ **gesucht:** alle Lösungen im Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$ **Lösung:**

$$-1.5 - 2\sin(x) = \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

$$2.25 + 6\sin(x) + 4\sin^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

$$5\sin^2(x) + 6\sin(x) + 1.25 = 0$$

$$\sin^2(x) + 1.2\sin(x) + 0.25 = 0$$

$$\sin(x) = -0.6 \pm \sqrt{0.36 - 0.25} = -0.6 \pm \sqrt{0.11}$$

$$\sin(x) = -0.6 \pm 0.3317$$

$$x_{01} = \arcsin(-0.2683)$$

$$x_{02} = \arcsin(-0.9317)$$

$$x_{01} = -15.56^\circ$$

$$x_{02} = -68.70^\circ$$

Gesuchte Werte liegen nicht im angegebenen Bereich.

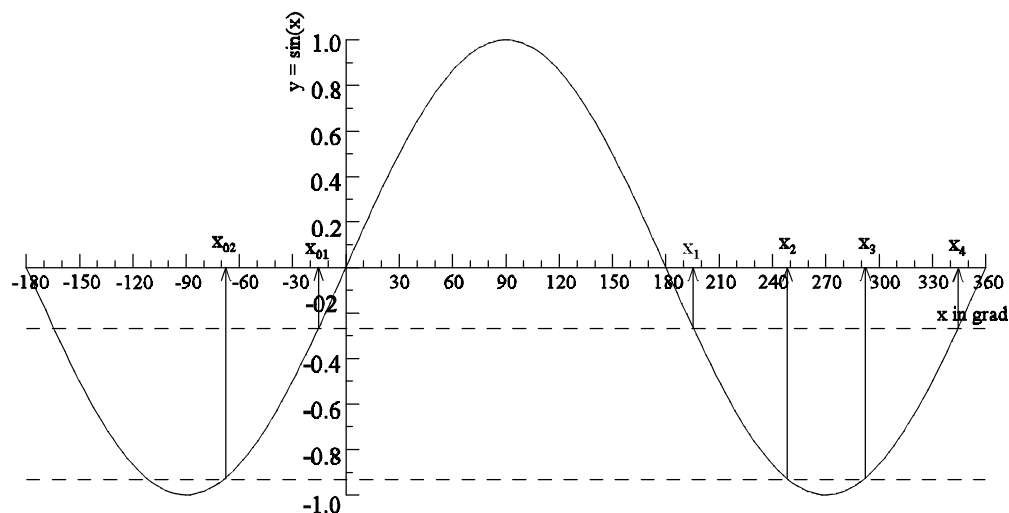


Bild MA151A

Nach Bild MA151A und auch nach Arbeitsblatt MAI-12 ergeben sich im Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$ vier Lösungen:

$$x_1 = 180^\circ - x_{01} = 180^\circ - (-15.56^\circ) = 195.56^\circ$$

$$x_2 = 180^\circ - x_{02} = 180^\circ - (-68.70^\circ) = 248.70^\circ$$

$$x_3 = 360^\circ + x_{02} = 360^\circ + (-68.70^\circ) = 291.30^\circ$$

$$x_4 = 360^\circ + x_{01} = 360^\circ + (-15.56^\circ) = 344.44^\circ$$

Probe: $y = 2\sin(x) + \cos(x) = -1.5$

$$y(x_1) = 2\sin(x_1) + \cos(x_1) = 2\sin(195.56^\circ) + \cos(195.56^\circ) = -1.5$$

=> Lösung

$$y(x_2) = 2\sin(x_2) + \cos(x_2) = 2\sin(248.70^\circ) + \cos(248.70^\circ) = -2.23$$

=> keine Lösung

$$y(x_3) = 2\sin(x_3) + \cos(x_3) = 2\sin(291.30^\circ) + \cos(291.30^\circ) = -1.5$$

=> Lösung

$$y(x_4) = 2\sin(x_4) + \cos(x_4) = 2\sin(344.44^\circ) + \cos(344.44^\circ) = 0.427$$

=> keine Lösung

Ergebnis: $x_1 = 195.56^\circ$ $x_3 = 291.30^\circ$

Prinzip 2: Durch Umformung der Winkel-Funktionen wird die Lösung analytisch lösbar.

Beispiel 4: (Aufgabe 1.13b)

gegeben: $\sin(2x) = \tan(x)$

gesucht: alle Lösungen im Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$

$$\sin(2x) = 2\sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$2\sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Es darf nur mit $\cos(x)$ multipliziert werden wenn $\cos(x) \neq 0$, dieses ist später zu überprüfen.

$$2\sin(x) \cdot \cos^2(x) = \sin(x)$$

Darf hier durch $\sin(x)$ dividiert werden? Im Prinzip schon, wenn $\sin(x) \neq 0$ ist. Aber durch diese Division würden Lösungen verloren gehen, weil $\sin(x) = 0$ eine Lösung ist. Also umformen:

$$2\sin(x) \cdot \cos^2(x) - \sin(x) = 0$$

$$\sin(x)[2\cos^2(x) - 1] = 0$$

Wann ist ein Produkt gleich Null? Immer dann, wenn ein Multiplikand gleich Null ist.

$$\sin(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 180^\circ \quad x_3 = 360^\circ$$

$$2\cos^2(x) - 1 = 0$$

$$\cos(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x_4 = 45^\circ \quad x_5 = 135^\circ \quad x_6 = 225^\circ \quad x_7 = 315^\circ$$

Probe: $y = \sin(2x) - \tan(x) = 0$

$$y(x_1=0^\circ) = \sin(2 \cdot 0^\circ) - \tan(0^\circ) = 0 \quad \Rightarrow \text{Lösung}$$

$$y(x_2=180^\circ) = \sin(2 \cdot 180^\circ) - \tan(180^\circ) = 0 \quad \Rightarrow \text{Lösung}$$

$$y(x_3=360^\circ) = \sin(2 \cdot 360^\circ) - \tan(360^\circ) = 0 \quad \Rightarrow \text{Lösung}$$

$$y(x_4=45^\circ) = \sin(2 \cdot 45^\circ) - \tan(45^\circ) = 0 \quad \Rightarrow \text{Lösung}$$

$$y(x_5=135^\circ) = \sin(2 \cdot 135^\circ) - \tan(135^\circ) = 0 \quad \Rightarrow \text{Lösung}$$

$$y(x_6=225^\circ) = \sin(2 \cdot 225^\circ) - \tan(225^\circ) = 0 \quad \Rightarrow \text{Lösung}$$

$$y(x_7=315^\circ) = \sin(2 \cdot 315^\circ) - \tan(315^\circ) = 0 \quad \Rightarrow \text{Lösung}$$

1.5.2. Exponential-Gleichungen

Exponential-Gleichungen sind allgemein nicht lösbar, nur in Sonderfällen.

Beispiel 1: (Aufgabe 1.14a)

gegeben: $\sqrt[3]{a^{x+2}} = \sqrt{a^{x-5}}$

gesucht: x

Lösung: $a^{\frac{x+2}{3}} = a^{\frac{x-5}{2}}$

$$\frac{x+2}{3} = \frac{x-5}{2} \qquad 2x + 4 = 3x - 15 \qquad 19 = x$$

Beispiel 2: (Aufgabe 1.14b)

gegeben: $2^{x+1} + 3^{x-3} = 3^{x-1} - 2^{x-2}$

gesucht: x

Lösung: $2^x \cdot 2^1 + 3^x \cdot 3^{-3} = 3^x \cdot 3^{-1} - 2^x \cdot 2^{-2}$ $2 \cdot 2^x + \frac{1}{27} \cdot 3^x = \frac{1}{3} \cdot 3^x - \frac{1}{4} \cdot 2^x$

$$\left(2 + \frac{1}{4}\right) 2^x = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27}\right) 3^x$$

$$\frac{2 + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{27}} = \frac{3^x}{2^x} \qquad \frac{\frac{8+1}{4}}{\frac{9-1}{27}} = \left(\frac{3}{2}\right)^x \qquad \frac{9 \cdot 27}{4 \cdot 8} = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$\frac{243}{32} = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$\ln\left(\frac{243}{32}\right) = \ln\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right] = x \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{243}{32}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} = 5$$

Beispiel 3: (Aufgabe 1.14c)

gegeben: $4^{3x} \cdot 5^{2x-3} = 6^x$

gesucht: x

Lösung: $\ln(4^{3x}) + \ln(5^{2x-3}) = \ln(6^x)$

$$3x \cdot \ln(4) + (2x - 3) \cdot \ln(5) = x \cdot \ln(6)$$

$$x[3 \cdot \ln(4) + 2 \cdot \ln(5) - \ln(6)] = 3 \cdot \ln(5)$$

$$x = \frac{3 \cdot \ln(5)}{3 \cdot \ln(4) + 2 \cdot \ln(5) - \ln(6)} = 0.8644$$

1.5.3. Logarithmische-Gleichungen

Logarithmische-Gleichungen sind allgemein auch nicht lösbar, nur in Sonderfällen.

Beispiel 1: (Aufgabe 1.15a)

gegeben: $\ln(2x^2 - 12x - 7) = 2\ln(3 - x)$

gesucht: x

Lösung: $\ln(2x^2 - 12x - 7) = \ln(3 - x)^2$
 $2x^2 - 12x - 7 = (3 - x)^2 = 9 - 6x + x^2$
 $x^2 - 6x - 16 = 0$
 $x_{12} = 3 \pm \sqrt{9 + 16} = 3 \pm 5$
 $x_1 = 8 \quad x_2 = -2$

Probe: $x_1 = 8 \quad \ln(2 \cdot 8^2 - 12 \cdot 8 - 7) = 2\ln(3 - 8)$
 $\ln(25) = 2\ln(-5) \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$
 $x_2 = -2 \quad \ln(2 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) - 7) = 2\ln[3 - (-2)]$
 $\ln(25) = 2\ln(5) \quad \Rightarrow \quad \text{Lösung}$

Achtung: Wird beim Lösen von Gleichungen eine Quadrierung vorgenommen, müssen wegen der zusätzlichen Lösungen, alle Lösungen überprüft werden.

Beispiel 2: (Aufgabe 1.15b)

gegeben: $\ln(x+2) = \sqrt{2\ln(x+2) + 3}$

gesucht: x

Lösung:

Substitution: $y = \ln(x+2) \quad (x+2) = e^y \quad x = -2 + e^y$
 $y = \sqrt{2y + 3}$
 $y^2 = 2y + 3$
 $y^2 - 2y - 3 = 0$
 $y_{12} = 1 \pm \sqrt{1 + 3} = 1 \pm 2$
 $y_1 = 3 \quad y_2 = -1$
 $x_1 = -2 + e^{y_1} = -2 + e^3 = 18.086 \quad x_2 = -2 + e^{y_2} = -2 + e^{-1} = -1.632$

Probe: $x_1 \quad \ln(18.086+2) = \sqrt{2 \cdot \ln(18.086+2) + 3}$
 $3 = \sqrt{9} \quad \Rightarrow \quad \text{Lösung}$
 $x_2 \quad \ln(2-1.632) = \sqrt{2 \cdot \ln(2-1.632) + 3}$
 $-1 = \sqrt{1} \quad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$

1.6. Grafische Lösung

Wozu grafische Lösung?

A] schnell, übersichtlich

B] Anfangswert für Iteration, siehe Kap. 1.7

Theorie:

Die Funktion

$$y = f(x) = 0 \quad (\text{A})$$

wird aufgespalten in zwei Funktionen

$$y = f_1(x) - f_2(x) = 0 = y_1(x) - y_2(x) = f(x)$$

Umformen ergibt:

$$y_1(x) = y_2(x)$$

Die Ausgangsgleichung ist erfüllt, wenn die Funktion $y_1(x)$ gleich der Funktion $y_2(x)$ ist. Dieses läßt sich auch grafisch ausführen, siehe Bild MA16A.

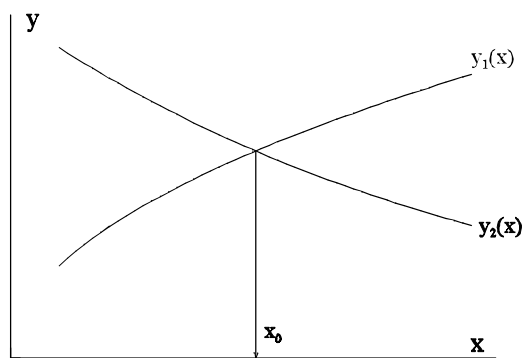


Bild MA16A: Grafisches Gleichsetzen zweier Funktionen

Aus Bild MA16A ist zu erkennen, daß an der Stelle x_0 die Funktionswerte von $y_1(x)$ und $y_2(x)$ übereinstimmen. Somit ist auch die obere Gleichung (A) erfüllt. Fazit: Durch Aufspalten und Skizzieren von zwei Funktionen ist die Lösung einer Gleichung grafisch möglich. Die Aufspaltung sollte so erfolgen, daß sich zwei leicht zu skizzierende Funktionen ergeben.

Beispiel 1:

gegeben: $4\cos(2x) + 2 - 1.5x = 0$

Aufspaltung: $4\cos(2x) = -2 + 1.5x$
 $y_1(x) = y_2(x)$

$$y_1(x) = 4\cos(2x)$$

$$y_2(x) = -2 + 1.5x$$

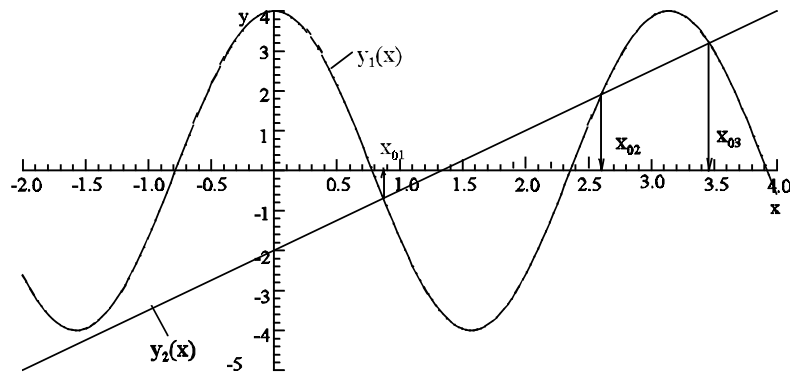


Bild MA16B

Aus Bild MA16B können 3 Näherungslösungen abgelesen werden:

$$x_{01} = 0.9$$

$$x_{02} = 2.6$$

$$x_{03} = 3.5$$

Beispiel 2:

gegeben: $3e^{-0.25x} - x^2 + 1 = 0$

Aufspaltung: $3e^{-0.25x} = x^2 - 1$
 $y_1(x) = y_2(x)$
 $y_1 = 3e^{-0.25x} = 3 \cdot e^{-x/4}$

$$y_2 = x^2 - 1$$

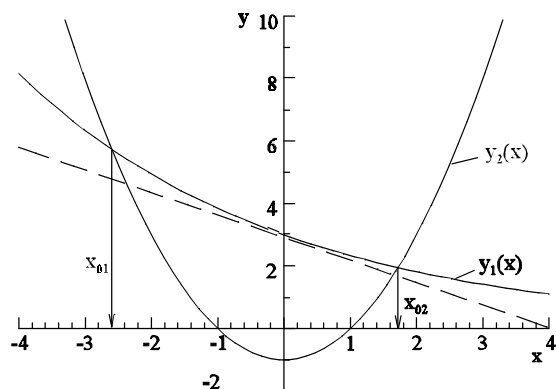


Bild MA16C

Aus Bild MA16C können 2 Näherungslösungen abgelesen werden:

$$x_{01} = -2.6$$

$$x_{02} = 1.7$$

1.7. Iterative Lösung

Prinzip: Gleichung wird umgeformt zu einer Funktion, deren Nullstelle durch gezieltes Propieren gefunden wird.

$$\begin{array}{lll} f(x) = 0 & \Rightarrow & y = f(x) \\ \text{Lösung} & \Rightarrow & \text{Nullstelle der Funktion } f(x) \end{array}$$

Wie findet man die Nullstelle?

- | | |
|----------------------------|--------|
| - Propiermethode: | mühsam |
| - gezielte Propiermethode: | besser |

1.7.1. Newton-Methode

Hier nur Angabe (Herleitung im 2.Semester):

$$x_{i+1} = x_i - \frac{y(x_i)}{y'(x_i)}$$

Beispiel 1: (entspricht auch Beispiel 1 aus Kap. 1.6)

gegeben: $4\cos(2x) + 2 - 1.5x = 0$

Anfangswerte aus grafischer Lösung (Kap. 1.6, Beispiel 1)

$$x_{01} = 0.9 \qquad x_{02} = 2.6 \qquad x_{03} = 3.5$$

$$y(x) = 4\cos(2x) + 2 - 1.5x$$

$$y'(x) = -8\sin(2x) - 1.5$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{4*\cos(2x_i) + 2 - 1.5x_i}{-8*\sin(2x_i) - 1.5}$$

$$x_0 = 0.9 \qquad x_0 = 2.6 \qquad x_0 = 3.5$$

$$x_1 = 0.872144 \text{ *)} \qquad x_1 = 2.604658 \qquad x_1 = 3.465306$$

$$x_2 = 0.872282 \qquad x_2 = 2.604673 \qquad x_2 = 3.464135$$

$$x_3 = 0.872282 \qquad x_3 = 2.604673 \qquad x_3 = 3.464134$$

$$x_4 = 3.464134$$

*) Berechnung für x_1 (Achtung: Taschenrechner auf rad)

$$x_1 = x_0 - \frac{4*\cos(2*x_0) + 2 - 1.5*x_0}{-8*\sin(2*x_0) - 1.5} = 0.9 - \frac{4*\cos(2*0.9) + 2 - 1.5*0.9}{-8*\sin(2*0.9) - 1.5} = 0.872144$$

Beispiel 2: (entspricht auch Beispiel 2 aus Kap. 1.6)

gegeben: $3e^{-0.25x} - x^2 + 1 = 0$

Anfangswerte aus grafischer Lösung (Kap. 1.6, Beispiel 2)

$$x_{01} = -2.6 \quad x_{02} = 1.7$$

$$y(x) = 3 * e^{-0.25x} - x^2 + 1$$

$$y'(x) = -0.75 * e^{-0.25x} - 2x$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{3 * e^{-0.25x_i} - x_i^2 + 1}{-0.75 * e^{-0.25x_i} - 2x_i}$$

$$x_0 = -2.6$$

$$x_1 = -2.596445$$

$$x_2 = -2.596443$$

$$x_3 = -2.596443$$

$$x_0 = 1.7$$

$$x_1 = 1.71833$$

$$x_2 = 1.71825$$

$$x_3 = 1.71825$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 5.333333$$

$$x_2 = 2.880023$$

$$x_3 = 1.927504$$

$$x_4 = 1.727792$$

$$x_5 = 1.718271$$

$$x_6 = 1.718250$$

$$x_7 = 1.718250$$

$$x_0 = 10$$

$$x_1 = 5.077465$$

$$x_2 = 2.768152$$

$$x_3 = 1.895140$$

$$x_4 = 1.725164$$

$$x_5 = 1.718261$$

$$x_4 = 1.718250$$

$$x_4 = 1.718250$$

Bei der oberen Iteration wurden auch zwei andere Anfangswerte ($x_{03} = 0$, $x_{04} = 10$) untersucht, die weit von der Lösung entfernt liegen. In diesem Fall dauert die Iteration länger. Bei manchen Gleichungen kann sich der Wert auch von der Lösung entfernen. In diesem Fall muß ein anderer Anfangswert ausprobiert werden.

1.7.2. Regula Falsi

Die Gleichung

$$f(x) = 0$$

wird in die Funktion

$$y(x) = f(x) = 0$$

überführt, deren Nullstellen bestimmt werden. Durch Probieren oder durch grafische Methode werden die zwei Punkte

$$P_1 = (x_1, y_1)$$

$$P_2 = (x_2, y_2)$$

bestimmt. Bedingung: Einer der y-Werte (y_1 oder y_2) muß größer Null sein und der andere kleiner Null. Durch die zwei Punkte wird eine Gerade gelegt, siehe Bild MA172A.

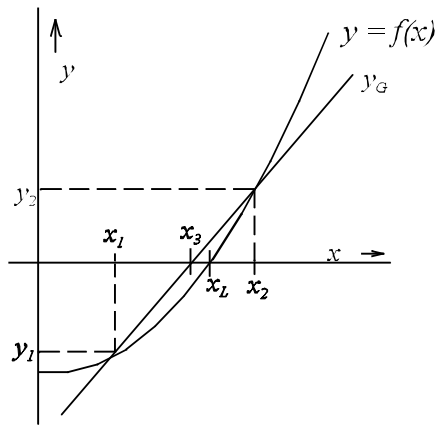


Bild MA172A

Aus Bild MA172A ist zu erkennen, daß der Wert x_3 (Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse) näher an der Lösung x_L liegt, als x_1 oder x_2 . Zur Ermittlung von x_3 wird die Gerade $y_G(x)$ nach der Punkt-Richtung-Form bestimmt und zu Null gesetzt:

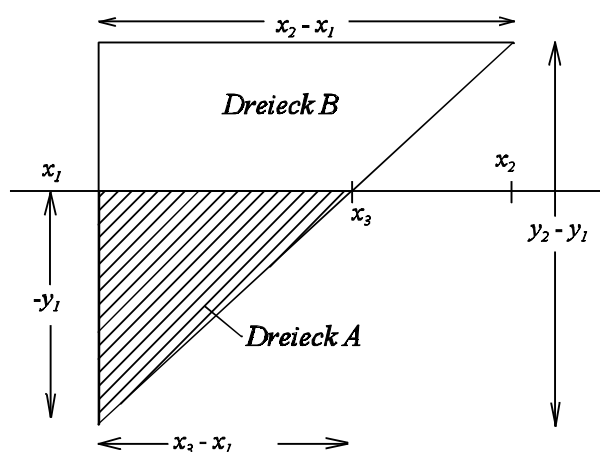
$$y_G(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x_3 - x_1) = 0$$

Durch Auflösen des oberen Ausdrucks nach x_3 ergibt sich:

$$x_3 = x_1 - y_1 \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

Ist der Wert x_3 gefunden, muß mit dem Punkt 3 und einem der schon bestimmten Punkte weitergerechnet werden.

Leichter läßt sich die obere Formel nach Bild MA172B herleiten. Die beiden Dreiecke des Bildes MA172A sind in Bild MA172B sind noch einmal gezeichnet.



Dreieck A Dreieck B

$$\frac{x_3 - x_1}{-y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

Durch Auflösen nach x_3 ergibt sich die Formel nach Regula Falsi für die Iteration

$$x_3 - x_1 = -y_1 \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

$$x_3 = x_1 - y_1 \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

Bild MA172B

Für die obere Formel werden zwei Wertpaare der Funktion $y = f(x)$ benötigt, also zwei Anfangswerte vorgeben, dieses ist aber aufwendiger zu programmieren. Praktischer zu programmieren: Einen zweiten Wert dicht neben den Anfangswert zu benutzen. Wie dicht daneben? Antwort: Etwa in der Größenordnung der x-Genauigkeit. Die Formel nach Regula Falsi hat gewisse Verwandtschaft zur Newton-Formel:

$$x_3 = x_1 - \frac{y_1}{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

mit $\Delta x = x_2 - x_1$ und $\Delta y = y_2 - y_1$ ergibt sich:

$$x_3 = x_1 - \frac{y_1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Anstatt des Differential-Quotienten der Newton-Formel ist in der oberen Formel der Differenzen-Quotient enthalten.

Beispiel:

gegeben: $x^2 - 10 = 0$

gesucht: x

analytische Lösung: $x = \sqrt{10} = 3.162$

Lösung: $y = x^2 - 10$
 $x_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -1$
 $x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 6$
 $x_3 = x_1 - y_1 \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = 3 - (-1) \cdot \frac{4 - 3}{6 - (-1)} = 3.143$

Neue zwei Punkt zur Iteration: $(x_1, y_1), (x_3, y_3)$

$$y_3 = 3.143^2 - 10 = -0.122$$

$$x_4 = x_1 - y_1 \frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} = 3 - (-1) \cdot \frac{3.143 - 3}{-0.122 - (-1)} = 3.163$$

$$y_4 = 3.163^2 - 10 = 0.005$$

Neue Iteration mit den Punkten (x_3, y_3) und (x_4, y_4)

$$x_5 = x_3 - y_3 \frac{x_4 - x_3}{y_4 - y_3} = 3.143 - (-0.122) \cdot \frac{3.163 - 3.143}{0.005 - (-0.122)} = 3.162$$

2. Funktionen

2.1. Grundbegriffe der Funktionslehre

2.1.1. Funktionsbegriff

2.1.1.1. Allgemeiner Funktionsbegriff

Hier soll keine theoretische Mathematik betrieben werden, aber einige Begriffe müssen definiert werden.

Definition: Eine Funktion (oder auch Abbildung) ordnet einer Ausgangsmenge mittels Funktionsvorschrift eine Zielmenge zu.

Die obere Definition gilt nicht nur in der Mathematik, sondern auch in anderen Bereichen:

Biologie:	Einteilung in Laub- und Nadelbäume ist eine Funktionsvorschrift
Astronomie:	Sonnenaufgang = $f(\text{Tag des Jahres})$
Politik:	Einteilung nach Parteizugehörigkeit ist eine Funktionsvorschrift
Elektrotechnik:	$U = f(I) = I \cdot R$

Wobei das obere ohmsche Gesetz auch wiederum eine mathematische Funktion ist. In der Physik stellt man meistens eine Funktion erst durch Messung fest, die man dann mathematisch zu erklären sucht, z.B. Ohmsches Gesetz oder Fallgesetze.

2.1.1.2. Mathematischer Funktionsbegriff

Beispiel: $y = x^2 = f(x)$

Funktionsvorschrift:	Gleichung $y = x^2$
Ausgangsmenge:	reelle Zahlen
Zielmenge:	Wertebereich: $0 \leq y < \infty$

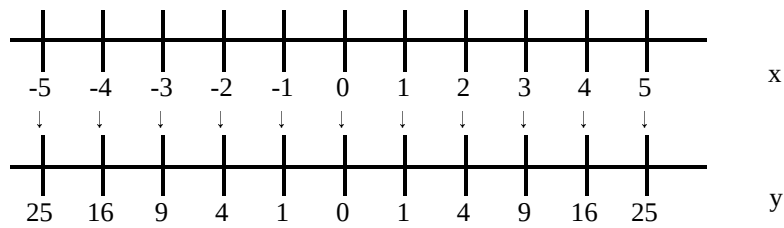
Definition für eine Funktion mit einer Veränderlichen:

Mittels Gleichungsvorschrift (Funktionsvorschrift) wird einer unabhängigen Variablen (hier meist x) eine abhängige Variable (hier meist y) zugeordnet. Im eigentlichen Sinn von einer Funktion kann nur gesprochen werden, wenn jedem x -Wert nur ein y -Wert zugeordnet wird.

Eingangsgröße:	unabhängige Variable	meist x
Ausgangsgröße:	abhängige Variable	meist y

2.1.2. Darstellungsmöglichkeiten einer Funktion

A] Zahlengerade (früher Rechenschieber) für $y = x^2$



B] Tabelle

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	1.01
y = x ²	9	4	1	0	1	4	9	16	1.0201

C] Grafische Darstellung : Funktionsgraf

D] Funktionsvorschrift

E] als Differentialgleichung (DGL) mit Anfangswerten

Beispiel: Die Funktion $y = \cos(x)$ lässt sich beschreiben als $y'' = -y$ mit den Anfangswerten $y(x=0) = 1$ und $y'(x=0) = 0$.

Die grafische Darstellungsart ist die wohl wichtigste, weil anschaulichste. Diese Darstellungsart soll im nächsten Abschnitt ausführlich dargestellt werden.

2.1.3. Grafische Darstellung

Die grafische Darstellung der Funktion $y = f(x)$ erfolgt in einem **x-y-Koordinatensystem**, siehe Bild MA213A.

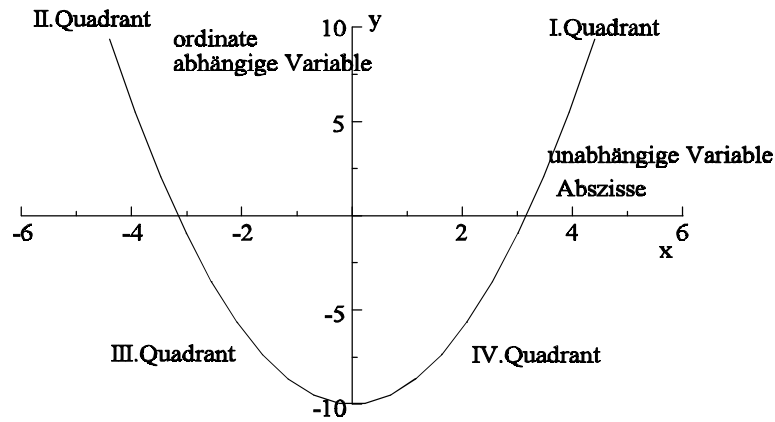


Bild MA213A: Die Funktion $y = x^2 - 10$ im x-y-Koordinatensystem

2.1.3.1. Achsen

Die Achsen sind die x-Achse und die y-Achse, in Handskizzen mit Pfeil, Computerzeichnungen ohne Pfeil. Achse mit Beschreibung x oder y. Bei Darstellung physikalischer Größen gibt es zwei Möglichkeiten:

- Größe und Einheit als Beschriftung; Beispiel U in V, an der Achse Zahlenwerte (10, 20, 30, ...)
- Größe als Beschriftung, Achsenwerte mit Größe (10 V, 20 V, 30 , ...)

Die Achsen können auch mathematisch beschrieben werden:

Für die x-Achse gilt: $y = 0$

Für die y-Achse gilt: $x = 0$

Die Achse der unabhängigen Variablen wird auch genannt: Abszisse

Die Achse der abhängigen Variablen wird auch genannt: Ordinate

2.1.3.2. Abhängige und unabhängige Variable

x - unabhängige Variable

y - abhängige Variable

Die unabhängige Variable x kann alle Werte des betrachteten Zahlenbereiches annehmen, während sich der Wert der abhängigen Variablen durch die Funktionsvorschrift ergibt.

2.1.3.3. Funktionsgraf

Die Werte von abhängiger und unabhängiger Variable werden in das Koordinatensystem eingetragen. Die Verbindung aller Punkte ist der Funktionsgraf.

2.1.3.4. Mathematisch positive Richtung

Die mathematisch positive Richtung ist definiert als die Richtung entgegen dem Uhrzeigersinn, also linksrum. Meist wird die Zählung bei der positiven x-Achse (für Winkel) begonnen.

Mathematisch positive Richtung $\Leftrightarrow$ entgegen Uhrzeiger $\Leftrightarrow$ linksrum

2.1.3.5. Quadrant

Durch die x-Achse und durch die y-Achse wird die x-y-Ebene in vier Viertel geteilt, die Quadranten genannt werden. Der erste Quadrant ist der mit positiven x- und y-Werten. Die Zählung der Quadranten erfolgt in mathematischer positiver Richtung. Daraus folgt für die Quadranten:

I. Quadrant	$x > 0$	und	$y > 0$
II. Quadrant	$x < 0$	und	$y > 0$
III. Quadrant	$x < 0$	und	$y < 0$
IV. Quadrant	$x > 0$	und	$y < 0$

2.1.4. Definitions- und Wertebereich

Definitionsbereich: Dieses ist der Bereich der möglichen Werte der unabhängigen Variablen (hier meist x). Für das Beispiel in Bild MA213A ist der Definitionsbereich alle reellen Zahlen

$$D = \{R\} = \{x / -\infty \leq x \leq +\infty\}.$$

Wertebereich: Dieses ist der Bereich aller möglichen Werte der abhängigen Variablen (meist y), die sich bei Einsetzen des Definitionsbereiches in die Funktionsvorschrift ergeben, also der Bereich der Funktionswerte. Für das Beispiel in Bild MA213A gilt für den Wertebereich

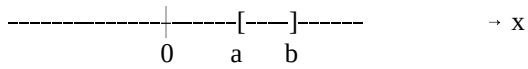
$$W = \{y / y \geq -10\}.$$

2.1.5. Intervall

Ein Intervall ist ein zusammenhängendes Gebiet von Zahlenwerten, das nach rechts und links begrenzt ist. Je nachdem, ob die Grenze mit eingeschlossen ist oder nicht, unterscheidet man verschiedene Intervalle.

Geschlossenes Intervall

Dieses beinhaltet sowohl die rechte als auch die linke Grenze.

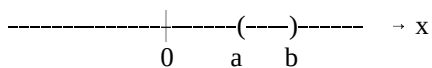
Zahlengerade: 

Kennzeichnung: $[a, b]$

Wertebereich: $a \leq x \leq b$

Offenes Intervall

Beim offenen Intervall ist sowohl die linke als auch die rechte Grenze nicht Teil des Intervalls.

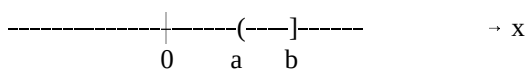
Zahlengerade 

Kennzeichnung: (a, b)

Wertebereich: $a < x < b$

Halb offenes oder einseitig offenes Intervall

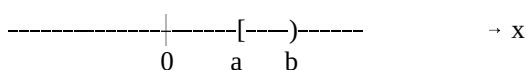
Hier ist eine der Seiten offen und die andere geschlossen. zwei Möglichkeiten:

Zahlenbereich: 

Kennzeichnung: $(a, b]$

Wertebereich: $a < x \leq b$

oder

Zahlenbereich: 

Kennzeichnung: $[a, b)$

Wertebereich: $a \leq x < b$

2.1.6. Extremwerte

Bei den Extremwerten ist zu unterscheiden zwischen

- Maxima
- Minima

Außerdem gibt es

- absolute Extremwerte
- relative Extremwerte

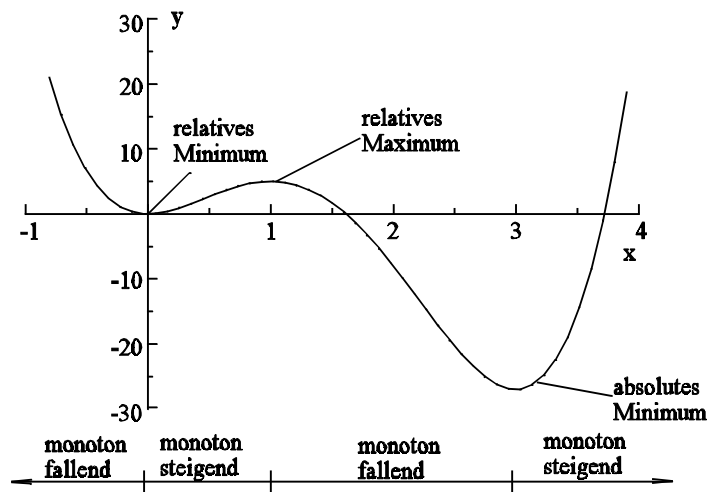


Bild MA216A: Die Funktion $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$

Die in Bild MA216A dargestellte Funktion hat folgende drei Extremwerte:

$x = 0$	$y = 0$	relatives Minimum
$x = 1$	$y = 5$	relatives Maximum
$x = 3$	$y = -27$	absolutes Minimum

Die Berechnung der Extremwerte wird in Kap. 6.3.8 (2. Semester) erläutert.

2.1.7. Monotonie

Unterschieden wird zwischen monoton steigend und monoton fallend. Nach Bild MA216A ergibt sich für die Funktion $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ in den vier Intervallen:

$(-\infty, 0)$	$-\infty < x < 0$	monoton fallend
$(0, 1)$	$0 < x < 1$	monoton steigend
$(1, 3)$	$1 < x < 3$	monoton fallend

$(3, \infty)$ $0 < x < \infty$ monoton steigend

2.1.8. Grenzwerte

Den Grenzwert einer Funktion erhält man, wenn man sich x langsam annähert. Da gibt es nun zwei Möglichkeiten sich anzunähern:

- x langsam größer werden lassen, d.h. sich von links an x anzunähern, dann spricht man von linksseitigem Grenzwert.
- oder x langsam kleiner werden lassen, d.h. sich von rechts an x anzunähern, dann spricht man von rechtsseitigem Grenzwert.

linksseitiger Grenzwert:
$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f\{f(x-\epsilon)\}$$

rechtsseitiger Grenzwert:
$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f\{f(x+\epsilon)\}$$

Grenzwert allgemein:
$$f(x) = \lim_{x \rightarrow x_1} f\{f(x_1)\}$$

Wozu ist nun der Grenzwert gut? Dazu ein Beispiel:
Die Funktion

$$y = \frac{\sin(x)}{x}$$

ist an der Stelle $x = 0$ nicht definiert, weil Null durch Null dividiert wird. Taschenrechner auf Rad einstellen!

x	$\sin(x)/x$
0.1	0.9983
0.01	0.999983
0.001	0.99999983
-0.1	0.9983

Aus Taschenrechner-Berechnungen (kein strenger mathematischer Beweis, dieser erfolgt später:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(x)}{x} \right\} = 1$$

Einige Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \{f_1(x) + f_2(x)\} = \lim_{x \rightarrow x_1} \{f_1(x)\} + \lim_{x \rightarrow x_1} \{f_2(x)\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \left\{ \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right\} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_1} \{f_1(x)\}}{\lim_{x \rightarrow x_1} \{f_2(x)\}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}{a_2 x^2 + a_1 x + a_0} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ b_2 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_0}{x^2} \right\}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ a_2 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_0}{x^2} \right\}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \{b_2\} + \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{b_1}{x} \right\} + \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{b_0}{x^2} \right\}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \{a_2\} + \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a_1}{x} \right\} + \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a_0}{x^2} \right\}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \frac{b_2}{a_2}$$

Beispiel: (ohne Ableitung hier)

$$e = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{i} \right)^i = 2.7182... \quad (\text{Eulersche Zahl})$$

Weitere Berechnung von Grenzwerte im 2. Semester:

Kap. 6.6

Regel von de l'Hospital

2.1.9. Stetigkeit von Funktionen

Definition: Eine Funktion ist stetig an der Stelle x , wenn der linksseitige Grenzwert gleich dem rechtsseitigen Grenzwert ist und die Funktion an der Stelle x definiert ist.

Bedingung:
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{f(x-\epsilon)\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{f(x+\epsilon)\}$$

Deutung: Der Funktionswert ist nicht unendlich und springt nicht an der Stelle x .

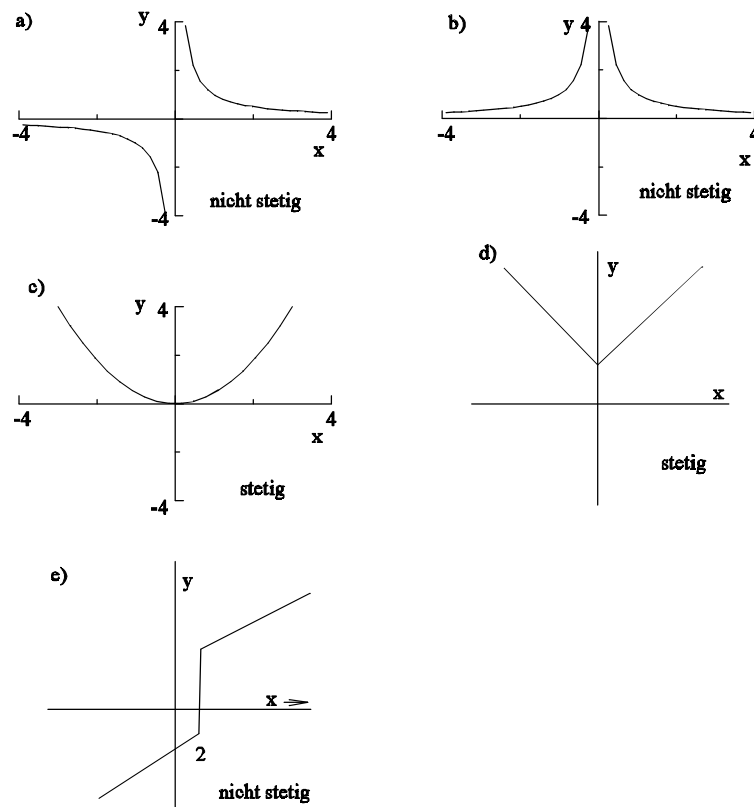


Bild MA219A: Stetigkeit von Funktionen

- a) nicht stetig, weil linksseitiger Grenzwert ist nicht rechtsseitiger ist und weil $f(x=0) = \infty$
- b) nicht stetig weil $f(x=0) = \infty$
- c) für jedes x stetig
- d) $f(x)$ ist für jedes x stetig, nur die Ableitung $f'(x)$ ist an der Stelle $x = 0$ unstetig, aber erst in Kap. 5
- e) nicht stetig an der Stelle $x = 2$ weil der Funktionswert springt

2.1.10. Umkehrfunktion

Die Funktion $y = f(x)$ sagt aus, daß der Funktionswert y (abhängige Variable) als Funktion von x (unabhängige Variable) berechnet wird. Stellt man sich jetzt die Frage, zu welchem vorgegebenen y ein bestimmter x -Wert gehört, so kommt man auf das Problem der Umkehrfunktion.

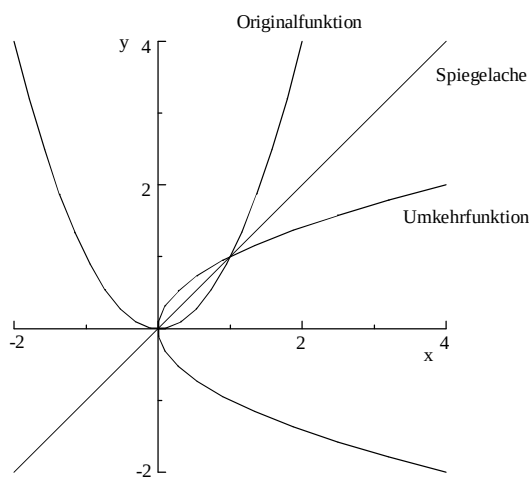
Beispiel: $y = f(x) = x^2$ - Originalfunktion

Umstellen nach x ergibt: $x = \pm\sqrt{y}$

Um die obere Funktion als $y = f(x)$ darstellen zu können, wird x und y vertauscht:

$y = \pm\sqrt{x}$ - Umkehrfunktion

Für das obere Beispiel sind die Originalfunktion und die Umkehrfunktion im Bild MA2110A dargestellt.



Originalfunktion	$y = x^2$
Umkehrfunktion	$y = \pm\sqrt{x}$
Spiegelachse	$y = x$

Bild MA2110A

Wie wird die Umkehrfunktion gebildet? Da gibt es zwei Möglichkeiten, mathematisch und graphisch.

Mathematisch wurde das **Bilden der Umkehrfunktion** schon am Beispiel geübt:

- | | | |
|----|--------------------------|------------|
| a) | Ausgangsfunktion | $y = f(x)$ |
| b) | nach x auflösen | $x = g(y)$ |
| c) | x und y vertauschen: | $y = g(x)$ |

Übung:

Ausgangsfunktion	Auflösen nach x	Umkehrfunktion Bilden durch Vertauschen von x und y
$y = x^3$	$x = y^{1/3}$	$y = \sqrt[3]{x}$
$y = e^x$	$x = \ln(y)$	$y = \ln(x)$
$y = x^2 + a_1x + a_0$	$x = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0 + y}$	$y = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0 + x}$
$y = \frac{1}{x}$	$x = \frac{1}{y}$	$y = \frac{1}{x}$

Graphisch ist das **Bilden der Umkehrfunktion**, durch das Vertauschen von x und y , ein Spiegeln an der Geraden $y = x$.

2.1.11. Koordinatentransformation

Wahl des Nullpunktes von Koordinatensystemen ist das Problem. Im Mittelalter wurden die Planetenbewegungen von der Erde aus beobachtet. Die Erde als Koordinaten-Nullpunkt ergibt kaum erklärbare Bahnen, also kompliziert. Mit der Sonne als Koordinaten-Nullpunkt ergeben sich schon einfachere Planetenbahnen.

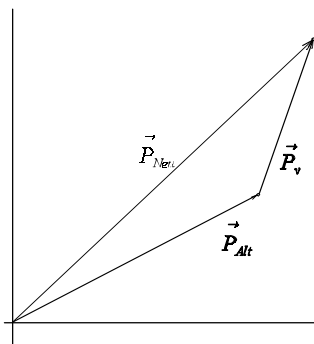
Es kann jeder Raumpunkt als Koordinaten-Ursprung gewählt werden, nur bei geschickter Wahl werden die Berechnungen einfacher.

Das Überführen von einem Koordinatensystem in ein anderes nennt man Koordinaten-Transformation, dabei gibt es mehrere Möglichkeiten, die in den nächsten Abschnitten untersucht werden sollen:

- Verschieben
- Strecken / Stauchen
- Drehen

Allen Operationen gemeinsam ist, daß entweder die Objekte oder das Koordinatensystem transformiert wird.

2.1.11.1. Verschiebung des Punktes oder der Funktion



$$\vec{P}_{Neu} = \vec{P}_{Alt} + \vec{P}_V$$

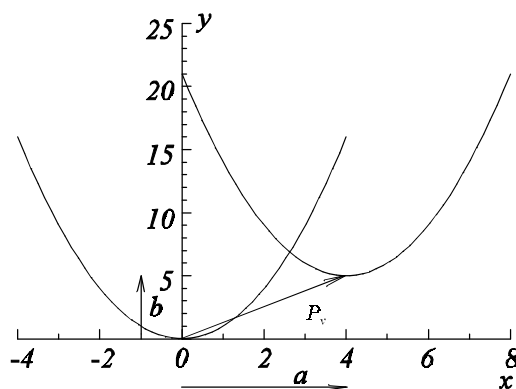
$$\vec{P}_{Neu} = \begin{pmatrix} x_{Neu} \\ y_{Neu} \end{pmatrix} = \vec{P}_{Alt} + \vec{P}_V = \begin{pmatrix} x_{Alt} \\ y_{Alt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_V \\ y_V \end{pmatrix}$$

Bild MA21111A

Beispiel: zu Verschiebung eines Punktes

gegeben: $y = x^2$ $x_V = a = 4$ $y_V = b = 5$

Die obere Funktion soll um $a = 4$ in x-Richtung und um $b = 5$ in y-Richtung verschoben werden.



$$\begin{aligned} x_{Neu} &= x_{Alt} + a & x_{Alt} &= x_{Neu} - a \\ y_{Neu} &= y_{Alt} + b & y_{Alt} &= y_{Neu} - b \end{aligned}$$

$$(y_{Neu} - b) = (x_{Neu} - a)^2$$

Bild MA21111B

Wie kann man sich dieses am besten merken? Die Original Funktion hat an einer markanten Stelle einen bestimmten Wert. Die alte Funktion hat den Scheitelpunkt der Parabel bei $x = 0$ und $y = 0$. Dieser Punkt, der Scheitelpunkt, wird nach $x = a$ und $y = b$ verschoben. Dieses muß erfüllt und überprüft werden. Die obere Gleichung hat den Scheitelpunkt bei $x = a$ und $y = b$.

Zahlenwerte für oberes Beispiel:

$$(y - 5) = (x - 4)^2 \quad \Rightarrow \quad y = 5 + x^2 - 8x + 16 = x^2 - 8x + 21$$

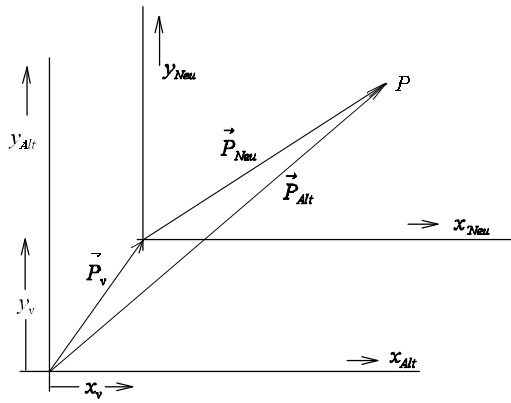
2.1.11.2. Verschiebung des Koordinatensystems

Bild MA21112A

$$\vec{P}_{Alt} = \vec{P}_V + \vec{P}_{Neu}$$

$$\vec{P}_{Neu} = \vec{P}_{Alt} - \vec{P}_V$$

$$\vec{P}_{Neu} = \vec{P}_{Alt} - \vec{P}_V = \begin{pmatrix} x_{Alt} \\ y_{Alt} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_V \\ y_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{Alt} - x_V \\ y_{Alt} - y_V \end{pmatrix}$$

Achtung: entgegengesetztes Vorzeichen bei Verschiebung Objekt oder Koordinatensystem

Allgemeine Form der Verschiebung (Achtung Vorzeichen)

$$\vec{P}_{neu} = \vec{P}_{Alt} + \vec{P}_{Verschiebung}$$

2.1.11.3. Streckung

Streckung des Objektes: Jeder Punkt

$$\vec{P}_{alt} = \begin{pmatrix} x_{alt} \\ y_{alt} \end{pmatrix}$$

soll um den Faktor a in x-Richtung und um den Faktor b in y-Richtung gestreckt werden

$$\vec{P}_{neu} = \begin{pmatrix} x_{alt} * a \\ y_{alt} * b \end{pmatrix}$$

oder in Matrix-Schreibweise

$$\vec{P}_{neu} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{alt} \\ y_{alt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \vec{P}_{alt}$$

Bei **Streckung des Koordinatensystems** wieder entgegengesetzte Berücksichtigung:

$$\vec{P}_{neu} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{alt} \\ y_{alt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix} \vec{P}_{alt}$$

2.1.11.4. Drehung des Koordinatensystems

Das x-y-Koordinatensystem soll um den Winkel φ gedreht werden. Es ergibt sich das neue u-v-Koordinatensystem nach Bild MA21114A.

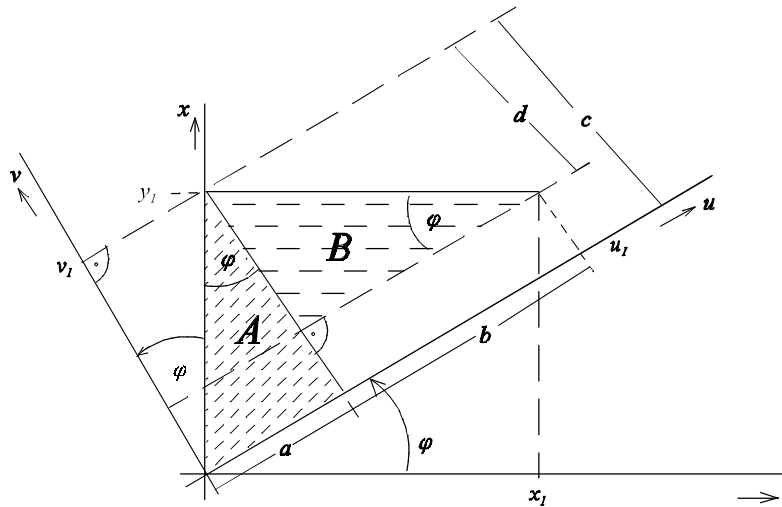


Bild MA21114A

gegeben: x_1, y_1

gesucht: u_1, v_1

In Bild MA21114A werden die Hilfsgrößen a, b, c und d, sowie die Dreiecke A und B eingefügt. Die neuen Koordinaten ergeben sich aus den Hilfsgrößen

$$u_1 = b + a$$

$$v_1 = -d + c$$

Die Hilfsgrößen können über die Winkelverhältnisse an den Dreiecken bestimmt werden:

Dreieck A: $a = y_1 \cdot \sin(\varphi)$

$$c = y_1 \cdot \cos(\varphi)$$

Dreieck B: $b = x_1 \cdot \cos(\varphi)$

$$d = x_1 \cdot \sin(\varphi)$$

Damit ergibt sich:

$$u_1 = x_1 \cdot \cos(\varphi) + y_1 \cdot \sin(\varphi)$$

$$v_1 = -x_1 \cdot \sin(\varphi) + y_1 \cdot \cos(\varphi)$$

oder in Vektorform geschrieben:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Geht man auf die "alt" und "neu" Schreibweise über, erhält man bei **Drehung des Koordinatensystems** um den Winkel φ

$$\vec{P}_{neu} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \vec{P}_{alt}$$

Bei **Drehung des Objektes** um den Winkel φ muß in der oberen Formel " φ " durch " $-\varphi$ " ersetzt werden:

$$\vec{P}_{neu} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \vec{P}_{alt}$$

2.1.11.5. Zusammenfassung: Koordinaten-Transformation

Unterschieden wird zwischen Transformation des Koordinatensystems und Transformation des Objektes. Beide Operationen unterscheiden sich nur durch die Richtung.

Allgemeine Form der Transformation mit

$$\vec{P}_{alt} = \begin{pmatrix} x_{alt} \\ y_{alt} \end{pmatrix} \quad \text{alte Koordinaten}$$

$$\vec{P}_{neu} = \begin{pmatrix} x_{neu} \\ y_{neu} \end{pmatrix} \quad \text{neue Koordinaten}$$

$$\vec{P}_{neu} = \vec{P}_V + \bar{M} * \vec{P}_{alt}$$

Wobei der Verschiebungsvektor $\vec{P}_V$ sowie die Matrix $\bar{M}$ bei den verschiedenen Operation auf Objekte folgende Werte haben:

$$\text{Verschiebung:} \quad \vec{P}_V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \bar{M} = \bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Streckung:} \quad \vec{P}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\text{Drehung:} \quad \vec{P}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \mp \sin(\varphi) \\ \pm \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es können auch mehrere Transformation hintereinander ausgeführt werden. Der neue Vektor muß dann nochmals transformiert werden, wobei auf die Reihenfolge geachtet werden muß ($\bar{M}_1 * \bar{M}_2 \neq \bar{M} * \bar{M}_1$). Weitere Hinweise zur Koordinatentransformation werden in Kapitel 4 gegeben.

2.1.12. Explizite und implizite Form

explizit: Diese Form ist bislang behandelt worden. Explizit, das heißt nach y aufgelöst: $y = f(x)$

implizit: Implizit heißt, nicht nach y aufgelöst: $F(x, y) = 0$

Beispiel 1: $(y - b)^2 + (x - a)^2 - r^2 = 0$

Die obere **implizite** Form kann nach y aufgelöst zur **expliziten** Form:

$$y = b \pm \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$$

Beispiel 2: $y^4 + a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + x = 0$ $F(x, y) = 0$

Die obere implizite Funktion kann nicht nach y explizit aufgelöst werden. Berechnungsmethode: iterativ!

2.1.13. Parameterdarstellung einer Funktion

Bislang sind explizit und auch implizit nur die Variablen x und y im Zusammenhang mit Funktionen vorgestellt worden. Sind nun x und y beide von einem anderen Parameter abhängig, so spricht man von Parameterdarstellung der Funktion.

Hintergrund und Anwendung: Die beiden (oder auch drei) Ortskoordinaten x und y (evtl. auch noch z) sind von der Zeit abhängig. Darum wird der Parameter auch t genannt:

$$x = f_1(t)$$

$$y = f_2(t)$$

Wie bekommt man $y = f(x)$? Dazu ist der Parameter t aus beiden Gleichungen zu eliminieren.

Beispiel 1: Der schiefe Wurf ergibt:

$$x = v_{0x} \cdot t + x_0 \quad - \text{ horizontale Ortskoordinate}$$

$$y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 + y_0 \quad - \text{ vertikale Ortskoordinate}$$

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

$$y = \frac{x - x_0}{v_{0x}} \cdot v_{0y} - \frac{1}{2}g \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}} \right)^2$$

eine nach unten geöffnete Parabel 2. Grades, siehe auch Kap.2.2.1.3.

Beispiel 2: Die Bewegung eines Punktes auf einer Welle ergibt:

$$x = r \cdot \cos(\omega t)$$

$$y = r \cdot \sin(\omega t)$$

Umformung, Quadrierung:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2(\omega t) + r^2 \cdot \sin^2(\omega t) = r^2 [\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)]$$

Mit $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ ergibt sich die Funktion des Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

Um die x - y Darstellung einer Kurve analytisch zu berechnen, muß, wenn analytisch überhaupt möglich, der Parameter t in irgend einer Weise eliminiert werden.

2.2. Analytische Funktionen

Bislang wurden nur Grundsätze der Funktionslehre dargestellt. In diesem Abschnitt 2.2 und im Abschnitt 2.3 sollen die wichtigsten Funktionen vorgestellt und diskutiert werden.

Analytische Funktionen lassen sich als $y = f(x)$ analytisch angeben, ohne das eine Reihe mit unendlich vielen Termen aufsummiert wird.

2.2.1. Ganze rationale Funktionen

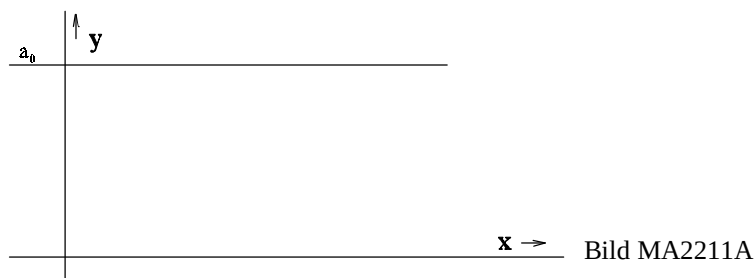
Die allgemeine Form der ganzen rationalen Funktionen ist ein Polynom in x :

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_nx^n$$

wobei die höchste Potenz die Ordnung der Funktion angibt. Die oben angegebene Funktion ist die allgemeine Form der ganzen rationalen Funktion n -ter Ordnung. Zur Erinnerung: Das Nullsetzen der oberen Funktion, $y(x) = 0$, ergibt nach Abschnitt 1.4.1 die algebraische Gleichung n -ter Ordnung.

2.2.1.1. Funktion 0. Grades, Konstante

Die trivialste ganze rationale Funktion ist die Funktion 0. Grades: $y = a_0$



Bei der oberen Funktion kann schon nicht mehr von Funktion gesprochen werden, denn der Wert von y ist konstant.

2.2.1.2. Funktion 1. Grades, Gerade

Die allgemeine Form der ganzen rationalen Funktion 1. Grades lautet:

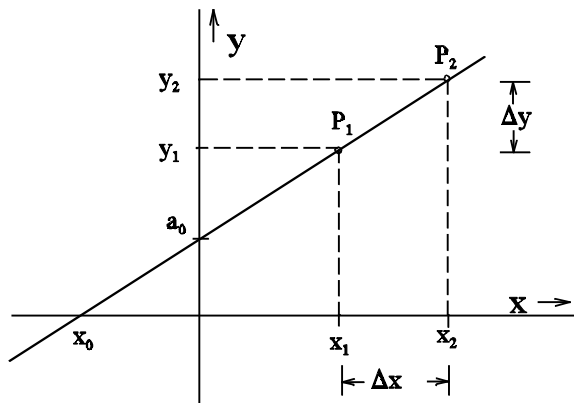
$$y = a_0 + a_1 x$$

trägt man die Funktionswerte in ein Diagramm ein, erhält man eine Gerade mit folgenden Eigenschaften:

$$y(x=0) = a_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a_1 \quad \text{siehe Kap. 2.2.1.2.1}$$

Die Funktion ist in Bild MA2212A dargestellt.



$$x_0 = -\frac{a_0}{a_1}$$

Bild MA2212A

2.2.1.2.1. Steigung der Geraden

Nach Bild MA2212A und der Geradengleichung ergibt sich:

$$y_1 = a_0 + a_1 x_1 \quad / -$$

$$y_2 = a_0 + a_1 x_2 \quad / +$$

$$y_2 - y_1 = a_1(x_2 - x_1) \quad / =$$

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad - \text{Steigung}$$

2.2.1.2.2. Nullstelle

Die Nullstelle einer Funktion tritt auf bei

$$y = 0.$$

Aus der Geradengleichung lässt sich ableiten:

$$y = 0 = a_0 + a_1 x_0$$

Damit ergibt sich die Nullstelle

$$x_0 = -\frac{a_0}{a_1}$$

Die ganze rationale Funktion 0. Grades hatte keine Nullstelle, die ganze rationale Funktion 1. Grades hat eine Nullstelle.

2.2.1.2.3. Gerade durch zwei Punkte

Fundamentalsatz der Mathematik: Eine Gerade ist durch zwei Punkte bestimmt oder durch einen Punkt und die Richtung.

gegeben: $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$y = a_0 + a_1 x$$

gesucht: a_0, a_1

Einsetzen von $\vec{P}_1$ und $\vec{P}_2$ ergibt zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten a_0 und a_1 :

$$y_1 = a_0 + a_1 x_1 \quad / -$$

$$y_2 = a_0 + a_1 x_2 \quad / +$$

$$y_2 - y_1 = a_1(x_2 - x_1) \quad / =$$

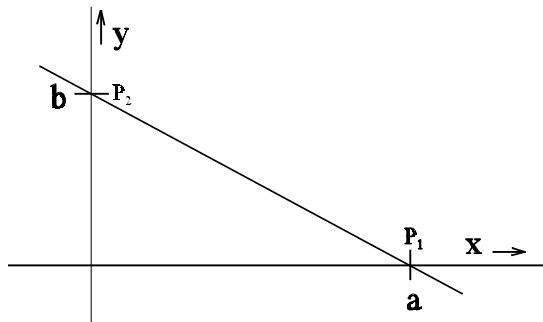
$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a_0 = y_1 - a_1 \cdot x_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = \frac{y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot x_1 - x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a_0 = \frac{y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2}{x_2 - x_1}$$

2.2.1.2.4. Achsen-Abschnitts-Formel der Geraden

Falls die gegebenen zwei Punkte auf jeweils einer Achse liegen, lässt sich die Gerade schneller berechnen.



Nach Bild MA22124A ergeben sich die Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Bild MA22124A

Nach den Formeln und Betrachtungen der letzten Abschnitte ergibt sich:

$$a_0 = y(x=0) = b$$

$$a_1 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = -\frac{b}{a}$$

Daraus lässt sich die Geradengleichung angeben:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x = b - \frac{b}{a} x$$

Obere Gleichung umgeformt ergibt die **Achsen-Abschnitts-Formel der Geraden**

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$$

2.2.1.2.5. Zwei-Punkte-Form der Geraden

gegeben: $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

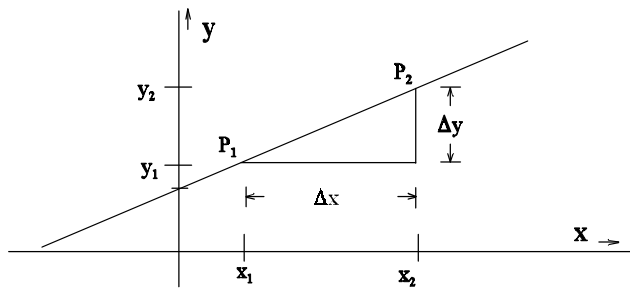


Bild MA22125A

Nach Kap. 2.2.1.2.1. war

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Die Steigung bei einer Geraden ist konstant, so muß die Steigung für jeden Punkt auf der Geraden, also auch für jeden Punkt (x, y) gelten. Also gilt auch

$$a_1 = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Setzt man beide oberen a_1 gleich, erhält man die **Zwei Punkt Form der Geraden:**

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2.2.1.2.6. Punkt-Richtungs-Form der Geraden

Diese Gleichung der Geraden geht von der Tatsache aus, daß ein Punkt

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

der Geraden gegeben ist, und die Steigung der Geraden bekannt ist:

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Der Funktionswert an der Stelle x ergibt sich dann als Funktionswert y_1 plus die Abweichung von Punkt

$$\vec{P}_1 = (x_1, y_1)^t:$$

$$y(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

2.2.1.2.7. Welche Formel für welche Gerade anwenden ?

Es wurden mehrere Formeln zur Bestimmung der Geraden vorgestellt:

- 2.2.1.2.3. Gerade durch zwei Punkte
- 2.2.1.2.4. Achsen-Abschnitts-Formel der Geraden
- 2.2.1.2.5. Zwei Punkte Form der Geraden
- 2.2.1.2.6. Punkt-Richtungs-Form der Geraden

Welche der angegebenen Methode sollte man nutzen zur Bestimmung der Geradengleichung?

Die formale Methode mit Hilfe von zwei Gleichungen und zweier Unbekannten a_0 und a_1 die Gerade zu bestimmen, dient zur Verbreiterung der Anpassung höherer Ordnung. Diese Methode ist aufwendiger. Dabei muß das Gleichungssystem gelöst werden. Formeln zu merken ist auch nicht sinnvoll.

Falls die zwei gegebenen Punkte auf der x- und der y-Achse liegen, ist die Achsen-Abschnitts-Formel die beste und schnellste Methode.

Die klassische Formel aus der Schule ist die Zwei-Punkt-Form der Geraden, wo die Steigungen verglichen werden. Diese muß erst noch nach $y(x)$ aufgelöst werden.

Am besten merken kann man sich die Punkt-Richtungs-Form der Geraden. Wenn man die Eigenschaft der Geraden verstanden hat, kann man sich diese Formel auch gut merken.

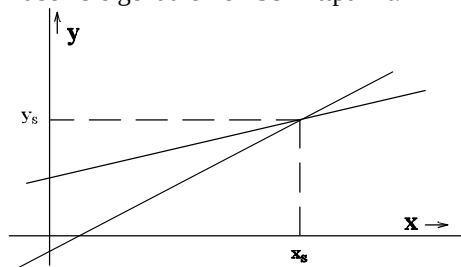
2.2.1.2.8. Schnittpunkt zweier Geraden

Gegeben sind zwei Geraden:

Gerade A: $y = a_0 + a_1 x$

Gerade B: $y = b_0 + b_1 x$

Gesucht ist der Schnittpunkt zweier Geraden, siehe Bild MA22128. Wenn zwei Geraden nicht parallel verlaufen, haben sie genau einen Schnittpunkt.



gesucht: x_s, y_s

Bild MA22128A

Gleichsetzen der beiden y ergibt

$$a_0 + a_1 \cdot x_s = b_0 + b_1 \cdot x_s$$

$$a_0 - b_0 = (b_1 - a_1) x_s$$

oder aufgelöst nach x_s :

$$x_s = -\frac{a_0 - b_0}{a_1 - b_1}$$

y_s erhält man durch Einsetzen in eine der beiden oberen Geradengleichungen:

$$y_s = a_0 + a_1 \cdot x_s = a_0 - a_1 \frac{a_0 - b_0}{a_1 - b_1} = \frac{a_0(a_1 - b_1) - a_1(a_0 - b_0)}{a_1 - b_1} = \frac{a_0 \cdot a_1 - a_0 \cdot b_1 - a_1 \cdot a_0 + a_1 \cdot b_0}{a_1 - b_1}$$

$$y_s = \frac{a_1 \cdot b_0 - a_0 \cdot b_1}{a_1 - b_1}$$

2.2.1.3. Funktion 2. Grades

2.2.1.3.1. Allgemeines

Besser bekannt als: - Parabel
 oder auch als: - quadratische Funktion
 - quadratische Parabel
 - Parabel 2.Ordnung

allgemeine Form: $y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$

Die Normalform der Parabel ist sicher bekannt, siehe Bild MA22131A. Wenn diese nicht bekannt sein sollte, kann man diese durch eine Wertetabelle untersuchen und diese Tabellenpunkte in ein Koordinatensystem übertragen.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

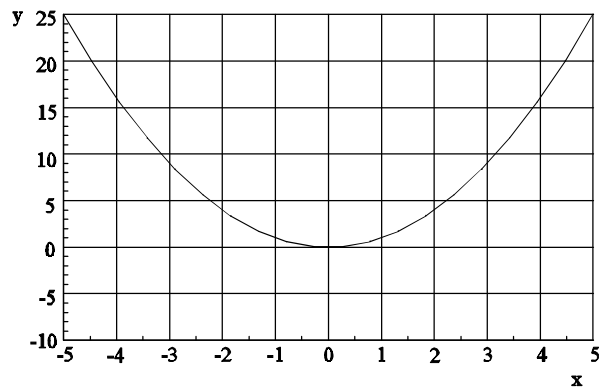


Bild MA22131A: Normalparabel $y = x^2$

2.2.1.3.2. Scheitelpunkt der Parabel

Ein charakteristischer Punkt für eine Parabel ist der Maximal- oder Minimal-Punkt einer Parabel. Der Scheitelpunkt der Normalparabel befindet sich bei $x = 0$ und $y = 0$, siehe Bild MA22131A.

2.2.1.3.3. Einfluß der Koeffizienten a_0 , a_1 und a_2

Der Einfluß der Koeffizienten a_0 , a_1 und a_2 soll anhand des Arbeitsblattes MAI-2 diskutiert werden.

Durch den Parameter a_0 wird die Normal-Parabel in y-Richtung verschoben, da a_0 nur eine additive Konstante ist, siehe Bild MA22133A.

Der multiplikative Parameter a_2 bewirkt, je nach Größe, eine Streckung oder Stauchung der Normalparabel in y-Richtung, siehe Bild MA22133B.

$a_2 > 1$	Streckung in y-Richtung
$0 < a_2 < 1$	Stauchung in y-Richtung
$a_2 = 0$	Trivialfunktion $y = 0$
$-1 < a_2 < 0$	Stauchung in y-Richtung und Klappen um x-Achse
$a_2 = -1$	nur Klappen um x-Achse
$a_2 < -1$	Streckung in y-Richtung und Klappen um x-Achse

Bislang ist betrachtet worden:

- Verschiebung in y-Richtung (a_0)
- Streckung in y-Richtung (a_2)

Beides war mit Hilfe jeweils eines Koeffizienten erreichbar.

Bei der Verschiebung in x-Richtung werden gleich zwei Parameter beeinflusst: a_0 und a_1 .

Die allgemeine Form der Verschiebung in x-Richtung erhält man indem man x gegen $x - a$

$$x \rightarrow x - a$$

ausgetauscht:

$$y = (x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

mit der Verschiebung des Scheitelpunktes in **positiver** x-Richtung um den Wert a .

Eselsbrücke: Bei der Verschiebung der Normalparabel $y = x^2$ in x-Richtung muß der Wert Null bei der Verschiebungsstelle auftreten. Daher muß bei Verschiebung der Parabel (allgemein des Objektes) in positiver x-Richtung der Verschiebungswert in der Klammer für x negativ eingesetzt werden.

Hinweis: Bei jeder Art der Verschiebung ist die Richtung immer das schwierigste. Probe mit Hilfe eines markanten Punktes durchführen, hier Scheitelpunkt.

Den Einfluß des Parameters a_1 zeigt Bild MA22133D. Durch die Veränderung des Parameters a_1 verschiebt sich der Scheitelpunkt sowohl in x- als auch in y-Richtung. Nur der Koordinaten-Ursprung ist allen Grafen gemeinsam, weil der Koeffizient $a_0 = 0$ ist. Die Bestimmung des Scheitelpunktes soll im nächsten Abschnitt erfolgen.

Arbeitsblatt MAI-2

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

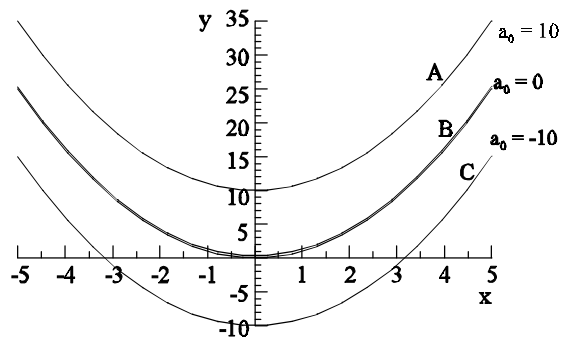


Bild MA22133A: Einfluß des Parameters a_0 auf die Funktion $y = x^2 + a_0$

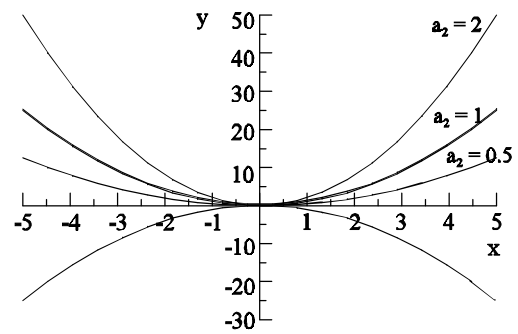


Bild MA22133B: Einfluß des Parameters a_2 auf die Funktion $y = a_2x^2$

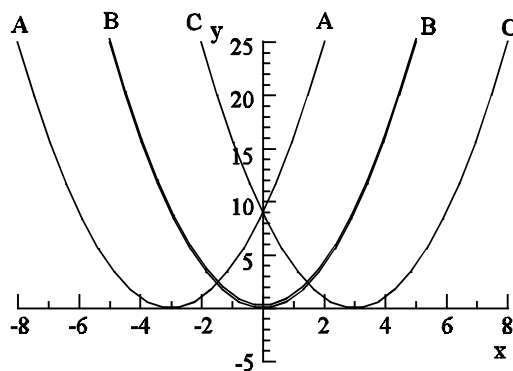


Bild MA22133C: Verschiebung der Normalparabel in x-Richtung

- A: $y = (x + 3)^2$
 B: $y = x^2$
 C: $y = (x - 3)^2$

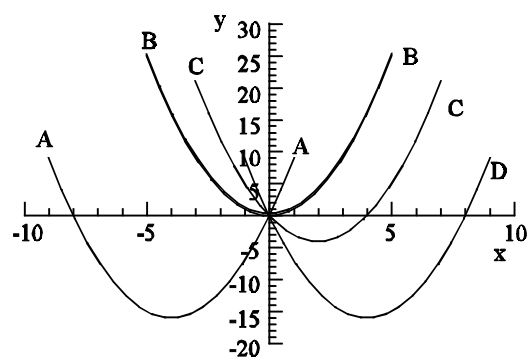


Bild MA22133D: Einfluß des Parameters a_1 auf die Funktion $y = x^2 + a_1x$

- A: $y = x^2 + 8x$
 B: $y = x^2$
 C: $y = x^2 - 4x$
 D: $y = x^2 - 8x$

2.2.1.3.4. Berechnung des Scheitelpunktes und der Streckung aus der allgemeinen Form

Die allgemeine Form der Parabel lautet:

$$y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

In der oberen Funktionsvorschrift sind drei Koeffizienten enthalten. Auf den ersten Blick hat man von der oberen Funktion keine genaue bildliche Vorstellung. Es soll jetzt versucht werden mit Hilfe von drei anderen Parametern

- x_s - Scheitelpunkt in x-Richtung
- y_s - Scheitelpunkt in y-Richtung
- a_2 - Streckung in y-Richtung

die Parabel zu beschreiben. Aus dem im letzten Abschnitt Aufgezeigten ergibt sich dann die Funktion:

$$y = a_2(x - x_s)^2 + y_s$$

Die obere Funktion lässt sich leichter analysieren und zeichnen, siehe Bild MA22134A.

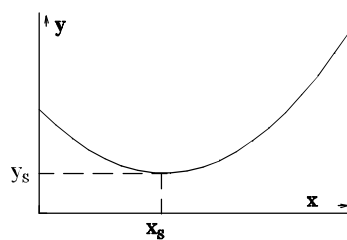


Bild MA22134A: Konstruktion der Parabel mit Hilfe des Scheitelpunktes

Ein Vergleich der beiden Funktionen

$$y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$y = a_2(x - x_s)^2 + y_s$$

liefert:

$$a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = a_2 \cdot x^2 - 2a_2 \cdot x_s \cdot x + a_2 \cdot x_s^2 + y_s$$

Die obere Gleichung soll für alle x erfüllt sein. Dieses ist nur der Fall, wenn jede Potenz von x einzeln betrachtet die obere Gleichung erfüllt. In der oberen Gleichung sind drei Potenzen von x vorhanden, also ergibt die obere Gleichung drei Einzelgleichungen:

$$x^2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_2 \quad \text{erfüllt}$$

$$x^1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -2a_2 \cdot x_s \quad (A)$$

$$x^0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = a_2 \cdot x_s^2 + y_s \quad (B)$$

Da die eine Gleichung trivial ist, ergibt sich ein **nichtlineares** Gleichungssystem 2. Ordnung für die Scheitelpunkt-Variablen x_s und y_s . Das Gleichungssystem wird mit Hilfe der Einsetzmethode gelöst, dazu wird die Gleichung (A) nach x_s aufgelöst und in die Gleichung (B) eingesetzt:

$$x_s = \frac{a_1}{-2a_2}$$

$$y_s = a_0 - a_2 \cdot x_s^2$$

$$y_s = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}$$

Die Scheitelpunkt-Koordinaten y_s und x_s lassen sich schneller mit Hilfe der quadratischen Ergänzung bestimmen.
Bei der Funktion

$$y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

wird bei den ersten zwei Termen a_2 ausgeklammert:

$$y = a_2 \left(x^2 + 2 \frac{a_1}{2a_2} x \right) + a_0$$

Die quadratische Ergänzung liefert

$$y = a_2 \left[x^2 + 2 \frac{a_1}{2a_2} x + \left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 \right] + a_0 - a_2 \left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2$$

$$y = a_2 \left[x - \frac{-a_1}{2a_2} \right]^2 + a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}$$

woraus man x_s und y_s sofort ablesen kann:

$$x_s = -\frac{a_1}{2a_2} \qquad y_s = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}$$

Beispiel 1:

Die untere Funktion ist mit Hilfe der Scheitelpunkt-Methode zu zeichnen:

$$y = 3x^2 - 30x + 50$$

Methode A: Formel

$$a_2 = 3$$

$$a_1 = -30$$

$$a_0 = 50$$

$$x_s = \frac{a_1}{-2a_2} = \frac{-30}{-2 \cdot 3} = 5$$

$$y_s = a_0 - \frac{a_1^2}{4 \cdot a_2} = 50 - \frac{(-30)^2}{4 \cdot 3} = -25$$

Methode B: Quadratische Ergänzung

$$y = 3x^2 - 30x + 50$$

$$y = 3(x^2 - 10x + 25) + 50 - 3 \cdot 25$$

$$y = 3(x - 5)^2 - 25$$

Anmerkung: Quadratische Ergänzung geht schneller und verlangt kein Nachschlagen der Formel.

Zeichnen des Funktionsgraphen:

- Scheitelpunkte eintragen: $x_s = 5$ $y_s = -25$
- Öffnung (a_2) berücksichtigen
- einige Punkte rechts und links vom Scheitelpunkt eintragen

$P_{1,2}$	$x = x_s \pm 1$	$\Rightarrow$	$\Delta y = + 3 \cdot 1^2 = 3$
	$x = x_s \pm 2$	$\Rightarrow$	$\Delta y = + 3 \cdot 2^2 = 12$
	$x = x_s \pm 3$	$\Rightarrow$	$\Delta y = + 3 \cdot 3^2 = 27$

Ergebnis siehe in Bild MA22134B.

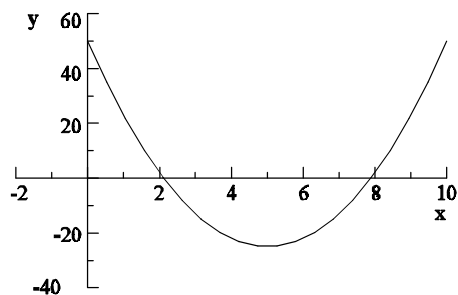


Bild MA22134B: Ergebnis

Beispiel 2: (Studenten)

gegeben: $y = x^2 + 6x + 5$

gesucht: Scheitelpunkte, Darstellung

2.2.1.3.5. Parabel durch drei Punkte

Nachdem die Gerade $y = a_0 + a_1 \cdot x$ mit den zwei Parameter a_0 und a_1 durch zwei Punkte bestimmt war (Kap. 2.2.1.2.3) ein Satz zur Parabel:

Die allgemein Parabel 2. Ordnung

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \quad (\text{A})$$

ist durch drei Punkt bestimmt. Oder anders ausgedrückt: Durch drei Punkte lässt sich eine Parabel 2. Ordnung legen.

Die drei Punkte

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

werden in die allgemeine Gleichung (A) eingesetzt:

$$y_1 = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_1^2 \quad (\text{Punkt 1})$$

$$y_2 = a_0 + a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot x_2^2 \quad (\text{Punkt 2})$$

$$y_3 = a_0 + a_1 \cdot x_3 + a_2 \cdot x_3^2 \quad (\text{Punkt 3})$$

Dadurch ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die Größen a_0 , a_1 und a_2 . Für die Funktionsgleichung (A) sind die Koeffizienten a_0 , a_1 und a_2 Konstante. Für das obere Gleichungssystem sind die Größen a_0 , a_1 und a_2 Variable, die durch die gegebenen drei Punkte bestimmt werden müssen. In Matrix- und Vektorform geschrieben lässt sich das obere lineares Gleichungssystem 3. Ordnung angeben als:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Umgeformt nach den gesuchten Größen ergibt (u.a. Inversion der Matrix 3*3) sich:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe eines Rechners oder Taschenrechners der die Matrizenrechnung beherrscht, ist die Lösung kein Problem.

Einfacher wird die Lösung für drei Punkte im äquidistanten (gleichen) Abständen in x-Richtung mit x_2 als mittleren Punkt. Die Punkte eins und drei liegen im Abstand a rechts und links von x_2 :

gegeben: x_2 $x_{1,3} = x_2 \mp a$ y_1, y_2, y_3

x_1 und x_3 werden ersetzt:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (x_2 - a) & (x_2 - a)^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & (x_2 + a) & (x_2 + a)^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \bar{A}^{-1} * \bar{y}$$

Zur Berechnung der inversen Matrix werden zunächst die Unterdeterminanten gebildet:

$$u_{11} = x_2(x_2 + a)^2 - x_2^2(x_2 + a) = x_2(x_2 + a)[(x_2 + a) - x_2] = \underline{a * x_2(x_2 + a)}$$

$$u_{21} = (x_2 - a)(x_2 + a)^2 - (x_2 + a)(x_2 - a)^2 = (x_2 + a)(x_2 - a)[(x_2 + a) - (x_2 - a)] = \underline{2a(x_2^2 - a^2)}$$

$$u_{31} = (x_2 - a)x_2^2 - (x_2 - a)^2x_2 = x_2(x_2 - a)[x_2 - (x_2 - a)] = \underline{a * x_2(x_2 - a)}$$

$$u_{12} = (x_2 + a)^2 - x_2^2 = 2a * x_2 + a^2 = \underline{a(2x_2 + a)}$$

$$u_{22} = (x_2 + a)^2 - (x_2 - a)^2 = \underline{4a * x_2}$$

$$u_{32} = x_2^2 - (x_2 - a)^2 = 2a * x_2 - a^2 = \underline{a(2x_2 - a)}$$

$$u_{13} = x_2 + a - x_2 = \underline{a}$$

$$u_{23} = (x_2 + a) - (x_2 - a) = \underline{2a}$$

$$u_{33} = x_2 - (x_2 - a) = \underline{a}$$

Die Determinante der Matrix $\bar{A}$ ergibt sich mit Hilfe der Unterdeterminanten durch Entwicklung der ersten Spalte:

$$\det(\bar{A}) = a_{11} * u_{11} - a_{21} * u_{21} + a_{31} * u_{31} = a * x_2(x_2 + a) - 2a(x_2^2 - a^2) + a * x_2(x_2 - a)$$

$$\det(\bar{A}) = a * x_2^2 + a^2 * x_2 - 2a * x_2^2 + 2a^3 + a * x_2^2 - a^2 * x_2 = 2a^3$$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt sich zu:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\bar{A})} * \begin{pmatrix} u_{11} & -u_{21} & u_{31} \\ -u_{12} & u_{22} & -u_{32} \\ u_{13} & -u_{23} & u_{33} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen der oberen Werte erhält man:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2a^2} \begin{pmatrix} x_2(x_2 + a) & -2(x_2^2 - a^2) & x_2(x_2 - a) \\ -(2x_2 + a) & 4 * x_2 & -(2x_2 - a) \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Besonders einfache Ergebnisse ergeben sich für $x_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2a^2} \begin{pmatrix} 0 & 2a^2 & 0 \\ -a & 0 & a \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Ausmultipliziert erhält man die Lösung für 3 Punkte in x im Abstand a mit $x_{1,2} = a$ und $x_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{1}{2a}(y_3 - y_1) \\ \frac{1}{2a^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) \end{pmatrix}$$

$$a_0 = y_2 \qquad a_1 = \frac{y_3 - y_1}{2a} \qquad a_2 = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2a^2}$$

Die obere Formel lässt sich leicht anwenden, wie anhand der nächsten Beispiele zu erkennen ist.

Beispiel 1:

gegeben: 3 Punkte

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \vec{P}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

gesucht: a_0, a_1, a_2 für Anpassung $y = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2$

Vorbereitung für obere Formel:

$$a = 2$$

$$y_1 = 5 \quad y_2 = 8 \quad y_3 = 13$$

$$a_0 = y_2 = 8$$

$$a_1 = \frac{1}{2a}(y_3 - y_1) = \frac{1}{2*2}(13 - 5) = 2$$

$$a_2 = \frac{1}{2a^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) = \frac{1}{2*2^2}(5 - 2*8 + 13) = \frac{1}{4}$$

Ergebnis: $y = 8 + 2x + \frac{1}{4}x^2$

Achtung: Probe ausführen durch Einsetzen der Punkte!

Beispiel 2:**gegeben:** 3 Punkte

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Um einfacher rechnen zu können, wird eine Koordinaten-Verschiebung in x durchgeführt:

$$x^* = x - 5$$

Aus der Aufgabenstellung unter Berücksichtigung der Verschiebung ergeben sich die Werte:

$$x_1^* = -1 \quad x_2^* = 0 \quad x_3^* = 1 \quad y_1 = 6 \quad y_2 = 16 \quad y_3 = 30$$

Damit liegt x_2^* wieder in der Mitte und es kann mit der vereinfachten Anpassung gerechnet werden. Mit

$$a = 1$$

ergeben sich die Koeffizienten $a_0 = y_2 = 16$

$$a_1 = \frac{1}{2a}(y_3 - y_1) = \frac{1}{2 \cdot 1}(30 - 6) = 12$$

$$a_2 = \frac{1}{2a^2}(y_3 - 2y_2 + y_1) = \frac{1}{2 \cdot 1^2}(30 - 2 \cdot 16 + 6) = 2$$

und die angepaßte Funktion $y(x) = a_0 + a_1 \cdot x^* + a_2 \cdot (x^*)^2 = 16 + 12 \cdot x^* + 2 \cdot (x^*)^2$

Die Lösung erhält man durch Zurück-Verschiebung in x :

$$y(x) = 16 + 12(x - 5) + 2(x - 5)^2 = 16 + 12x - 60 + 2x^2 - 20x + 50 = 6 - 8x + 2x^2$$

Die Koordinaten-Verschiebung ist auch einfacher auszuführen, siehe Kap. 2.2.2.3.

2.2.1.3.6. Nullstellen

Die Nullstellen der Funktion

$$y = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

ergeben sich durch Nullsetzen von y :

$$0 = x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2}$$

Nach der Formel für die quadratische Gleichung, Kap. 1.4.3, ergibt sich die Lösung:

$$x_{12} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}$$

Die Wurzeln aus negativen Zahlen werden erst im Kapitel 3 vorgestellt. Es werden drei Fälle unterschieden, die auch in Bild MA22133A (Arbeitsblatt MAI-2) zu erkennen sind:

- zwei verschiedene reelle Lösungen, Bild MA22133A: Fall C
- eine doppelte reelle Lösung, Bild MA22133A: Fall B
- keine reellen Lösungen, Bild MA22133A: Fall A

Der dritte Fall ergibt auch zwei Lösungen, aber komplexe, siehe Kapitel 3. Somit hat die Parabel (Funktion 2. Grades) auch immer zwei Nullstellen.

2.2.1.3.7. Zerlegung in Linearfaktoren

Will man $y = x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ (A)

darstellen durch $y = (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ (B)

ergibt sich durch Koeffizientenvergleich ein nichtlineares Gleichungssystem 2. Ordnung für die Größen a und b:

$$a + b = a_1 \quad (C)$$

$$a \cdot b = a_0 \quad (D)$$

Die Lösung erfolgt durch die Einsetzmethode, Gleichung (C) nach b auflösen und in (D) einsetzen:

$$b = a_1 - a$$

$$a \cdot b = a_0 \quad a(a_1 - a) = a_0 \quad a_1 a - a^2 = a_0$$

$$a^2 - a_1 a + a_0 = 0$$

Lösung:
$$a = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0} = -\left(-\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}\right) \quad (E)$$

Für a und b ergeben sich die negativen Lösungen der Nullstellen der Funktion (A). Dieses wäre aber auch schon aus (A) und (B) erkennbar. Der linke Teil von (B) sagt aus: Ein Produkt ist dann Null, wenn ein Term Null wird. Daraus folgen die Nullstellen:

$$x_{01} = -a \quad (F)$$

$$x_{02} = -b \quad (G)$$

Die Nullstellen von (A) ergeben sich zu:

$$x_{01,02} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0} \quad (H)$$

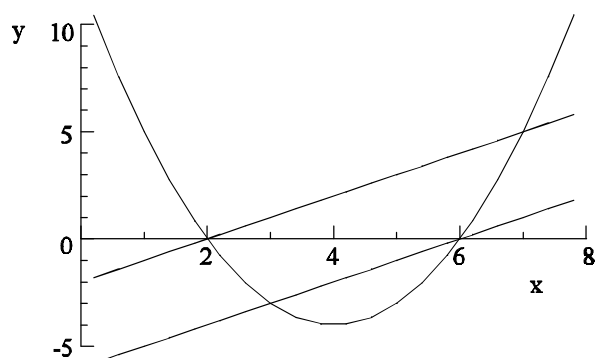
Aus dem Vergleich von (F), (G) und (H) lässt sich (E) somit eleganter ermitteln.

Fazit: Die Funktion $y = a_2(x^2 + a_1^* \cdot x + a_0^*)$

mit den Nullstellen x_{01} und x_{02} lässt sich durch Linearfaktoren darstellen

$$y = a_2 \cdot (x + a) \cdot (x + b) \quad a = -x_{01} \quad b = -x_{02}$$

$$y = a_2 \cdot (x - x_{01}) \cdot (x - x_{02})$$



Grafische Deutung siehe Bild MA22137A. Die Berechnung eines Funktionswertes $y(x)$ erfolgt durch das Produkt aus den beiden Funktionswerten der Geraden mit dem Koeffizienten a_2 .

Bild MA22137A: Multiplikation zweier Geraden zur Parabel

2.2.1.4. Funktion 3. Grades

Die Normalparabel 3. Ordnung $y = x^3$ kann wieder mit Hilfe einer Tabelle konstruiert werden:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-125	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64	125

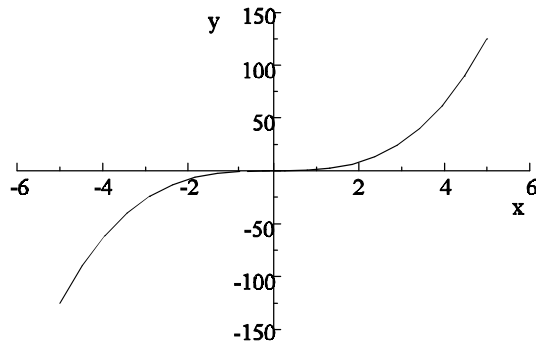


Bild MA2214A: Normalparabel 3. Ordnung $y = x^3$

Die allgemeine Form der Funktion 3. Grades lautet:

$$y(u) = c_3 \cdot u^3 + c_2 \cdot u^2 + c_1 \cdot u + c_0$$

ersetzen von $u = x - \frac{c_2}{3c_3}$

läßt den quadratischen Term verschwinden, für $y(x)$ ergibt sich:

$$y(x) = c_3 \cdot x^3 + b_1 \cdot x + b_0 = c_3 \left(x^3 + \frac{b_1}{c_3} \cdot x + \frac{b_0}{c_3} \right)$$

Die Multiplikation einer gesamten Funktion (hier mit c_3) ist schon aus Kap. 2.2.1.3.3 (dort mit a_2) bekannt: Dieses bewirkt eine Stauchung oder Streckung in y-Richtung, bei negativen Koeffizienten auch zusätzlich noch ein Klappen. Die Verschiebung in x-Richtung ist auch schon vorgestellt worden, dadurch kann die Anzahl der Koeffizienten verringert werden. Die Funktion 3. Grades, die im folgenden untersucht werden soll, hat folgendes Aussehen:

$$y = x^3 + a_1 \cdot x + a_0$$

Damit sind durch Verschiebung und Streckung alle Funktionen 3. Ordnung beschreibbar. Der Einfluß von a_0 und a_1 auf den Funktionsgraphen wird auf Arbeitsblatt MAI-3 aufgezeigt.

Als erstes soll der Einfluß des Koeffizienten a_1 untersucht werden. In Bild MA2214B wird bei $a_0 = 0$ der Koeffizient a_1 variiert. Bei $a_1 = 0$ ist die Steigung bei $x = 0$ auch Null. Für $a_1 < 0$ ergeben sich Maxima und Minima und drei Nullstellen. Bei $a_1 > 0$ ist die Funktion im gesamten Bereich monoton steigend.

Der Einfluß des Koeffizienten a_0 in Bild MA2214C ist schon bekannt: Verschiebung in y-Richtung. Die Auswirkung der Verschiebung in y-Richtung aber läßt Bild MA2214C recht gut erkennen: Je nach Verschiebung ergeben sich verschiedene Anzahl von reellen Nullstellen. Fazit: Eine reelle Nullstelle ist immer vorhanden. Laut Zerlegung in Linearfaktoren

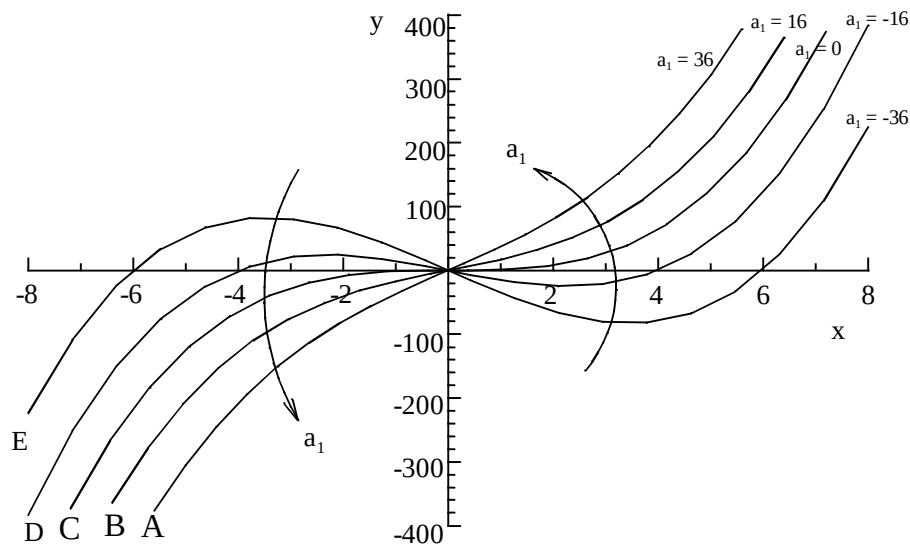
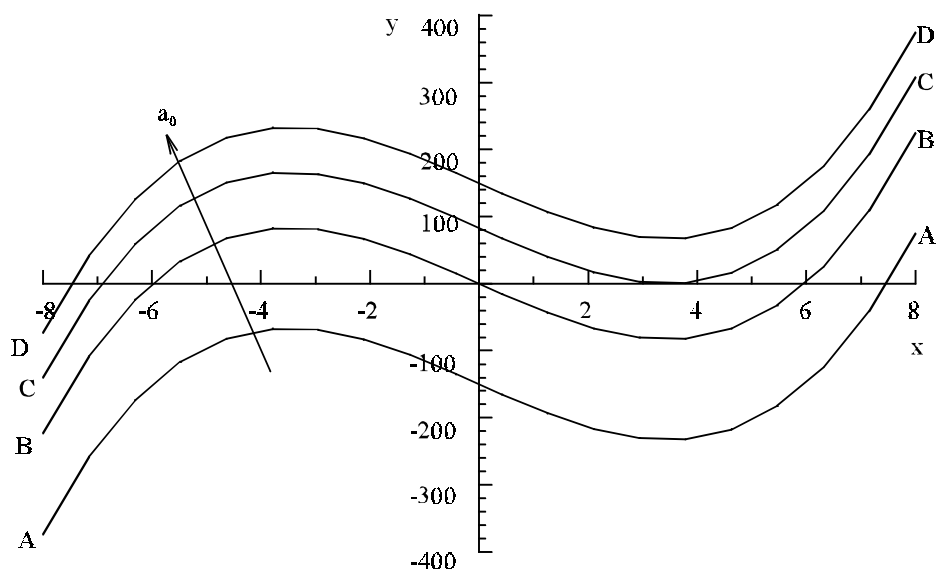
$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 = a_3(x - x_{01})(x - x_{02})(x - x_{03})$$

sind immer drei Nullstellen bei einer Funktion 3. Ordnung vorhanden. Diese können sein:

- drei verschieden reelle Nullstellen Bild MA2214C, Fall B
- eine dreifach reelle Nullstelle Bild MA2214B, $y = x^3$ ($a_1 = 0$)
- eine einfach reelle und doppelt reelle Nullstelle Bild MA2214C, Fall C
- eine einfach reelle und eine konjugiert komplexe Nullstelle Bild MA2214C, Fall A und Fall D

Arbeitsblatt MAI-3

$$y = x^3 + a_1 x + a_0$$

Bild MA2214B: Einfluß des Koeffizienten a_1 auf die Funktion $y = x^3 + a_1 x$ A: $a_0 = -150$ B: $a_0 = 0$ C: $a_0 = \sqrt{3} \cdot 48 = 83.14$ D: $a_0 = 150$ Bild MA2214C: Einfluß des Koeffizienten a_0 auf die Funktion $y = x^3 - 36x + a_0$

2.2.1.5. Funktion 4. Grades

2.2.1.5.1. Allgemeine Form

Die allgemeine Form der Parabel 4. Grades lautet:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4$$

2.2.1.5.2. Eigenschaften

Die Eigenschaften dieser Funktion sollen kurz untersucht werden. Treten nur gerade Potenzen auf (siehe Bild MA2215A, Arbeitsblatt MAI-4), ergeben sich zur y-Achse symmetrische Funktionen. Bei $a_2 < 0$ treten drei Extremwerte auf, bei $a_2 \geq 0$ ist nur ein Extremwert vorhanden.

Der Einfluß des ungeraden Anteils mit $a_1 \cdot x$ ist im Bild MA2215B dargestellt. Durch diesen Anteil werden die Extremwerte verschoben. Bei großen Absolutwerten von a_1 ist nur noch ein Extremwert vorhanden. Vorzeichenänderung von a_1 führt, da sonst nur gerade Potenzen vorhanden sind, zur Spiegelung an der y-Achse (ohne Abbildung).

Die Anzahl der reellen Nullstellen ist nun wiederum von der Verschiebung in y-Richtung (a_0) und von der Kurvenform selbst ($a_1 - a_4$) abhängig. Es können zwischen 0 und 4 reelle Nullstellen auftreten. Im Komplexen weist die Parabel 4. Ordnung vier Nullstellen auf. Die Parabel 4. Ordnung läßt sich somit auch wieder in Form der Linearfaktorzerlegung angeben:

$$y = x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_{01})(x - x_{02})(x - x_{03})(x - x_{04})$$

Arbeitsblatt MAI-4

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4$$

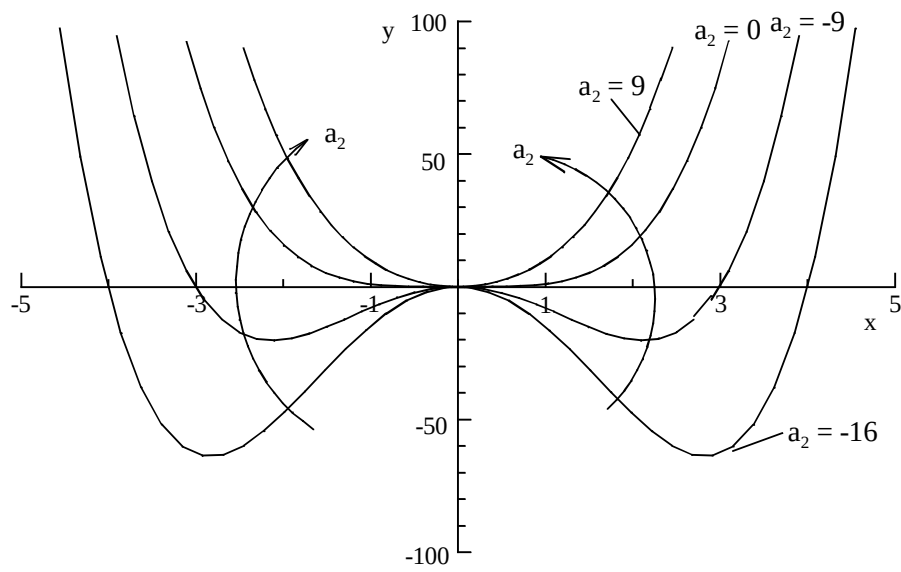


Bild MA2215A:

$$y = x^4 + a_2 \cdot x^2$$

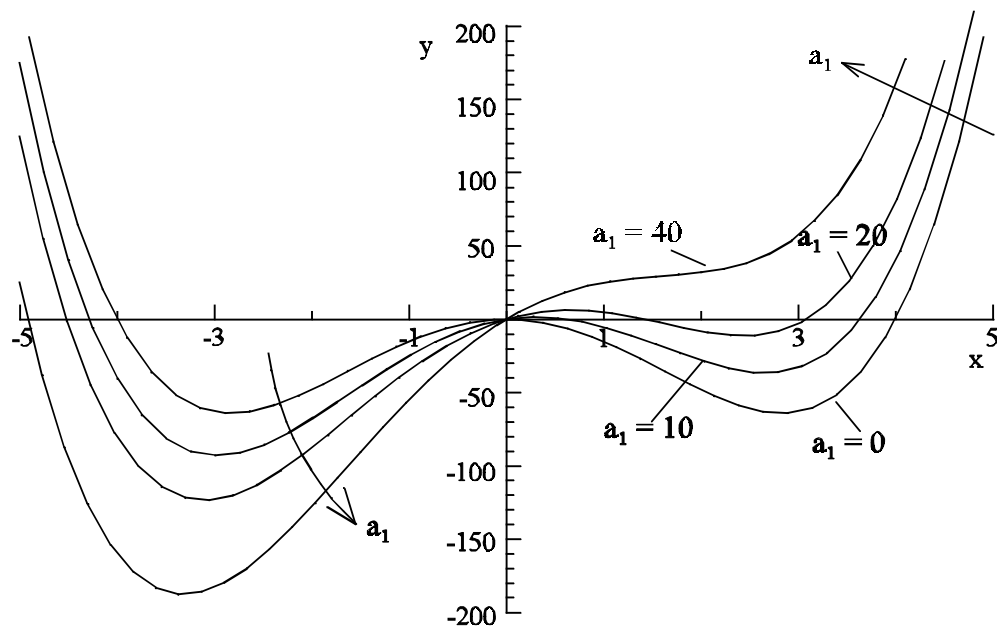


Bild MA2215B:

$$y = x^4 - 16x^2 + a_1 \cdot x$$

2.2.1.5.3. Parabel 4. Ordnung durch 5 Punkte

Eine Parabel 4. Ordnung ist durch 5 Punkte eindeutig gegeben.

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_5 = \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

In die allgemeine Gleichung der Parabel 4. Ordnung

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4$$

werden die oberen Punkte eingesetzt.

$$a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_1^2 + a_3 \cdot x_1^3 + a_4 \cdot x_1^4 = y_1$$

$$a_0 + a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot x_2^2 + a_3 \cdot x_2^3 + a_4 \cdot x_2^4 = y_2$$

$$a_0 + a_1 \cdot x_3 + a_2 \cdot x_3^2 + a_3 \cdot x_3^3 + a_4 \cdot x_3^4 = y_3$$

$$a_0 + a_1 \cdot x_4 + a_2 \cdot x_4^2 + a_3 \cdot x_4^3 + a_4 \cdot x_4^4 = y_4$$

$$a_0 + a_1 \cdot x_5 + a_2 \cdot x_5^2 + a_3 \cdot x_5^3 + a_4 \cdot x_5^4 = y_5$$

Die oberen fünf Gleichungen ergeben ein lineares Gleichungssystem 5. Ordnung. Die gesuchten Koeffizienten lassen sich mit Hilfe eines Rechners bestimmen:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

2.2.1.6. Funktion n-ter Ordnung

Die Ordnung n der Funktion ist durch den höchsten Exponenten bestimmt. Ebenso das Verhalten für x gegen $\pm \infty$. Dabei ist der Koeffizient a_n entscheidend für das Verhalten. Zu unterscheiden ist zwischen geraden und ungeraden Funktionen, siehe Bild MA2216A und MA2216B.

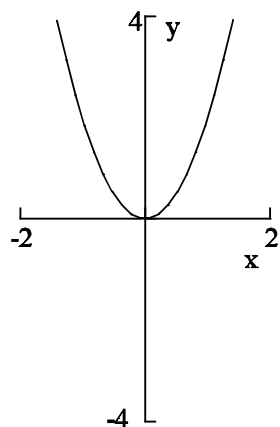


Bild MA2216A: gerade Funktion

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$$

$$n = 2, 4, 6 \dots$$

1... $n-1$ Extremwerte

0... n reelle Nullstellen

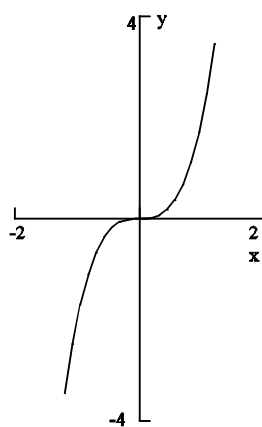


Bild MA2216B: ungerade Funktion

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$$

$$n = 1, 3, 5 \dots$$

0.. $n-1$ Extremwerte

1... n reelle Nullstellen

Die oberen Aussagen gelten für $a_n > 0$. Für $a_n < 0$ muß auch das Vorzeichen für $x \rightarrow \pm \infty$ getauscht werden.

2.2.2. Horner Schema

Mit Hilfe des Horner Schemas können folgende Anwendungen erfolgen:

- Berechnung des Funktionswertes von ganzen rationalen Funktionen (Kap. 2.2.2.1)
- Polynomdivision (Kap. 2.2.2.2) und zur
- Koordinaten-Verschiebung von ganzen rationalen Funktionen (Kap. 2.2.2.3)

2.2.2.1. Funktionswert-Berechnung

Die Herleitung soll am Beispiel der ganzen rationalen Funktion 4. Grades erfolgen. Die allgemeine Parabel 4. Ordnung lautet:

$$y = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \quad (A)$$

Ein x wird schrittweise ausgeklammert:

$$y = \{a_4 \cdot x^3 + a_3 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + a_1\}x + a_0$$

$$y = \{[a_4 \cdot x^2 + a_3 \cdot x + a_2]x + a_1\}x + a_0$$

$$y = \{[(a_4 \cdot x + a_3) \cdot x + a_2] \cdot x + a_1\} \cdot x + a_0 \quad (B)$$

Ein Rechner benötigt für eine Multiplikation wesentlich mehr Zeit als für eine Addition. Für eine Funktions-Bestimmung im Rechner ist die Gleichung (B) wesentlich zeitoptimaler als (A). Bei der Gleichung (B) werden nur vier Multiplikationen anstatt 10 in (A) benötigt. Noch mehr Zeiteinsparung ergibt sich bei höherer Ordnung.

Zum Anderen ist die Formel (B) geeignet, ein Schema zu erkennen: Der Anfang besteht darin, den Koeffizienten der höchsten Potenz mit x zu multiplizieren. Danach wird zyklisch der Koeffizient der nächst niedrigeren Potenz addiert und wieder mit x multipliziert. Dieses erfolgt solange, bis a_0 addiert wurde.

Schema:

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
x	-	a_4x	$(a_4x + a_3)x$	$(a_4x^2 + a_3x + a_2)x$	$(a_4x^3 + a_3x^2 + a_2x + a_1)x$
	a_4	$a_4x + a_3$	$a_4x^2 + a_3x + a_2$	$a_4x^3 + a_3x^2 + a_2x + a_1$	$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = y$

Die Koeffizienten, beginnend beim höchsten, werden in eine Reihe geschrieben. Zum Koeffizienten a_4 wird nichts addiert, also ein Strich "-". Die unabhängige Variable (oben x, normal mit Zahlenwerten) wird eine Reihe tiefer vor das Schema geschrieben. Die erste und zweite Reihe werden jeweils addiert. Im ersten Schritt $0 + a_4$ ergibt a_4 . Das Additions-Ergebnis wird mit der unabhängigen Variablen (hier x) multipliziert und eine Zeile höher unter den nächsten Koeffizienten geschrieben. Die Addition und Multiplikation wird solange fortgesetzt, bis das Additions-Ergebnis unter a_0 vorhanden ist. Das obere allgemeine Beispiel 4. Ordnung beweist, daß sich mit obigen Schema der Funktionswert einer ganzen rationalen Funktion 4. Ordnung berechnen läßt. Der Beweis ließe sich auch für die n-te Ordnung erbringen.

Beispiel 1:**gegeben:** $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 15$ **gesucht:** a) $y(x=2)$ b) $y(x=-4)$

a)

	1	2	-4	15	
2	-	2	8	8	
	1	4	4	23	$\Rightarrow y(x=2) = 23$

b)

	1	2	-4	15	
-4	-	-4	8	-16	
	1	-2	4	-1	$\Rightarrow y(x=-4) = -1$

Beispiel 2: (Studenten)**gegeben:** $y = 2x^4 - 3x^2 + 4x + 5$ **gesucht:** a) $y(x=-2)$ b) $y(x=2)$ c) $y(x=4)$

a)

	2	0	-3	4	5	
-2	-	-4	8	-10	12	
	2	-4	5	-6	17	$\Rightarrow y(x=-2) = 17$

b)

	2	0	-3	4	5	
2	-	4	8	10	28	
	2	4	5	14	33	$\Rightarrow y(x=2) = 33$

c)

	2	0	-3	4	5	
4	-	8	32	116	480	
	2	8	29	120	485	$\Rightarrow y(x=4) = 485$

2.2.2.2. Polynomdivision

Ein Polynom n-ter Ordnung soll durch einen Linearfaktor dividiert werden. Das allgemeine Beispiel der Division eines Polynoms 3. Ordnung durch einen Linearfaktor lautet:

$$y(x) = \frac{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{x + b} = \frac{P(x)}{x + b}$$

Die Polynomdivision wird so ausgeführt, wie dieses schon vom Zahlenrechnen her bekannt ist. Die höherwertige Zahl entspricht bei der Division der höheren Potenz:

$$\begin{array}{r} (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)/(x + b) = a_3x^2 + (-a_3b + a_2)x + (a_3b^2 - a_2b + a_1) + \frac{-a_3b^3 + a_2b^2 - a_1b + a_0}{x + b} \\ \begin{array}{r} a_3x^3 \quad + ba_3x^2 \\ \hline (-a_3b + a_2)x^2 + a_1x \\ (-a_3b + a_2)x^2 + (-a_3b^2 + a_2b)x \\ \hline (+a_3b^2 - a_2b + a_1)x + a_0 \\ (+a_3b^2 - a_2b + a_1)x + (a_3b^3 - a_2b^2 + a_1b) \\ \hline -a_3b^3 + a_2b^2 - a_1b + a_0 \end{array} \end{array}$$

Die obere Polynomdivision ergibt somit:

$$\begin{aligned} \frac{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}{x + b} &= a_3x^2 + (-a_3b + a_2)x + (a_3b^2 - a_2b + a_1) + \frac{-a_3b^3 + a_2b^2 - a_1b + a_0}{x + b} \\ &= A_2x^2 + A_1x + A_0 + \frac{R}{x + b} \end{aligned}$$

Die oberen Koeffizienten A_2 , A_1 , und A_0 und der Rest R betragen:

$$A_2 = a_3$$

$$A_1 = -a_3b + a_2$$

$$A_0 = a_3b^2 - a_2b + a_1$$

$$R = -a_3b^3 + a_2b^2 - a_1b + a_0$$

Das Ergebnis der Division eines Polynoms n-ter Ordnung durch einen Linearfaktor (x+b) ergibt ein Polynom (n-1)-ter Ordnung plus einen Rest R dividiert durch x+b. Der Rest sieht fast so aus, als wäre es der Funktionswert des Polynoms an der Stelle $x=b$. Nur einige Vorzeichen sind noch falsch. Tatsächlich ist der Rest der Funktionswert an der negativen Stelle $x=-b$

$$R = P(x=-b)$$

Wenn schon der Funktionswert eines Polynoms zu berechnen ist, denkt man an das Horner Schema. Wichtig hier: negativen b-Wert einsetzen:

	a_3	a_2	a_1	a_0
-b	-	$-a_3b$	$a_3b^2 - a_2b$	$-a_3b^3 + a_2b^2 - a_1b$
	a_3	$-a_3b + a_2$	$a_3b^2 - a_2b + a_1$	$-a_3b^3 + a_2b^2 - a_1b + a_0$
	A_2	A_1	A_0	R

Erwartet wurde eigentlich, daß an der letzten Stelle unter a_0 der Wert R erscheint. Dieses ist tatsächlich der Fall. Aber auch die Koeffizienten A_2 , A_1 und A_0 entstehen als "Abfallprodukt" beim Horner-Schema. Somit ist das Horner-Schema bestens geeignet, um eine Polynomdivision eines Linearfaktors auszuführen.

Beispiel 1:

gesucht: $y(x) = \frac{4x^3 - 2x^2 + 5x + 3}{(x - 3)}$

	4	-2	5	3
3	-	12	30	105
	4	10	35	108

Ergebnis: $y(x) = 4x^2 + 10x + 35 + \frac{108}{x - 3}$

Beispiel 2:

gesucht: $y(x) = \frac{2x^4 + 5x^3 - 2x + 3}{(x + 2)}$

	2	5	0	2	3
-2	-	-4	-2	4	-12
	2	1	-2	6	-9

Ergebnis: $y(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 6 - \frac{9}{x + 2}$

Beispiel 3: (Studenten)

gesucht: $y(x) = \frac{(x^2 + 12x + 32)}{x + 4}$

	1	12	32
-4	-	-4	-32
	1	8	0

Ergebnis: $y(x) = x + 8$

Beispiel 4: (Studenten)

gesucht: $y(x) = \frac{x^5 - 7x^3 + 4x^2 + 8}{x - 3}$

	1	0	-7	4	0	8
3	-	3	9	6	30	90
	1	3	2	10	30	98

Ergebnis: $y(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 10x + 30 + \frac{98}{x - 3}$

Beispiel 2: Allgemeines Polynom 3. Ordnung

gegeben: $y(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x + 4$

gesucht: $y(x) = b_3(x-2)^3 + b_2(x-2)^2 + b_1(x-2) + b_0$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 & 4 & -6 & 2 & 4 \\
 2 & - & 8 & 4 & 12 \\
 \hline
 & 4 & 2 & 6 & \underline{\underline{16}} = b_0 \\
 2 & - & 8 & 20 & \\
 \hline
 & 4 & 10 & \underline{\underline{26}} = b_1 \\
 2 & - & 8 & & \\
 \hline
 & 4 & 18 & \underline{\underline{= b_2}} \\
 & 4 & & = b_3
 \end{array}
 \end{array}$$

Ergebnis: $y(x) = 4(x-2)^3 + 18(x-2)^2 + 26(x-2) + 16$

Beispiel 3: (Studenten)

gegeben: $y(x) = 3x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 10x + 14$

gesucht: $y(x) = b_4(x+3)^4 + b_3(x+3)^3 + b_2(x+3)^2 + b_1(x+3) + b_0$

Ergebnis: $y(x) = 3(x+3)^4 - 29(x+3)^3 + 95(x+3)^2 - 101(x+3) + 2$

2.2.3. Gebrochen rationale Funktionen

2.2.3.1. Allgemeine Form

$$y = \frac{b_m * x^m + b_{m-1} * x^{m-1} + \dots + b_1 * x + b_0}{a_n * x^n + a_{n-1} * x^{n-1} + \dots + a_1 * x + a_0} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i x^i}{\sum_{i=0}^n a_i x^i}$$

Die allgemeine Form der gebrochen rationalen Funktion ist die Division zweier Polynome (zweier ganzer rationaler Funktionen).

2.2.3.2. Echt und unecht gebrochen

Bei der echt gebrochen rationalen Funktion ist die Ordnung des Nenners größer als die des Zählers:

$$n > m \Rightarrow \text{echt gebrochen}$$

Bei der unecht gebrochen rationalen Funktion ist die Zähler-Ordnung größer oder gleich der Nennerordnung:

$$m > n \Rightarrow \text{unecht gebrochen}$$

Die unecht gebrochen rationale Funktion lässt sich durch Polynomdivision aufspalten in ein Polynom (m-n)-ter Ordnung plus einer echt gebrochen rationalen Funktion:

unecht gebrochen rationale Funktion = Polynom (m-n)-ter Ordnung + echt gebrochen rationale Funktion

Beispiel:

Gegeben ist die unecht gebrochen rationale Funktion:

$$y(x) = \frac{x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 8x + 6}{(x^2 + 4x + 3)} \quad m = 5 \quad n = 2$$

Durch Polynomdivision erhält man:

$$(x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 8x + 6) : (x^2 + 4x + 3) = x^3 - 2x^2 + 8x - 31 + \text{Rest}(x)$$

$$\begin{array}{r} x^5 + 4x^4 + 3x^3 \\ \underline{- 2x^4 + 0x^3 - 5x^2} \\ - 2x^4 - 8x^3 - 6x^2 \\ \underline{8x^3 + x^2 + 8x} \\ 8x^3 + 32x^2 + 24x \\ \underline{- 31x^2 - 16x + 6} \\ - 31x^2 - 124x - 93 \\ \underline{108x + 99} \end{array}$$

$$y(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 31 + \frac{108x + 99}{x^2 + 4x + 3}$$

2.2.3.3. Pole, Nullstellen, Lücken

Je nach Lage werden die Nullstellen in Zähler und Nenner wie folgt genannt:

Pole: Sind dort vorhanden, wo nur der Nenner eine Nullstelle hat.

Nullstellen: Nullstellen der Funktion treten dort auf, wo nur der Zähler eine Nullstelle aufweist.

Lücken: Diese treten auf, wo Zähler und Nenner gemeinsame Nullstellen besitzen.

Beispiel:

gegeben:
$$y(x) = \frac{(x - 2)(x + 5)(x - 8)}{(x - 2)(x - 5)(x + 6)(x + 8)}$$

gesucht: Nullstellen x_N , Pole x_p und Lücken x_L

Lösung:

Nullstellen: $x_{N1} = -5, x_{N2} = +8,$

Pole: $x_{p1} = +5, x_{p2} = -6, x_{p3} = -8,$

Lücken: $x_L = 2$

2.2.3.4. Asymptote

Asymptoten sind die Annäherung des Funktionsgraphen an einfachere Funktionen (meist Geraden) für Verhalten des Grafen in Abhängigkeit von x oder y im Unendlichen.

Beispiel:

Für die Funktionen $y_1 = \frac{1}{x}$ und $y_2 = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$

sind die Funktionsgraphen und deren Asymptoten in den Bildern MA2234A und MA2234B dargestellt. Für die erste Funktion y_1 sind die Asymptoten die x -Achse und die y -Achse. Beweis, daß die x -Achse eine Asymptote ist:

$$y_{A1} = \lim_{x \rightarrow \infty} y_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Die Funktion $y_{A1} = 0$ ist die x -Achse. Die y -Achse ist eine Asymptote, weil bei $x = 0$ ein Pol vorhanden ist.

Für die zweite Funktion y_2 wird wiederum die Asymptote durch Grenzwertbildung bestimmt:

$$y_{A2} = \lim_{x \rightarrow \infty} y_2(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow \infty} (x) = 0 + x$$

Die eine Asymptote ist die Gerade $y_{A2} = x$. Dieses ist genau der Teil der Funktion der bei der Polynomdivision das Polynom in x ergab. Echt gebrochen rationale Funktionen haben die x -Achse als Asymptote. Ebenso tritt bei einem Pol eine Asymptote auf.

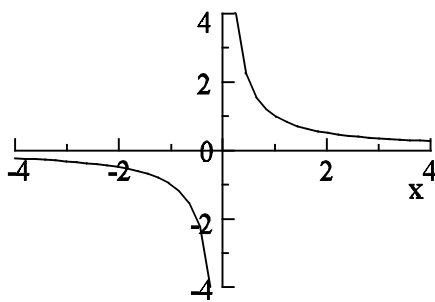


Bild MA2234A

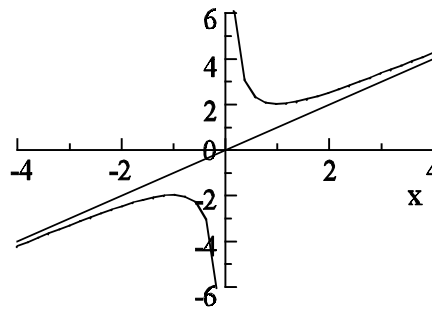


Bild MA2234B

Zusammenfassung:

- Eine echt gebrochen rationale Funktion weist als Asymptoten die Pole und die x -Achse auf.
- Die Asymptoten von unecht gebrochen rationalen Funktionen sind die Pole und das Polynom, welches sich mit Hilfe der Polynomdivision ergibt.

2.2.3.5. Exemplarische Darstellung

Um das Gefühl für ganze rationale Funktionen zu bekommen, sind auf den Arbeitsblättern MAI-5 und MAI-6 ausgewählte, gebrochen rationale Funktionen dargestellt. Die 16 Funktionen sind von a bis o durchgezählt. Im folgenden einige Anmerkungen zu jeder Funktion. Abbildung der Funktion im Abschluß der gesamten Beschreibung.

Funktion a: $y = \frac{1}{x}$

Diese Funktion ist schon aus Bild MA2234A bekannt.

Pole: $x_p = 0$
 Nullstellen: keine
 Asymptoten: x -Achse ($y=0$) und y -Achse ($x=0$)
 Eigenschaft: punktsymmetrisch zum Nullpunkt

Funktion b: $y = \frac{1}{x-1}$

Die Funktion b ist die Funktion a um "1" nach rechts verschoben

Pole: $x_p = 1$
 Nullstellen: keine
 Asymptoten: x-Achse ($y=0$)
 Eigenschaft: punktsymmetrisch zum Punkt ($x=1, y=0$)

Funktion c: $y = \frac{1}{x^2}$

Die beiden Äste verlaufen wegen des Quadrates für nur positive y-Werte. Die Funktion nimmt für große x-Werte schneller ab als die Funktion a. Dagegen ergeben sich für x-Werte nahe Null größere Funktionswerte als bei der Funktion a.

Pole: $x_p = 0$
 Nullstellen: keine
 Asymptoten: x-Achse und positive y-Achse
 Eigenschaft: symmetrisch zur y-Achse

Funktion d: $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

Für $x = 0$ hat die Funktion den Wert 1. Für x gegen Unendlich geht der Funktionswert gegen Null. Da der Nenner nur positive Werte annehmen kann, besitzt die Funktion keinen reellen Pol.

Pole: keine ($x_p = \pm j$)
 Nullstellen: keine
 Asymptoten: x-Achse
 Eigenschaft: symmetrisch zur y-Achse

Funktion e: $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

Für kleine x ($|x| \ll 1$) ist der Wert von x^2 sehr viel kleiner als 1. Es gilt somit für $|x| \ll 1$ die Näherungsfunktion $y = x$. Für große x geht der Funktionswert gegen Null, weil x im Nenner überwiegt.

Pole: keine
 Nullstellen: $x_N = 0$
 Asymptoten: $y_{A1} = 0$ oder $y_{A2} = \frac{1}{x}$
 Eigenschaft: punktsymmetrisch zum Nullpunkt
 Näherung: $y = x$ für $|x| \ll 1$

Funktion f: $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

Die Funktion f kann auch durch Polynomdivision (siehe unten) mit Hilfe von Funktion d konstruiert werden. Negiert man Funktion d (klappen um x-Achse) und addiert "1" dazu (verschieben um y-Richtung um "1"), erhält man Funktion f.

Polynomdivision: $y = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$

Pole: keine
 Nullstelle: $x_N = 0$
 Asymptote: $y_A = 1$
 Eigenschaft: symmetrisch zur y-Achse

Funktion g:

$$y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

Durch Polynomdivision (siehe unten) ergibt sich die Funktion g, in dem man von der Geraden $y = x$ die Funktion aus Punkt e subtrahiert. Für $x^2 \ll 1$ ergibt sich wieder eine Näherung (s.u.). Für kleine x kann x^2 dabei im Zähler vernachlässigt weil noch "1" addiert wird. Zum Vergleich ist die Asymptote $y = x$ in Bild g eingezeichnet.

Polynomdivision:	$y = x - \frac{x}{x^2 + 1}$
Pole:	keine
Nullstelle:	$x_N = 0$
Asymptote:	$y_A = x$
Eigenschaft:	punktsymmetrisch zum Nullpunkt
Näherung:	$y = x^3 \quad x \ll 1$

Funktion h: $y = \frac{x^4}{x^2 + 1}$

Durch Polynomdivision (siehe unten) ergibt sich die Funktion h, indem von der Parabel $y = x^2 - 1$ die Funktion d subtrahiert wird. Asymptote und Näherung sind im Bild h mit eingezeichnet.

Polynomdivision:	$y = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$
Pole:	keine
Nullstelle:	$x_N = 0$
Asymptote:	$y_A = x^2 - 1$
Eigenschaft:	symmetrisch zur y-Achse
Näherung:	$y = x^4 \quad x \ll 1$

Funktionen i, k, m und o:

Diese Funktionen haben einen gemeinsamen Nenner mit nur positiven Werten ($x_N = \pm j$). Dieser Nenner wird mit x^0 bis x^3 multipliziert. Bei x^0 ergibt sich eine achsensymmetrische Funktion. Durch Multiplikation mit x ergibt sich ein Wechsel von Achsen- zu Punktsymmetrie und umgekehrt.

Asymptote:	Funktion i:	$y_A = 0$
	Funktion k:	$y_A = 0, y_A = \frac{1}{x}$
	Funktion m:	$y_A = 1$
	Funktion o:	$y_A = x$

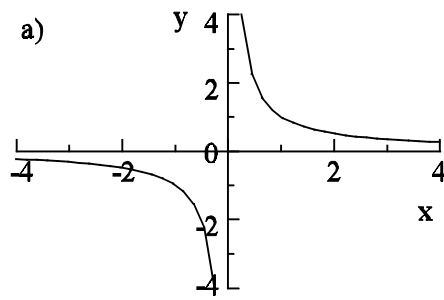
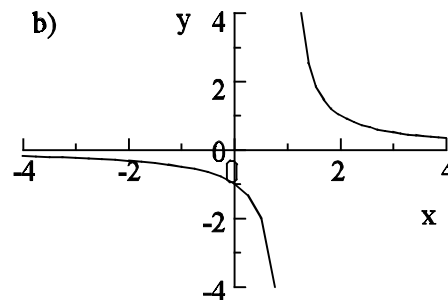
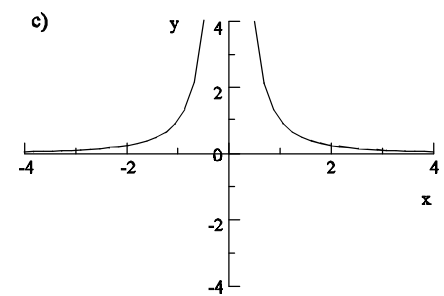
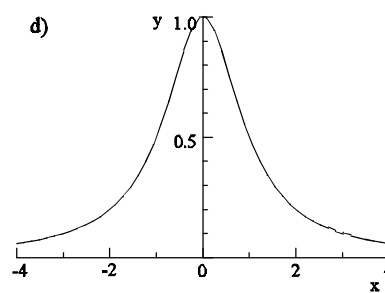
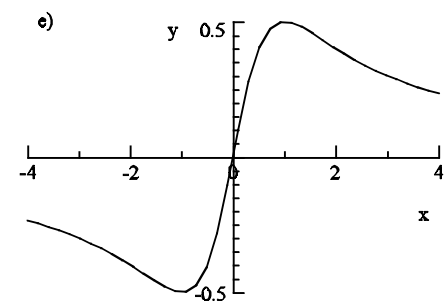
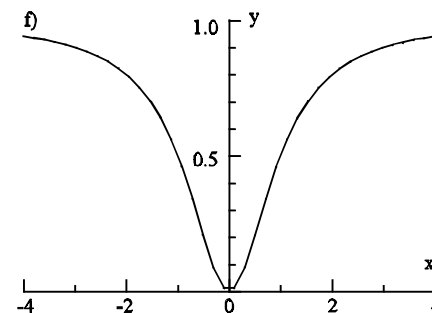
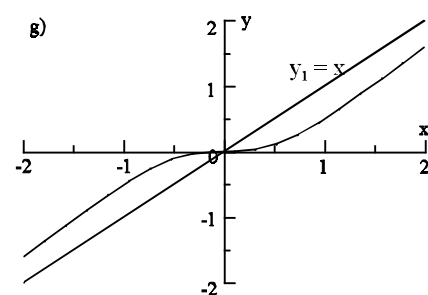
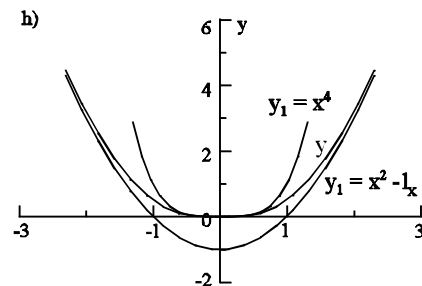
Funktionen j, l, n und p:

Alle diese Funktionen haben einen gemeinsamen Nenner mit zwei Nullstellen. Die Nullstellen im Nenner bewirken einen Pol bei $x_{p1} = -2$ und bei $x_{p2} = +2$. Die Funktion $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ wird wieder mit x^0 bis x^3 multipliziert.

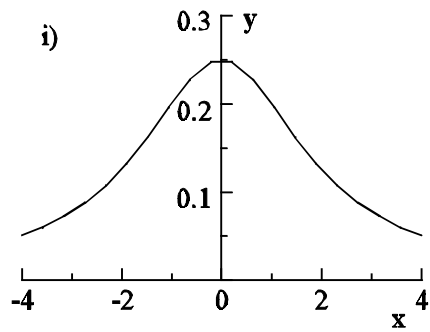
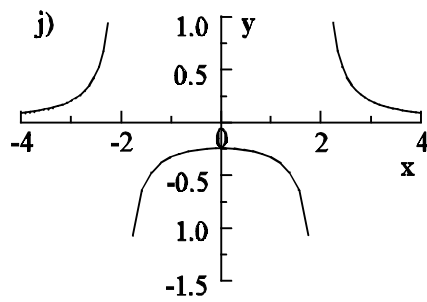
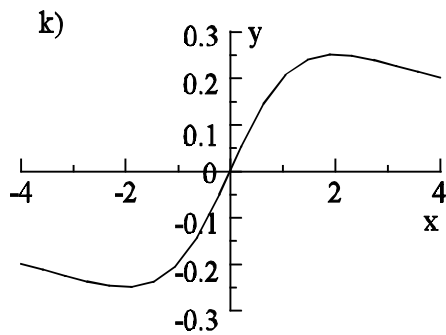
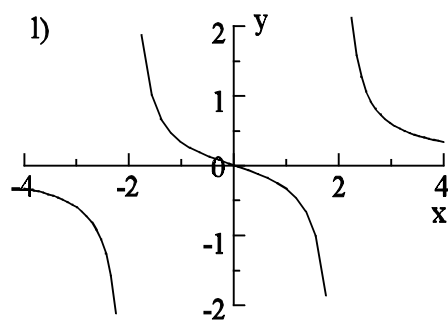
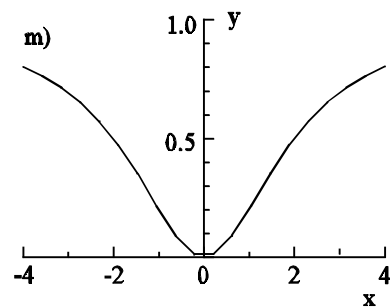
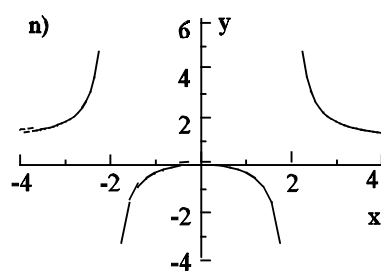
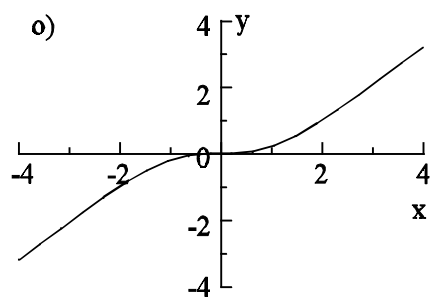
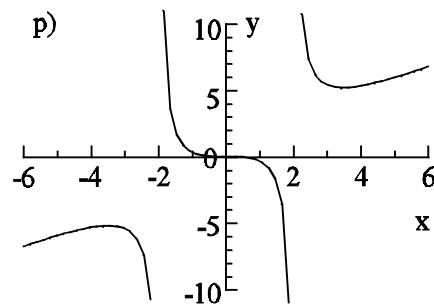
Die Symmetrie-Eigenschaften wechseln wieder wie bei den oberen (auf den Arbeitsblatt MAI-6 die linken) Funktionen.

Asymptote:	alle Funktionen:	$y_{A1} = -2,$	$y_{A2} = +2$
	Funktion j:	$y_A = 0$	
	Funktion l:	$y_A = 0$	
	Funktion n:	$y_A = 1$	
	Funktion p:	$y_A = x$	

Arbeitsblatt MAI - 5 Gebrochen rationale Funktionen, Teil 1

Bild MA2235A: $y = \frac{1}{x}$ Bild MA2235B: $y = \frac{1}{x-1}$ Bild MA2235C: $y = \frac{1}{x^2}$ Bild MA2235D: $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ Bild MA2235E: $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ Bild MA2235F: $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ Bild MA2235G: $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ Bild MA2235H: $y = \frac{x^4}{x^2 + 1}$

Arbeitsblatt MAI - 6 Gebrochen rationale Funktionen, Teil 2

Bild MA2235I: $y = \frac{1}{x^2 + 4}$ Bild MA2235J: $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ Bild MA2235K: $y = \frac{x}{x^2 + 4}$ Bild MA2235L: $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ Bild MA2235M: $y = \frac{x^2}{x^2 + 4}$ Bild MA2235N: $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ Bild MA2235O: $y = \frac{x^3}{x^2 + 4}$ Bild MA2235P: $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

2.2.4. Algebraische Funktionen

2.2.4.1. Definition

Ganze rationale Funktionen enthielten Potenzen von x . Die Funktion war nach y aufgelöst. Sind jetzt auch noch Potenzen von y vorhanden und zusätzlich noch gemischte Terme mit x -Potenzen mit y -Potenzen multipliziert, spricht man von algebraischen Funktionen.

Terme einzeln aufgeführt:

$$F(x, y) = 0 = a_{00} + a_{10} \cdot x + a_{20} \cdot x^2 + a_{30} \cdot x^3 + \dots \\ + a_{01} \cdot y + a_{11} \cdot x \cdot y + a_{21} \cdot x^2 \cdot y + a_{31} \cdot x^3 \cdot y + \dots \\ + a_{02} \cdot y^2 + \dots \\ + \dots$$

als Doppelsumme geschrieben:
$$F(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^m a_{ik} \cdot x^i \cdot y^k = 0$$

Produkt:
$$F(x, y) = \prod_{i=1}^n (a_i x + b_i y + c) = 0$$

Als Sonderfall sind in den algebraischen Funktionen die schon besprochenen ganzen rationalen Funktionen und die gebrochen rationalen Funktionen enthalten.

Die algebraischen Funktionen n -ter Ordnung sollen hier nicht allgemein diskutiert werden. Wichtig sind algebraische Funktionen 2. Ordnung und Potenzfunktion, die in den nächsten beiden Abschnitten vorgestellt werden.

2.2.4.2. Potenzfunktion

Als Sonderfall der algebraischen Funktion ergibt sich:

$$y^m - c^m \cdot x^n = 0$$

$$y^m = c^m \cdot x^n$$

$$y = c \cdot x^{n/m} = 0$$

n/m ergibt eine reelle Zahl. Würde die obere Gleichung im Komplexen gelöst, ergeben sich m Lösungen. Im Reellen sind nur eine oder zwei Lösungen vorhanden, je nachdem ob n und oder m gerade sind. Hier soll nur der erste Quadrant betrachtet werden. Im Bild MA2242A (Arbeitsblatt MAI-7) ist die Potenzfunktion

$$y = c \cdot x^a$$

mit verschiedenen Exponenten für den ersten Quadranten dargestellt. Allen Funktionen gemeinsam sind die zwei Punkte:

$$\begin{aligned} x = 0, & \quad y = 0 \\ x = 1, & \quad y = 1 \end{aligned}$$

Für den Exponenten $a = 1$ ergibt sich die schon bekannte Gerade $y = x$. Je größer der Exponent a wird, desto steiler wird die Kurve für $x > 1$ und umso flacher für $x \approx 0$. Gerade umgekehrt verhält es sich für Exponenten a , die kleiner werden als 1. Je kleiner der Exponent wird, umso kleiner wird auch die Steigung für $x > 1$. Für die Grenzfälle $a \rightarrow 0$ und $a \rightarrow \infty$ ergeben sich rechteckige Funktionen.

Auch die Potenzfunktion mit negativen Exponenten lassen sich als Sonderfall der algebraischen Funktion ableiten:

$$y^m \cdot x^n - c^m = 0$$

$$y^m = \frac{c^m}{x^n}$$

$$y = \frac{c}{x^{n/m}} = c \cdot x^{-n/m} = c \cdot x^{-a}$$

Arbeitsblatt MAI-7

Potenzfunktion

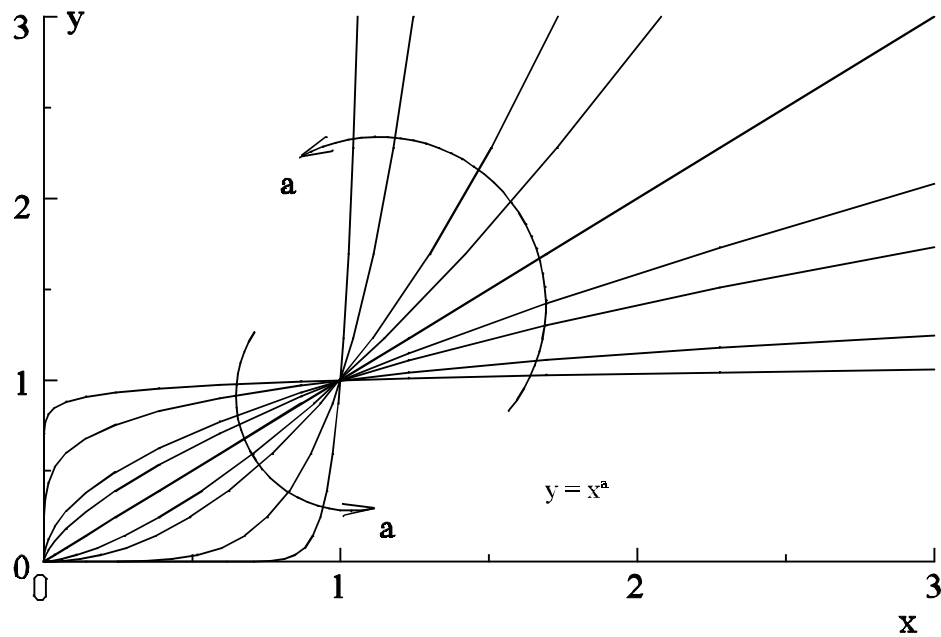


Bild MA2242A:

$$a = \frac{1}{20}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, 5, 20$$

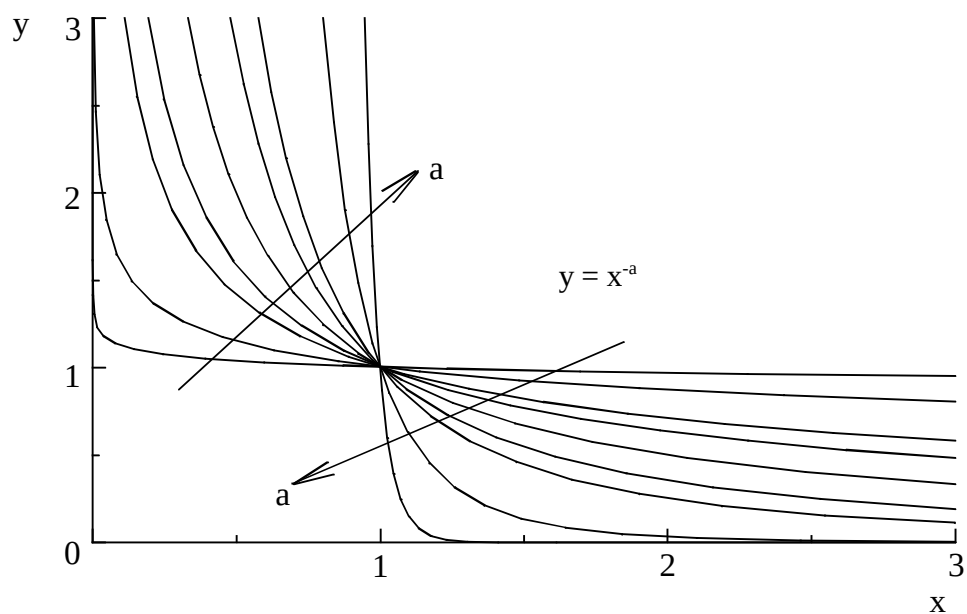


Bild MA2242B:

$$a = \frac{1}{20}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, 5, 20$$

2.2.4.3. Algebraische Funktionen 2. Ordnung**2.2.4.3.1. Allgemeine Form**

$$A \cdot x^2 + B \cdot x + C \cdot y^2 + D \cdot y + E + F \cdot x \cdot y = 0$$

Je nach Koeffizienten ergeben sich verschiedene Kurvenformen, die auch als Kegelschnitte bezeichnet werden:

- Ellipse
- Kreis als Sonderfall der Ellipse
- Punkt als Sonderfall der Ellipse
- Parabel
- Doppelgerade

obere Kurven ergeben sich als Schnitt zwischen einem Doppelkegel und einer Ebene im dreidimensionalen Raum, siehe Kap. 4.

2.2.4.3.2. Einfluß des gemischten Terms

Ohne Ableitung: Der gemischte Term $F \cdot x \cdot y$ bewirkt eine Drehung in der x-y-Ebene. Um diesen Term zu eliminieren, muß eine Drehung des x-y-Koordinatensystems um den Winkel φ auf das u-v-Koordinatensystem vorgenommen werden. Die Variablen x und y müssen ersetzt werden durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

mit $\tan(2\varphi) = \frac{2F}{A - C}$

Im u-v-Koordinatensystem verschwindet der gemischte Term. Dieser praktisch relativ seltene Fall sollte nur erwähnt bzw. angedeutet werden. Im folgenden sollen nur noch Funktionen mit $F = 0$ betrachtet werden.

2.2.4.3.3. Parabel

$$C = 0, F = 0$$

$$A \cdot x^2 + B \cdot x + D \cdot y + E = 0$$

$$y = -\frac{1}{D}[Ax^2 + Bx + E]$$

(bekannt)

2.2.4.3.4. Gerade

a) $C = 0, F = 0, A = 0$

$$B \cdot x + D \cdot y + E = 0$$

$$y = -\frac{1}{D}[Bx + E]$$

(auch bekannt)

b) $B = 0, D = 0, E = 0, F = 0$

$$A \cdot x^2 + C \cdot y^2 = 0$$

$$y = \pm \sqrt{-\frac{A}{C}} \cdot x \quad (\text{Doppelgerade})$$

2.2.4.3.5. Allgemeine Form von Kreis, Ellipse und Hyperbel (Punkt)

Diese drei (vier) Formen erhält man, wenn beide quadratischen Koeffizienten A und C ungleich Null sind:

$$A \neq 0 \quad B \neq 0 \quad Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E = 0$$

$$A \left[x^2 + 2 \frac{B}{2A} x + \left(\frac{B}{2A} \right)^2 \right] + C \left[y^2 + 2 \frac{D}{2C} y + \left(\frac{D}{2C} \right)^2 \right] = -E + \frac{B^2}{4A} + \frac{D^2}{4C}$$

$$\frac{A}{\frac{B^2}{4A} + \frac{D^2}{4C} - E} \left(x + \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{C}{\frac{B^2}{4A} + \frac{D^2}{4C} - E} \left(y + \frac{D}{C} \right)^2 = 1$$

Obere Gleichung lässt sich, je nach Vorzeichen, umformen in eine der drei Arten A, B oder C:

$$A] \quad \left(\frac{x - x_0}{a} \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b} \right)^2 = 1$$

$$B] \quad - \left(\frac{x - x_0}{a} \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b} \right)^2 = 1$$

$$C] \quad \left(\frac{x - x_0}{a} \right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b} \right)^2 = 1$$

x_0, y_0 bewirken eine Verschiebung in x bzw. y
a, b bewirken eine Streckung (Stauchung) in x bzw. y

Im ersten Schritt sollen oben die Funktionen mit $x_0 = 0, y_0 = 0, a = 1, b = 1$ untersucht werden, damit ergibt sich:

$$A] \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

$$B] \quad -x^2 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm \sqrt{1 + x^2}$$

$$C] \quad x^2 - y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

Die Funktionen A, B und C sind auf Arbeitsblatt MAI-8, Bild MA2235A, dargestellt. Die Funktion A ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems. Die Funktion B ergibt sich als eine Hyperbel mit zwei Ästen, die nach oben und unten geöffnet sind. Die zwei Äste der Hyperbel von Funktion C sind nach rechts und links geöffnet.

Die Funktionen B und C haben die gleichen Asymptoten, mit $x^2 \gg 1$ gilt:

$$B] \quad y = \pm \sqrt{x^2 + 1} \approx \pm \sqrt{x^2} = \pm x \quad C] \quad y = \pm \sqrt{x^2 - 1} \approx \pm \sqrt{x^2} = \pm x$$

Im zweiten Schritt sollen die drei Funktionen mit $x_0 = 0, y_0 = 0, a \neq 0$ und $b \neq 0$ untersucht werden, damit ergibt sich dann:

$$A] \quad \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2}$$

$$B] \quad - \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm b \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2}$$

$$C] \quad \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm b \sqrt{\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1}$$

Die drei Funktionen sind auf Arbeitsblatt MAI-8, Bild MA2235B dargestellt.

Die Funktion A ist eine Ellipse mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt und den Halbachsen a in Richtung und b in y-Richtung.

Skizzieren der Ellipse:

- Rechteck mit $y = \pm b$ und $x = \pm a$ zeichnen
- Ellipse skizzieren, die das Rechteck viermal tangiert.

Die Funktion B ist eine nach oben und unten geöffnete Hyperbel mit den Scheitelpunkten:

$$(x_{s1} = 0, \quad y_{s1} = +a) \quad \text{und} \quad (x_{s2} = 0, \quad y_{s2} = -a)$$

Zur Konstruktion der Hyperbel B:

- Rechteck um die zugehörige Ellipse. Dazu in x-Richtung $\pm a$ und in y-Richtung $\pm b$ eintragen. Asymptoten sind Geraden als Verlängerung der Diagonalen des Rechtecks.
- Scheitelpunkt, siehe oben, eintragen.
- Kurve skizzieren.

Die Funktion C ist eine nach rechts und links geöffnete Hyperbel mit den Scheitelpunkten:

$$(x_{s1} = -a, y_{s1} = 0) \quad \text{und} \quad (x_{s2} = +a, y_{s2} = 0)$$

Die Konstruktion erfolgt wie bei B, nur mit anderen Scheitelpunkten.

Im dritten Fall, der allgemeinen Funktion, werden zusätzlich auch noch die Werte x_0 und y_0 allgemein gehalten. Ein Beispiel dafür ist auf Arbeitsblatt MAI-8, Bild MA2235C dargestellt. Ein Vergleich der Bilder MA22435B und MA22435C zeigt, daß sich das Bild C durch Verschiebung ergibt, in x um x_0 und in y um y_0 .

Konstruktion von Bild C, wie bei Bild B, nur der Mittelpunkt des Rechtecks ist x_0, y_0 .

Ist eine algebraische Funktion 2. Grades (ohne Drehung, $F=0$), z.B. die Funktion

$$4x^2 - 48x + 9y^2 - 144y + 684 = 0$$

gegeben, muß durch Ausklammern und quadratischer Ergänzung in eine der Grundformen umgestellt werden. Für oberes Beispiel:

$$4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 - 16y + 64) = -684 + 4 \cdot 36 + 9 \cdot 64$$

$$4(x - 6)^2 + 9(y - 8)^2 = 36$$

$$\frac{1}{9}(x - 6)^2 + \frac{1}{4}(y - 8)^2 = 1$$

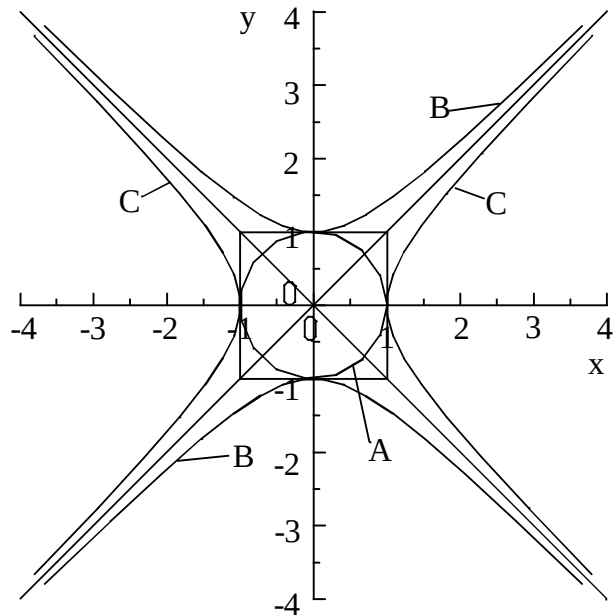
$$\left(\frac{x - 6}{3} \right)^2 + \left(\frac{y - 8}{2} \right)^2 = 1$$

Durch Vergleichen mit der allgemein Form ergibt sich: $x_0 = 6, y_0 = 8, a = 3, b = 2$

Das sind "zufälliger Weise" die Werte, die auch im Bild C dargestellt sind.

Zur Konstruktion der Kurve muß erstmal unterschieden werden, welche der drei Formen A, B oder C entspricht der umgeformten Gleichung. In diesem Fall der Kurve A. Dann ist der Mittelpunkt zu markieren und das Rechteck einzeichnen. Im Fall der Ellipse kann die Kurve sofort skizziert werden. Falls es sich um die Hyperbel B oder C gehandelt hätte, müßten zum Skizzieren der Funktionskurve vorher noch die Asymptoten und der Scheitelpunkt eingezeichnet werden.

Arbeitsblatt MAI-8



A] Kreis

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

B] Hyperbel 1

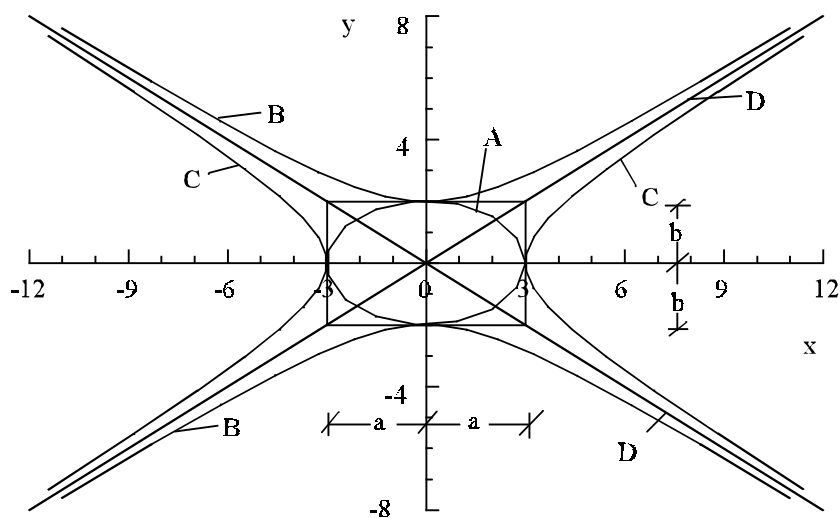
$$-x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1 + x^2}$$

C] Hyperbel 2

$$x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$$

D] Asymptoten $y = \pm x$

Bild MA22435A: Kreis und Normal-Hyperbeln

Bild MA22435B: Funktion von Bild MA22435A um die Faktoren $a=3$ in x und $b=2$ in y gestreckt

A] Ellipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y = \pm b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \pm 2\sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}$

B] Hyperbel 1 $-\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 = -\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y = \pm b\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \pm 2\sqrt{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2}$

C] Hyperbel 2 $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y = \pm b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} = \pm 2\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 1}$

D] Asymptoten $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{2}{3}x$

Arbeitsblatt MAI-9 Beispiele Verschiebung Ellipse und Hyperbel

Die drei gegebenen algebraischen Funktionen

A] $4x^2 - 48x + 9y^2 - 144y + 684 = 0$

B] $-4x^2 + 48x + 9y^2 - 144y + 396 = 0$

C] $4x^2 - 48x - 9y^2 + 144y - 468 = 0$

werden mit Hilfe quadratischer Ergänzung umgeformt:

A] $\left(\frac{x-6}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-8}{2}\right)^2 = 1$

B] $-\left(\frac{x-6}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-8}{2}\right)^2 = 1$

C] $\left(\frac{x-6}{3}\right)^2 - \left(\frac{y-8}{2}\right)^2 = 1$

Verglichen mit den drei Normalformen

A] $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1$

B] $-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1$

C] $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1$

ergibt der Koeffizientenvergleich

$$x_0 = 6$$

$$y_0 = 8$$

$$a = 3$$

$$b = 2$$

Daraus lassen sich unten dargestellten Funktionen konstruieren.

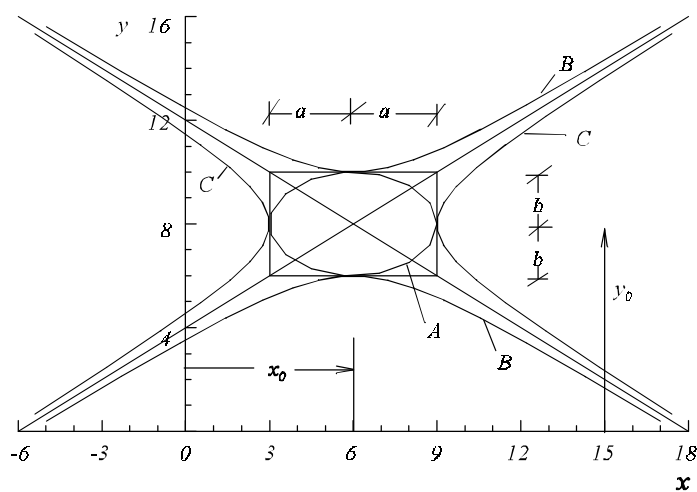


Bild MA22435C

2.3. Transzendente Funktionen

2.3.1. Einleitung

Transzendente Funktionen sind Funktionen, die als Ergebnis transzendente Zahlen ergeben.

Transzendente Zahlen

Rationale Zahlen sind alle Brüche. Beispiel:

$$\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}285714$$

Die rationalen Zahlen haben im Dezimalformat eine Periodizität, die transzendente Zahlen (oder auch irrationale Zahlen) nicht aufweisen. Ausführlichere Hinweise zu Zahlenmengen werden im Kapitel 3 gegeben.

Berechnung transzendenter Funktionen

Die am weitesten verbreitete Berechnung ist die Reihenentwicklung. Beispiel: Die Winkelfunktion $\cos(x)$ kann mit Hilfe der Reihe

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots$$

im Bogenmaß berechnet werden. Weitere Hinweise zu Reihen in Kap. 2.3.8 und im 2. Semester im Kap. 8.

Die bekanntesten transzendenten Funktionen sind:

Winkelfunktionen:	$\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$
Umkehrfunktionen dazu:	$\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$, $\text{arccot}(x)$
e-Funktion:	e^x
Umkehrfunktion dazu:	$\ln(x)$
Hyperbelfunktionen:	$\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$, $\coth(x)$
Umkehrfunktionen dazu:	$\text{arsinh}(x)$, $\text{arcosh}(x)$, $\text{artanh}(x)$, $\text{arcoth}(x)$

Die oben erwähnten transzendenten Funktionen sollen in den nächsten Abschnitten vorgestellt und untersucht werden.

2.3.2. Trigonometrische Funktionen

Diese wären:	$\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$
Umkehrfunktionen dazu:	$\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$, $\text{arccot}(x)$

2.3.2.1. Bogenmaß und Einheitskreis

Wie erfolgt die Angabe der Winkelgröße? Aus der Schule und dem Leben ist bekannt: Ein rechter Winkel beträgt 90° und ein Vollwinkel weist 360° auf. Die Bezeichnung für “°” ist Grad oder auf Englisch degree (“deg” auf Taschenrechner), das Einheitensystem ist das Gradmaß.

Vermessungstechniker z.B. zählen einen rechten Winkel mit 100° und einen Vollwinkel mit 400° . Die Bezeichnung hier für ist Neugrad oder auf dem Taschenrechner “gra”.

Mathematiker und auch praktische Ingenieure haben ihre eigene Winkelzählung: Ein rechter Winkel weist den Wert $\pi/2$ auf und ein Vollwinkel demnach den Wert 2π . Die Berechnung mit rad führt in keinem Fall zum Fehler. Übersichtlicher ist die Berechnung mit Grad. Die Einheit Grad kann immer dann verwendet werden, wenn das Argument nur in der trigonometrischen Funktion oder der Umkehrfunktion (Arcus-Funktion) verwendet wird.

Achtung: Taschenrechner richtig einstellen.

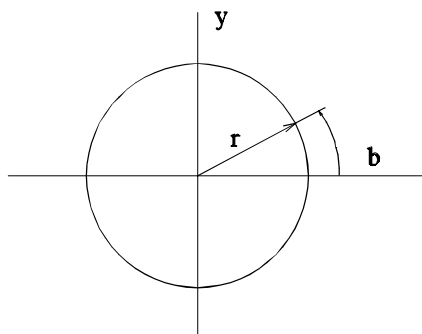


Bild MA2321A: Winkel-Definition am allgemeinen Kreis

Die Winkel im Bogenmaß (und auch trigonometrische Funktionen, Darstellung später) sind am Kreis definiert, siehe Bild MA2321A. Der Winkel ist definiert als das Verhältnis von Bogenlänge b zum Radius r .

$$\varphi = \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}} = \frac{b}{r}$$

Die Einheit ist Radiant oder als Abkürzung "rad".

$$[\varphi] = \text{rad}$$

Physikalisch ist die Einheit 1. "Rad" braucht bei der Angabe des Winkels nicht angegeben werden, nur bei besonderer Hervorhebung. Dagegen ist die Angabe grad bzw. "°" (z. B. $\varphi = 60^\circ$) unbedingt erforderlich, damit keine Verwechslung auftritt.

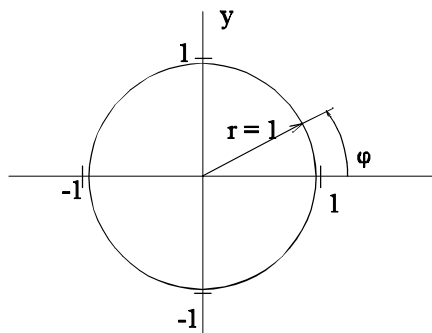


Bild MA2311B: Definition des Winkels am Einheitskreis

Der Einheitskreis ist ein Kreis mit dem Radius $r = 1$. Außer der oberen Winkel-Definition am allgemeinen Kreis, gibt es auch die Definition am Einheitskreis nach Bild MA2321B. Mit $r = 1$ ergibt die allgemeine Definition:

$$\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{1} \quad \varphi = b$$

die Definition am Einheitskreis: **Der Winkel in rad ist die Bogenlänge am Einheitskreis.**

Richtung und Nullpunkt:

Der mathematische Nullpunkt des Winkel liegt, wie schon oben eingezeichnet, auf der positiven x-Achse. Die positive Winkelrichtung wird entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gezählt, also linksrum. Dabei wird erst der 1. Quadrant, dann der 2. Quadrant, danach 3. und 4. Quadrant durchfahren. Nautiker zählen den Winkel in Vorausrichtung "Nord" und rechtsrum.

Winkel im Gradmaß	Winkel im Bogenmaß
0°	0
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
120°	$2\pi/3$
135°	$3\pi/4$
180°	π
270°	$3/2\pi$
360°	2π
-90°	$-\pi/2$

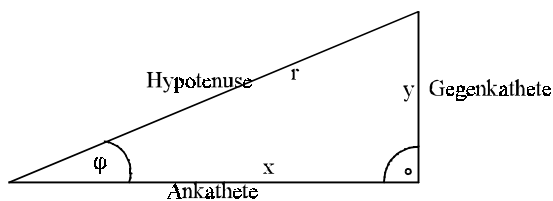
2.3.2.2. Definition der Winkelfunktionen**2.3.2.2.1. Definition am rechtwinkligen Dreieck**

Bild MA23221A

Die Winkelfunktionen sind am rechtwinkligen Dreieck, siehe Bild MA23221A, wie folgt definiert:

$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{y}{x}$$

$$\cot(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{x}{y}$$

2.3.2.2.2. Definition am Einheitskreis (EK)

Zeichnet man wieder den Einheitskreis mit dem Radius 1, so können die Werte für den Winkel φ der oberen Definition in der x-y-Ebene abgelesen werden, siehe Bild Ma23222A:

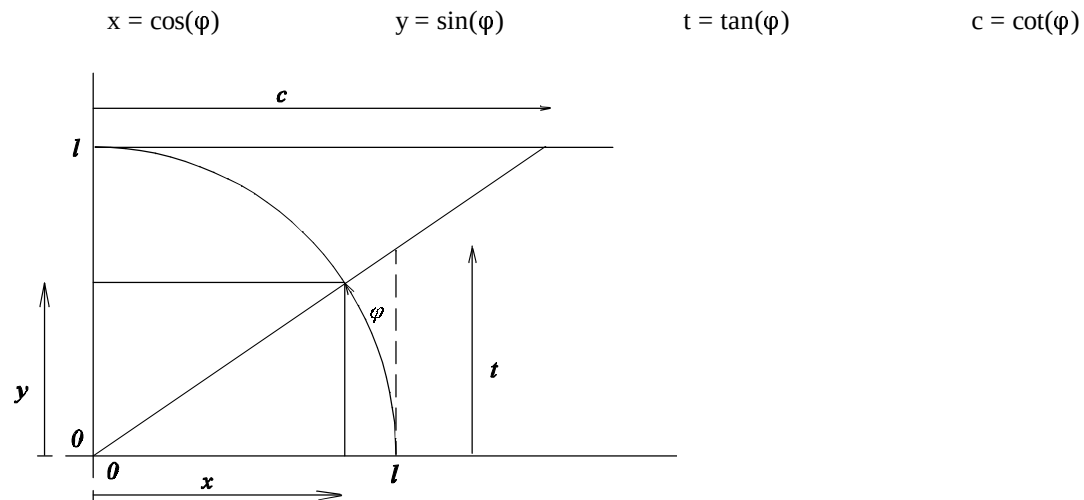


Bild MA23222A: Winkelfunktionen am Einheitskreis

2.3.2.2.3. Definition über Differential-Gleichungen (DGL)

Nicht für das 1. Semester wichtig, nur erst für 3. Semester. Die Winkelfunktionen sind auch die Lösungen der DGL mit den Anfangsbedingungen:

$\cos(x)$ $y'' = -y'$ $y(x=0) = 1$ $y'(x=0) = 0$	$\sin(x)$ $y'' = -y'$ $y(x=0) = 0$ $y'(x=0) = 1$
---	---

2.3.2.3. Funktionswerte und Funktionsgraphen

Für die Werte $\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ und 90° sollen die Sinus- und Kosinus-Werte berechnet werden:

$$\begin{array}{llll} \varphi = 0^\circ & \text{aus EK} \Rightarrow & x = 1 & y = 0 \\ & \Rightarrow & \cos(0) = 1 & \sin(0) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \varphi = 90^\circ & \text{aus EK} \Rightarrow & y = 1 & x = 0 \\ & \Rightarrow & \cos(1) = 0 & \sin(0) = 1 \end{array}$$

$$\varphi = 45^\circ$$

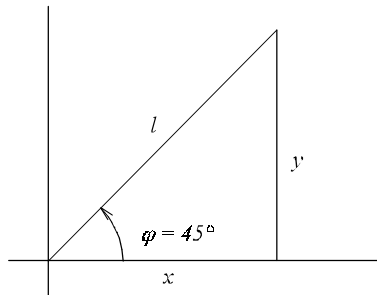


Bild MA2323A

Pythagoras: $x^2 + y^2 = 1$

aus Skizze: $x = y$

$$x^2 + y^2 = 1 = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad x = y = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi = 30^\circ$$

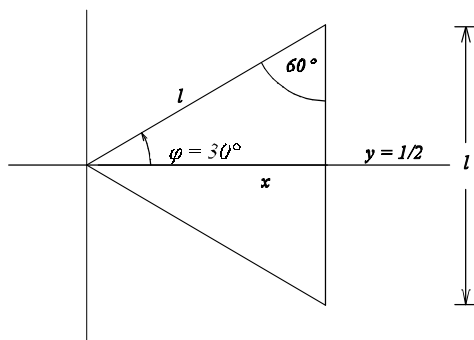


Bild MA2323B

aus Skizze: $y = \frac{1}{2}$

Pythagoras: $x = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos(30^\circ) = x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin(30^\circ) = y = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = 60^\circ$$

Vertauschen von x und y für 30° ergibt : $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$ $\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Berechnung der Funktionswerte außerhalb 0 bis 90° erfolgt mit Hilfe des Einheitskreises, siehe Bild MA2323C. Z.B. ergibt sich der $\cos(\varphi)$ durch Ablesen des x-Wertes.

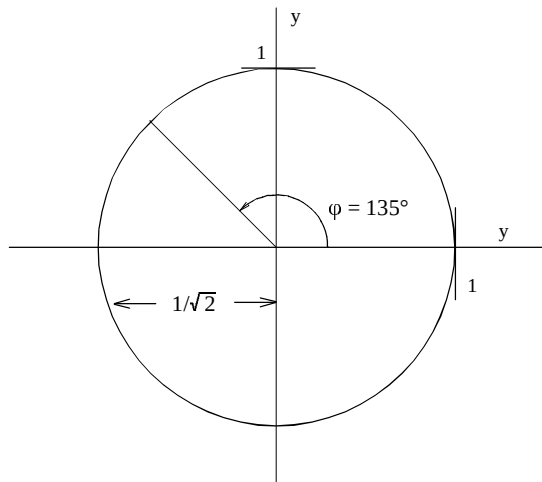


Bild MA2323C

Aus Bild MA2323C: ergibt sich $\cos(135^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tabelle:

φ	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Auf Arbeitsblatt MAI-10 sind die trigonometrischen Funktionen

- $\cos(x)$
- $\sin(x)$
- $\tan(x)$ und
- $\cot(x)$

dargestellt. Die Sinus- und auch die Kosinus-Funktion haben, wie erwartet durch Drehung am Einheitskreis, die Periode eines Vollwinkel von 2π . Da der Tangens das Verhältnis von Gegenkathete zu Ankathete ist, oder im x-y-Koordinatensystem von y/x ist, führen die beiden Ausdrücke

$$\frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}$$

zum gleichem Ergebnis. Somit erhalten die tan-Funktion wie auch die cot-Funktion eine Periode von π . Wegen der Division durch Null wird die tan-Funktion an der Stelle $x=\pi/2$ (und an ungeraden Vielfachen von $\pi/2$) unendlich. Die cot-Funktion wird an ganzen Vielfachen von π unstetig.

Arbeitsblatt MAI-10

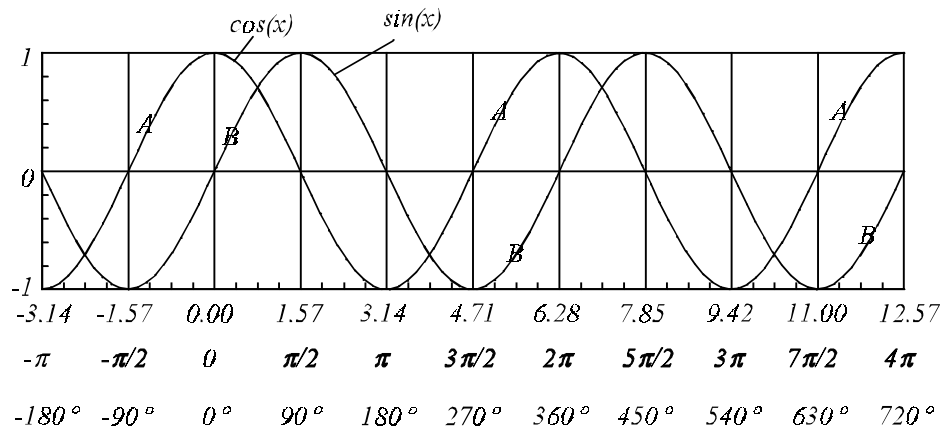


Bild MA2323D:

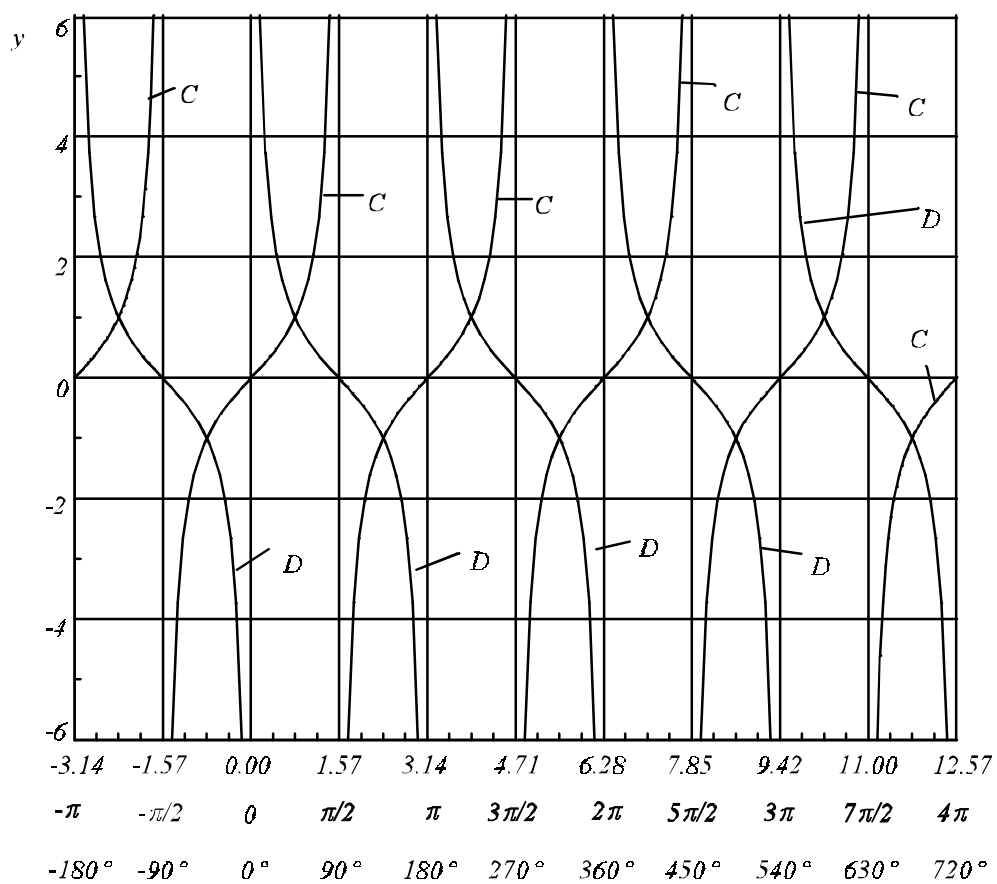
A] $y = \cos(x)$ B] $y = \sin(x)$ 

Bild MA2323E:

C] $y = \tan(x)$ D] $y = \cot(x)$

2.3.2.4. Zusammenhang zwischen den Winkelfunktionen

Die Aufgabe ist, eine Winkelfunktion durch eine andere zu berechnen.

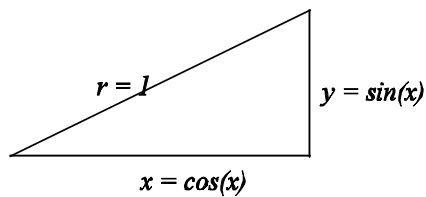


Bild MA2324A

Pythagoras: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$$

$$\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$$

$$\tan(x) = \frac{y}{x} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(x)}}{\cos(x)}$$

Die cos-Funktion um $\pi/2$ oder 90° nach rechts verschoben lautet:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x - 90^\circ)$$

Dieser Ausdruck entspricht der Sinusfunktion:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x) = \cos(x - 90^\circ)$$

Die cos-Funktion um π oder um 180° nach rechts verschoben ergibt die negative cos-Funktion:

$$\cos(x - \pi) = -\cos(x).$$

Da die cos-Funktion in 2π periodisch ist, hat die Verschiebung um 2π keine Auswirkung:

$$\cos(x - 2\pi) = \cos(x).$$

Die cos-Funktion um $\pi/2$ nach links verschoben ergibt die negative sin-Funktion:

$$\cos(x + \pi/2) = -\sin(x).$$

Zusammenfassung auch mit sin-Funktion ohne Beschreibung:

$$\cos(x - \pi \cdot n) = -\cos(x) \quad \text{für } n \text{ ungerade}$$

$$\cos(x - \pi \cdot n) = \cos(x) \quad \text{für } n \text{ gerade}$$

$$\cos(x - \pi/2) = \sin(x)$$

$$\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$$

$$\sin(x - \pi \cdot n) = -\sin(x)$$

$$\text{für } n \text{ ungerade}$$

$$\sin(x - \pi \cdot n) = \sin(x)$$

$$\text{für } n \text{ gerade}$$

$$\sin(x - \pi/2) = -\cos(x)$$

$$\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$$

Da in den Abschnitten 2.3.2.5 bis 2.3.2.8 die komplexe Rechnung benötigt wird, werden diese Abschnitte nach Abschluß des Kapitels 3 behandelt. Die Vorlesung wird mit Abschnitt 2.3.3 fortgesetzt.

Wiedereinstieg nach Kapitel 3 :

2.3.2.5. Additionstheoreme

Die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= ? \\ \cos(\alpha+\beta) &= ?\end{aligned}$$

lassen sich am einfachsten mit Hilfe der komplexen Rechnung ermitteln.

Die Zahlen

$$\underline{z}_1 = e^{j\alpha} \quad \text{und} \quad \underline{z}_2 = e^{j\beta}$$

werden miteinander multipliziert

$$\underline{z}_3 = e^{j\alpha} * e^{j\beta} = e^{j(\alpha+\beta)}$$

$$e^{j(\alpha+\beta)} = [\cos(\alpha) + j \sin(\alpha)] * [\cos(\beta) + j \sin(\beta)] = \cos(\alpha) * \cos(\beta) + j \sin(\alpha) * \cos(\beta) + j \cos(\alpha) * \sin(\beta) - \sin(\alpha) * \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) + j \sin(\alpha+\beta) = [\cos(\alpha) * \cos(\beta) - \sin(\alpha) * \sin(\beta)] + j[\sin(\alpha) * \cos(\beta) + \cos(\alpha) * \sin(\beta)]$$

Komplexe Zahlen sind einander gleich, wenn Real- und Imaginärteil gleich sind. Somit ergeben sich durch Koeffizientenvergleich der oberen Gleichung die Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha) * \cos(\beta) - \sin(\alpha) * \sin(\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha) * \cos(\beta) + \cos(\alpha) * \sin(\beta)\end{aligned}$$

2.3.2.6. Vielfache von Winkelfunktionen

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) && (\text{Herleitung über } \alpha = \beta) \\ \sin(2\alpha) &= 2 * \sin(\alpha) * \cos(\alpha) && (\text{Herleitung über } \alpha = \beta)\end{aligned}$$

$$(e^{j\alpha})^3 = [\cos(\alpha) + j \sin(\alpha)]^3$$

$$e^{j3\alpha} = \cos^3(\alpha) + 3j \sin(\alpha) * \cos^2(\alpha) - 3\cos(\alpha) * \sin^2(\alpha) - j \sin^3(\alpha) = \cos(3\alpha) + j \sin(3\alpha)$$

$$\cos(3\alpha) + j \sin(3\alpha) = [\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha) * \sin^2(\alpha)] + j[3\sin(\alpha) * \cos^2(\alpha) - \sin^3(\alpha)]$$

$$\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha) * \sin^2(\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)[1 - \cos^2(\alpha)] = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)$$

$$\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) * \cos^2(\alpha) - \sin^3(\alpha) = 3\sin(\alpha)[1 - \sin^2(\alpha)] - \sin^3(\alpha) = -4\sin^3(\alpha) + 3\sin(\alpha)$$

2.3.2.7. Addition zweier Cousins-Schwingungen gleicher Frequenz

Addiert man zwei Kosinus-Schwingungen gleicher Frequenz, verschiedener Amplituden und verschiedener Phasenwinkel, so ergibt sich eine dritte Kosinus-Schwingung auch mit der gleichen Frequenz und wiederum anderer Amplitude und anderem Phasenwinkel. Die erwähnte Addition ist auf Bild MA2326A (Arbeitsblatt MAI-11) dargestellt. Wenn dieses so ist, sollte dieses auch mathematisch nachvollziehbar sein.

Ansatz für eine allgemeine Kosinus-Schwingung:

$$y(x) = a * \cos(x + x_0)$$

Die obere Schwingung ist eine Kosinus-Funktion der Amplitude a. Durch den Wert x_0 wird das Maximum der Funktion nach links verschoben. Beim oberen Ansatz gibt x_0 den Wert an, der vom Maximum der Schwingung in positiver Richtung nach $x = 0$ (y-Achse) zeigt.

In Bild MA2326A (Arbeitsblatt MAI-11) sind die zwei Funktionen

$$\begin{aligned}y_1 &= a_1 \cdot \cos(x + \alpha_1) = 3 \cos(x + 60^\circ) \\ y_2 &= a_2 \cdot \cos(x + \alpha_2) = 4 \cos(x + 180^\circ)\end{aligned}$$

dargestellt und dessen Summe. Für die Summe erfolgt ein gleicher Ansatz

$$y_3 = a_3 \cdot \cos(x + \alpha_3)$$

Gleichsetzen und Anwenden der Additionstheoreme liefert:

$$\begin{aligned}y_3 &= y_1 + y_2 \\ a_3 \cdot \cos(x + \alpha_3) &= a_1 \cdot \cos(x + \alpha_1) + a_2 \cdot \cos(x + \alpha_2) \\ a_3 \cdot \cos(\alpha_3) \cdot \cos(x) - a_3 \cdot \sin(\alpha_3) \cdot \sin(x) \\ &= a_1 \cdot \cos(\alpha_1) \cdot \cos(x) - a_1 \cdot \sin(\alpha_1) \cdot \sin(x) \\ &+ a_2 \cdot \cos(\alpha_2) \cdot \cos(x) - a_2 \cdot \sin(\alpha_2) \cdot \sin(x)\end{aligned}$$

Die obere Gleichung soll für jedes x erfüllt sein. Dieses ist nur der Fall wenn die Terme $\cos(x)$ und $\sin(x)$ einzeln gleich sind. Die obere Gleichung ergibt durch Aufspalten zwei nichtlineare Gleichungen für die zwei gesuchten Unbekannten a_3 und α_3 .

$$a_3 \cdot \sin(\alpha_3) = a_1 \cdot \sin(\alpha_1) + a_2 \cdot \sin(\alpha_2) \qquad a_3 \cdot \cos(\alpha_3) = a_1 \cdot \cos(\alpha_1) + a_2 \cdot \cos(\alpha_2)$$

Durch Division der beiden oberen Gleichungen läßt sich α_3 bestimmen:

$$\frac{a_3 \cdot \sin(\alpha_3)}{a_3 \cdot \cos(\alpha_3)} = \tan(\alpha_3) = \frac{a_1 \cdot \sin(\alpha_1) + a_2 \cdot \sin(\alpha_2)}{a_1 \cdot \cos(\alpha_1) + a_2 \cdot \cos(\alpha_2)}$$

Zur Bestimmung von a_3 werden die zwei Gleichungen quadriert und danach addiert:

$$\begin{aligned}[a_3 \cdot \sin(\alpha_3)]^2 + [a_3 \cdot \cos(\alpha_3)]^2 &= a_3^2 [\sin^2(\alpha_3) + \cos^2(\alpha_3)] = a_3^2 \\ a_3 &= \sqrt{[a_1 \cdot \cos(\alpha_1) + a_2 \cdot \cos(\alpha_2)]^2 + [a_1 \cdot \sin(\alpha_1) + a_2 \cdot \sin(\alpha_2)]^2}\end{aligned}$$

Der Aufwand für die Addition zweier Schwingungen ist relativ groß. In der Wechselstromrechnung müssen häufig Schwingungen gleicher Frequenz addiert werden. Darum muß versucht werden, die Addition von Schwingungen zu vereinfachen. Werden die komplexen Zahlen

$$\begin{aligned}\underline{z}_1 &= a_1 \cdot e^{j\alpha_1} = a_1 [\cos(\alpha_1) + j \sin(\alpha_1)] \\ \underline{z}_2 &= a_2 \cdot e^{j\alpha_2} = a_2 [\cos(\alpha_2) + j \sin(\alpha_2)]\end{aligned}$$

addiert ergibt sich:

$$\underline{z}_3 = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = [a_1 \cdot \cos(\alpha_1) + a_2 \cdot \cos(\alpha_2)] + j[a_1 \cdot \sin(\alpha_1) + a_2 \cdot \sin(\alpha_2)] = a_3 \cdot e^{j\alpha_3}$$

Die Umformung von Komponenten in Exponentialform ergibt:

$$\begin{aligned}a_3 &= \sqrt{[a_1 \cdot \cos(\alpha_1) + a_2 \cdot \cos(\alpha_2)]^2 + [a_1 \cdot \sin(\alpha_1) + a_2 \cdot \sin(\alpha_2)]^2} \\ \alpha_3 &= \arctan \frac{a_1 \cdot \sin(\alpha_1) + a_2 \cdot \sin(\alpha_2)}{a_1 \cdot \cos(\alpha_1) + a_2 \cdot \cos(\alpha_2)}\end{aligned}$$

Fazit: Mit Hilfe der komplexen Rechnung lassen sich zwei Schwingungen gleicher Frequenz addieren. Zwei Zahlen komplex zu addieren ist wesentlich einfacher, als die obere Addition im Zeitbereich.

Auf Arbeitsblatt MAI-11 ist ein Schema zum Addieren zweier Schwingungen angegeben, mit Beispiel.

Arbeitsblatt MAI-11

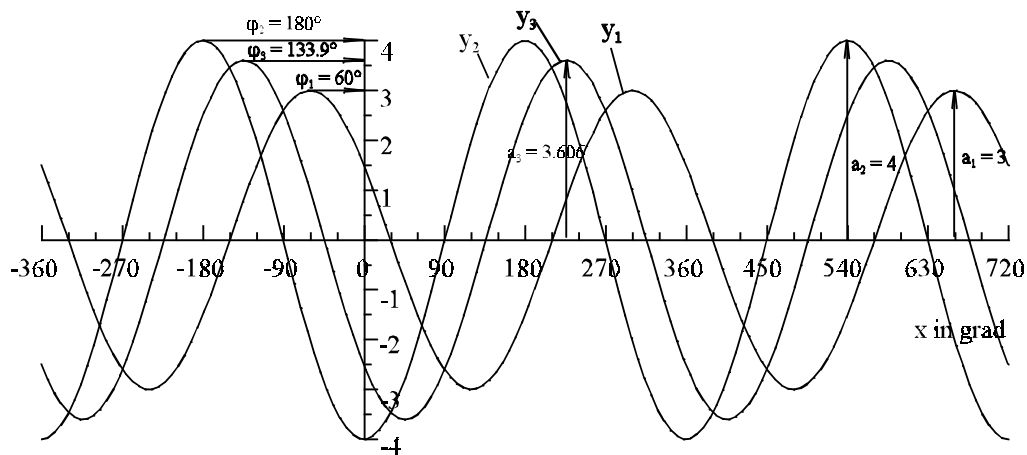


Bild MA2326A: Addition zweier Kosinus-Schwingungen

$$y_1 = a_1 \cdot \cos(x + \alpha_1) = 3 \cos(x + 60^\circ)$$

$$y_2 = a_2 \cdot \cos(x + \alpha_2) = 4 \cos(x + 180^\circ)$$

$$y_3 = a_3 \cdot \cos(x + \alpha_3) = 3.606 \cos(x + 133.9^\circ)$$

Schema zum Addieren zweier Kosinus-Schwingungen

A] Winkel α_1 und α_2 feststellen durch den Vergleich mit der oberen Form, oder aus Skizze ablesen. Dabei zählt der Winkel von Maximum nach $x = 0$ oder $t = 0$.

B] Amplitude a_1 und a_2 feststellen durch Vergleich.

C] Komplexe Zahlen bilden: $z_1 = a_1 \cdot e^{j\alpha_1}$ $z_2 = a_2 \cdot e^{j\alpha_2}$

B] Komplexe Zahlen addieren: $z_3 = z_1 + z_2 = a_1 \cdot e^{j\alpha_1} + a_2 \cdot e^{j\alpha_2} = a_3 \cdot e^{j\alpha_3}$

E] a_3 und α_3 mit Hilfe aus der oberen komplexen Zahl ablesen.

F] a_3 und α_3 wieder in Schwingung übertragen: $y_3 = a_3 \cdot \cos(x + \alpha_3)$

Zahlenwert-Berechnung für oberes Beispiel:

A] $\alpha_1 = 60^\circ$ $\alpha_2 = 180^\circ$

B] $a_1 = 3$ $a_2 = 4$

C] $z_1 = 3/\underline{60^\circ}$ $z_2 = 4/\underline{180^\circ}$

D] $z_3 = 3/\underline{60^\circ} + 4/\underline{180^\circ}$

E] $z_3 = (1.5 + j2.598) - 4 + j0$

$$z_3 = -2.5 + j2.598 = 3.606/\underline{133.9^\circ}$$

F] $y_3(x) = 3.606 \cdot \cos(x + 133.9^\circ)$

Beispiel: (Studenten)

gegeben: $y_1 = 3 \cdot \cos(x + 60^\circ)$
 $y_2 = 4 \cdot \cos(x + 120^\circ)$

gesucht: $y_3 = y_1 + y_2$

Lösung: $y_3 = 6.083 \cdot \cos(x + 94.72^\circ)$

2.3.2.8. Sinus- und Kosinussatz

Das Dreieck mit den Seiten a, b und c wird nach Bild MA2327A in die komplexe Ebene gelegt. Die Seiten werden als komplexe Zeiger eingezeichnet.

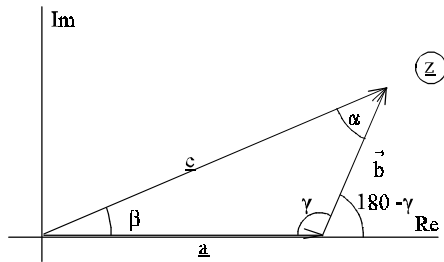


Bild MA2327A

Aus Bild MA2327A ergibt sich:

$$\underline{a} = a$$

$$\underline{b} = b / 180 - \gamma = b \cdot \cos(180^\circ - \gamma) + j b \cdot \sin(180^\circ - \gamma) = -b \cdot \cos(\gamma) + j b \cdot \sin(\gamma)$$

$$\underline{c} = c \cdot \cos(\beta) + j c \cdot \sin(\beta)$$

$$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$$

Gleichsetzen der oberen Summe liefert:

$$a - b \cdot \cos(\gamma) + j b \cdot \sin(\gamma) = c \cdot \cos(\beta) + j c \cdot \sin(\beta) \quad (\text{A})$$

Komplexe Zahlen sind nur gleich, wenn auch dessen Komponenten Real- und Imaginärteil gleich sind:

$$\begin{aligned} a - b \cdot \cos(\gamma) &= c \cdot \cos(\beta) \\ b \cdot \sin(\gamma) &= c \cdot \sin(\beta) \end{aligned} \quad (\text{B})$$

Die Gleichung (B) umgeformt ist als Sinussatz bekannt:

$$\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{a}$$

Aussage: Die drei Quotienten vom Sinus des gegenüberliegenden Winkels zur Seitenlänge sind bei einem Dreieck alle gleich.

Wird von der Gleichung (A) auf beiden Seiten die Betragsbildung durch geführt, erhält man:

$$[a - b \cdot \cos(\gamma)]^2 + b^2 \cdot \sin^2(\gamma) = c^2 \cdot \cos^2(\beta) + c^2 \cdot \sin^2(\beta)$$

$$a^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) + b^2 \cdot [\cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma)] = c^2 \cdot [\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)]$$

Da das Quadratsumme vom Sinus und Kosinus "1" ergibt, lässt sich aus der oberen Gleichung der Kosinussatz ableiten:

$$a^2 - 2ab \cos(\gamma) + b^2 = c^2$$

Aussage: Bildet man die Summe aus den Quadraten zweier Seiten an einem Dreieck und subtrahiert davon das Produkt beider Seiten, multipliziert mit dem zweifachen Kosinus des eingeschlossenen Winkels, so erhält man die gegenüberliegenden Seite zum Quadrat.

2.3.3. Arcus-Funktionen

Für welchen Wert von x gilt die folgende Aussage:

$$\sin(x) = 0.5$$

Die obere Aussage besagt nach Arbeitsblatt MAI-10 (Bild MA2323D): Wann ist der Funktionswert $y(x) = 0.5$. Dieses ist aber an mehreren Stellen x der Fall. z.B. für

$$x = 30^\circ, \quad x = 150^\circ, \quad x = 390^\circ, \quad \text{usw.}$$

Also ist die Aussage mehrdeutig. Obere Methode, die Gleichung auszuwerten, ist mehr die praktische. Mathematisch muß von der Funktion $y = \sin(x)$ die Umkehrfunktion gebildet werden. Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktion heißen Arcus-Funktionen. Die Bezeichnung erfolgt, in dem der Originalfunktion ein "arc" vorangesetzt wird

trigonometrische Funktion	Arcus-Funktion
$y = \sin(x)$	$y = \arcsin(x)$
$y = \cos(x)$	$y = \arccos(x)$
$y = \tan(x)$	$y = \arctan(x)$
$y = \cot(x)$	$y = \operatorname{arccot}(x)$

In Kapitel 2.1.10 wurde gezeigt, die Umkehrfunktion ergibt sich grafisch durch Spiegeln an der Geraden $y = x$, was bedeutet x und y Werte zu vertauschen. Dieses durchgeführt, ergibt die vier Funktionen, die auf dem Arbeitsblatt MAI-12 dargestellt sind. Man kann dabei im eigentlichen Sinne nicht mehr von Funktion sprechen, denn die Funktion war die eindeutige Zuordnung von einem x -Wert zu einem y -Wert. Um dieser Problematik zu entgehen, werden Hauptwerte definiert, wo die Funktion dann eindeutig definiert ist. Diese sind in den Arbeitsblättern eingetragen und haben je nach Funktion verschiedene Bereiche.

Hauptwerte

$\arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	$-90^\circ \leq y \leq 90^\circ$
$\arccos(x)$	$0 \leq y \leq \pi$	$0 \leq y \leq 180^\circ$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$-90^\circ < y < 90^\circ$
$\operatorname{arccot}(x)$	$0 < y < \pi$	$0 < y < 180^\circ$

Ein Taschenrechner liefert den oberen Bereich der Hauptwerte als Ergebnis.

Wenn in einer Gleichung (z.B. in Kap.1.5.1) ein Ausdruck z.B.

$$\sin(x) = 0.5$$

vorkommt, sind nicht nur die Hauptwerte, sondern alle vorkommenden Werte innerhalb einer Periode 2π zu untersuchen.

Für einen Bereich außerhalb der Hauptwerte muß die Arcus-Funktion gesondert angegeben werden.

Die Funktionen y_1 , bis y_4 in Bild MA233A lassen sich mit Hilfe der Hauptwerte wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} y_1 &= \arcsin(x) \\ y_2 &= \pi - y_1 = \pi - \arcsin(x) = 180^\circ - \arcsin(x) \\ y_3 &= y_1 + 2\pi = \arcsin(x) + 2\pi = \arcsin(x) + 360^\circ \\ y_4 &= 3\pi - y_1 = 3\pi - \arcsin(x) = 540^\circ - \arcsin(x) \end{aligned}$$

Entsprechendes für gilt für die Kosinus Funktionen nach Bild MA233B:

$$\begin{aligned} y_5 &= \arccos(x) \\ y_6 &= 2\pi - y_5 = 2\pi - \arccos(x) = 360^\circ - \arccos(x) \\ y_7 &= y_5 + 2\pi = \arccos(x) + 2\pi = \arccos(x) + 360^\circ \end{aligned}$$

Aber auch $\arccos(x)$ und $\arcsin(x)$ können sich durch jeweils die andere Funktion ausgedrückt werden. Nach Arbeitsblatt MAI-12 ergibt sich durch Verschiebung:

$$y_5 = \frac{\pi}{2} - y_1$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

Achtung: Bei der Berechnung von Arcus-Werten ist auf die Einstellung Grad- oder Bogenmaß zu achten. Am Taschenrechner ist dieses normalerweise umzustellen. Computerprogramme rechnen meistens im Bogenmaß.

Wenn nur mit geometrischen Winkeln gerechnet wird, ist die Einstellung Bogen- Gradmaß egal. Nur, muß dann immer mit einer Art gerechnet werden.

Falls das Ergebnis einer Arcus-Funktion weiter benutzt wird zum Rechnen, außer zum Einsetzen in Winkel-funktionen, muß unbedingt im Bogenmaß gerechnet werden.

arcsin durch arctan ausdrückt

$$\sin(y) = x \quad \Rightarrow \quad y = \arcsin(x)$$

$$\tan(y) = \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \frac{\sin(y)}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arctan[\tan(y)] = y = \arctan \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\arcsin(x) = \arctan \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

weitere Umformungen:

$$\arccos(x) = \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

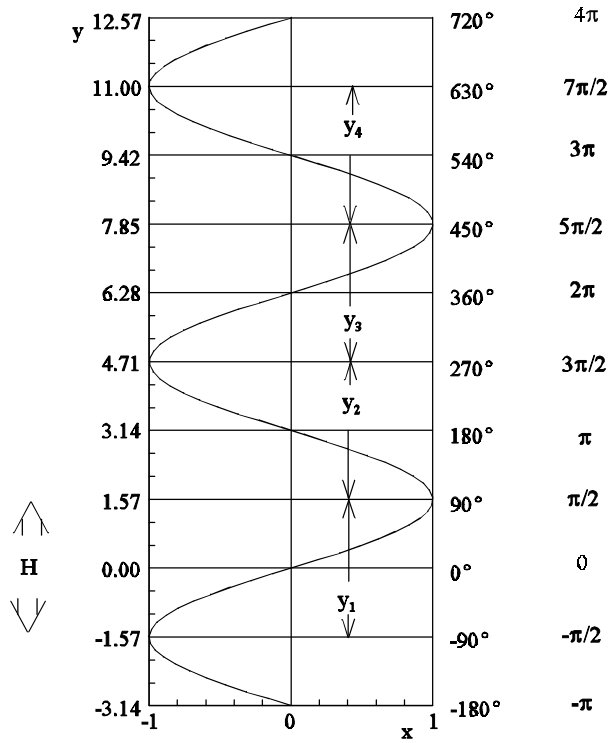
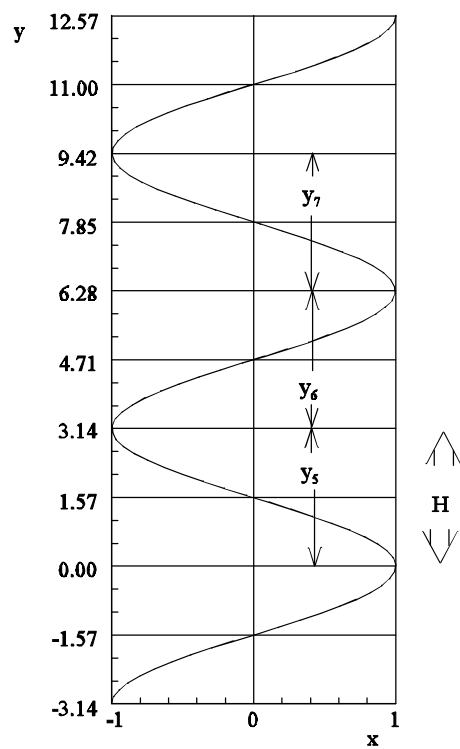
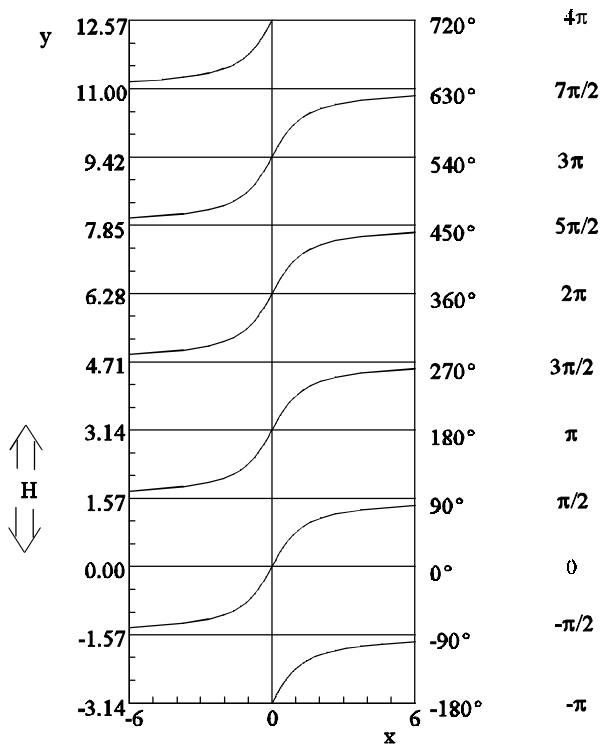
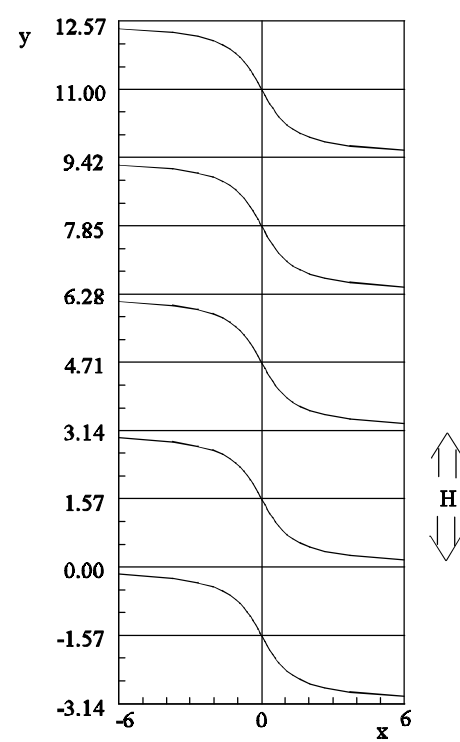
$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot}(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arccos \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\operatorname{arccot}(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad x > 0$$

$$\operatorname{arccot}(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \pi \quad x < 0$$

Arbeitsblatt MAI-12

Bild MA233A: $y = \arcsin(x)$ Bild MA233B: $y = \arccos(x)$ Bild MA233C: $y = \arctan(x)$ Bild MA233D: $y = \operatorname{arccot}(x)$ H $\triangleq$ Hauptwerte

2.3.4. Exponential-Funktion

Allgemeine Form

Die allgemeine Form der Exponentialfunktion lautet:

$$y = b^{ax}$$

Wichtiger als die obere allgemeine Form ist die **e-Funktion** mit dem Wert e als Basiszahl. Besonders bei langen Exponenten ist auch die "exp" Schreibweise üblich.

$$y = e^{ax} = \exp(ax)$$

Die Zahl e nennt sich Eulerzahl und hat den Wert

$$e = 2.7182.....$$

und kann berechnet werden über

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

oder über

$$e = \frac{1}{1} + \frac{1}{1*2} + \frac{1}{1*2*3} + \frac{1}{1*2*3*4} + \dots$$

Computerprogramme oder Taschenrechner enthalten meistens nur die e-Funktion. Die allgemeine Form kann dann wie folgt berechnet (Herleitung später nach Vorstellen der ln-Funktion):

$$b^{ax} = e^{[ax * \ln(b)]}$$

Einige technische Anwendungen

Der Spannungsverlauf beim Entladen eines Kondensators, Bild MA234A, kann mit Hilfe der e-Funktion berechnet werden (Herleitung erst in EGIII):

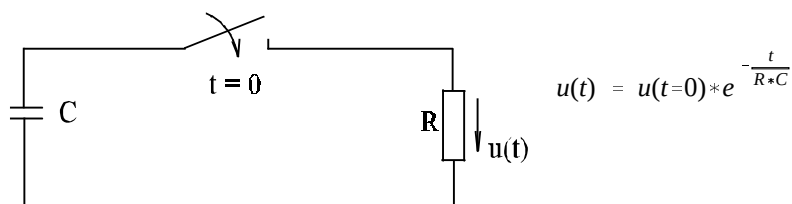


Bild MA234A

Die Anzahl der noch vorhandenen Teile N beim radioaktiven Zerfall verläuft auch nach einer e-Funktion

$$N(t) = N(t=0) * e^{-t/T}$$

mit τ - Halbwertszeit $T = \tau / \ln(2)$

Beispiele: Co60 $\tau = 5.2a$ Ra222 $\tau = 1620a$

Funktionsgraphen

Funktionsgraphen von Exponential-Funktionen sind auf Arbeitsblatt MAI-13 dargestellt.

In Bild MA234B sind allgemeine Exponential-Funktionen

$$y = a^x$$

mit verschiedenen Basen a dargestellt. Je größer die Basis wird, desto schneller steigt die Funktion an. Wichtig sind die Basen 2, e und 10. Für Basen größer 1 ergibt sich eine monoton steigende Funktion und für Basen kleiner 1 sind die Funktionen monoton fallend. Ein Negieren des Exponenten ergibt ein Klappen um die y -Achse.

In Bild MA234C ist der Einfluß der Streckung in x einer e -Funktion untersucht:

$$y = e^{ax}$$

Für positive a ist die Funktion monoton steigend und für negative a monoton fallend. Je größer der Wert a wird, desto größer wird auch die Steigung der Funktion.

Definitionsmöglichkeit der e -Funktion

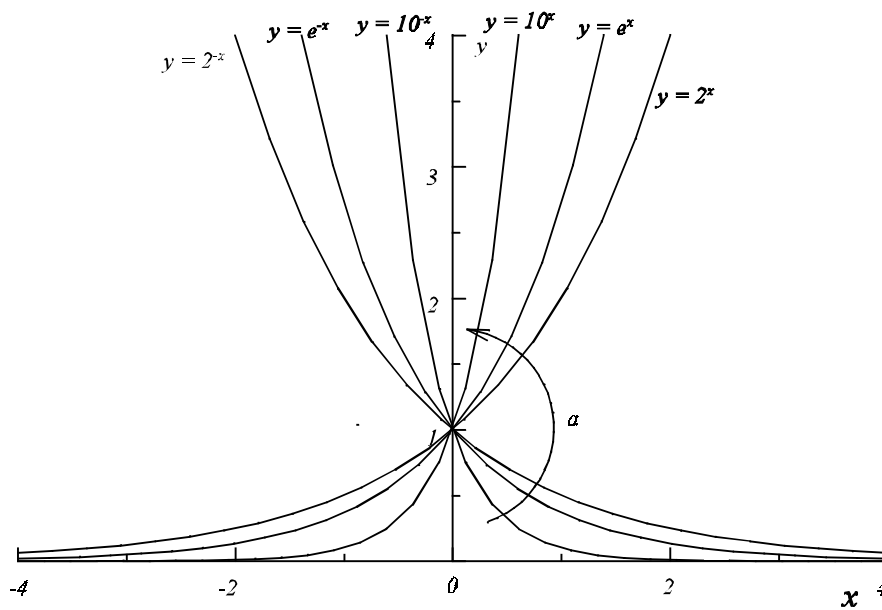
Wichtig nur für das 3.Semester:

Die e -Funktion $y = e^x$ ist die Lösung der Differential-Gleichung (DGL)

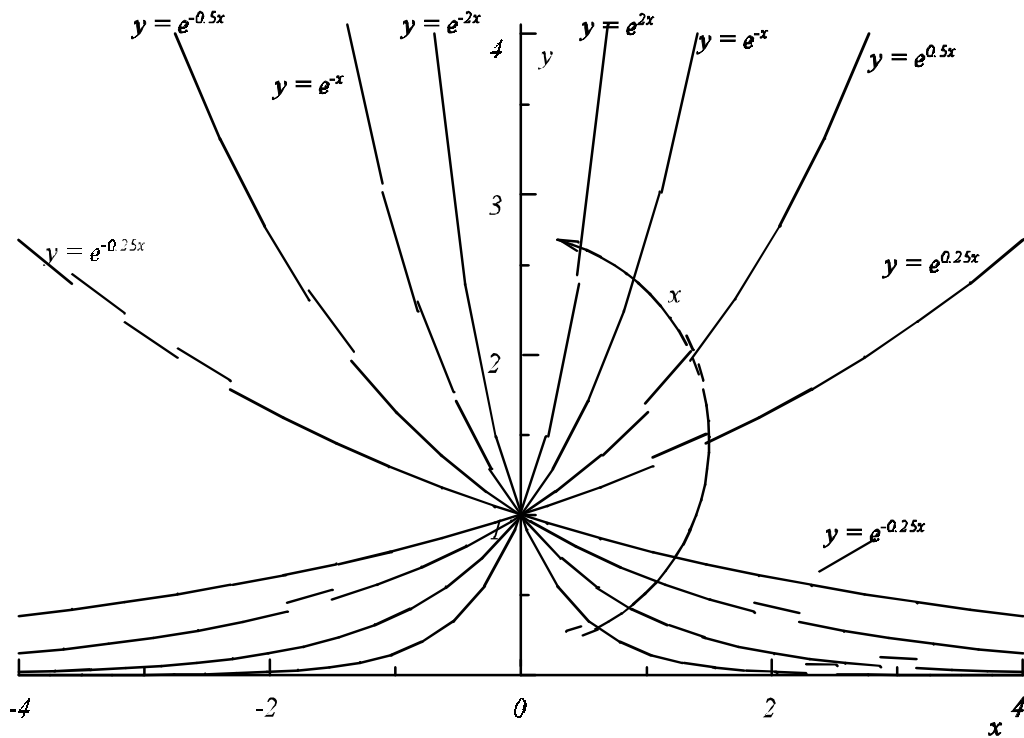
$$y' = y$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(x=0) = 1$$

Bild MA234B: Allgemeine Exponential-Funktion $y = a^x$

$$a = \frac{1}{10}, \frac{1}{e}, \frac{1}{2}, 2, e, 10$$

Bild MA234C: e-Funktion $y = e^{ax}$

$$a = -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2$$

2.3.5. Logarithmus-Funktionen

Definition und Funktionsgraf

Die Logarithmus-Funktion ist die Umkehrfunktion zur Exponential-Funktion.

Zur Funktion

$$y = a^x$$

gehört die Umkehrfunktion:

$$y = \log_a(x)$$

"log" bedeutet allgemeiner Logarithmus. Der tiefgestellte Index "a" bedeutet, daß der Logarithmus zur Basis a gebildet werden soll.

Der Ausdruck

$$\log_5(125) = ?$$

sagt aus, daß der Logarithmus zur Basis 5 von 125 gebildet werden soll. Impliziert steht die Frage dahinter: "5 hoch wieviel ist 125?"

$$5^? = 125$$

Antwort: $\log_5(125) = 3$

Welche Basen sind wichtig? Die wichtigste Basis ist wieder die Basis e. Dieser Logarithmus wird auch als natürlicher Logarithmus bezeichnet. Eine Basis die auch gebraucht wird ist der dekadische Logarithmus zur Basis 10. Vereinzelt wird auch der Logarithmus zur Basis 2 (binär) benutzt. Obere drei Logarithmen haben besondere Abkürzungen.

Natürlicher Logarithmus $y = \log_e(x) = \ln(x)$

Dekadischer Logarithmus $y = \log_{10}(x) = \lg(x)$

Binärer Logarithmus $y = \log_2(x) = \text{lb}(x)$

Grafisch erhält man die Logarithmus-Funktionen wieder durch Vertauschen von x und y (spiegeln an der Geraden $y = x$). Spiegeln mit Hilfe der Grafen der Exponential-Funktionen (Bild MA234B auf Arbeitsblatt MAI-13 mit $a > 1$) ergeben die Logarithmus-Funktion auf Arbeitsblatt MAI-14, Bild MA235A. Dieses sind drei oben erwähnten Funktionen.

Den Einfluß einer Streckung des Argumentes in x zeigt Bild MA235B. Hier bewirkt eine Streckung in x eine Verschiebung in y. Beweis im nächsten Abschnitt.

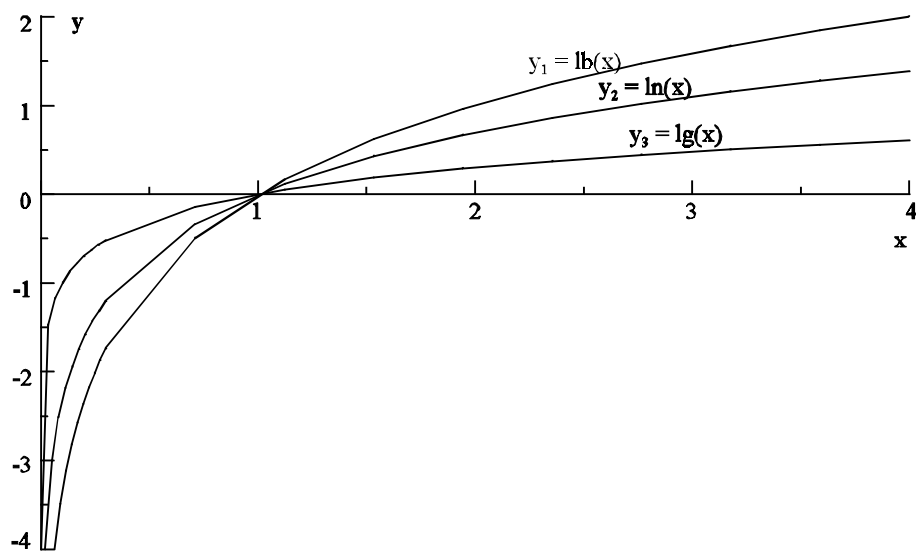


Bild MA235A: $y_1 = \log_2(x) = \text{lb}(x)$
 $y_2 = \log_e(x) = \ln(x)$
 $y_3 = \log_{10}(x) = \lg(x)$

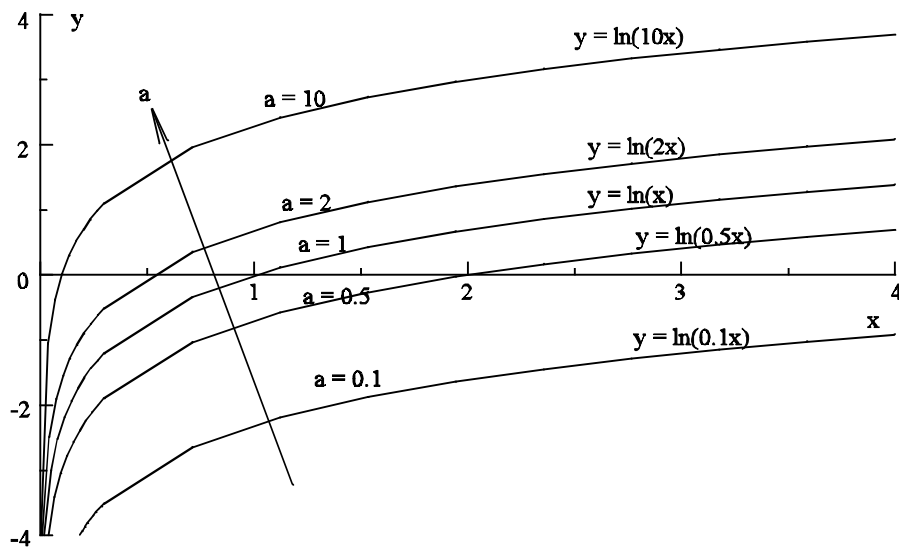


Bild MA235B: $y = \ln(ax)$
 $a = 0.1, 0.5, 1, 2, 10$

2.3.5.1. Rechenregeln der Exponential- und Logarithmus-Rechnung

Bekannt sein sollten die folgenden Rechenregeln der Exponential-Rechnung:

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$e^x \cdot e^y = e^{(x+y)}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\sqrt[n]{a^y} = a^{\frac{y}{n}}$$

Funktion und Umkehrfunktion heben sich gegenseitig auf.

$$\ln(e^x) = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

Eine Grundregel der Logarithmus-Rechnung kann über die Exponentialfunktion abgeleitet werden:

$$a = e^x \quad b = e^y \quad \Rightarrow \quad x = \ln(a) \quad y = \ln(b)$$

$$a \cdot b = e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

$$\ln[a \cdot b] = \ln[e^{(x+y)}] = x + y = \ln(a) + \ln(b)$$

Gleichermaßen vertraut sein sollte man mit dem folgenden (eine oben hergeleitet) Logarithmus-Rechenregeln:

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$$

$$\ln(a^{1/n}) = \frac{1}{n} \ln(a)$$

$$\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$$

Bei manchen Rechnern stehen als Exponential und Logarithmus Funktion nur die e-Funktion und der natürliche Logarithmus zur Verfügung. Die anderen Funktion lassen sich daraus berechnen:

$$\begin{aligned} y &= a^x \\ \ln(y) &= \ln(a^x) = x \cdot \ln(a) \\ y &= e^{\ln(y)} = e^{x \ln(a)} \end{aligned}$$

$$a^x = e^{x \ln(a)} = \exp[\ln(a) \cdot x]$$

$$\begin{aligned} y &= \log_a(x) \\ a^y &= a^{\log_a(x)} = x \\ \ln(a^y) &= y \cdot \ln(a) = \ln(x) \end{aligned}$$

$$y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

2.3.6. Hyperbel-Funktionen

Definitionen

Analog zu den Kreisfunktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens werden Hyperbel-Funktionen durch Anhänger von "h" mit Hilfe der e-Funktionen wie folgt definiert:

$$\cosh(x) = \frac{e^{+x} + e^{-x}}{2} \quad (\text{A})$$

$$\sinh(x) = \frac{e^{+x} - e^{-x}}{2} \quad (\text{B})$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

Die Funktionen haben folgenden Namen:

$\cosh(x)$	Kosinus-Hyperbolicus oder Hyperbel-Kosinus
$\sinh(x)$	Sinus-Hyperbolicus oder Hyperbel-Sinus
$\tanh(x)$	Tangens-Hyperbolicus oder Hyperbel-Tangens
$\coth(x)$	Kotangens-Hyperbolicus oder Hyperbel-Kotangens

Funktionsgraphen

Die Funktionsgraphen der Hyperbel-Funktionen sind auf Arbeitsblatt MAI-15 dargestellt.

Für große x-Werte wird $\cosh(x)$ gleich $\sinh(x)$. Dieses bedingt, daß sowohl für den $\tanh(x)$, als auch für den $\coth(x)$, $y = 1$ eine Asymptote für große x ist. Für $x \rightarrow -\infty$ ist $y = -1$ eine Tangente, weil für $x \rightarrow -\infty$ gilt: $\sinh(x) \approx -\cosh(x)$. Wegen $\sinh(x=0) = 0$ hat der $\coth(x)$ bei $x = 0$ einen Pol.

Zusammenhang zwischen den Hyperbel-Funktionen

Addiert, bzw. subtrahiert, man die Definitionen (A) und (B), ergibt sich:

$$\begin{aligned}\cosh(x) + \sinh(x) &= e^x \\ \cosh(x) - \sinh(x) &= e^{-x}\end{aligned}$$

Quadrieren von (A) und (B) ergibt:

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \\ \sinh^2(x) &= \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})\end{aligned}$$

Durch Subtraktion der beiden oberen Gleichungen erhält man eine Art "Hyperbel-Pythagoras":

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Deutung

Der Kreis läßt sich mit Hilfe der Parameter-Darstellung

$$\begin{aligned}x &= \cos(t) \\ y &= \sin(t)\end{aligned}$$

beschreiben. Die folgende Parameter-Darstellung

$$\begin{aligned}x &= \cosh(t) \\ y &= \sinh(t)\end{aligned}$$

ergibt durch Quadrieren und Subtraktion

$$x^2 - y^2 = \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

die Gleichung

$$x^2 - y^2 = 1$$

und nach Arbeitsblatt MAI-8 die nach rechts geöffnete Normal-Hyperbel.

Beispiel Kettenlinie

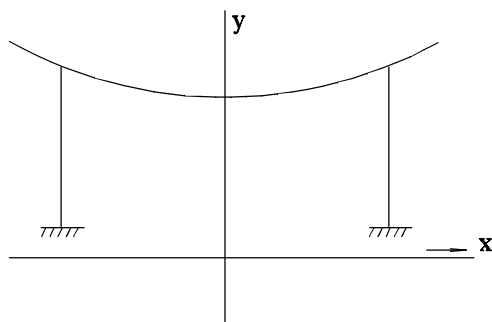


Bild MA236A: Kettenlinie

Eine durchhängende Kette oder eine Freileitung hat die folgende Kurve $y = f(x)$:

$$y = a \cdot \cosh \frac{x}{a}$$

Näherungen

Für große x ($x \gg 1$) gilt:

$$e^{-x} \approx 0$$

somit kann man schreiben

$$y = \cosh(x) = \frac{1}{2}e^x \quad \text{für } x \gg 1$$

$$y = \cosh(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad \text{für } x \ll 1$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$x \gg 1 \Rightarrow e^{-2x} \ll 1$$

$$\tanh(x) \approx 1 - 2e^{-2x}$$

Den oberen Ausdruck erhält durch Polynomdivision, oder mit Hilfe einer Reihe (3. Sem.).

Definitionsmöglichkeiten der Hyperbel-Funktionen

Wichtig nur für das 3. Semester:

$y = \cosh(x)$ ist die Lösung der folgenden DGL mit Anfangsbedingungen

$$y'' = y \quad y(x=0) = 1 \quad y'(x=0) = 0$$

wogegen $y = \sinh(x)$ die Lösung der gleichen DGL, aber mit anderen Anfangsbedingungen ist:

$$y'' = y \quad y(x=0) = 0 \quad y'(x=0) = 1$$

Hier sieht man auch die Verwandtschaft zu den Kreisfunktionen. Diese unterscheiden sich bei dieser Definition nur im Vorzeichen der DGL.

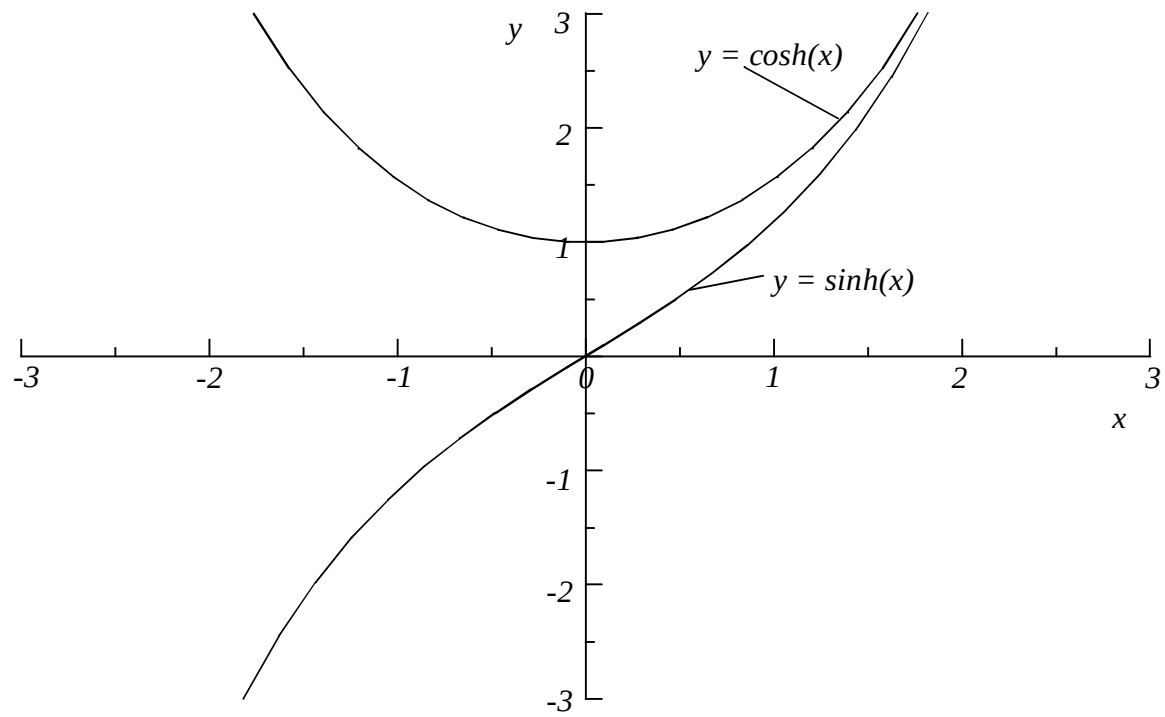


Bild MA236B

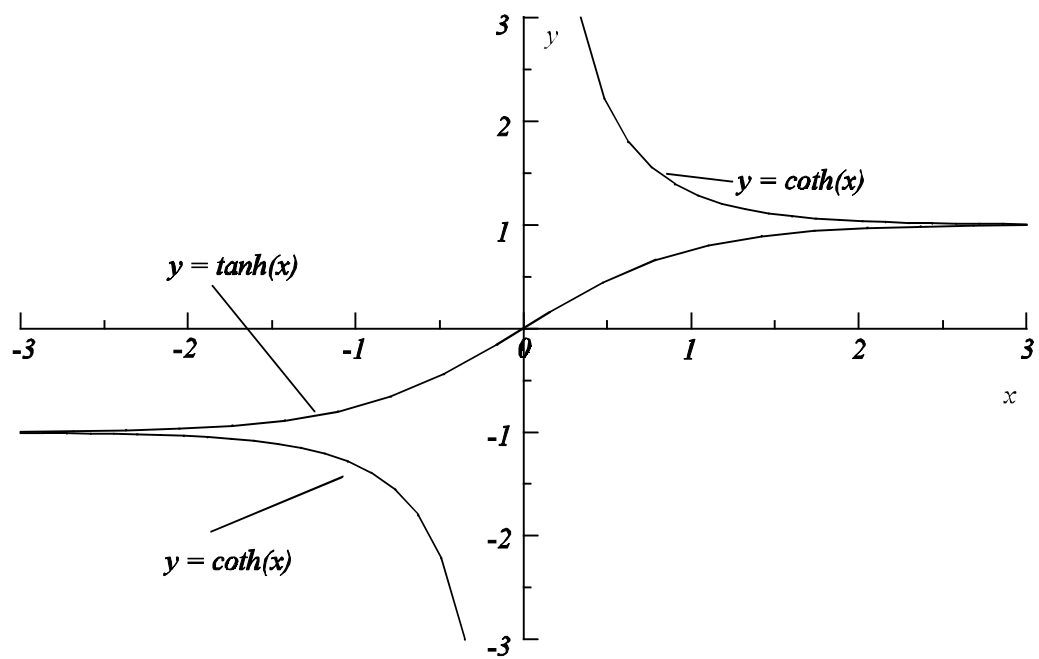


Bild MA236C

2.3.7. Area-Funktion

Definiert werden die Area-Funktionen als Umkehrfunktionen der Hyperbel-Funktionen. Die grafische Konstruktion ist schon bekannt: Spiegeln an der Geraden $y = x$. Die Bezeichnung erfolgt durch Voransetzen von "ar" für Area vor die entsprechende Hyperbel-Funktion

Hyperbel-Funktion	Area-Funktion	Benennung
$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$	Area-Kosinus-Hyperbolicus
$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$	Area-Sinus-Hyperbolicus
$\tanh(x)$	$\operatorname{artanh}(x)$	Area-Tangens-Hyperbolicus
$\coth(x)$	$\operatorname{arcoth}(x)$	Area-Kotangens-Hyperbolicus

Die oberen Area-Funktionen sind auf Arbeitsblatt MAI-16 dargestellt. Die arcosh -Funktion ist nicht eindeutig. Die Funktionen artanh und arcoth haben Pole bei $x_p = \pm 1$. $\operatorname{Artanh}(x)$ ist nur für $-1 < x < 1$ definiert und $\operatorname{arcoth}(x)$ für $|x| > 1$. Außer den Polen ist die Achse Asymptote für $\operatorname{arcoth}(x)$.

2.3.8. Reihen der transzendenten Funktionen

Um Funktionswerte von transzendenten Funktionen zu berechnen, kann man u.a. Reihen verwenden. Auf Arbeitsblatt MAI-17 sind die Reihen aufgeführt:

- Exponential Reihen
- trigonometrische Reihen
- hyperbolische Reihen

und auf Arbeitsblatt MAI-18 die Reihen der Umkehrfunktion der oberen Funktionen:

- Logarithmische Reihen
- Reihen der Arcus-Funktionen
- Reihen der Area-Funktionen

Thema des 1.Semester sind nicht die Reihen. In der Klausur des ersten Semesters kommt keine Reihe vor. Die Reihen sollen im nächsten Abschnitt auf Verwandtschaft diskutiert werden.

Also: Hier nur Info

Diskussion wird vertagt nach Kap. 3 Komplexe Rechnung

Weiter mit Kap. 2.4.

Arbeitsblatt MAI - 16

Area-Funktionen

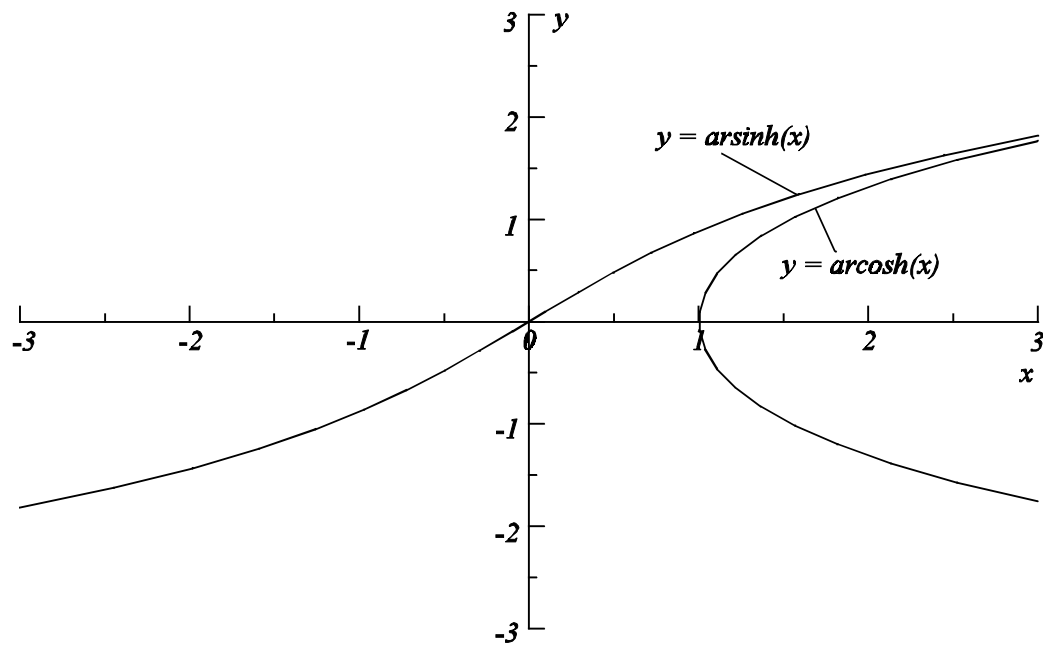


Bild MA237A:

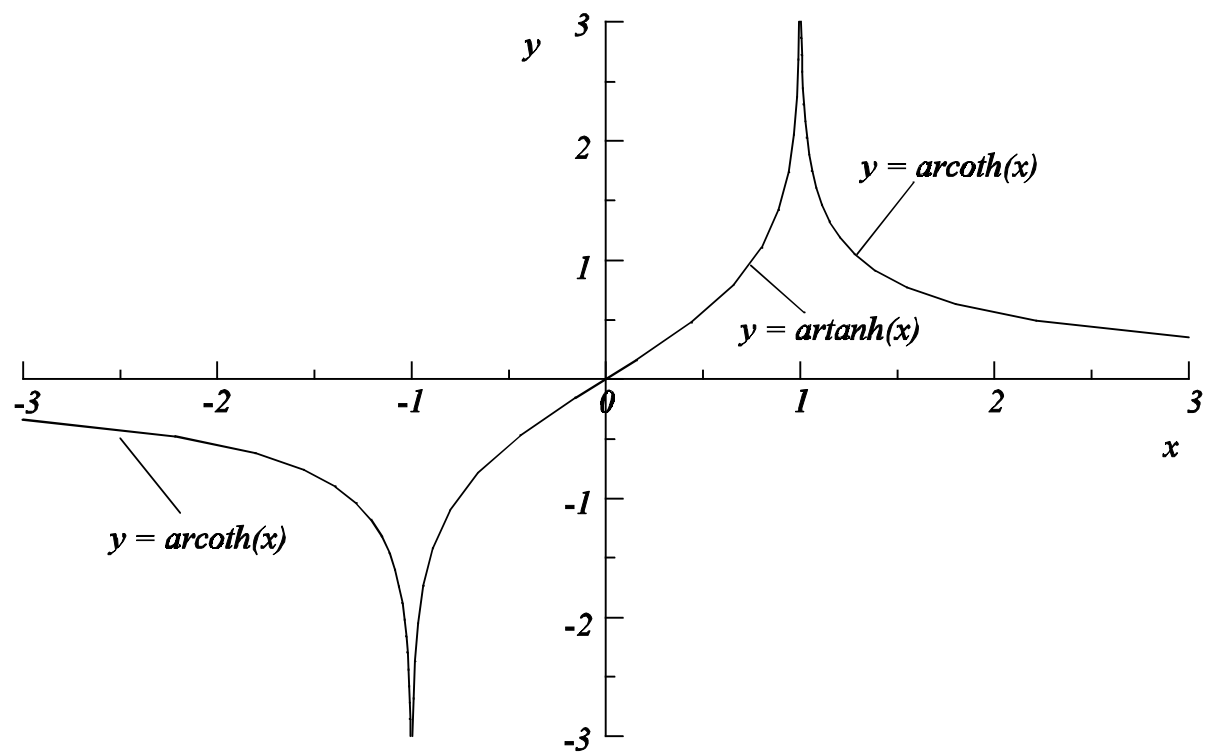


Bild MA237B:

Arbeitsblatt MAI - 17 Reihen, Teil 1

Die folgenden Reihen (Herleitung erst im 2. Semester, Kap. 8) sind nur aufgeführt um im nächsten Abschnitt gewisse Vergleiche zwischen den Funktionen aufzuzeigen

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

Beispiel: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Exponential Reihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{für } |x| < \infty$$

Trigonometrische Reihen

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots \quad \text{für } |x| < \infty$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots \quad \text{für } |x| < \infty$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \dots \quad \text{für } 0 < |x| < \pi$$

Hyperbolische Reihen

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \frac{1}{11!}x^{11} + \dots \quad \text{für } |x| < \infty$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \frac{1}{10!}x^{10} + \dots \quad \text{für } |x| < \infty$$

$$\tanh(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\coth(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \dots \quad \text{für } 0 < |x| < \pi$$

Arbeitsblatt MAI - 18 Reihen, Teil 2**Logarithmische Reihen**

$$\ln(x) = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - + \dots$$

für $0 < x \leq 2$

$$\ln(x) = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} - + \dots$$

für $x > \frac{1}{2}$

$$\ln(x) = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3} + \frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5} + \dots \right]$$

für $x > 0$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots$$

für $-1 < x \leq 1$

$$\ln(1-x) = - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right)$$

für $-1 \leq x < 1$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \operatorname{artanh}(x) = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right]$$

für $|x| < 1$

$$\ln \frac{x+1}{x-1} = 2 \operatorname{arcoth}(x) = 2 \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots \right]$$

für $|x| > 1$ **Reihen der Arcus-Funktionen**

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

für $|x| < 1$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} - \dots$$

für $|x| < 1$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \dots$$

für $|x| \leq 1$

$$\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - + \dots$$

für $|x| \leq 1$ **Reihen der Area-Funktionen**

$$\operatorname{arsinh}(x) = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + - \dots$$

für $|x| < 1$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \pm \left[\ln(2x) - \frac{1}{2 \cdot 2x^2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6x^6} - \dots \right]$$

für $x > 1$

$$\operatorname{artanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots$$

für $|x| < 1$

$$\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \dots$$

für $x > 1$

2.3.9. Zusammenhang zwischen den transzendenten Funktionen

Aus Arbeitsblatt MAI-17 ist eine gewisse Verwandtschaft zwischen

- Exponential Funktion
- trigonometrische Funktion und
- hyperbolische Funktion

zu erkennen. Aber auch auf Arbeitsblatt MAI-18 sehen die

- Arcus-Funktion und die
- Area-Funktion

fast gleich aus. Nicht zu erkennen ist, daß auch die

- Logarithmus-Funktion

mit Arcus- und Area-Funktion verwandt ist.

2.3.9.1. Zusammenhang: Exponential und trigonometrische Funktionen

Im Kapitel 3 wird der **Satz von Euler** angegeben:

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

Obere Aussage sollte noch bewiesen werden. Dieses ist mit Hilfe der Reihen möglich. Einsetzen von (jx) anstatt (x) in der Exponential-Reihe auf Arbeitsblatt MAI-17 ergibt mit

$$(jx)^2 = -x^2 \quad (jx)^3 = -jx^3 \quad (jx)^4 = x^4 \quad (jx)^5 = jx^5 \quad (jx)^6 = -x^6$$

$$e^{jx} = 1 + j\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - j\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - j\frac{x^7}{7!} + \dots$$

Durch Aufspalten nach Real- und Imaginärteil erhält man:

$$e^{jx} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + j \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)$$

Vergleich mit den trigonometrischen Reihen auf Arbeitsblatt MAI-17 ergibt, daß der Eulersatz erfüllt ist. In der oberen Reihe ist der Realteil $\cos(x)$ und der Imaginärteil $\sin(x)$.

Darstellung der Trigonometrische Funktionen als Exponential-Funktionen

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

$$e^{-jx} = \cos(x) - j \sin(x)$$

$$e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos(x)$$

$$e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin(x)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -j \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{e^{jx} + e^{-jx}}$$

2.3.9.2. Zusammenhang: Exponential und Hyperbel-Funktionen

Durch Definition ist bekannt:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion ergibt sich die umgekehrte Richtung:

$$e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$$

$$e^{-x} = \cosh(x) - \sinh(x)$$

2.3.9.3. Zusammenhang: Trigonometrische und Hyperbel-Funktionen

Bekannt: $\cos(y) = \frac{1}{2}(e^{jy} + e^{-jy})$

Substitution: $y = jx \qquad j y = -x \qquad -j y = x$

$$\cos(jx) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{+x}) = \cosh(x)$$

$$\mathbf{\cos(jx) = \cosh(x)}$$

Der Vergleich ist auch über die Reihen möglich. Auch die Umkehrung ergibt:

$$\mathbf{\cosh(jx) = \cos(x)}$$

Bekannt: $\sin(y) = \frac{1}{2j}(e^{jy} - e^{-jy})$

Substitution: $y = jx \qquad j y = -x \qquad -j y = x$

$$\sin(jx) = \frac{1}{2j}(e^{-x} - e^{+x}) = j \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = j \sinh(x)$$

$$\mathbf{\sin(jx) = j \sinh(x)}$$

$$jx = u \qquad x = -ju$$

$$\sin(u) = j \sinh(-ju) = -j \sinh(ju)$$

$$\sinh(ju) = j \sin(u)$$

$$\mathbf{\sinh(jx) = j \sin(x)}$$

Für Tangens und Kotangens ergeben sich ähnliche Ausdrücke, die hier nicht aufgeführt werden. Diese können durch die Quotienten von Sinus und Kosinus berechnet werden.

2.3.9.4. Komplexe Additionstheoreme

$$\cos(x+jy) = ?$$

Anwenden des Additionstheorems:

$$\cos(x+jy) = \cos(x) \cdot \cos(jy) - \sin(x) \cdot \sin(jy)$$

Mit den schon bekannten Ausdrücken

$$\begin{aligned}\cos(jy) &= \cosh(y) \\ \sin(jy) &= j \sinh(y)\end{aligned}$$

ergibt das komplexe Additionstheorem:

$$\cos(x+jy) = \cos(x) \cdot \cosh(y) - j \sin(x) \cdot \sinh(y)$$

Weitere Theoreme ohne Ableitung:

$$\sin(x+jy) = \sin(x) \cdot \cosh(y) + j \cos(x) \cdot \sinh(y)$$

$$\sinh(x+jy) = \sinh(x) \cdot \cos(y) + j \cosh(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cosh(x+jy) = \cosh(x) \cdot \cos(y) + j \sinh(x) \cdot \sin(y)$$

2.3.9.5. Zusammenhang Area- und ln-Funktionen

Gesucht ist der y-Wert der Funktion $y = \operatorname{arsinh}(x)$

in ln-Schreibweise. $\sinh(y) = x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$

Mit der Abkürzung $a = e^y$ und $\frac{1}{a} = e^{-y}$ ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für a:

$$x = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right)$$

$$2x = a - \frac{1}{a}$$

$$a^2 - 2xa - 1 = 0$$

Die obere Gleichung ist eine quadratische Gleichung (nicht in x) in a.

$$a = x \pm \sqrt{x^2 + 1} = e^y$$

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \operatorname{arsinh}(x)$$

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Das Minus-Zeichen der quadratischen Gleichung ist im Reellen keine Lösung, da negative ln-Werte im Reellen nicht definiert sind.

In ähnlicher Weise läßt sich arcosh berechnen:

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Artanh-Berechnung:

$$y = \operatorname{artanh}(x)$$

$$\tanh(y) = x = \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

Abkürzung: $e^y = a$

$$x = \frac{a - \frac{1}{a}}{a + \frac{1}{a}} = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$$

$$a^2 x + x = a^2 - 1$$

$$a^2 x - a^2 = -1 - x$$

$$a^2(x - 1) = -(1 + x)$$

$$a^2 = \frac{1 + x}{1 - x} = e^{2y}$$

$$2y = \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} = \operatorname{artanh}(x)$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

In ähnlicher Weise lässt sich arcoth berechnen: $\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}$

2.3.9.6. Zusammenhang Arcus und ln-Funktionen

Gleiches Verfahren als im letzten Abschnitt:

$$y = \arcsin(x)$$

$$\sin(y) = x = (e^{+iy} - e^{-iy}) \frac{1}{2j}$$

$$2jx = e^{iy} - e^{-iy}$$

Substitution: $e^{iy} = a$

$$2jx = a - \frac{1}{a}$$

$$a^2 - 2jx \cdot a - 1 = 0$$

$$a = jx \pm \sqrt{(jx)^2 + 1} = e^{iy}$$

$$\ln [jx \pm \sqrt{1 - x^2}] = jy = j \cdot \arcsin(x)$$

$$\arcsin(x) = -j \cdot \ln [jx \pm \sqrt{1 - x^2}]$$

Andere Zusammenhänge lassen sich auf ähnlicher Weise herleiten:

$$\arccos(x) = -j \ln [x \pm \sqrt{x^2 - 1}]$$

$$\arctan(x) = \frac{1}{2j} \ln \frac{1 + jx}{1 - jx}$$

$$\operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{2j} \ln \frac{jx + 1}{jx - 1}$$

2.3.9.7. Zusammenhang: Area- und Arcus-Funktionen

$$\cos(y) = \cosh(jy) = x$$

$$y = \arccos(x)$$

$$jy = \operatorname{arcosh}(x)$$

$$j \cdot \arccos(x) = \operatorname{arcosh}(x)$$

$$\mathbf{\arccos(x) = -j \operatorname{arcosh}(x)}$$

Andere Zusammenhänge lassen sich auf ähnlicher Weise herleiten:

$$\mathbf{\arcsin(x) = -j \operatorname{arsinh}(jx)}$$

$$\mathbf{\arctan(x) = -j \operatorname{artanh}(jx)}$$

$$\mathbf{\operatorname{arccot}(x) = j \operatorname{arcoth}(jx)}$$

2.3.9.8. Mehrdeutigkeit

Im Komplexen $\underline{z} = a + j b$
sind die Funktionen

- e-Funktion
- trigonometrische Funktionen und
- Hyperbel-Funktionen

eindeutig bestimmt. Während die Umkehrfunktionen

- ln-Funktionen
- Arcus-Funktionen
- Area-Funktionen

sich alle durch den Logarithmus ausdrücken lassen. Dieser ist im Komplexen mehrdeutig (Kap. 3.5), daher auch die Umkehrfunktionen.

Arbeitsblatt MAI - 19 Zusammenfassung der komplexen Zusammenhänge zwischen den Funktionen

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\cos(jx) = \cosh(x)$$

$$\cosh(jx) = \cos(x)$$

$$\sin(jx) = j \sinh(x)$$

$$\sinh(jx) = j \sin(x)$$

$$\cos(x+jy) = \cos(x) \cdot \cosh(y) - j \sin(x) \cdot \sinh(y)$$

$$\sin(x+jy) = \sin(x) \cdot \cosh(y) + j \cos(x) \cdot \sinh(y)$$

$$\sinh(x+jy) = \sinh(x) \cdot \cos(y) + j \cosh(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cosh(x+jy) = \cosh(x) \cdot \cos(y) + j \sinh(x) \cdot \sin(y)$$

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) = \pm \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

$$\arcsin(x) = -j \cdot \ln\left(jx \pm \sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\arccos(x) = -j \cdot \ln\left[x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right]$$

$$\arctan(x) = \frac{1}{2j} \ln \frac{1+jx}{1-jx}$$

$$\operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{2j} \ln \frac{jx+1}{jx-1}$$

$$\arccos(x) = \pm j \operatorname{arcosh}(x)$$

$$\arcsin(x) = -j \operatorname{arsinh}(jx)$$

$$\arctan(x) = -j \operatorname{artanh}(jx)$$

$$\operatorname{arccot}(x) = j \operatorname{arcoth}(jx)$$

2.3.9.9. Beispiele**Beispiel 1:**

$$\underline{z}_1 = \sin(3+j4) = \sin(x + jy) = \sin(x) \cdot \cosh(y) + j \cos(x) \cdot \sinh(y)$$

$$\underline{z}_1 = \sin(3) \cdot \cosh(4) + j \cos(3) \cdot \sinh(4) = 3.854 - j27.017$$

Beispiel 2: (Studenten)

$$\underline{z}_2 = \cosh(2+j5) \quad \text{Ergebnis:} \quad \underline{z}_2 = 1.067 - j3.478$$

Beispiel 3:

$$\underline{z}_3 = \arccos(2) = \arccos(x) = -j \operatorname{arcosh}(x) = j \operatorname{arcosh}(2) = -1.317$$

$$\underline{z}_3 = \arccos(x) = \pm j \ln \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right] = \pm j \ln \left[2 + \sqrt{2^2 - 1} \right] = \pm j1.317$$

Beispiel 4: (Studenten)

$$\underline{z}_4 = \arcsin(3) \quad \text{Ergebnis:} \quad \underline{z}_4 = 1.571 - j1.763$$

Beispiel 5:

$$\underline{z}_5 = \operatorname{arsinh}(4+j2) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad x = 4 + j2$$

$$\underline{z}_5 = \operatorname{arsinh}(4+j2) = \ln(4 + j2 + \sqrt{(4 + j2)^2 + 1})$$

$$\underline{z}_5 = \operatorname{arsinh}(4+j2) = \ln(4 + j2 + \sqrt{16 + 2 \cdot 4 \cdot 2j - 4 + 1})$$

$$\underline{z}_5 = \operatorname{arsinh}(4+j2) = \ln(4 + j2 + \sqrt{13 + 16j})$$

$$\underline{z}_5 = \operatorname{arsinh}(4+j2) = \ln \left[4 + j2 + \sqrt{\sqrt{(13)^2 + (16)^2}} \cdot e^{j \arctan 16/13} \right]$$

$$\underline{z}_5 = \operatorname{arsinh}(4+j2) = \ln \left[4 + j2 + \sqrt{20.62} \cdot e^{j50.91^\circ} \right]$$

$$\underline{z}_5 = \operatorname{arsinh}(4+j2) = \ln \left[4 + j2 + 4.540 \cdot e^{j25.45^\circ} \right]$$

$$\underline{z}_5 = \operatorname{arsinh}(4+j2) = \ln[4 + j2 + 4.540 \cdot (\cos(25.45^\circ) + j \sin(25.45^\circ))]$$

$$\underline{z}_5 = \operatorname{arsinh}(4+j2) = \ln[8.099 + j3.951]$$

$$\underline{z}_5 = \ln \left[\sqrt{8.099^2 + 3.951^2} \cdot e^{j \arctan \left(\frac{3.951}{8.099} \right)} \right] = \ln [9.011 \cdot e^{j0.4539}]$$

$$\underline{z}_5 = \ln(9.011) + \ln(e^{j0.4539})$$

$$\underline{z}_5 = 2.199 + j0.4539$$

Beispiel 6: (Studenten)

$$\underline{z}_6 = \operatorname{arcosh}(2+j3) \quad \text{Ergebnis:} \quad \underline{z}_6 = 1.9833 + j1.0001$$

2.4. Gerade und ungerade Funktionen

Unter geraden Funktionen versteht man Funktionen mit nur geraden Potenzen.

Gerade Funktionen:

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ y &= x^2 \\ y &= x^4 \\ y &= a_0 + a_2 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^4 + \dots \\ y &= \cos(x) \\ y &= \cosh(x) \end{aligned}$$

Nicht nur eine einzelne Potenz-Funktion, sondern auch die Summen von geraden Funktionen ergeben wieder eine gerade Funktion. Die Reihen von $\cos$ und $\cosh$ haben nur gerade Potenzen, somit sind auch diese gerade Funktionen. Die Eigenschaften gerader Funktionen ist, wie man auf mehreren Arbeitsblättern sehen kann, daß diese zur y-Achse-symmetrisch sind. Dieses bedeutet auch, daß der Funktionswert an der Stelle $-x$ gleich dem an der Stelle x ist.

Gerade Funktionen: $y(-x) = y(x)$ **achsensymmetrisch**

Ungerade Funktionen:

$$\begin{aligned} y &= x \\ y &= x^3 \\ y &= x^5 \\ y &= a_1 + a_3 \cdot x^3 + a_5 \cdot x^5 + \dots \\ y &= \sin(x) \\ y &= \tan(x) \\ y &= \sinh(x) \\ y &= \tanh(x) \end{aligned}$$

Auch bei ungeraden Funktionen ist nicht nur eine einzelne Potenz-Funktion ungerade, sondern auch die Summe von ungeraden Funktionen ergibt wieder eine ungerade Funktion, somit auch $\sin(x)$, $\sinh(x)$ und die anderen. Aus den Arbeitsblättern ist zu erkennen, daß ungerade Funktionen punktsymmetrisch zum Nullpunkt sind. Dieses bedeutet auch, daß der Funktionswert an der Stelle $-x$ gleich dem negativen Funktionswert an der Stelle x ist.

Ungerade Funktionen: $y(-x) = -y(x)$ **punktsymmetrisch**

Beispiele:

$\sin(-x) = -\sin(x)$	weil ungerade
$\cos(-x) = \cos(x)$	weil gerade
$\tan(-x) = -\tan(x)$	weil ungerade
$\cosh(-x) = \cosh(x)$	weil gerade
$\sinh(-x) = -\sinh(x)$	weil ungerade

$y = x^3$	$y(-x) = -y(x) = -x^3$
-----------	------------------------

2.5. Funktionen in Polardarstellung

Bisher sind die Funktionen in der x-y-Ebene dargestellt worden. Jeder Punkt der Ebene ist aber nicht nur durch x und y gegeben, sondern kann auch durch Abstand zum Nullpunkt r und durch den Winkel φ beschrieben werden. Baut man hier eine Ebene auf mit r und φ erhält man Bild MA25A:

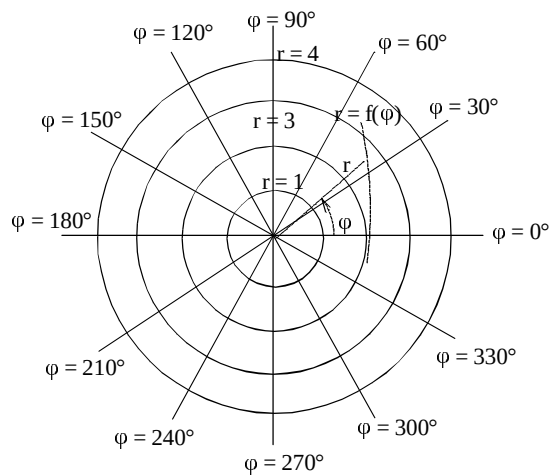


Bild MA25A

Die Funktion in Bild MA25A kann dann beschrieben werden als

$$r = f(\varphi)$$

Radius, der vom Winkel abhängig ist.

Umrechnung (fast wie bei komplexer Rechnung):

$$x = r \cdot \cos(\varphi) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi) \qquad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \qquad x > 0$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} + \pi \qquad x < 0$$

Besonders geeignet ist diese Darstellung, wo in der Praxis Winkelabhängigkeit vorhanden ist, z.B. Strahlung einer Lampe.

Auf Arbeitsblatt MAI-20 sind vier in Polarform gegebene Funktion dargestellt. Der Kreis ist mit $r = \text{const}$ leicht zu verstehen. Bei Spiralen nimmt der Radius mit den Winkel monoton ab oder zu.

Arbeitsblatt MAI - 20

Beispiele zu Funktionen in Polarform

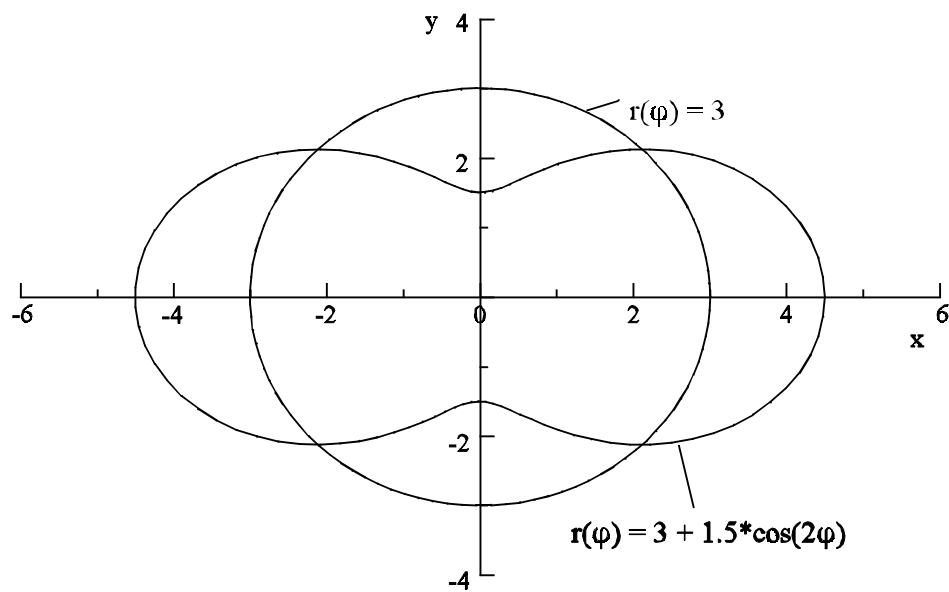
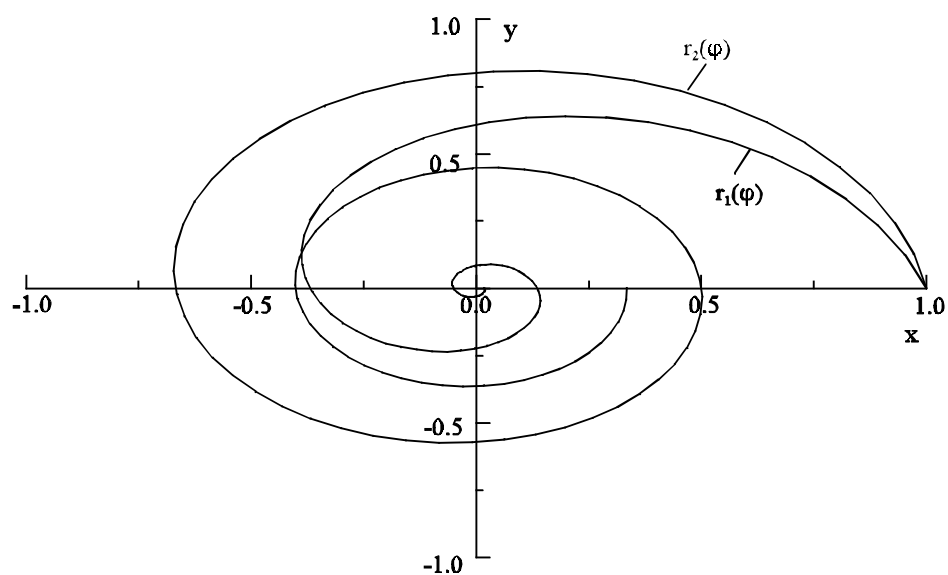


Bild MA25B

Bild MA25C: $r_1(\varphi) = e^{-\frac{\varphi}{\pi}}$

$$r_2(\varphi) = \frac{1}{1 + \frac{\varphi}{2\pi}}$$

2.6. Funktionen mehrerer Veränderlicher

Zur Wiederholung: Eine Funktion ist die Vorschrift zur Zuordnung einer unabhängigen Variablen zu einer abhängigen Variablen.

$$y = f(x)$$

y - abhängige Variable

x - unabhängige Variable

Sind mehrere unabhängige Variable vorhanden, muß der Funktionsbegriff erweitert werden. Z.B. für zwei Variable:

Mittels Gleichungsvorschrift wird der abhängigen Variable z ein Wert in Abhängigkeit der beiden unabhängigen Variable x und y zugeordnet.

$$z = f(x, y) \quad \text{allgemein}$$

3 Beispiele:

$$z = a_0 + a_1 \cdot x + b_1 y \quad - \text{Ebene}$$

$$z^2 + y^2 + x^2 = r^2 \quad - \text{Kugel mit Radius } r$$

$$y^2 + x^2 = z^2 \quad - \text{Doppelkegel}$$

Wie stellt man eine solche Funktion dar? Die Funktion $y = f(x)$ mit zwei Variablen (einer abhängigen und einer unabhängigen) wurde in einer Ebene dargestellt.

- Anschaulich, aber etwas aufwendig, ist die dreidimensionale Darstellung.
- Eine zweite Möglichkeit ist die Darstellung in einer Funktionstafel, die einer Tabelle entspricht.

$x \backslash y$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	z_1	z_1	z_1	z_1
x_2	z_2	z_2	z_2	z_2
x_3	z_3	z_3	z_3	z_3
x_4	z_4	z_4	z_4	z_4

- Eine dritte Möglichkeit ist die Darstellung in Netztafeln. Dabei wird einmal $z = f(x)$ dargestellt mit y als Parameter und oder ein zweites Mal $z = f(y)$ mit x als Parameter, siehe Bild MA26A:

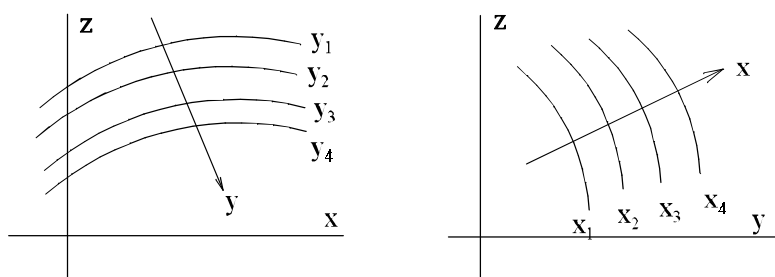


Bild MA26A

2.7. Funktionen in logarithmischer Darstellung

Überstreicht ein Funktionswert oder die unabhängige Variable einen großen Wertebereich, ist es möglich eine oder zwei Achsen logarithmisch zu skalieren. Man spricht dann von doppelt oder einfach logarithmischer Darstellung. Für die doppelt logarithmische Darstellung sollen die Achse nach Bild MA27A untersucht werden.

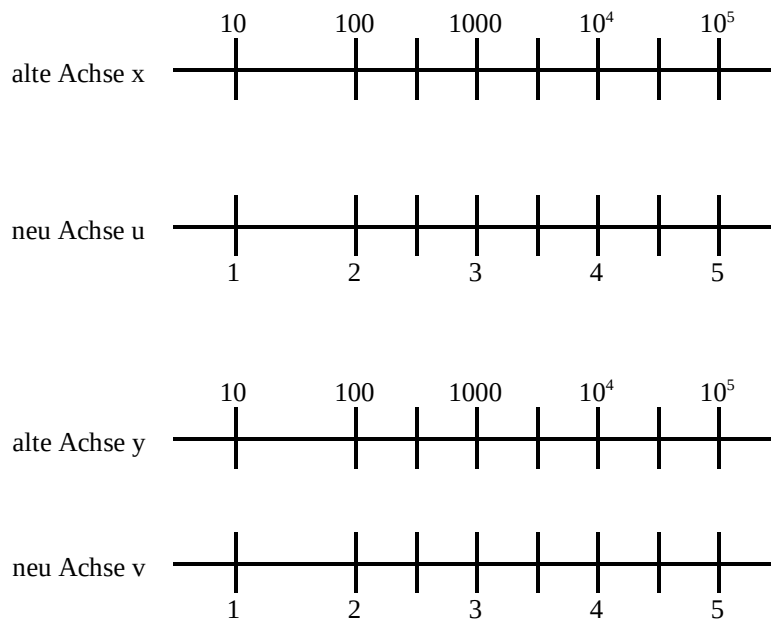


Bild MA27A

Aus Bild MA27A ist abzulesen:

$$\begin{aligned} x &= 10^u \\ y &= 10^v \end{aligned}$$

Die neue Darstellung erfolgt in u und v. Die Funktion ist in x und y gegeben.

Betrachtet werden soll die Potenz-Funktion

$$y = x^n$$

ersetzt durch u und v:

$$10^v = (10^u)^n = 10^{u \cdot n}$$

logarithmiert

$$v = u \cdot n$$

ergibt sich, daß im doppelt logarithmischen Maßstab die Potenz-Funktion zu einer Geraden wird, siehe auch Arbeitsblatt MAI-21, Bild MA27B, wo einige Potenz-Funktionen im doppelt logarithmischen Maßstab dargestellt sind. Die Steigung der Geraden ist vom Exponenten n abhängig. Für negative Exponenten ergibt sich eine negative Steigung.

Bei der Form

$$y = a \cdot x^n$$

bewirkt im doppelt logarithmischen Maßstab der Faktor n die Steigung und a eine Verschiebung in y-Richtung, siehe Bild MA27B.

Beim logarithmischen Maßstab ist die Null nicht darstellbar, weil $0 = 10^{-\infty}$ ist.

Hat man eine Funktion, die keine Potenz-Funktion ist, sollte man die Asymptoten untersuchen. Die Funktionen in Bild MA27C

$$y_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{100}\right)^2}$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{10}\right)^2}}$$

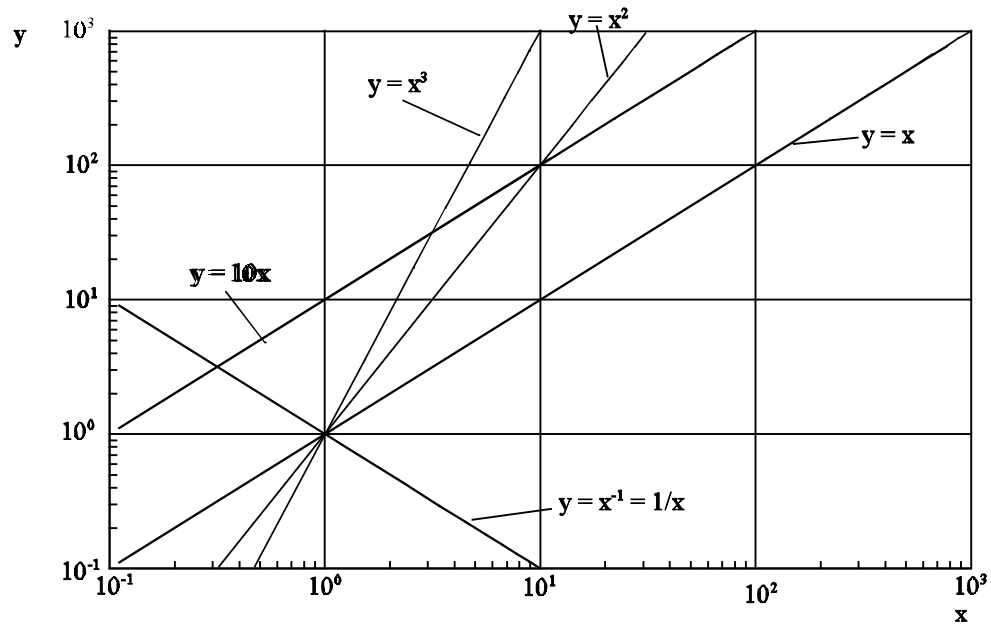
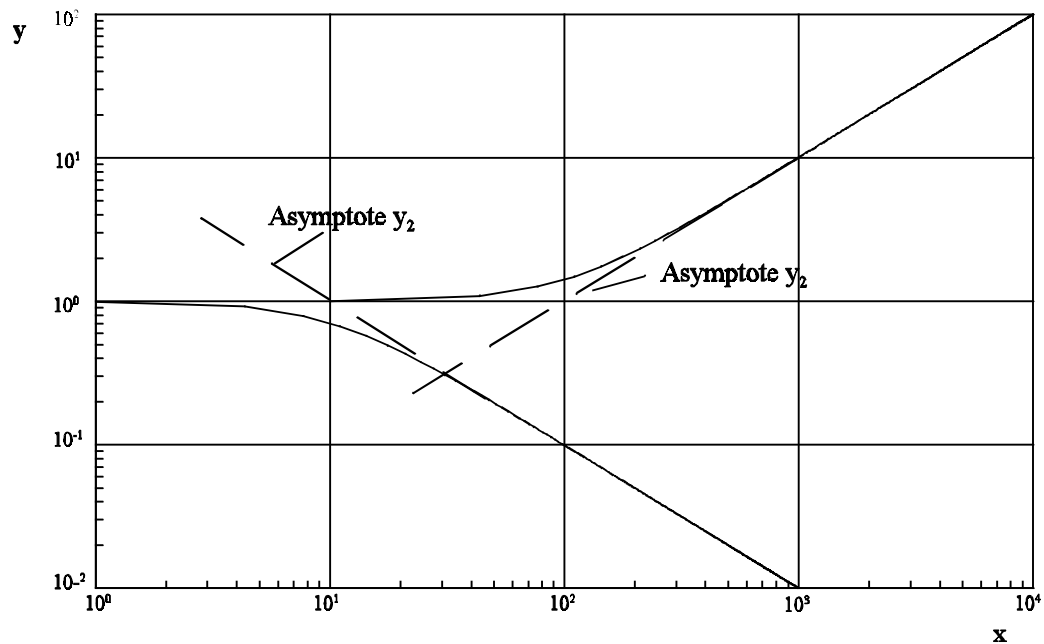
haben für kleine x-Werte ($x \ll 1$) den Wert $1 = 10^0$ und für große x-Werte ($x \gg 1$) die Asymptoten

$$y_{A1} = \sqrt{\left(\frac{x}{100}\right)^2} = \frac{x}{100} = 10^{-2} * x$$

$$y_{A2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{10}\right)^2}} = \frac{10}{x} = 10 * x^{-1}$$

Diese Asymptoten sind wieder Potenz-Funktionen, also Geraden.

Arbeitsblatt MAI-21 doppelt logarithmische Darstellung

Bild MA27B: Potenz-Funktionen $y = x^n$ im doppelt logarithmischen Maßstab als Geraden

$$y_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{100}\right)^2}$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{10}\right)^2}}$$

Bild MA27C: Beispiel von Asymptoten im doppelt logarithmischen Maßstab

3. Komplexe Zahlen

3.1. Erweiterung des Zahlenbegriffs

Bislang sind folgende Zahlenmengen bekannt:

- * Menge der natürlichen Zahlen
[0], 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
- * Menge der ganzen Zahlen
... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...
- * Die Menge der rationalen Zahlen beinhaltet alle Quotienten aus zwei ganzen Zahlen. Kennzeichen für diese Zahlen ist bei der Kommadarstellung die Periodizität

$$\dots -\frac{5}{2}, -\frac{4}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \dots$$

$$\dots -\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \dots$$

$$\dots -\frac{5}{4}, -\frac{4}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \dots$$

...

...

Beispiel:

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{333333}$$

$$\frac{1}{11} = 0,\overline{090909}$$

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}142857$$

- * Damit ist die Menge des Bekannten aber noch nicht abgedeckt. z.B. sind die Zahlen

$$\sqrt{2} = 1.41421\dots$$

$$e = 2.71828\dots$$

$$\sin(1) = 0.84147\dots$$

nicht in der Menge der rationalen Zahlen enthalten, denn die Zahlenfolge besitzt auch in den folgenden Stellen keine Periodizität. Diese werden irrationale Zahlen genannt.

- * Die rationalen und irrationalen Zahlen zusammen bilden die Menge der reellen Zahlen.

Soweit zur Wiederholung der bekannten Zahlenmengen. Die bisherige Zahlenmenge war nicht komplett. Nicht alle bekannten Operationen waren auf alle Zahlen möglich. Dort, wo bisher gesagt wurde, es existiert im Reellen keine Lösung, muß ein Ausweg gefunden werden. Dieses Problem ist u.a. im Kapitel 1.4.3 vorgekommen: Die Wurzel aus einer negativen Zahl. Was ist das ?

$$(-1)^2 = 1$$

$$1^2 = 1$$

Es gibt keine bekannte Zahl, die zum Quadrat negativ wird. Die Frage der negativen Wurzel soll im nächsten Abschnitt geklärt werden.

3.2. Einführung in die komplexen Zahlen

3.2.1. Definition der imaginären Einheit j

Das Problem der Wurzel aus einer negativen Zahl wird per Definition gelöst. Weil diese Zahl real nicht existent ist, wird diese imaginär genannt. Die Definition der imaginären Einheit lautet:

$$j^2 = -1 \qquad j = +\sqrt{-1}$$

Beim Quadratwurzel-Ziehen erhält man normal zwei Lösungen $\pm$ (plus und minus). Um die imaginäre Einheit eindeutig zu definieren erscheint zusätzlich vor der Wurzel das "+" Zeichen in der oberen rechten Definitions-Gleichung.

Die imaginäre Einheit wird bei Ingenieuren wie oben angegeben mit "j" bezeichnet. Mathematiker verwenden das "i" als imaginäre Einheit. Da dieses, insbesondere in der Elektrotechnik, häufig zu Verwechslungen führen würde, verwenden Ingenieure das "j" als imaginäre Einheit.

Mit dem so eingeführten können nun alle Wurzel aus negativen Zahlen berechnet werden.

Beispiel: $z = \sqrt{-49} = \sqrt{-1} * \sqrt{49} = j * 7 = 7j$

Die obere Zahl ist eine imaginäre Zahl

$$\text{imaginäre Zahl} = \text{reelle Zahl} * \text{imaginäre Einheit}$$

3.2.2 Komplexe Zahlen

Bislang sind bekannt:

- reelle Zahlen
- imaginäre Zahlen.

Was sind nun komplexe Zahlen? Die reellen, noch die imaginären Zahlen sind in sich abgeschlossen. Das heißt mathematische Operationen, angewandt auf eine Zahlenmenge müssen wieder Zahlen innerhalb dieser Zahlenmenge ergeben. Um dieses zu erreichen, müssen die reellen Zahlen und die imaginären miteinander verknüpft werden. Wie aber verknüpfen. Dazu das Beispiel einer quadratischen Gleichung.

Beispiel: $x^2 - 6x + 25 = 0$

Lösung laut Formel:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 25} \\ x_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{-16} \\ x_{1,2} &= 3 \pm \sqrt{16} * \sqrt{-1} \\ x_{1,2} &= 3 \pm 4j \end{aligned}$$

Das obere Beispiel weist schon darauf hin, wie verknüpft wird. Die allgemeine komplexe Zahl

$$\underline{z} = a + j b$$

setzt sich additiv aus Realteil (oben a) und Imaginärteil ober (jb) zusammen. Man nennt

a - Realteil der Komplexen Zahl $\underline{z}$

b - Imaginärteil der komplexen Zahl $\underline{z}$

Zur Schreibweise der komplexen Zahl. In der Elektrotechnik ist es üblich komplexe Zahlen zu unterstreichen, daher der Strich über der Matrix. Bei den Mathematikern ist das Unterstreichen von komplexen Zahlen nicht üblich. Hier findet keine Unterscheidung zwischen komplexen und reellen Zahlen in der Kennzeichnung der Variablen und Konstanten statt.

Schreibweise: Die Variablen und Konstanten der komplexen Zahlen werden unterstrichen.

3.2.3 Gauß'sche Zahlenebene

Wie kann die Lage der reellen Zahlen dargestellt werden? Antwort: mit Hilfe der Zahlengeraden. Bei komplexen Zahlen sind zwei Komponenten vorhanden. Die Gerade muß erweitert werden zur Ebene. In der einen Richtung muß der Realteil und in der anderen Richtung der Imaginärteil dargestellt werden. Die so aufgespannte Ebene wird "Gauß'sche Zahlenebene" genannt, siehe Bild MA323A.

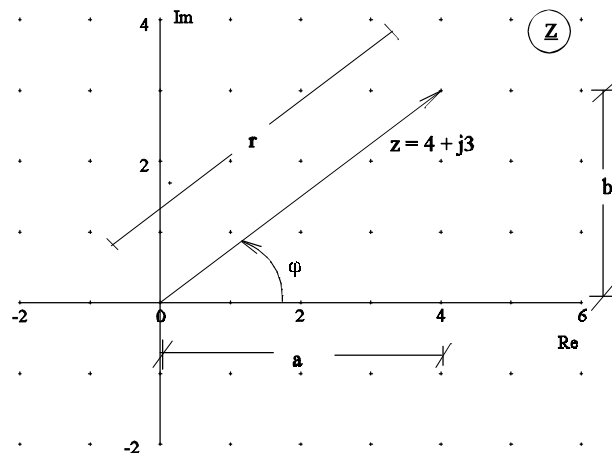


Bild MA323A: Gauß'sche Zahlenebene

Die Achsen werden wie die eines x-y-Koordinatensystems mit Zahlen (evtl. auch mit Einheiten) versehen. In horizontaler (x) Richtung wird der Realteil aufgetragen. Kennzeichnung mit "Re" am positiven Achsenabschnitt. In vertikaler (y) Richtung wird der Imaginärteil aufgetragen. Kennzeichnung mit "Im" an der positiven imaginären Achse. Soweit zur Ebene selbst.

Die Gauß'sche Zahlenebene hat nur Sinn, wenn auch Zahlen eingetragen werden. Zu diesem Zweck wurde in Bild MA323A die Zahl

$$\underline{z} = 4 + j3$$

eingetragen. Dieses erfolgt durch Verbinden des Nullpunktes mit der Koordinate (Realteil a, Imaginärteil b), hier im Beispiel mit der Koordinate (4, 3), mit Hilfe eines Pfeils. Dieser Pfeil wird komplexer Zeiger genannt.

3.2.4. Darstellungsarten

3.2.4.1. Einführung von Betrag und Winkel

Anstelle der Komponenten a und b ist die Zahl $\underline{z}$ auch durch die Länge (wird hier Betrag genannt) und dem Winkel φ eindeutig beschreibbar, siehe Bild MA323A.

$$\underline{z} \quad \Leftrightarrow \quad a, b \quad \Leftrightarrow \quad r, \varphi$$

Betrag und Winkel können in der Versor-Schreibweise geschrieben werden

$$\underline{z} = r \angle \varphi$$

Beide Formen geben die gleiche komplexe Zahl an:

$$\underline{z} = r \angle \varphi = a + jb$$

3.2.4.2. Umrechnung Betrag und Phase nach Komponenten

Mit Hilfe der Winkelfunktionen am Dreieck und Bild MA323A lassen sich die Komponenten der komplexen Zahl $\underline{z}$ berechnen:

$$a = r \cdot \cos(\varphi) = \text{Betrag} \cdot \cos(\varphi)$$

$$b = r \cdot \sin(\varphi) = \text{Betrag} \cdot \sin(\varphi)$$

Somit läßt sich die komplexe Zahle auch schreiben:

$$\underline{z} = a + jb = r \cdot \cos(\varphi) + j r \cdot \sin(\varphi)$$

$$\underline{z} = r \cdot [\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)]$$

3.2.4.3. Umrechnung Komponenten nach Betrag und Phase

Nach Bild MA323A ergibt sich der Betrag mit Hilfe des Herrn Pythagoras:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\text{Realteil})^2 + (\text{Imaginärteil})^2}$$

Mit Hilfe der Tangens-Funktion ergibt sich ebenfalls aus Bild MA323A:

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$$

Die Arcus-Tangens-Funktion hat die Hauptwerte zwischen -90° und $+90^\circ$, also für komplexe Zahlen mit positiven Realteil. Für komplexe Zahlen mit negativen Realteil muß zum Winkel 180° addiert werden.

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad a > 0$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 180^\circ \quad a < 0$$

Eselsbrücke:
$$\varphi = \arctan \frac{\text{Imaginärteil}}{\text{Realteil}}$$

Hinweis 1: Die beiden erwähnten Umformungsarten hat ein moderner Taschenrechner schon integriert. Es werden dabei jeweils zwei Komponenten eingegeben. Die anderen Komponenten werden, unter Beachtung der Umformungsart, berechnet. Die Winkel-Fallunterscheidung ($+180^\circ$) braucht dabei nicht mehr zu erfolgen, da dieses der Rechner schon einprogrammiert hat.

Hinweis 2: (häufiger Fehler in Klausuren)
Es ist auf die Einstellung
- Bogenmaß
- Gradmaß (degree)
am Taschenrechner zu achten.

$$\sin(90\text{rad}) \neq 1$$

3.2.4.4. Potenzen von jWas ist j^n

n - ganze Zahl

$$j^2 = -1$$

$$j^3 = j^2 \cdot j = -j$$

$$j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$j^5 = j^4 \cdot j = 1 \cdot j = j$$

$$j^6 = j^4 \cdot j^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$j^{-1} = \frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j$$

$$j^{-2} = \frac{1}{j^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$j^{-3} = \frac{1}{j^3} = \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{j^2} = -j \cdot (-1) = j$$

$$j^0 = \frac{j}{j} = \frac{j^2}{j^2} = 1$$

Die oberen Ergebnisse sind in Bild MA3244A in die komplexe Ebene eingetragen worden.

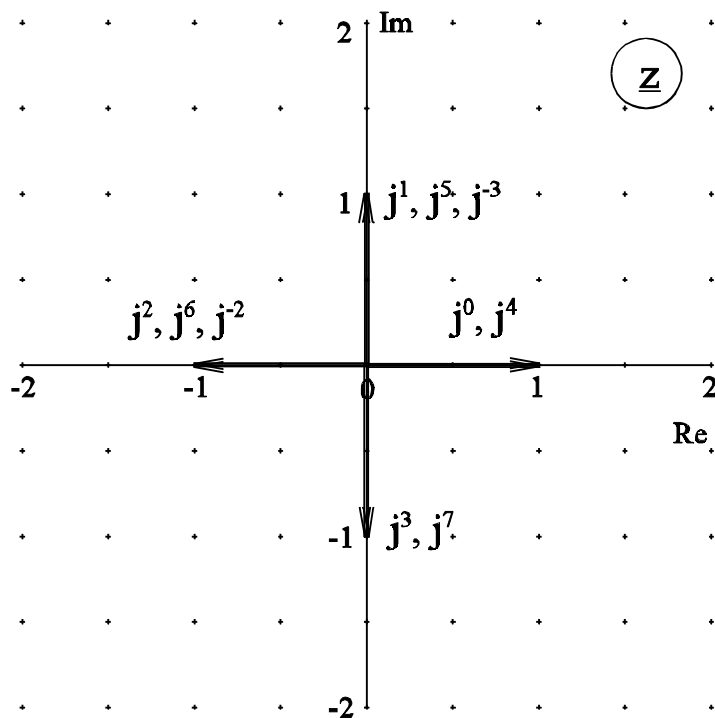


Bild MA3244A:

Potenzen von j

3.2.4.5. Euler-Form

Frage: Was ist $e^{j\varphi}$

Reihenentwicklung aus Kap. 2.3.8 (und Kap. 8.8, 2. Semester):

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

x durch $j\varphi$ ersetzt, dieses ergibt:

$$e^{j\varphi} = 1 + \frac{1}{1!}j\varphi + \frac{1}{2!}j^2\varphi^2 + \frac{1}{3!}j^3\varphi^3 + \frac{1}{4!}j^4\varphi^4 + \frac{1}{5!}j^5\varphi^5 + \frac{1}{6!}j^6\varphi^6 + \dots$$

$$e^{j\varphi} = 1 + j\frac{1}{1!}\varphi - \frac{1}{2!}\varphi^2 - j\frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{4!}\varphi^4 + j\frac{1}{5!}\varphi^5 - \frac{1}{6!}\varphi^6 + \dots$$

$$e^{j\varphi} = \left(1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 - \frac{1}{6!}\varphi^6 + \dots\right) + j\left(\frac{1}{1!}\varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 + \dots\right)$$

aus Kap. 2.3.8 (und Kap. 8.8, 2. Semester) ist auch bekannt:

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{1}{2!}\varphi^2 + \frac{1}{4!}\varphi^4 - \frac{1}{6!}\varphi^6 + \dots$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{1!}\varphi - \frac{1}{3!}\varphi^3 + \frac{1}{5!}\varphi^5 + \dots$$

Vergleich obiger Formeln liefert die Euler-Gleichung

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$$

3.2.4.6. Schreibweise der komplexen Zahl

$$\underline{z} = a + jb$$

Komponenten-Schreibweise

$$\underline{z} = r/\varphi$$

Versor-Schreibweise

$$\underline{z} = r \cdot e^{j\varphi}$$

Euler-Schreibweise

$$|\underline{z}| = z = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Betrags-Schreibweise

$$a = \operatorname{Re}(\underline{z})$$

$$b = \operatorname{Im}(\underline{z})$$

3.2.5. Mathematische Operation mit komplexen Zahlen

3.2.5.1. Addition

$$\underline{z}_3 = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$$

$$\underline{z}_1 = a_1 + jb_1$$

$$\underline{z}_2 = a_2 + jb_2$$

$$\underline{z}_3 = a_3 + jb_3$$

$$\underline{z}_3 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2)$$

$$\underline{z}_3 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

$$\Rightarrow \quad a_3 = a_1 + a_2 \quad b_3 = b_1 + b_2$$

Komplexe Zahlen werden addiert, indem die Komponenten Realteil und Imaginärteil einzeln addiert werden.

Die grafische Addition von komplexen Zahlen ist der Vektoren sehr ähnlich. Die komplexen Zeiger werden durch Aneinandersetzen addiert, siehe Bild MA3251A.

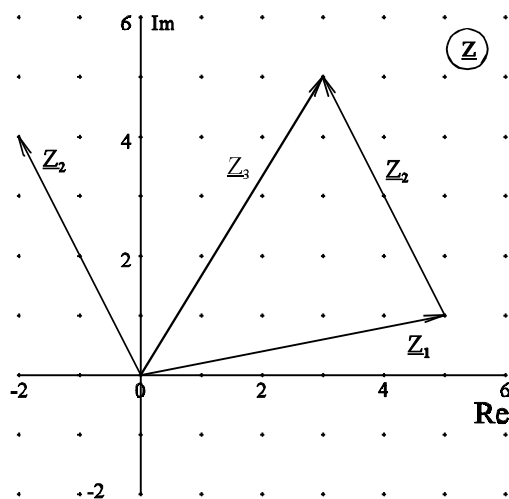


Bild MA3251A: Grafische Addition komplexer Zahlen

3.2.5.2. Negative komplexe Zahl

$$\underline{z}_1 = a_1 + jb_1$$

$$\underline{z}_2 = -\underline{z}_1 = -(a_1 + jb_1) = -a_1 - jb_1 = a_2 + jb_2$$

$$a_1 = -a_1 \quad b_2 = -b_1$$

Die komplexe Zahl wird negiert, indem die Komponenten negiert werden. Die negierte komplexe Zahl zeigt in die entgegengesetzte Richtung.

$$\underline{z}_1 = r_1 * e^{j\varphi_1}$$

$$\underline{z}_2 = -1 * r_1 * e^{j\varphi_1}$$

$$-1 = e^{\pm j180^\circ}$$

$$\underline{z}_2 = e^{\pm j180^\circ} * r_1 * e^{j\varphi_1} = r_1 * e^{j(\varphi_1 \pm 180^\circ)} = r_2 * e^{j\varphi_2}$$

$$r_2 = r_1 \quad \varphi_2 = \varphi_1 \pm 180^\circ$$

Ein komplexe Zahl in Betrags- und Phase-Darstellung wird negiert, indem der Winkel um 180° addiert oder subtrahiert wird, der Betrag bleibt dabei gleich. Beide Arten der Negierung macht Bild MA3252A deutlich.

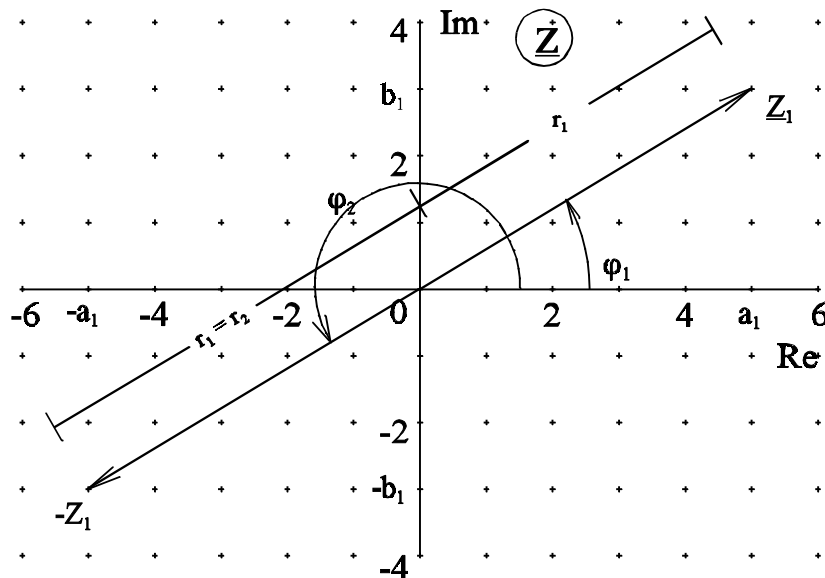


Bild MA3252A: Negation komplexer Zahlen

3.2.5.3. Subtraktion

$$\underline{z}_3 = \underline{z}_1 - \underline{z}_2$$

$$\underline{z}_1 = a_1 + jb_1$$

$$\underline{z}_2 = a_2 + jb_2$$

$$\underline{z}_3 = a_3 + jb_3$$

$$\underline{z}_3 = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2)$$

$$\underline{z}_3 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

$$\Rightarrow a_3 = a_1 - a_2$$

$$b_3 = b_1 - b_2$$

Komplexe Zahlen werden voneinander subtrahiert, indem die Real- und Imaginärteile einzeln subtrahiert werden.

Die grafische Subtraktion erfolgt durch Addition einer negativen komplexen Zahl, siehe Bild MA3253A.

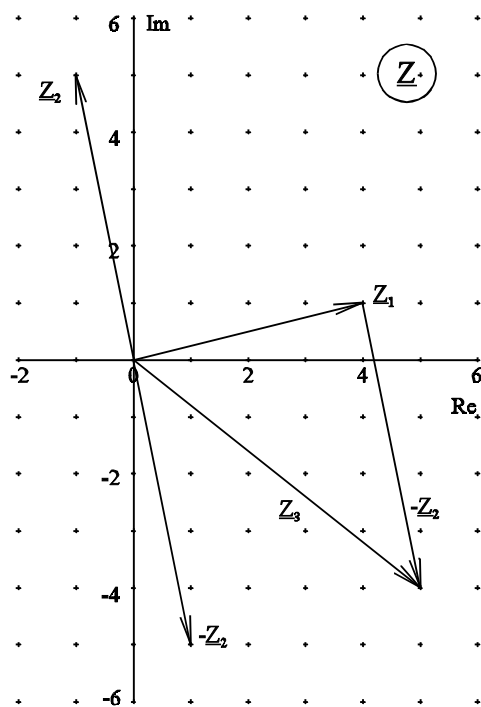


Bild MA3253A: Grafische Subtraktion komplexer Zahlen

3.2.5.4. Multiplikation komplexer Zahlen

$$\underline{z}_1 = a_1 + jb_1$$

$$\underline{z}_2 = a_2 + jb_2$$

$$\underline{z}_3 = \underline{z}_1 * \underline{z}_2 = (a_1 + jb_1) * (a_2 + jb_2)$$

$$\underline{z}_3 = a_1 * a_2 + jb_1 * a_2 + ja_1 * b_2 - b_1 * b_2$$

$$\underline{z}_3 = (a_1 * a_2 - b_1 * b_2) + j(b_1 * a_2 + a_1 * b_2)$$

$$\Rightarrow a_3 = a_1 * a_2 - b_1 * b_2$$

$$b_3 = b_1 * a_2 + a_1 * b_2$$

Obere Form der Multiplikation lässt sich schlecht merken. Versuch: Multiplikation in Exponential-Darstellung

$$\underline{z}_1 = r_1 * e^{j\varphi_1}$$

$$\underline{z}_2 = r_2 * e^{j\varphi_2}$$

$$\underline{z}_3 = r_1 * e^{j\varphi_1} * r_2 * e^{j\varphi_2}$$

$$\underline{z}_3 = (r_1 * r_2) * e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$r_3 = r_1 * r_2$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$$

Komplexe Zahlen werden miteinander multipliziert, indem die Beträge miteinander multipliziert werden und die Winkel addiert werden.

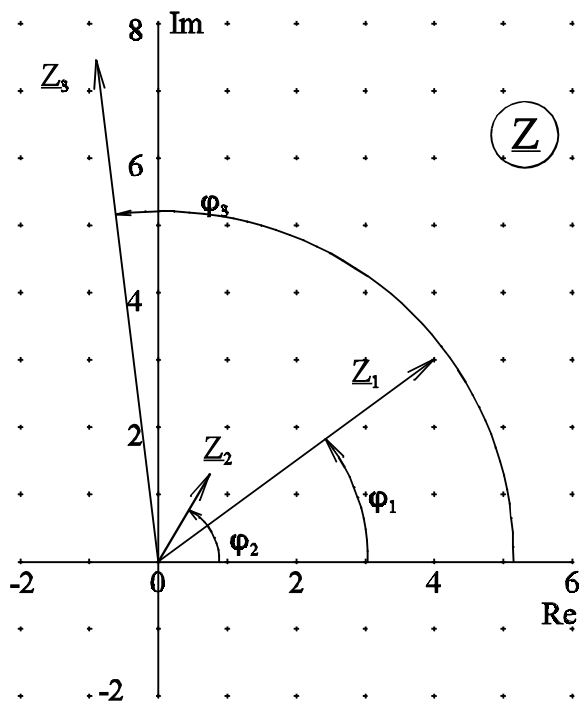


Bild MA3254A: Grafische Darstellung der Multiplikation komplexer Zahlen

3.2.5.5. Konjugiert komplexe Zahl

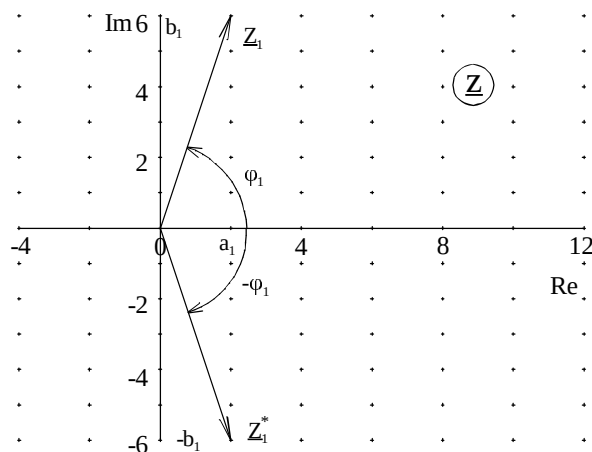
Dieses ist wie z.B. die Signum-Funktion, keine analytische Operation, einfach nur eine Vorschrift:

Die konjugiert komplexe Zahl einer komplexen Zahl erhält man, indem der Realteil beibehalten wird und der Imaginärteil negiert wird. Die konjugiert komplexe Zahl wird durch einen Stern gekennzeichnet.

$$z_1 = a_1 + jb_1$$

$$z_2 = z_1^* = (a_1 + jb_1)^* = a_1 - jb_1 = a_2 + jb_2$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = a_2 \quad b_2 = -b_1$$



Aus Bild MA2355A lässt sich ablesen:

$$z_1 = r_1 * e^{j\varphi_1}$$

$$z_1^* = r_1 * e^{-j\varphi_1}$$

Die konjugiert komplexe Zahl in Betrag und Winkel-Schreibweise erhält man, indem der Winkel negiert wird.

Bild MA3255A: Konjugiert komplexe Zahl

eine Anwendung: $x^2 - 6x + 25 = 0$

$$x_{12} = 3 \pm \sqrt{9 - 25} = 3 \pm j4$$

Falls die Lösung einer quadratischen Gleichung komplex ist, so sind die beiden Lösungen zueinander konjugiert komplex.

Verknüpfung zweier konjugiert komplexer Zahlen:

$$z_1 + z_1^* = (a_1 + jb_1) + (a_1 - jb_1) = 2a_1$$

$$z_1 - z_1^* = (a_1 + jb_1) - (a_1 - jb_1) = 2jb_1$$

$$z_1 * z_1^* = (a_1 + jb_1) * (a_1 - jb_1) = a_1^2 + jb_1 * a_1 - a_1 * jb_1 + b_1^2 = a_1^2 + b_1^2$$

$$z_1 + z_1^* = 2\text{Re}\{z\} \quad - \text{Realteil}$$

$$z_1 - z_1^* = 2\text{Im}\{z\} \quad - \text{Imaginärteil}$$

$$z_1 * z_1^* = r_1^2 \quad - \text{Betragsquadrat}$$

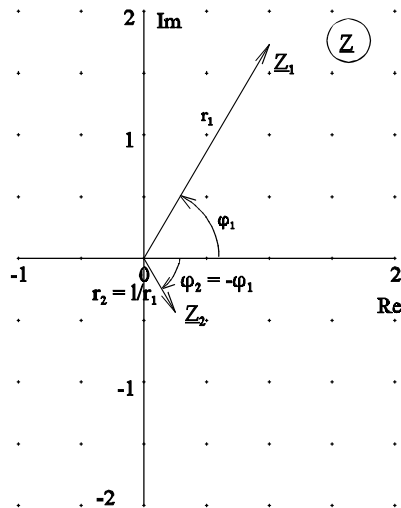
Die Addition von konjugiert komplexen Zahlen ergibt den doppelten Realteil, die Subtraktion den doppelten Imaginärteil und die Multiplikation das Betragsquadrat.

3.2.5.6. Inversion einer komplexen Zahl

$$z_2 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{a_1 + jb_1}$$

Der komplexe Ausdruck im Nenner stört etwas. Gesucht ist Realteil und Imaginärteil. Wie erhält man Real- und Imaginärteil? Antwort: durch Multiplizieren mit der zugehörigen konjugiert komplexen Zahl. Bei der Inversion wäre dieses eine Erweiterung mit der konjugiert komplexen Zahl:

$$z_2 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{a_1 + jb_1} \cdot \frac{a_1 - jb_1}{a_1 - jb_1} = \frac{a_1 - jb_1}{a_1^2 + b_1^2} = \frac{1}{z_1} = \frac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} - j \frac{b_1}{a_1^2 + b_1^2}$$



Inversion in Exponential-Darstellung:

$$z_2 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}} = \frac{1}{r_1} \cdot e^{-j\varphi_1}$$

Eine komplexe Zahl wird invertiert, indem der Betrag invertiert wird und der Winkel negiert wird.

Bild MA3256A: Grafisch Darstellung der Inversion

3.2.5.7. Division komplexer Zahlen

Division in Komponenten-Form

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = a_3 + jb_3$$

Um die Division in Komponenten-Form auszuführen muß wieder konjugiert komplex erweitert werden:

$$z_3 = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} \cdot \frac{a_2 - jb_2}{a_2 - jb_2} = \frac{a_1 \cdot a_2 + jb_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot jb_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$a_3 = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} \quad b_3 = \frac{b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Division in Exponential-Form:

Obere Formel wäre sehr umständlich zu merken. Darum werden komplexe Zahlen von Hand in Exponential-Form dividiert:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad r_3 = \frac{r_1}{r_2} \quad \varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$$

Komplexe Zahlen werden durcheinander dividiert, indem die Beträge durcheinander dividiert werden und die Winkel voneinander subtrahiert werden.

3.2.5.8. Gleichheit komplexer Zahlen

Wann sind Zahlen

$$z_1 = a_1 + jb_1 = r_1 * e^{j\varphi_1}$$

$$z_2 = a_2 + jb_2 = r_2 * e^{j\varphi_2}$$

gleich?

$$z_1 = z_2$$

$$a_1 + jb_1 = a_2 + jb_2$$

$$r_1 * e^{j\varphi_1} = r_2 * e^{j\varphi_2}$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2$$

$$\Rightarrow r_1 = r_2$$

$$\Rightarrow b_1 = b_2$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

Zwei komplexe Zahlen sind einander gleich, wenn ihre Imaginärteile und Realteile beide gleich sind.

oder:

Zwei komplexe Zahlen sind einander gleich, wenn ihre Beträge und Winkel beide gleich sind.

3.2.6. Einfache Beispiele

Vier Beispiele, von Studierenden selbst rechnen lassen, um Verständnis für komplexe Zahlen zu bekommen. Beispiele sind nicht besonders anspruchsvoll und weit unter Klausur-Niveau.

Beispiel 1: (Studenten)

Rechnen Sie um in die Komponenten-Form.

gegeben:

$$z_1 = 8 \angle 60^\circ$$

$$z_2 = \sqrt{8} \angle -45^\circ$$

$$z_3 = 2e^{j150^\circ}$$

$$z_4 = 3e^{j230^\circ}$$

Ergebnis:

$$z_1 = 4 + j6.928$$

$$z_2 = 2 - j2$$

$$z_3 = -1.732 + j1$$

$$z_4 = -1.928 - j2.298$$

Beispiel 2:

(Studenten)

Rechnen Sie um in die Exponential-Form.

gegeben:

$$z_1 = \sqrt{2} (1+j)$$

$$z_2 = \sqrt{2} (1-j)$$

$$z_3 = \sqrt{2} (-1+j)$$

$$z_4 = \sqrt{2} (-1-j)$$

$$z_5 = 4 + j3$$

$$z_6 = 4 - j3$$

$$z_7 = -4 + j3$$

$$z_8 = -4 - j3$$

Ergebnis:

$$z_1 = 2e^{j45^\circ}$$

$$z_2 = 2e^{-j45^\circ}$$

$$z_3 = 2e^{j135^\circ}$$

$$z_4 = 2e^{j225^\circ}$$

$$z_5 = 5 \cdot \arctan(3/4) = 5 \cdot 36.87^\circ$$

$$z_6 = 5 \cdot \arctan(-3/4) = 5 \cdot -36.87^\circ$$

$$z_7 = 5 \cdot \arctan(-3/4) + 180^\circ = 5 \cdot 143.1^\circ$$

$$z_8 = 5 \cdot \arctan(3/4) + 180^\circ = 5 \cdot 216.9^\circ$$

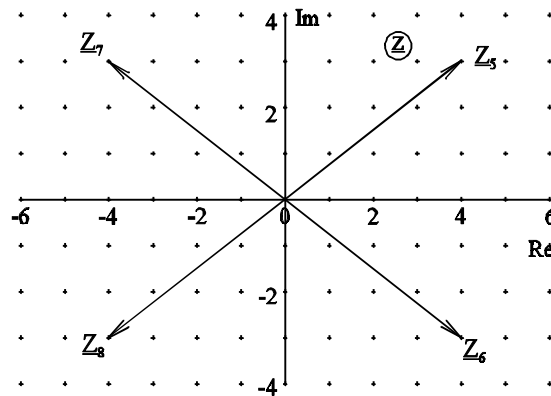
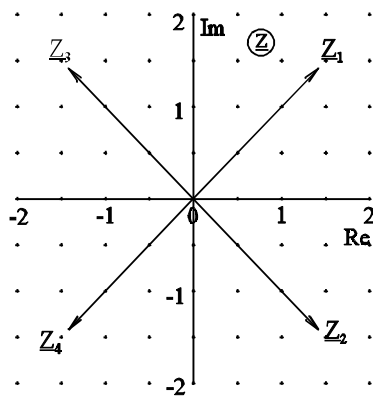
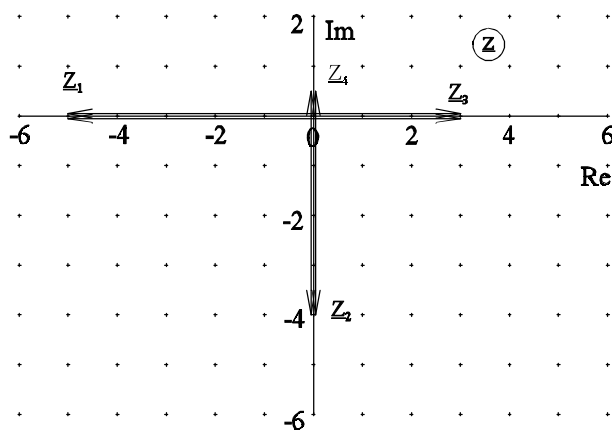


Bild MA326_2

Beispiel 3:

Stellen Sie in der Gauß'schen Zahlenebene dar:

**gegeben:**

$$z_1 = 5j^2$$

$$z_2 = 4j^3$$

$$z_3 = 3j^4$$

$$z_4 = -\frac{1}{2j}$$

Lösung:

$$z_1 = 5j^2 = -5$$

$$z_2 = 4j^3 = -4j$$

$$z_3 = 3j^4 = 3$$

$$z_4 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-j) = \frac{j}{2}$$

Bild MA326_3

Beispiel 4: (Studenten)

Gegeben sind die unteren zwei komplexen Zahlen z_1 und z_2 . Die angegebenen mathematischen Operationen sind auszuführen. Die Ausgangszahlen und das Ergebnis sind für jeden Unterpunkt in jeweils eine Gauß'sche Zahlenebene einzutragen:

gegeben: $z_1 = 4 + j3$ $z_2 = 1.5 \cdot e^{-j60^\circ}$

- gesucht:**
- a) Umformung in die jeweils andere Form $z_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi}$, $z_2 = a_2 + jb_2$
 - b) $z_3 = z_1 + z_2$
 - c) $z_4 = -z_2$ $z_5 = z_1 - z_2$
 - d) $z_6 = z_1^*$ $z_7 = z_2^*$
 - e) $z_8 = z_1 \cdot z_2$ (2 Methoden)
 - f) $z_9 = 1/z_1$ (2 Methoden, 2 Zahlenebene)
 - g) $z_{10} = z_1/z_2$

a) $r_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ $\varphi_1 = \arctan \frac{3}{4} = 36.87^\circ$

$z_1 = 5 \cdot e^{+j36.87^\circ} = 5/\underline{36.87^\circ} = 5/\underline{0.6435}$

$z_2 = 1.5 \cdot [\cos(-60^\circ) + j \sin(-60^\circ)] = 0.75 - j1.299$

b) $z_3 = z_1 + z_2 = (4+j3) + (0.75 - j1.99) = 4.75 + j1.701$

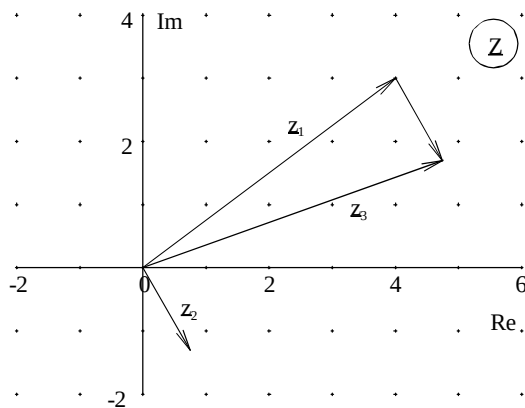


Bild MA326_4B

c)
$$\underline{z}_4 = -(0.75 - j1.299) = -0.75 + j1.299 = 1.5/\underline{120^\circ}$$

$$\underline{z}_5 = \underline{z}_1 - \underline{z}_2 = (4 + j3) - (0.75 - j1.299) = (4 - 0.75) + j[3 - (-1.299)]$$

$$\underline{z}_5 = 3.25 + j4.299 = 5.389/\underline{52.91^\circ}$$

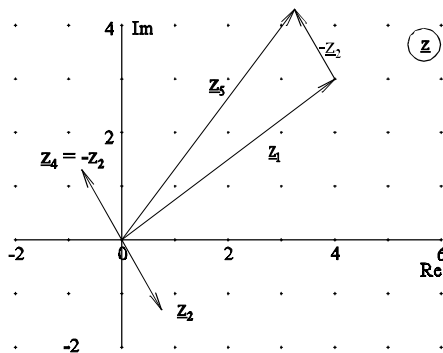


Bild MA326_4C

d)
$$\underline{z}_6 = \underline{z}_1^* = (4 + j3)^* = 4 - j3 = (5/\underline{36.87^\circ})^* = 5/\underline{-36.87^\circ}$$

$$\underline{z}_7 = \underline{z}_2^* = (0.75 - j1.299)^* = 0.75 + j1.299 = (1.5/\underline{-60^\circ})^* = 1.5/\underline{60^\circ}$$

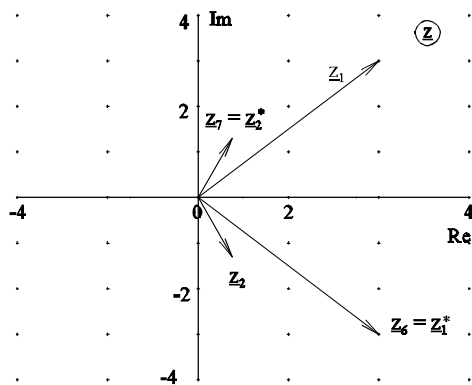


Bild MA326_4D

e)
$$\underline{z}_8 = \underline{z}_1^* \underline{z}_2 = (4 + j3)(0.75 - j1.299) = 4 \cdot 0.75 + j3 \cdot 0.75 - j4 \cdot 1.299 + 3 \cdot 1.299$$

$$\underline{z}_8 = 3 + j2.25 - j5.196 + 3.897$$

$$\underline{z}_8 = 6.897 - j2.946$$

$$\underline{z}_8 = 5/\underline{36.87^\circ} \cdot 1.5/\underline{-60^\circ} = 5 \cdot 1.5/\underline{36.87^\circ - 60^\circ}$$

$$\underline{z}_8 = 7.5/\underline{-23.13^\circ} = 6.897 - j2.946$$

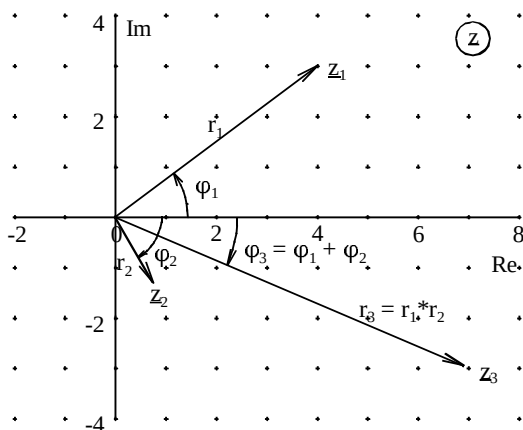


Bild MA326_4E

$$f) \quad z_9 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{5 * e^{j36.87^\circ}} = 0.2 * e^{-36.87^\circ} = 0.16 - j0.12$$

$$z_9 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{4 + j3} * \frac{4 - j3}{4 - j3} = \frac{4 - j3}{16 + 9} = 0.16 - j0.12$$

$$z_9 = 0.2 * e^{-36.87^\circ}$$

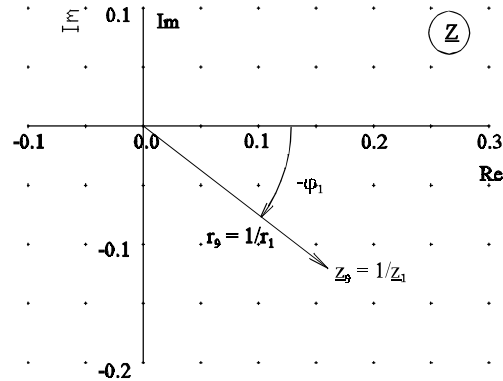
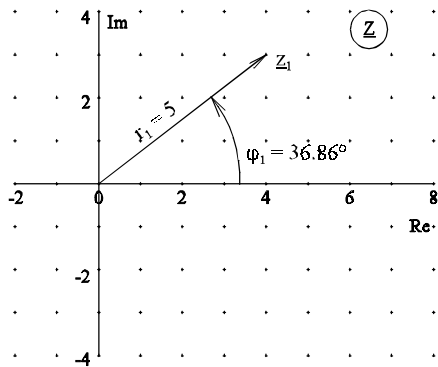


Bild MA326_4F

$$g) \quad z_{10} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{5 * e^{j36.87^\circ}}{1.5 * e^{-j60^\circ}} = \frac{5}{1.5} * e^{j[36.87^\circ - (-60^\circ)]} = 3.333 * e^{96.87^\circ}$$

$$z_{10} = \frac{4 + j3}{0.75 - j1.299} * \frac{0.75 + j1.299}{0.75 + j1.299} = \frac{4 * 0.75 + j3 * 0.75 + j4 * 1.299 - 3 * 1.299}{(0.75)^2 + (1.299)^2}$$

$$z_{10} = \frac{-0.897 + j7.446}{2.25} = 0.3987 + j3.309$$

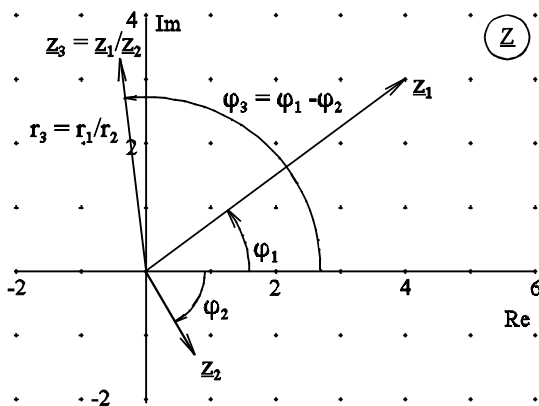


Bild MA326_4G

3.3. Potenzen komplexer Zahlen

Potenzieren, wie auch Multiplizieren, Dividieren und Invertieren wird am besten in Exponential-Form ausgeführt.

Allgemein: $z_1^n = (r_1 * e^{j\varphi_1})^n$

$$z_1^n = r_1^n * (e^{j\varphi_1})^n$$

$$z_1^n = r_1^n * e^{j\varphi_1 * n}$$

Eine Zahl wird potenziert, indem der Betrag mit dem Exponenten potenziert wird und der Winkel mit dem Exponenten multipliziert wird.

Beispiel:

Die Zahlen $z_k = (1.1 * e^{j30^\circ})^k$, $k = 1 \dots 11$ sind in der komplexen Ebene darzustellen.

$$z_1 = 1.1 * \underline{30^\circ}$$

$$z_2 = 1.1^2 * \underline{30^\circ * 2} = 1.21 * \underline{60^\circ}$$

$$z_3 = 1.1^3 * \underline{30^\circ * 3} = 1.331 * \underline{90^\circ}$$

$$z_4 = 1.1^4 * \underline{30^\circ * 4} = 1.464 * \underline{120^\circ}$$

$$z_5 = 1.1^5 * \underline{30^\circ * 5} = 1.611 * \underline{150^\circ}$$

$$z_6 = 1.1^6 * \underline{30^\circ * 6} = 1.772 * \underline{180^\circ}$$

$$z_7 = 1.1^7 * \underline{30^\circ * 7} = 1.949 * \underline{210^\circ}$$

$$z_8 = 1.1^8 * \underline{30^\circ * 8} = 2.144 * \underline{240^\circ}$$

$$z_9 = 1.1^9 * \underline{30^\circ * 9} = 2.358 * \underline{-90^\circ}$$

$$z_{10} = 1.1^{10} * \underline{30^\circ * 10} = 2.594 * \underline{-60^\circ}$$

$$z_{11} = 1.1^{11} * \underline{30^\circ * 11} = 2.853 * \underline{-30^\circ}$$

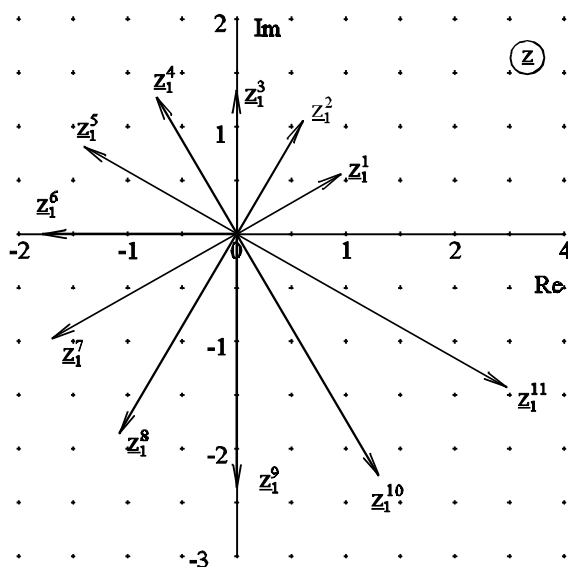


Bild MA33A

3.4. Wurzeln aus komplexen Zahlen

Als Vorbetrachtung eine auf den ersten Blick triviale Frage: Welchen Winkel hat die rein reelle Zahl 1 in der komplexen Ebene? Die erste Antwort ist sehr schnell parat: Der Winkel Null:

$$1 = 1 * e^{j0^\circ}$$

Aber auch die folgenden Ausdrücke ergeben die Zahl 1:

$$\begin{aligned} e^{j360^\circ} &= 1 \\ e^{j720^\circ} &= 1 \\ e^{j360^\circ} &= 1 \end{aligned}$$

Alle ganzen Vielfachen von 360° ergeben als e hoch j den Wert 1.

$$e^{jn * 360^\circ} = 1 \quad n - \text{ganze Zahl}$$

Beispiel 1: $\sqrt{4} = \pm 2$

Beispiel 2: $z_1 = 4j = e^{j90^\circ}$

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{4e^{j90^\circ}} = (4 * e^{j90^\circ})^{1/2} = 4^{1/2} * (e^{j90^\circ})^{1/2} = \sqrt{4} * e^{j\frac{90^\circ}{2}} = 2/\underline{45^\circ}$$

aber auch, wenn die obere Zahl z_1 mit 1 multipliziert wird bleibt z_1 gleich z_1 :

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1 * 1 = 4 * e^{j90^\circ} * e^{j360^\circ} = 4 * e^{j450^\circ} \\ \sqrt{z_1} &= \sqrt{4} * e^{j\frac{450^\circ}{2}} = 2/\underline{225^\circ} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich noch eine zweite Lösung. Versuch eine dritte Lösung zu finden:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1 * 1 = 4 * e^{j90^\circ} * e^{j720^\circ} = 4 * e^{j810^\circ} \\ z_1 &= 2 * e^{j405^\circ} \end{aligned}$$

405° entsprechen wieder der ersten Lösung mit 45° . Bei der 2. Wurzel ergeben sich somit 2 Lösungen, siehe auch Bild MA34A.

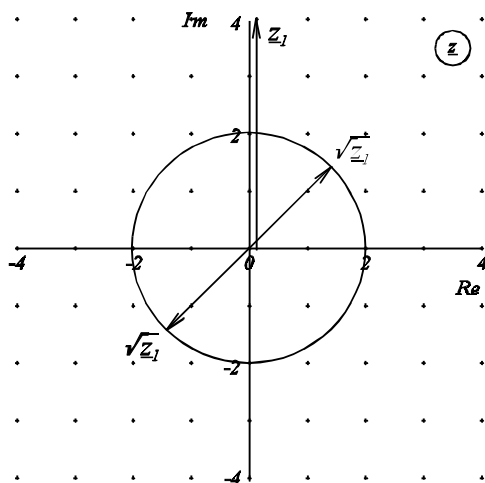


Bild MA34A

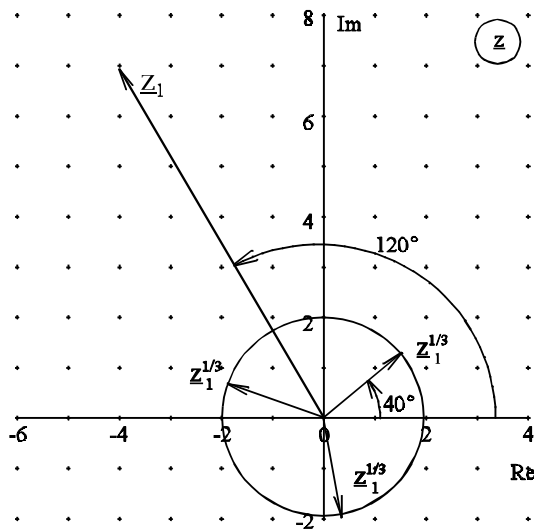
Beispiel 3: $z_1 = 8 * e^{j120^\circ} = 8 * e^{j480^\circ} = 8 * e^{j840^\circ}$

$$\sqrt[3]{z_1} = z_1^{1/3} = 8^{1/3} * (e^{j120^\circ})^{1/3} = 2 * e^{j40^\circ}$$

$$\sqrt[3]{z_1} = z_1^{1/3} = 8^{1/3} * (e^{j480^\circ})^{1/3} = 2 * e^{j160^\circ}$$

$$\sqrt[3]{z_1} = z_1^{1/3} = 8^{1/3} * (e^{j840^\circ})^{1/3} = 2 * e^{j280^\circ}$$

$$\sqrt{z_2} = \sqrt[3]{z_1} \quad r_1 = 8 \quad r_2 = \sqrt[3]{8} = 2$$



$$z_2 = \sqrt[3]{z_1}$$

$$r_1 = 8$$

$$r_2 = \sqrt[3]{8} = 2$$

Bild MA34B

Mathematische Ableitung:

$$1 = e^{jk360^\circ} \quad z_1 = r_1 * e^{j\varphi_1} = z_1 * 1 = r_1 * e^{j(\varphi_1 + k * 360^\circ)}$$

$$z_2 = \sqrt[n]{z_1} = z_1^{1/n} = \left[r_1 * e^{j(\varphi_1 + k * 360^\circ)} \right]^{1/n}$$

$$z_2 = r_1^{1/n} * \left[e^{j(\varphi_1 + k * 360^\circ)} \right]^{1/n}$$

$$z_1 = \sqrt[n]{r_1} * \left/ \frac{\varphi_1}{n} + \frac{k}{n} 360^\circ \right/$$

Fazit: Bei der n-ten Wurzel ergeben sich n Lösungen. Der Betrag ergibt sich aus der n-ten Wurzel des Betrages. Den Winkel einer Lösung erhält man durch dividieren des Winkels durch n. Die anderen Lösungen liegen auf einen Kreis verteilt im Abstand von $360^\circ/n$, siehe auch Bilder MA34A und MA34B.

Beispiel 4:

Berechnen Sie alle 5. Wurzeln der Zahl $z_1 = 1 + j2$.

Lösung:

$$z_A = \sqrt{1^2 + 2^2} * e^{j \arctan \frac{2}{1}} = 2.236 * e^{j63.43^\circ}$$

$$z_1 = \sqrt[5]{z_A} = \sqrt[5]{2.236} * e^{j63.43^\circ/5} = 1.175 * e^{j12.69^\circ} = 1.175 / \underline{12.69^\circ}$$

$$z_2 = \sqrt[5]{z_A} = z_1 * \underline{360^\circ/5} = 1.175 / \underline{12.69^\circ + 72^\circ} = 1.175 / \underline{84.69^\circ}$$

$$z_3 = \sqrt[5]{z_A} = z_1 * \underline{72^\circ * 2} = 1.175 / \underline{12.69^\circ + 144^\circ} = 1.175 / \underline{156.69^\circ}$$

$$z_4 = \sqrt[5]{z_A} = z_1 * \underline{72^\circ * 3} = 1.175 / \underline{12.69^\circ + 216^\circ} = 1.175 / \underline{228.69^\circ}$$

$$z_5 = \sqrt[5]{z_A} = z_1 * \underline{72^\circ * 4} = 1.175 / \underline{12.69^\circ + 288^\circ} = 1.175 / \underline{300.69^\circ}$$

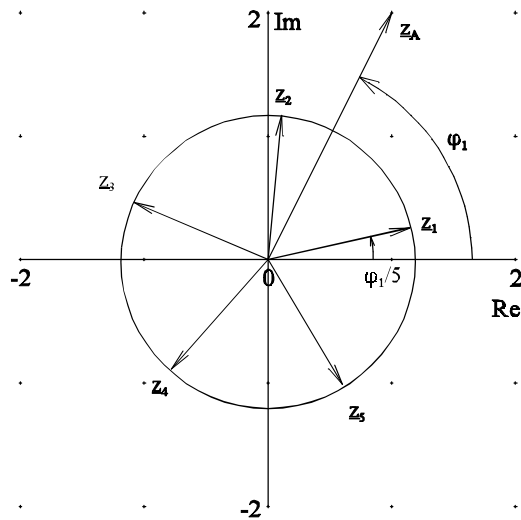


Bild MA34C

Beispiel 5: (Studenten)

gegeben: $z = \sqrt[4]{4j}$

gesucht: Darstellung in komplexer Ebene

3.5. Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl

$$\underline{z} = r * e^{j\varphi} \qquad 1 = e^{jk360^\circ} \qquad k \text{ ganzzahlig}$$

$$\underline{z} = r * e^{j\varphi} * 1 = r * e^{j\varphi} * e^{jk360^\circ} = r * e^{j(\varphi + k360^\circ)}$$

$$\ln(\underline{z}) = \ln[r * e^{j(\varphi + k360^\circ)}] = \ln(r) + \ln[e^{j(\varphi + k360^\circ)}]$$

$$\ln(\underline{z}) = \ln(r) + j(\varphi + k360^\circ) = \ln(r) + j(\varphi + k2\pi)$$

Der Logarithmus einer komplexen Zahl wird wie folgt gebildet: Der Realteil ergibt sich als der Logarithmus des Betrages. Der Imaginärteil ist der Winkel der Ausgangszahl. Wegen der nicht eindeutigen Winkellage, ist der Logarithmus nicht eindeutig. Ganze Vielfache von 2π können als Imaginärteil addiert werden.

Achtung: Hier ist auf Bogenmaß zu achten!!!

Beispiel:

gegeben: $\underline{z}_1 = 20 + j30$

gesucht: $\ln(\underline{z}_1)$ Darstellung in der komplexen Ebene

$$\underline{z}_1 = \sqrt{20^2 + 30^2} / \arctan\left(\frac{30}{20}\right) = 36.06 / 0.9828$$

Achtung: Bogenmaß!!!

$$\ln(\underline{z}_1) = \ln(36.06) + j(0.9829 + k2\pi) = 3.585 + j(0.9829 + k2\pi)$$

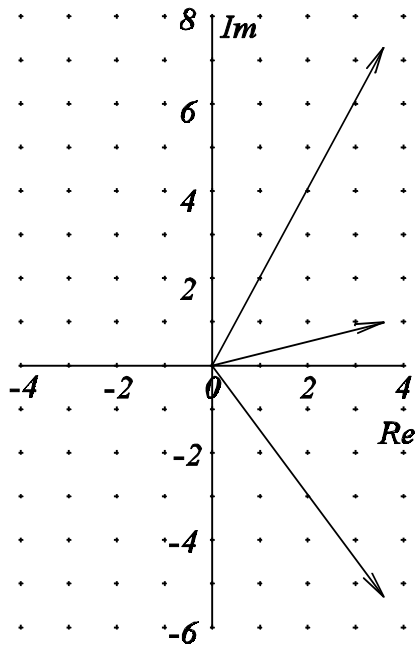


Bild MA35A

3.6. e-Funktion komplexer Argumente

$$\underline{z} = a + jb$$

$$\underline{z}_1 = \exp(\underline{z}) = e^{(a+jb)} = e^a * e^{jb}$$

$$\Rightarrow \quad r_1 = e^a \quad \varphi_1 = b$$

Die Exponential-Funktion (e-Funktion) mit komplexen Argumenten wird wie folgt gebildet: Der Betrag ist die e-Funktion des Realteiles. Der Winkel gleich ist gleich dem Imaginärteil.

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 > 1$$

$$a < 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 < 1$$

Beispiel 1:

$$e^{(3+j2)} = e^3 * e^{j2} = 20.086 * [\cos(2) + j\sin(2)]$$

$$e^{(3+j2)} = -8.359 + j18.264$$

Beispiel 2:

$$e^{(-0.5+j\pi)} = e^{-0.5} * e^{j\pi} = e^{-0.5}(-1) = -0.6065$$

3.7. Zusammenfassung der Rechenregeln der komplexen Rechnung

Definition $j^2 = -1$ $j = +\sqrt{-1}$

Darstellungsarten $\underline{z} = a + jb = r \cdot e^{j\varphi} = r/\varphi$

Umrechnung Betrag und Phase nach Komponenten

$$\underline{z} = r \cdot [\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)] \quad a = r \cdot \cos(\varphi) \quad b = r \cdot \sin(\varphi)$$

Umrechnung Komponenten nach Betrag und Phase

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\text{Realteil})^2 + (\text{Imaginärteil})^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad a > 0$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 180^\circ \quad a < 0$$

Euler-Form $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$

Addition $(a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$

Negative komplexe Zahlen $-(a + jb) = -a - jb$

Subtraktion $(a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$

Multiplikation $(r_1/\varphi_1) \cdot (r_2/\varphi_2) = r_1 \cdot r_2 / \varphi_1 + \varphi_2$

Konjugiert komplexe Zahlen $(r/\varphi)^* = r/-\varphi$ oder $(a + jb)^* = (a - jb)$

Inversion $\frac{1}{r_1/\varphi_1} = \frac{1}{r_1} / -\varphi_1$

Division $\frac{r_1/\varphi_1}{r_2/\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} / \varphi_1 - \varphi_2$

Potenzen $(r/\varphi)^n = r^n / \varphi \cdot n$

Wurzeln $\sqrt[n]{r_1/\varphi_1} = \sqrt[n]{r_1} / \frac{\varphi_1}{n} + \frac{k \cdot 360^\circ}{n}$ $k = 0 \dots n-1$

Natürlicher Logarithmus $\ln(r/\varphi) = \ln(r) + j(\varphi + 2\pi k)$ $k = -\infty \dots +\infty$

e-Funktion $\exp(a+jb) = e^{a} \cdot e^{jb}$

3.8. Ortskurven

3.8.1. Einleitung

Was ist eine Ortskurve

Definition: Eine Ortskurve ist eine komplexe Funktion, die in Abhängigkeit einer reellen Variablen in der Gauß'schen Zahlenebene dargestellt wird.

In der Darstellung werden die Spitzen der komplexen Zeiger miteinander verbunden. Die reelle Variable wird als Parameter an einigen markanten Stellen als Zahlenwert in die Gauß'sche Zahlenebene eingetragen. Welchen Formelbuchstaben hat der reelle Parameter? Antwort: beliebig.

2. Semester, EG II

$$\omega = 2\pi f$$

1. Semester, MA I

t

Der Buchstabe t soll auch in MA I als Parameter für Ortskurven verwendet werden. In Bild MA3811A ist ein Beispiel einer Ortskurve dargestellt.

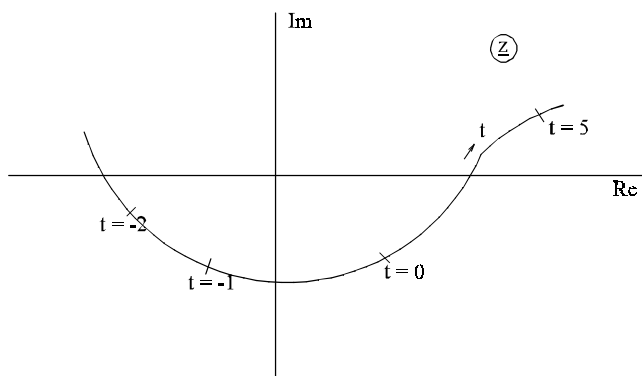


Bild MA3811A: Beispiel einer Ortskurve

Ein Pfeil in Richtung zunehmender t-Werte wird üblicherweise zur Kennzeichnung größer werdender t-Werte verwendet.

Anwendung der Ortskurven

Ortskurven werden, wie die Definition es schon aussagt, zur grafischen Darstellung einer komplexen Größe benutzt, die von einer reellen Variablen abhängig ist.

Anwendung in der komplexen Rechnung für Wechselstrom-Kreise im 2. Semester.

Beispiel:

(In Vorgriff auf das 2. Semester) Der komplexe Widerstand der Reihenschaltung einer Induktivität L und eines Widerstandes R hat folgenden komplexen Ausdruck in Abhängigkeit der reellen Frequenz f:

$$\underline{Z} = R + j2\pi fL$$

Nach dem ohmschen Gesetz läßt sich der komplexe Strom berechnen:

$$I = \frac{U}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{R + j2\pi fL}$$

Die physikalische Interpretation erfolgt im 2. Semester. Die mathematischen Grundlagen zur Konstruktion solcher und ähnlicher Ortskurven sollen in diesem Kapitel 3.8 erfolgen.

3.8.2. Komplexe Gerade

Mathematische Definition:

$$\underline{z}(t) = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 \cdot t$$

$$-\infty < t < +\infty$$

Zu einer komplexen Zahl wird das reelle Vielfache einer anderen komplexen Zahl addiert. Was ist das? Am besten sieht man dieses anhand der komplexen Ebene (Gauß'sche Zahlenebene). Komplexe Zahlen können grafisch addiert werden. Addiert man in Bild MA382A zu $\underline{z}_1$ Vielfache von $\underline{z}_2$ ergeben die Spitzen der Ergebnisse die dargestellte Gerade.

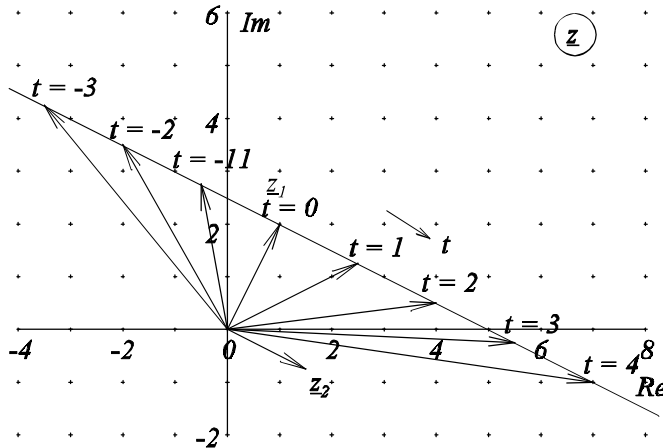


Bild MA382A: Komplexe Gerade

Interpretation: Die Zahl $\underline{z}_1$ stellt einen Punkt der komplexen Geraden dar. Die Richtung ist durch die Zahl $\underline{z}_2$ vorgegeben.

Beispiel 1:

gegeben: $\underline{z}(t) = 4 + j t$

gesucht: komplexe Gerade
 $\underline{z}_1 = 4$ (ein Punkt der Geraden)
 $\underline{z}_2 = j$ (Richtung im imaginären Richtung)

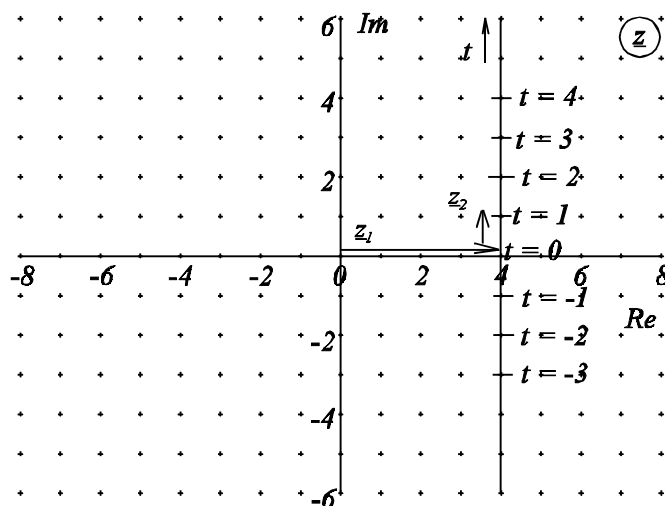


Bild MA382B

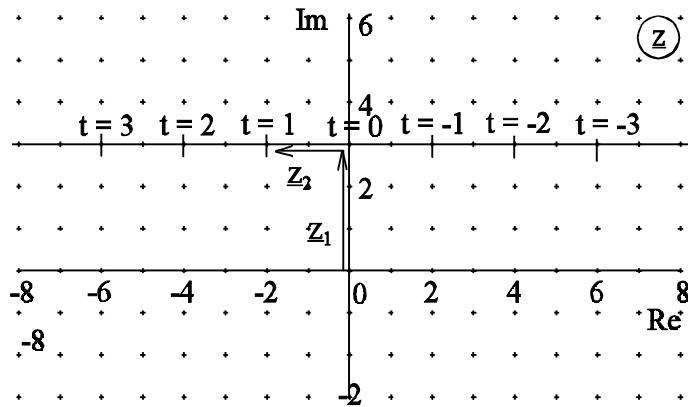
Beispiel 2:**gegeben:** $\underline{z}(t) = 3j - 2t$ **gesucht:** komplexe Gerade $\underline{z}_1 = 3j$ (ein Punkt der Geraden) $\underline{z}_2 = -2$ (Richtung in negativer Richtung)

Bild MA382C

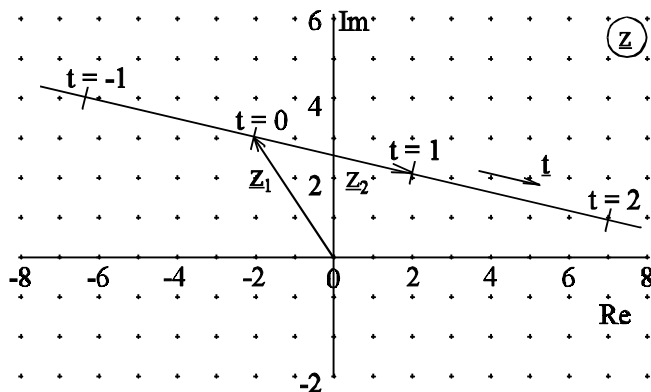
Beispiel 3:**gegeben:** $\underline{z}(t) = (-2 + j3) + (4-j)t$ **gesucht:** komplexe Gerade $\underline{z}_1 = -2 + j3$ $\underline{z}_2 = 4 - j$ 

Bild MA382D

3.8.3. Inversion der komplexen Geraden

Die invertierte komplexe Ortskurve wird zur Unterscheidung der nicht invertierten häufig mit $\underline{w}(t)$ bezeichnet:

$$\underline{w}(t) = \frac{1}{\underline{z}(t)} = \frac{1}{\underline{z}_1 + \underline{z}_2 * t}$$

Bevor die allgemeine Form der invertierten komplexen Geraden geklärt wird, soll anhand von einfachen Beispielen die Form des Inversions-Ergebnisses untersucht werden.

Beispiel 1:**gegeben:** $\underline{z}(t) = 1 + j t$ **gesucht:** $w(t) = \underline{z}^{-1}(t)$ als Ortskurve

$$\underline{w}(t) = \frac{1}{1 + jt}$$

Um Real- und Imaginärteil getrennt zu erhalten, wird der obere Ausdruck konjugiert komplex erweitert und umgeformt:

$$\underline{w}(t) = \frac{1}{1 + jt} \frac{1 - jt}{1 - jt} = \frac{1 - jt}{1 + t^2} = \frac{1}{1 + t^2} - j \frac{t}{1 + t^2}$$

Um die Ortskurve als analytische Funktion, z.B. $y = f(x)$, zu erhalten, muß der Parameter t eliminiert werden. Dazu erfolgt der folgende Ansatz, durch Aufspaltung von $\underline{w}(t)$ in Realteil $x(t)$ und Imaginärteil $y(t)$:

$$\underline{w}(t) = x(t) + jy(t)$$

Der Vergleich der oberen beiden Gleichungen liefert:

$$x(t) = \frac{1}{1 + t^2} = x \qquad y(t) = \frac{-t}{1 + t^2} = y$$

Die Gleichung mit x wird nach $1 + t^2$ bzw. t aufgelöst und in die Gleichung mit y eingesetzt:

$$1 + t^2 = \frac{1}{x} \qquad t^2 = \frac{1}{x} - 1$$

$$y^2 = \frac{t^2}{(1 + t^2)^2} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = x - x^2$$

$$y^2 + x^2 - x = 0$$

Obere Gleichung muß quadratisch ergänzt werden:

$$y^2 + x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Aus Kap. 2.2.4.3.5 ist bekannt, daß die obere Gleichung ein verschobener Kreis ist, mit den Mittelpunkt-Koordinaten $x_m = \frac{1}{2}$, $y_m = 0$ und dem Radius $r = \frac{1}{2}$, siehe Bild MA383A.

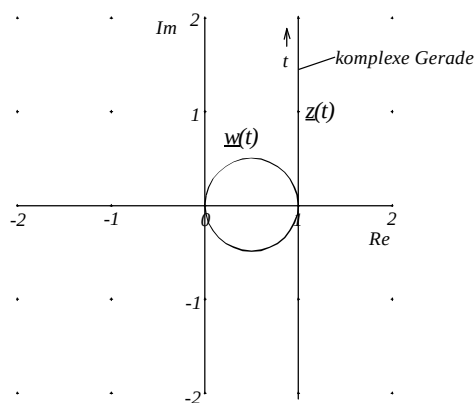


Bild MA383A

Folgerung: Die im Beispiel 1 invertierte Gerade ergibt einen Kreis als Ortskurve.

Beispiel 2:**gegeben:** $\underline{z}(t) = j + t$ **gesucht:** $\underline{w}(t) = \underline{z}^{-1}(t)$ als Ortskurve

Hier wird das gleiche Prinzip wie bei Beispiel 1 angewandt: Der Parameter t wird eliminiert. Durch Einsetzen und Umformen ergibt sich eine interpretierbare Kurvenform:

$$\underline{w}(t) = \frac{1}{\underline{z}(t)} = \frac{1}{t+j} \cdot \frac{t-j}{t-j} = \frac{t-j}{t^2+1} = \frac{t}{t^2+1} - j \frac{1}{t^2+1} = x + jy$$

$$x(t) = \frac{t}{t^2+1} \qquad y(t) = \frac{-1}{t^2+1}$$

$$t^2+1 = -\frac{1}{y} \qquad t^2 = -\frac{1}{y} - 1$$

$$x^2 = \frac{t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{-\frac{1}{y} - 1}{\frac{1}{y^2}} = -y - y^2$$

$$x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Das Ergebnis ist wieder ein verschobener Kreis, mit dem Radius $r = \frac{1}{2}$ und mit den Mittelpunkt-Koordinaten $x_m = 0$ und $y_m = -\frac{1}{2}$, siehe Bild MA383B.

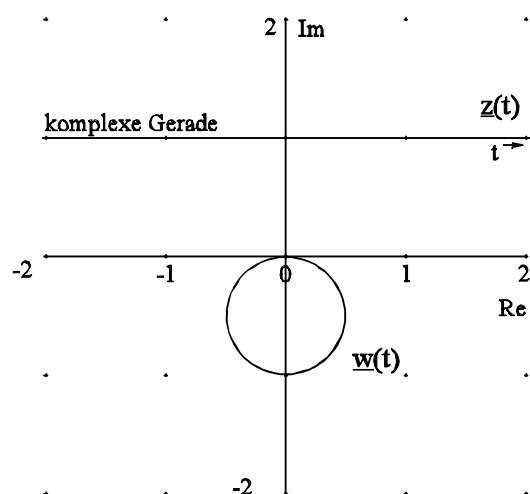


Bild MA383B

Beispiel 3:**gegeben:** $\underline{z}(t) = (1 + j) + t(1 - j)$ **gesucht:** $\underline{w}(t) = \underline{z}^{-1}(t)$ als Ortskurve**Lösungsweg:** Der gleiche als bei Beispiel 1 und 2:

$$\underline{z}(t) = (1 + t) + j(1 - t)$$

$$\underline{w}(t) = \frac{1}{(1 + t) + j(1 - t)} * \frac{(1 + t) - j(1 - t)}{(1 + t) - j(1 - t)} = \frac{(1 + t) - j(1 - t)}{(1 + t)^2 + (1 - t)^2} = \frac{1}{2} * \frac{1 + t}{1 + t^2} + j \frac{1 - t}{1 + t^2}$$

$$x = \frac{1}{2} * \frac{1 + t}{1 + t^2} \quad y = \frac{1}{2} * \frac{t - 1}{1 + t^2}$$

$$x - y = \frac{1}{1 + t^2} \quad \Rightarrow \quad 1 + t^2 = \frac{1}{x - y} \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{1}{x - y} - 1$$

$$x + y = \frac{t}{1 + t^2} \quad \Rightarrow \quad (x + y)^2 = \frac{t^2}{(1 + t^2)^2}$$

$$(x + y)^2 = \frac{\frac{1}{x - y} - 1}{\left(\frac{1}{x - y}\right)^2} = (x - y) - (x - y)^2$$

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 - x + y = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 - x + y = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} + y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^2$$

Obere Gleichung ist wieder ein verschobener Kreis mit den Daten:

$$x_m = \frac{1}{4} \quad y_m = -\frac{1}{4} \quad r = \sqrt{\frac{1}{8}}$$

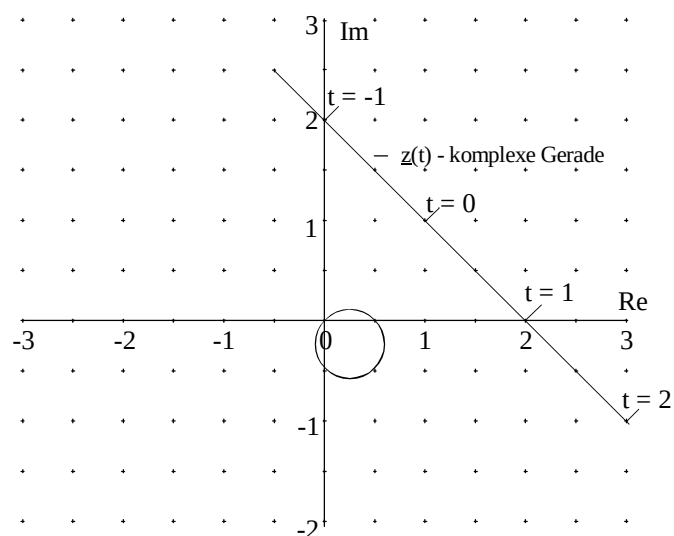


Bild MA383C

Allgemeine Inversion der komplexen Geraden, nicht durch Null

Mit Hilfe der Rechenregeln der komplexen Rechnung und den vorigen drei Beispielen soll versucht werden, Konstruktions-Hinweise für die Inversion einer komplexen Geraden zu erhalten.

Aus den vorgestellten drei Beispielen (Bilder MA383A bis MA383C) kann man feststellen: Die Inversion der komplexen Geraden nicht durch Null ergibt einen Kreis durch Null.

Zur Lage des Kreises

- Ein Punkt des Kreises ist der Nullpunkt, weil für $t \rightarrow \infty$ die Inversion Null ergibt.
- Ein zweiter markanter Punkt ist die weiteste Entfernung des Kreises vom Nullpunkt, also ein Durchmesser, der im folgenden als Durchmesser-Zeiger $\underline{w}_D$ bezeichnet wird. Zur Erinnerung: Die Inversion einer Zahl erfolgt, indem der Betrag invertiert und der Winkel negiert wird. Durch Invertieren wird der dichteste Abstand zum Nullpunkt zur weitesten Entfernung zum Nullpunkt. Der Punkt der dichtesten Entfernung zur komplexen Geraden wird auf den Durchmesser-Zeiger abgebildet.

Schema zum Invertieren einer komplexen Geraden nicht durch Null

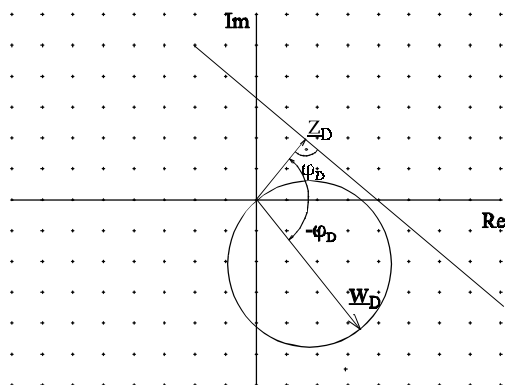
- Eine Gerade nicht durch Null ergibt invertiert einen Kreis.
- Ein Punkt des Kreises ist der Nullpunkt $\underline{w}(t \rightarrow \infty) = 0$.
- Punkt der komplexen Geraden mit der dichtesten Entfernung zum Nullpunkt suchen $\underline{z}_D = r_D * e^{j\varphi_D}$.

Grafisch erfolgt dieses mit Lot-Bildung auf der Geraden.

- Der Durchmesser-Zeiger des Kreises ergibt sich durch Invertieren von $\underline{z}_D$:

$$\underline{w}_D = \underline{z}_D^{-1} = \frac{1}{r_D} * e^{-j\varphi_D}$$

- Symbolische Darstellung siehe Bild MA383D.

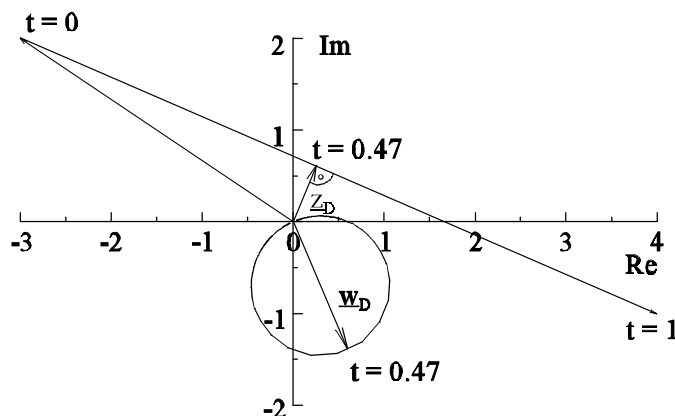


$$\underline{z}_D = r_D * e^{j\varphi_D}$$

$$\underline{w}_D = \frac{1}{r_D} * e^{-j\varphi_D}$$

Bild MA383D

Beispiel: Die komplexe Gerade $\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 * t = (-3 + j2) + t(7 - j3)$ ist halbgrafisch zu invertieren.



analytisch:

$$\begin{aligned} \underline{z} &= (-3+7t) + j(2-3t) \\ \underline{z}^2 &= (-3+7t)^2 + (2-3t)^2 \\ \underline{z}^2 &= 9 - 42t + 49t^2 + 4 - 12t + 9t^2 \\ \underline{z}^2 &= 58t^2 - 54t + 13 \end{aligned}$$

$$\frac{d\underline{z}^2}{dt} = 116t - 54 = 0$$

$$t_{\min} = \frac{54}{116} = 0.4655$$

$$\underline{z}_{\min} = (-3+j2) + t_{\min}(7-j3) = 0.6565 / 66.81^\circ$$

$$\underline{w}_{\max} = 1.523 / -66.81^\circ$$

grafisch:

1. Lot auf Gerade

2. $r_D = 0.6$

3. $\varphi_D = 64^\circ$

$$4. \underline{w}_D = \frac{1}{0.6 * e^{-j64^\circ}} = 1.66 * e^{-j64^\circ}$$

Bild MA383E

Allgemeine Inversion der komplexen Geraden durch Null

Die Form der komplexen Geraden durch Null lautet:

$$\underline{z}(t) = \underline{z}_1 * t \quad -\infty < t < +\infty$$

Für den Wert $t = 0$ passiert die Gerade den Wert $\underline{z} = 0$.

Die Inversion ergibt:

$$\underline{w}(t) = \frac{1}{\underline{z}(t)} = \frac{1}{\underline{z}_1 * t} = \frac{1}{\underline{z}_1} * \frac{1}{t}$$

Substituiert man $\underline{z}_1$ und t

$$\frac{1}{\underline{z}_1} = \underline{z}_2 \quad \frac{1}{t} = s$$

erhält man:

$$\underline{w}(t) = \underline{z}_2 * s \quad -\infty < s < +\infty$$

Der obere Ausdruck $\underline{w}(t)$ stellt wiederum eine komplexe Gerade durch Null dar. Wie ist nun die Lage dieser Geraden. Dazu soll die Diskussion anhand von Bild MA383F erfolgen. Zunächst wird die komplexe Gerade $\underline{z}(t)$ gezeichnet. Die Richtung ist vom Nullpunkt zu $\underline{z}_1$. Die t -Skalierung erfolgt in äquidistanten Abständen von $\underline{z}_1$.

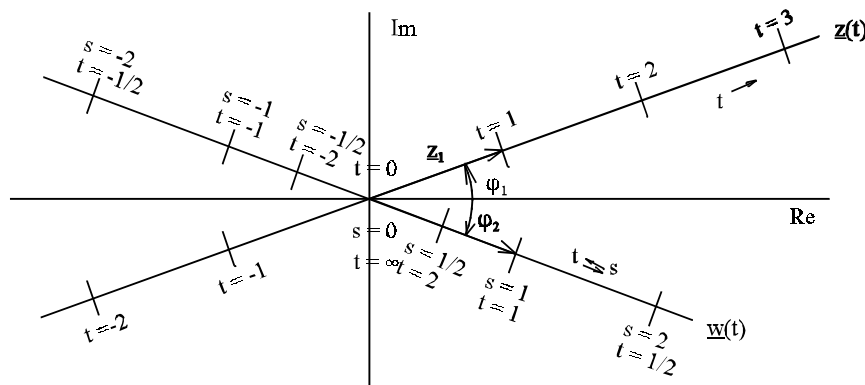


Bild MA383F

Zur Konstruktion von $\underline{w}(t)$ muß ein Punkt von $\underline{w}(t)$ berechnet werden. Um den Punkt für $t = 1$ bzw $s = 1$ zu erhalten, wird $\underline{z}_1$ invertiert.

$$\underline{z}_1 = r_1 * e^{j\varphi_1} \quad \underline{z}_2 = \frac{1}{\underline{z}_1} = \frac{1}{r_1} * e^{-j\varphi_1}$$

Die Konstruktion von $\underline{w}(t)$ erfolgt in analoger Weise als die für $\underline{z}(t)$, erstmal mit dem Parameter s . Die Gerade $\underline{w}(t)$ hat durch Invertieren die negative Winkelrichtung ($\varphi_2 = -\varphi_1$) von der Geraden von $\underline{z}(t)$. Für $s = 1$ ergibt sich der Betrag $1/r_1$. Die Skalierung in s ist linear. Die Parameter t der Original-Funktion ergeben sich durch $1/s$. Durch Invertieren ist die Richtung der Zunahmen von s und t unterschiedlich.

Zusammenfassung:

Eine komplexe Gerade durch Null mit linearer Teilung invertiert, ergibt wiederum eine komplexe Gerade durch Null, allerdings mit nichtlinearer Teilung.

Beispiel: (Studenten)

Die komplexe Gerade: $\underline{z}(t) = (0.15 - j0.2)t$

und dessen Inverse sind in der Gauß'schen Zahlenebene zu konstruieren.

3.8.4. Allgemeine Inversion von Kreis und Gerade

Bekannt: Gerade und Kreis invertieren ergibt entweder wieder Gerade oder Kreis.

Eselsbrücke: Bei der Inversion wird der Punkt ∞ auf Null abgebildet und umgekehrt. Ist also ein Punkt ∞ vorhanden (nur bei Geraden, nicht bei Kreisen) ergibt die Inversion den Nullpunkt. **Die Inversionskurve einer Geraden verläuft immer durch Null.** Umkehrung der Tatsache: **Eine zu invertierende Kurve durch Null (Kreis oder Gerade) ist eine Gerade.**

Zusammenfassung und Vermutung

Invertieren von	ergibt
Gerade nicht durch Null	Kreis durch Null
Gerade durch Null	Gerade durch Null
Kreis durch Null	Gerade nicht durch Null
Kreis nicht durch Null	Kreis nicht durch Null

Die Aussage "Die Inversion eines Kreises nicht durch Null ergibt einen Kreis nicht durch Null" wäre noch zu beweisen.

Die allgemeine Form von komplexen Kreisen und Geraden lautet:

$$\underline{w}(t) = \frac{\underline{z}_1 + \underline{z}_2 * t}{\underline{z}_3 + \underline{z}_4 * t}$$

Wenn jeweils eine der vier Zahlen $\underline{z}_1$ bis $\underline{z}_4$ gleich Null ist, ergeben sich Sonderfälle.

Sonderfall 1: $\underline{z}_4 = 0$

$$\underline{w}(t) = \frac{\underline{z}_1 + \underline{z}_2 * t}{\underline{z}_3} = \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_3} + \frac{\underline{z}_2}{\underline{z}_3} * t = \underline{z}_5 + \underline{z}_6 * t$$

=> eine Gerade mit linearer Teilung, nicht durch Null

Sonder-Sonderfall $\underline{z}_6 = r * \underline{z}_5$ => Gerade durch Null

Sonderfall 2: $\underline{z}_2 = 0$

$$\underline{w}(t) = \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_3 + \underline{z}_4 * t} = \frac{1}{\frac{\underline{z}_3}{\underline{z}_1} + \frac{\underline{z}_4}{\underline{z}_1} * t} = \frac{1}{\underline{z}_7 + \underline{z}_8 * t}$$

=> Inversion einer komplexen Gerade nicht durch Null ergibt einen Kreis durch Null

Sonder-Sonderfall $\underline{z}_8 = r * \underline{z}_7$ => Gerade durch Null

Sonderfall 3: $\underline{z}_3 = 0$

$$\underline{w}(t) = \frac{\underline{z}_1 + \underline{z}_2 * t}{\underline{z}_4 * t} = \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_4} \frac{1}{t} + \frac{\underline{z}_2}{\underline{z}_4} = \underline{z}_9 s + \underline{z}_{10}$$

=> Gerade nicht durch Null mit nichtlinearer Teilung

Sonder-Sonderfall $\underline{z}_{10} = r * \underline{z}_9$ => Gerade durch Null

Sonderfall 4: $\underline{z}_1 = 0$

$$\underline{w}(t) = \frac{\underline{z}_2 * t}{\underline{z}_3 + \underline{z}_4 * t} = \frac{1}{\frac{\underline{z}_3}{\underline{z}_2} * \frac{1}{t} + \frac{\underline{z}_4}{\underline{z}_2}} = \frac{1}{\underline{z}_{11} * s + \underline{z}_{12}}$$

=> Inversion einer komplexen Geraden nicht durch Null ergibt einen Kreis durch Null

Sonder- Sonderfall $\underline{z}_{12} = r * \underline{z}_{11}$ => Gerade durch Null

Allgemeiner Fall:

Für den allgemeinen Fall wird eine Polynomdivision durchgeführt:

$$\begin{aligned} (\underline{z}_2 * t + \underline{z}_1) : (\underline{z}_4 * t + \underline{z}_3) &= \frac{\underline{z}_2}{\underline{z}_4} + \frac{\underline{z}_1 - \underline{z}_3 \frac{\underline{z}_2}{\underline{z}_4}}{\underline{z}_4 * t + \underline{z}_3} \\ \frac{\underline{z}_2}{\underline{z}_4} * \underline{z}_4 * t + \underline{z}_3 \frac{\underline{z}_2}{\underline{z}_4} & \\ \underline{z}_1 - \underline{z}_3 \frac{\underline{z}_2}{\underline{z}_4} & \end{aligned}$$

$$\underline{w}(t) = \frac{\underline{z}_2}{\underline{z}_4} + \frac{1}{\frac{\underline{z}_4}{\underline{z}_1 - \frac{\underline{z}_2 \underline{z}_3}{\underline{z}_4}} t + \frac{\underline{z}_3}{\underline{z}_1 - \frac{\underline{z}_2 \underline{z}_3}{\underline{z}_4}}} = \underline{z}_{13} + \frac{1}{\underline{z}_{14} * t + \underline{z}_{15}}$$

$\underline{w}(t)$ in der allgemeinen Form ergibt sich aus der Addition einer konstanten komplexen Zahl und einem Kreis durch Null.

Allgemeine Form => ein Kreis der aus dem Nullpunkt verschoben ist.

Beispiel:

Konstruieren Sie die Ortskurve

$$\underline{w}(t) = \frac{4t + 13j}{t + 2j}$$

Polynomdivision:

$$(4t + 13j):(t + 2j) = 4 + \frac{5j}{t + 2j}$$

$$\begin{array}{r} 4t \quad 8j \\ \underline{5j} \end{array}$$

$$\underline{w}(t) = 4 + 5j \frac{1}{t + 2j}$$

Zur Konstruktion von $\underline{w}(t)$ sollen nacheinander einzelne Ortskurven betrachtet werden. Die nächste Ortskurve ergibt sich durch eine bestimmte Operation auf die vorhergehende:

$$\underline{w}_1(t) = t + 2j$$

Gerade

$$\underline{w}_2(t) = \frac{1}{\underline{w}_1(t)} = \frac{1}{t + 2j}$$

Invertieren ergibt Kreis

$$\underline{w}_3(t) = 5 * \underline{w}_2(t) = \frac{5}{t + 2j}$$

Streckung um 5

$$\underline{w}_4(t) = j * \underline{w}_3(t) = \frac{5j}{t + 2j}$$

Drehung um 90°

$$\underline{w}(t) = 4 + \underline{w}_4(t) = 4 + \frac{5j}{t + 2j}$$

Verschiebung um 4

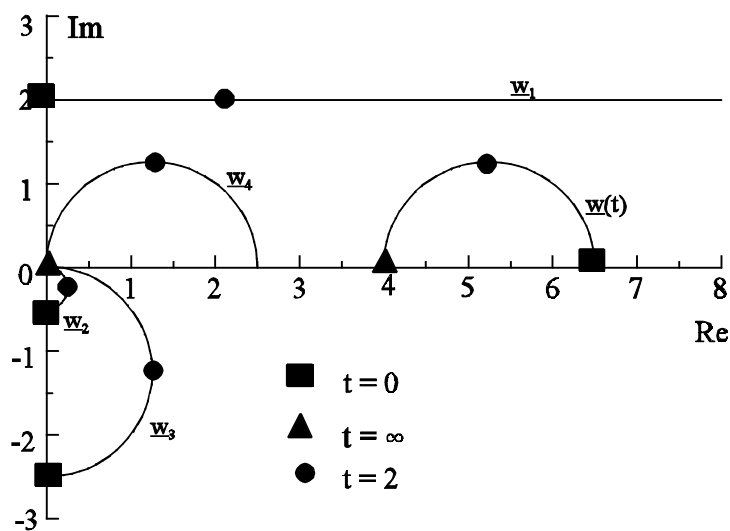


Bild MA384A

Hinweis: Die Polynomdivision muß immer für t erfolgen. D.h. Im Zähler des Bruches darf nach der Polynomdivision kein t mehr vorhanden sein.

3.8.5. Allgemeine Ortskurven

Bislang sind nur Sonderfälle von Geraden und Kreisen betrachtet worden. Wie konstruiert man allgemeine Ortskurven.

3.8.5.1. Analytische Beschreibung

Die analytische Beschreibung von Kreisen und Geraden ist möglich. Bei allgemeinen Ortskurven ist dieses nur in wenigen Sonderfällen möglich. Um das Verfahren aufzuzeigen soll hier ein Beispiel berechnet werden.

Beispiel:

$$\begin{aligned}\underline{z}(t) &= (1 + jt)^2 = 1 + 2j \cdot t - t^2 = (1 - t^2) + 2j \cdot t \\ \underline{z}(t) &= x + jy \\ \Rightarrow \quad x &= 1 - t^2 \quad y = 2t \\ t &= \frac{y}{2} \\ x &= 1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 \quad \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 - x \\ y &= \pm 2 \cdot \sqrt{1 - x}\end{aligned}$$

Die Berechnung $y = f(x)$ erfolgt wie bei allen Ortskurven: Realteil gleich x setzen, Imaginärteil gleich y setzen und den Parameter t eliminieren. Beim oberen Beispiel war die Lösung möglich. Das Ergebnis. Eine liegende Parabel nach links geöffnet, Scheitelpunkt bei $y_s = 0$ und $x_s = 1$.

3.8.5.2. Nicht analytische Konstruktion

Gegeben ist die Ortskurve $\underline{z} = f(t)$

die in der komplexen Ebene dargestellt werden soll. Da die analytische Berechnung nicht üblich ist, bleibt nur die numerische Berechnung von einigen Punkten der Ortskurve, die dann in die Zahlenebene eingetragen und verbunden werden. Wichtig ist dabei, nicht zu viele und nicht zu wenige Punkte zu berechnen, damit die Kurve skizziert werden kann. Die Punkte sollten in der Zahlenebene möglichst gleich weit voneinander entfernt liegen. Obere Aussage bedeutet nicht, daß auch die t -Wert gleich weit voneinander entfernt liegen. Schon beim Kreis ist die nichtlineare Skalierung zu beobachten.

Zur Konstruktion der Ortskurven-Skizze erstellt man sich am besten eine Tabelle. Entweder in Polarform oder in Komponenten-Form.

Ratsam ist auch, die zwei Grenzfälle $t = 0$ und $t \rightarrow \infty$ zu diskutieren.

t	$\text{Re}\{\underline{z}(t)\}$	$\text{Im}\{2(t)\}$	$r(t)$	$\varphi(t)$
t_1				
t_2				
t_3				
t_4				
...				
...				

entweder

oder

Beispiel:

Die Ortskurve

$$z(t) = \frac{10}{(1 + jt)(1 + 3jt)}$$

ist zu skizzieren.

Entschieden wird sich für die Polar-Darstellung

$$z(t) = 10 * \frac{1}{1 + jt} * \frac{1}{1 + 3jt} = z_1 * z_2 * z_3$$

$$z_1 = 10 = 10 \angle 0^\circ$$

$$z_2 = \frac{1}{1 + jt} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \angle -\arctan(t)$$

$$z_3 = \frac{1}{1 + 3jt} = \frac{1}{\sqrt{1 + (3t)^2}} \angle -\arctan(3t)$$

$$z(t) = (10 \angle 0^\circ) * \left(\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} \angle -\arctan(t) \right) * \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (3t)^2}} \angle -\arctan(3t) \right)$$

$$z(t) = \frac{10}{\sqrt{1 + t^2} \sqrt{1 + 9t^2}} \angle -\arctan(t) - \arctan(3t)$$

$$\Rightarrow r(t) = \frac{10}{\sqrt{1 + t^2} * \sqrt{1 + 9t^2}}$$

$$\varphi(t) = -\arctan(t) - \arctan(3t)$$

Prinzip der Konstruktion:

Obere Werte in einer Tabelle darstellen und in komplexe Ebene eintragen. Welche Werte von t werden gewählt:

- A] Meistens: $\Rightarrow t = 0$ und $t = \infty$
- B] aus $\sqrt{1 + t^2}$ $\Rightarrow$ Werte logarithmisch um 1
- C] aus $\sqrt{1 + (3t)^2}$ $\Rightarrow$ Werte logarithmisch um 3

A] $t = 0$ $t = \infty$

B] $t = 1, \frac{1}{2}, 2$

C] $t = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

A, B, C] $t = 0, \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 5, \infty$

t	r(t)	$\varphi(t)$
0	10	0
1/10	9.53	-22.4
1/4	7.76	-50.9
1/2	4.46	-82.9
1	2.24	-116.0
2	0.74	-144.0
5	0.13	-164.9
∞	0	-180°

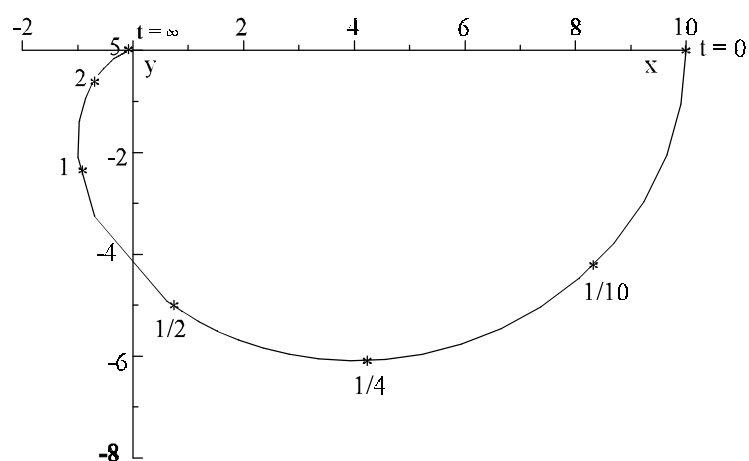


Bild MA3852

4. Analytische Geometrie

4.1. Koordinatensysteme

4.1.1. Zweidimensionale Koordinatensysteme

4.1.1.1. Rechtwinklige Koordinaten

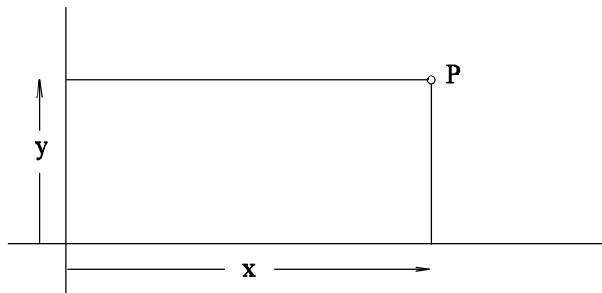
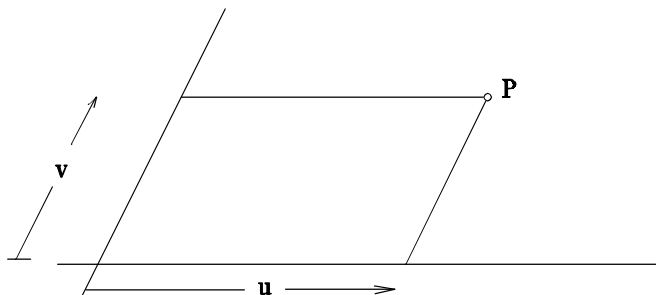


Bild MA4111A

$$P = (x, y)$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4.1.1.2. Schiefwinklige Koordinaten

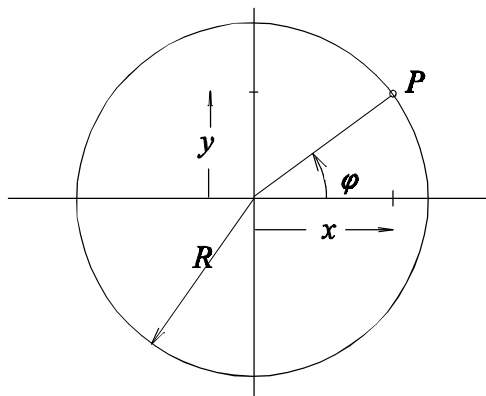


$$P = (u, v)$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Bild MA4112A

Schiefwinklige Koordinaten haben kein großes Anwendungsgebiet.

4.1.1.3. Polar-Koordinaten

$$P = (R, \varphi)$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} R \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Bild MA4113A

Umrechnung

$$x = R \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = R \cdot \sin(\varphi)$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

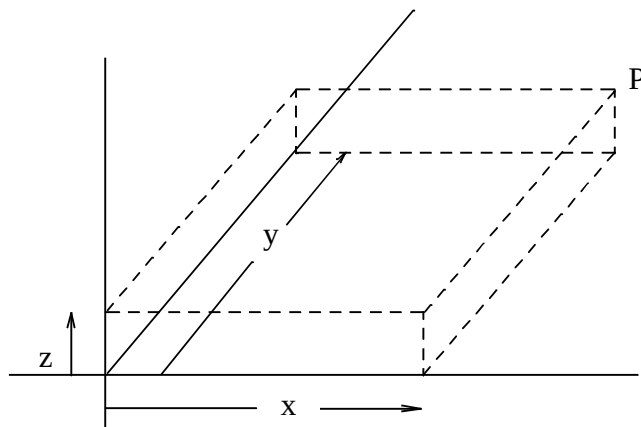
$$x > 0$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) + \pi$$

$$x < 0$$

4.1.2. Dreidimensionale Koordinatensysteme

4.1.2.1. Rechtwinklige kartesische Koordinaten

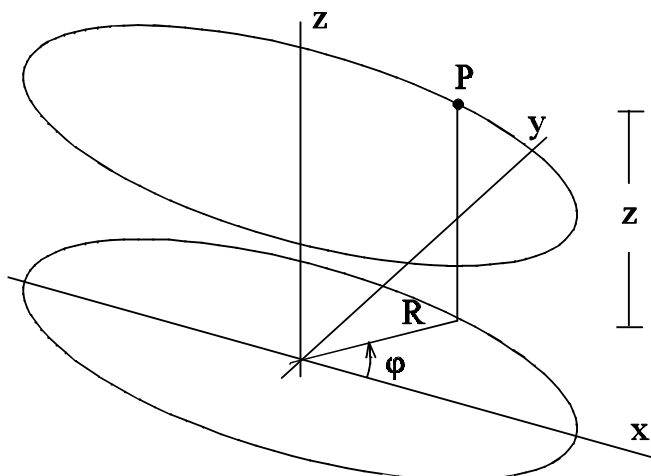


$$P = (x, y, z)$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Bild MA4121A

4.1.2.2. Zylinder Koordinaten



$$P = (R, \varphi, z)$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} R \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Bild MA4122A

Umrechnung: Zylinder-Koordinaten <--> Kartesische-Koordinaten

$$x = R \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = R \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = z$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad x > 0$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} + \pi \quad x < 0$$

$$z = z$$

4.1.2.3. Kugel Koordinaten (Sphärische Polar-Koordinaten)

Beispiel Erde: 3 Koordinaten: - Längengrad
- Breitengrad
- Höhe über NN

In der Mathematik werden die Koordinaten etwas anderes gewählt:

- r - direkter Abstand vom Koordinatenursprung zum Punkt
- φ - Winkel in der x-y-Ebene zur Projektion des Punktes in z
- Θ - direkter Winkel von der z-Achse zum Punkt

Wertebereiche:

$$r > 0$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$0 \leq \Theta \leq \pi$$

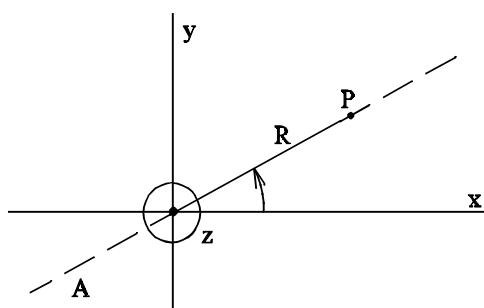
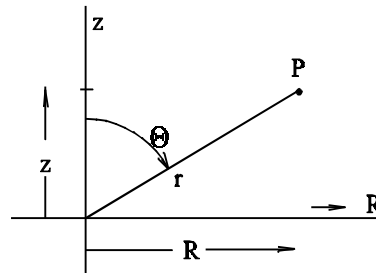


Bild MA4123A: x-y-Ebene



A- Schnittebene

$$P = (r, \varphi, \Theta) \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \Theta \end{pmatrix}$$

Umrechnung: Zylinder-Koordinaten <--> Kugel-Koordinaten

$$R = r \cdot \sin(\Theta)$$

$$z = r \cdot \cos(\Theta)$$

$$\varphi = \varphi$$

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$\Theta = \arccos \frac{z}{r}$$

$$\varphi = \varphi$$

Umrechnung: Kugel-Koordinaten <--> Kartesische-Koordinaten

Über den Umweg der Zylinder Koordinaten

$$x = R \cdot \cos(\varphi) = r \cdot \sin(\Theta) \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = R \cdot \sin(\varphi) = r \cdot \sin(\Theta) \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = r \cdot \cos(\Theta)$$

$$r = \sqrt{R^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\text{für } x > 0$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} + \pi$$

$$\text{für } x < 0$$

$$\Theta = \arccos \frac{z}{r}$$

4.2. Lineare Gebilde in kartesischen Koordinaten

4.2.1. Lineare Gebilde in der Ebene: Die Gerade

Aus Abschnitt 2.2.1.2 ist bekannt:

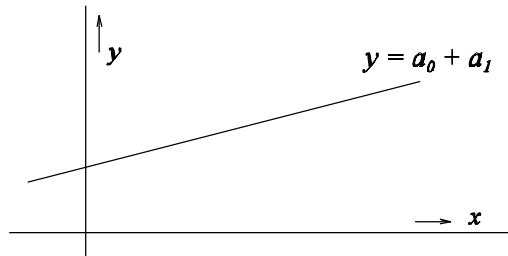


Bild MA421A

Neu: Die Enden eines Vektors, der von einem Parameter abhängig ist, werden als Funktionskurve dargestellt.

$$P = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Parameter: } t$$

Dieses ist nichts anderes als die Parameter-Darstellung einer Funktion. Um $y = f(t)$ zu bekommen, mußte der Parameter (hier t) eliminiert werden.

Frage: Was ergibt

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 * t \quad -\infty < t < \infty$$

Antwort grafisch:

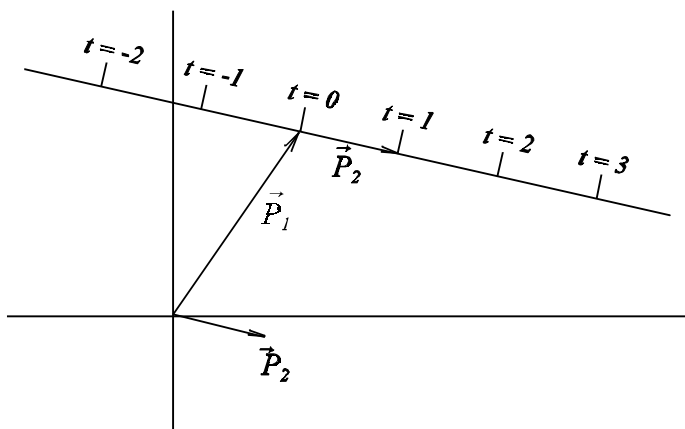


Bild MA421B

Wie bei der komplexen Gerade ergibt sich auch hier eine Gerade. Ein Punkt der Geraden ist $\vec{P}_1$. Die Richtung der Geraden wird von $\vec{P}_2$ vorgegeben.

Antwort mathematisch: (Eliminierung von t)

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 * t$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 * t \\ y_2 * t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = x = x_1 + x_2 * t$$

$$y(t) = y = y_1 + y_2 * t$$

$$t = \frac{x - x_1}{x_2}$$

$$y = y_1 + y_2 \frac{x - x_1}{x_2} = \left(y_1 - y_2 \frac{x_1}{x_2} \right) + \frac{y_2}{x_2} * x \quad \Rightarrow \quad \text{Gerade}$$

Hinweis: $\vec{P}_2 = (x_2, y_2)^t$ ist nicht Punkt der Geraden, sondern gibt nur deren Richtung an.

4.2.2. Lineare Gebilde im dreidimensionalen Raum

4.2.2.1. Gerade im Raum

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 * t$$

Beispiel: Eine Gerade ist durch die zwei Punkte $\vec{P}_A$ und $\vec{P}_B$ gegeben. Gesucht sind $\vec{P}_1$ und $\vec{P}_2$ der oberen Geradengleichung

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \vec{P}_1 = \vec{P}_A$$

$$t = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_B$$

$$\vec{P}_2 = \vec{P}_B - \vec{P}_1 = \vec{P}_B - \vec{P}_A$$

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_A + (\vec{P}_B - \vec{P}_A) * t$$

Obere Lösung ist eine von mehreren möglichen Lösungen, da für die Punkte $\vec{P}_A$ und $\vec{P}_B$ die t -Werte beliebig gewählt werden können.

4.2.2.2. Ebene im Raum

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 * t + \vec{P}_3 * s$$

Deutung mathematisch:

$$\begin{pmatrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ z(t,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 * t \\ y_2 * t \\ z_2 * t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 * s \\ y_3 * s \\ z_3 * s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$$

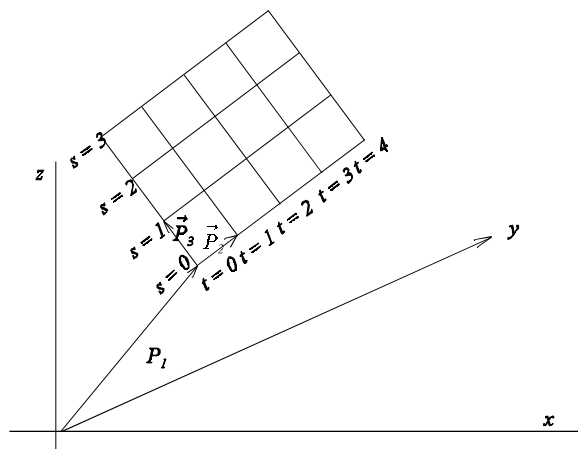
$$\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}$$

$$z - z_1 = (z_2 \ z_3) * \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$$

$$z = z_1 + (z_2 \ z_3) * \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}$$

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

 $\Rightarrow$ Ebene im Raum**Deutung grafisch:**

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 * t + \vec{P}_3 * s$$

Nach Bild MA4222A und oberer Gleichung ergibt sich eine Ebene. Ein Punkt der Ebene ist der Vektor $\vec{P}_1$. Eine Ebene ist durch zwei Richtungen gegeben. Im oberen Fall durch die Richtungen von $\vec{P}_2$ und $\vec{P}_3$.

Bild MA4222A

Beispiel 1:

gegeben: 3 Punkte der Ebene: $\vec{P}_A$, $\vec{P}_B$ und $\vec{P}_C$

gesucht: Ebene in der Form $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 * t + \vec{P}_3 * s$

eine mögliche Lösung:

Ein Punkt der Ebene ist: $\vec{P}_1 = \vec{P}_A$

Eine Richtung: $\vec{P}_2 = \vec{P}_B - \vec{P}_A$

Eine zweite Richtung: $\vec{P}_3 = \vec{P}_C - \vec{P}_A$

$$\vec{P} = \vec{P}_A + (\vec{P}_B - \vec{P}_A) * t + (\vec{P}_C - \vec{P}_A) * s$$

Beispiel 2: (Aufgabe 4.5a)

gegeben: 3 Punkte der Ebene $\vec{P}_A = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\vec{P}_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{P}_C = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

gesucht: A] $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 * \alpha + \vec{P}_3 * \beta$ B] $z = f(x, y)$

Lösung A]

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_2 = \vec{P}_B - \vec{P}_A = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Punkt $\vec{P}_2$ gilt für $\alpha = 1$ und $\beta = 0$

$$\vec{P}_3 = -(\vec{P}_C - \vec{P}_A) = -\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Punkt $\vec{P}_3$ gilt für $\alpha = 0$ und $\beta = -1$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x-8 \\ y-5 \\ z-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Lösung B]

$$\begin{pmatrix} x-8 \\ y-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} x-8 \\ y-5 \end{pmatrix}$$

$$z-7 = (5 \ 1) * \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{5-6} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x-8 \\ y-5 \end{pmatrix}$$

$$z-7 = -(5 \ 1) * \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x-8 \\ y-5 \end{pmatrix} = 7 - (1*5-1*2 \quad 5(-3)+1*5) * \begin{pmatrix} x-8 \\ y-5 \end{pmatrix}$$

$$z = 7 + (-3 \ 10) * \begin{pmatrix} x-8 \\ y-5 \end{pmatrix} = 7 - 3(x-8) + 10(y-5) = 7 - 3x + 24 + 10y - 50 = -3x + 10y - 19$$

4.2.2.3. Achsenabschnittsform der Ebene

gegeben: Drei Punkte auf der Achsen $\vec{P}_A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{P}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{P}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$

gesucht: $z = f(x, y)$

Erste Möglichkeit: Herleitung über Vektor-Ebenen

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_2 = \vec{P}_B - \vec{P}_A = \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_3 = \vec{P}_C - \vec{P}_A = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} * t + \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} * s$$

$$\begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{a*b} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix}$$

$$z = 0 + (0 \quad c) \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$$

$$z = (0 \quad c) \frac{1}{ab} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & -a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ab} (-cb \quad -ca) * \begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix} = c \left(-\frac{1}{a} \quad -\frac{1}{b} \right) * \begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix}$$

$$\frac{z}{c} = -\frac{x-a}{a} - \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1 - \frac{y}{b}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Obere Formel wird Achsenabschnittsform der Ebene genannt, vergleiche Achsenabschnittsform der Geraden (Kap. 2.2.1.2.4).

Zweite Möglichkeit zur Herleitung der Achsenabschnittsform der Ebene:

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

Punkt A $(x = a, y = 0, z = 0)$ $0 = a_0 + a_1 * a + 0 * y$

Punkt B $(x = 0, y = b, z = 0)$ $0 = a_0 + a_1 * 0 + a_2 * b$

Punkt C $(x = 0, y = 0, z = c)$ $c = a_0 + a_1 * 0 + a_2 * 0$

$$a_0 = c$$

$$a_1 = -\frac{a_0}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{b} = -\frac{c}{b}$$

$$z = c - \frac{c}{a} * x - \frac{c}{b} * y$$

$$\frac{z}{c} + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

4.2.2.4. Schnitt zweier Ebenen

$$\vec{E}_1 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 * r + \vec{P}_3 * s$$

$$\vec{E}_2 = \vec{P}_4 + \vec{P}_5 * t + \vec{P}_6 * u$$

Vermutlich ergibt sich eine **Gerade**.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 * r + \vec{P}_3 * s = \vec{P}_4 + \vec{P}_5 * t + \vec{P}_6 * u$$

Eine Vektorgleichung besteht aus drei Einzelgleichungen (Vergleich der drei Vektor-Komponenten), d.h. ein Parameter von (r, s, t, u) ist frei wählbar.

Variable: (r, s, t) frei wählbar (willkürlich): u

$$\vec{P}_2 * r + \vec{P}_3 * s - \vec{P}_5 * t = \vec{P}_6 * u + \vec{P}_4 - \vec{P}_1$$

$$(\vec{P}_2 \quad \vec{P}_3 \quad -\vec{P}_5) * \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \vec{P}_6 * u + \vec{P}_4 - \vec{P}_1$$

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_3 & -x_5 \\ y_2 & y_3 & -y_5 \\ z_2 & z_3 & -z_5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \\ z_6 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} x_4 - x_1 \\ y_4 - y_1 \\ z_4 - z_1 \end{pmatrix}$$

Oberes Gleichungssystem nach t aufgelöst ergibt eine lineare Abhängigkeit von u.

$$t = f(u) = a_0 + a_1 * u$$

t in Ebene 2 eingesetzt ergibt:

$$\vec{E}_2 = \vec{P}_4 + \vec{P}_5(a_0 + a_1 * u) + \vec{P}_6 * u$$

Dieses ergibt eine Gerade:

$$\vec{G} = (\vec{P}_4 + a_0 * \vec{P}_5) + (a_1 * \vec{P}_5 + \vec{P}_6) * u$$

Beispiel: (Aufgabe 4.7a)**gegeben:** 2 Ebenen $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ **gesucht:** Gerade in der Form: $\vec{G} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 * u$ **Lösung:**

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} * t + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} r + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 4u \\ 4 + 2u \\ 4 + u \end{pmatrix}$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4+4u \\ 5 & 3 & 4+2u \\ 0 & 1 & 4+u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 \begin{vmatrix} 3 & 4+2u \\ 1 & 4+u \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 4+4u \\ 1 & 4+u \end{vmatrix}}{1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{12 + 3u - 4 - 2u + 20 + 20u}{3*1 - 2*1} = 28 + 21u$$

$$\vec{G} = \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + (28 + 21u) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2*28 \\ -1*28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2*21 \\ -1*21 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * u$$

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} 5 \\ -50 \\ -21 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ -40 \\ -20 \end{pmatrix}$$

4.2.2.5. Schnitt zwischen Gerade und Ebene

Ebene: $\vec{E} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 * s + \vec{P}_3 * t$

Gerade: $\vec{G} = \vec{P}_4 + \vec{P}_5 * u$

Das Gleichsetzen von Ebene und Gerade

$$\vec{E} = \vec{G}$$

ergibt vermutlich einen Punkt im Raum.

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 * s + \vec{P}_3 * t = \vec{P}_4 + \vec{P}_5 * u \qquad \vec{P}_2 * s + \vec{P}_3 * t - \vec{P}_5 * u = \vec{P}_4 - \vec{P}_1$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} * s + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} * t - \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{pmatrix} * u = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_3 & -x_5 \\ y_2 & y_3 & -y_5 \\ z_2 & z_3 & -z_5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 - x_1 \\ y_4 - y_1 \\ z_4 - z_1 \end{pmatrix}$$

Aus dem oberen Gleichungssystem lassen sich die Werte (s, t, u) eindeutig bestimmen. Einsetzen z.B. von u in die Geradengleichung ergibt einen Punkt im Raum

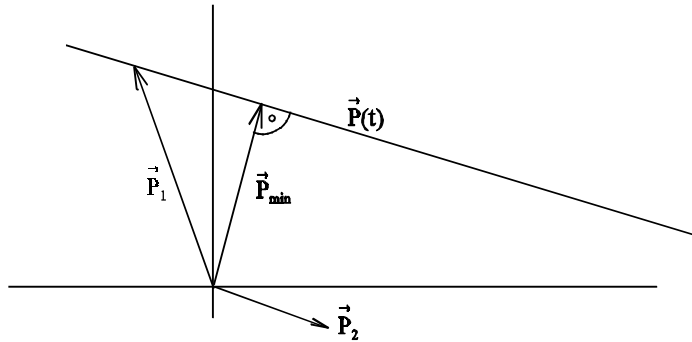
Beispiel: (Aufgabe 4.8a)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \gamma$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{1 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1 + 20}{-12 + 5 + 10} = \frac{21}{3} = 7$$

$$\vec{P} = \vec{G}(\gamma=7) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-14 \\ 1+35 \\ 3+28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 36 \\ 31 \end{pmatrix}$$

4.2.2.6. Kürzeste Entfernung zu einer Geraden

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 * t$$

Bild MA4226A

Nach Bild MA4226A ist die kürzeste Entfernung zur Geraden der Vektor $\vec{P}_{\min}$. Dieser Vektor steht senkrecht auf der Geraden. Wie wird nun dieser Vektor berechnet? Gesucht ist der Parameter $t_{\min}$ der zu diesem Punkt gehört. Frage: Wie kann man mathematisch erfassen, daß zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen? Frage: Was ergibt das Skalarprodukt von zwei Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen? Antwort: Weil der Winkel zwischen beiden 90° ist und der $\cos(90^\circ) = 0$ ist, ergibt das Skalarprodukt Null. Nächste Frage: Welche zwei Vektoren aus Bild MA4226A stehen senkrecht aufeinander? Antwort: $\vec{P}_2$ und $\vec{P}_{\min}$.

$$\vec{P}_2 * \vec{P}_{\min}(t_{\min}) = 0$$

$$\vec{P}_2 * [\vec{P}_1 + \vec{P}_2 * t_{\min}] = 0$$

$$\vec{P}_2 * \vec{P}_1 = -\vec{P}_2 * \vec{P}_2 * t_{\min}$$

$$t_{\min} = -\frac{\vec{P}_1 * \vec{P}_2}{\vec{P}_2 * \vec{P}_2}$$

$$\vec{P}_{\min} = \vec{P}_1 - \frac{\vec{P}_1 * \vec{P}_2}{\vec{P}_2 * \vec{P}_2} * \vec{P}_2$$

Beispiel: (Aufgabe 4.9d)

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \gamma = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 * \gamma \quad \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{\min} = -\frac{\vec{P}_1 * \vec{P}_2}{\vec{P}_2 * \vec{P}_2} = -\frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}} = -\frac{-10 + 5 + 12}{4 + 25 + 16} = -\frac{7}{45}$$

$$\vec{P}_{\min} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{7}{45} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.3111 \\ 0.2222 \\ 2.3772 \end{pmatrix}$$

$$r_{\min} = |\vec{P}_{\min}| = 5.82332$$

4.2.2.7. Kürzeste Entfernung zu einer Ebene

$$\vec{E}(s,t) = \vec{P}_1 + s \cdot \vec{P}_2 + t \cdot \vec{P}_3$$

Prinzip: Der Vektor $\vec{P}_{\min}$ des minimalen Abstands zur Ebene steht senkrecht auf der $\vec{P}_2$ -Richtung durch der $\vec{P}_3$ -Richtung.

$$\vec{P}_2 * (\vec{P}_1 + s_{\min} \vec{P}_2 + t_{\min} \vec{P}_3) = 0$$

$$\vec{P}_3 * (\vec{P}_1 + s_{\min} \vec{P}_2 + t_{\min} \vec{P}_3) = 0$$

Aus dieser Bedingung ergeben sich zwei Gleichungen für $s_{\min}$ und $t_{\min}$.

$$\begin{pmatrix} \vec{P}_2 * \vec{P}_2 & \vec{P}_2 * \vec{P}_3 \\ \vec{P}_3 * \vec{P}_2 & \vec{P}_3 * \vec{P}_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} s_{\min} \\ t_{\min} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \vec{P}_1 * \vec{P}_2 \\ \vec{P}_1 * \vec{P}_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel: (Aufgabe 4.9a)

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_1 * \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 11$$

$$\vec{P}_1 * \vec{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 9$$

$$\vec{P}_2 * \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 26$$

$$\vec{P}_3 * \vec{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 10$$

$$\vec{P}_2 * \vec{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 15$$

$$\begin{pmatrix} 26 & 15 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{-1}{260 - 225} \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ -15 & 26 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{35} \begin{pmatrix} 110 - 135 \\ -165 + 234 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} * \begin{pmatrix} 25 \\ -69 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_{\min} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{25}{35} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{69}{35} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.714 \\ -0.343 \\ 1.029 \end{pmatrix}$$

$$r_{\min} = |\vec{P}_{\min}| = 2.028$$

4.3. Flächen 2. Ordnung im dreidimensionalen Raum

4.3.1. Kugel

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Kugel mit dem Mittelpunkt $\vec{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)^t$ und dem Radius r .

4.3.2. Ellipsoid

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{c}\right)^2 = 1$$

Mittelpunkt: $\vec{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)^t$

Halbachsen: a in x , b in y , c in z

4.3.3. Zylinder in z-Richtung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Mittelachse: x_0, y_0

Halbachsen: R

keine z -Abhängigkeit

4.3.4. Doppelkegel in z-Richtung

$$x^2 + y^2 = (az)^2$$

Deutung: Der Radius eines Kreises ist linear von z -abhängig.

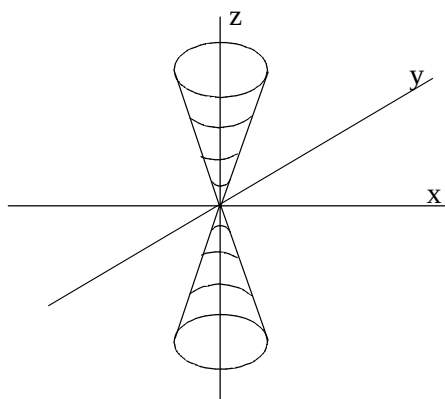


Bild MA434A

4.4. Kegelschnitte

Der Schnitt vom Doppel-Kegel aus Abschnitt 4.3.4 und allgemeiner Ebene

$$x^2 + y^2 = bz^2 \quad (\text{Kegel}) \quad (\text{A})$$

$$z = (cx + dy + e) \quad (\text{Ebene}) \quad (\text{B})$$

$$x^2 + y^2 = b(cx + dy + e)^2$$

ergibt durch Einsetzen von Gleichung (B) in Gleichung (A), Umformen und Zusammenfassen von Koeffizienten:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Obere Gleichung ist die allgemeine Kurve zweiter Ordnung in der Ebene (Projektion der Raumkurve auf die x-y-Ebene). Die obere Funktion ist relativ schwer zu untersuchen. Einfacher lassen sich die Kegelschnitte untersuchen am Schnitt des Einheitskegels und einer Ebene die nicht von y abhängig ist.

Einheitskegel: $x^2 + y^2 = z^2$

Ebene: $z = a_0 + a_1x$

$$x^2 + y^2 = (a_0 + a_1x)^2 = a_0^2 + 2a_0a_1x + a_1^2x^2$$

$$x^2(1 - a_1^2) - 2a_0a_1x + y^2 = a_0^2$$

Mit der Abkürzung $a > 0$ ergibt sich:

$a_0 > 0, a_1 = -1$	$y = \pm\sqrt{a_0^2 + 2a_0x}$	$\Rightarrow$ liegende Parabel		A_1
---------------------	-------------------------------	--------------------------------	--	-------

$a_0 \neq 0, a_1 > 1$	$-ax^2 \pm 2a_0a_1x + y^2 = a_0^2$	$\Rightarrow$ Hyperbel	$a = a_1^2 - 1$	A_2
-------------------------	------------------------------------	------------------------	-----------------	-------

$a_0 \neq 0, a_1 = 0$	$x^2 + y^2 = a_0^2$	$\Rightarrow$ Kreis		A_3
-----------------------	---------------------	---------------------	--	-------

$a_0 \neq 0, a_1 < 1$	$ax^2 \mp 2a_0a_1x + y^2 = a_0^2$	$\Rightarrow$ Ellipse	$a = 1 - a_1^2$	A_2
-------------------------	-----------------------------------	-----------------------	-----------------	-------

$a_0 = 0, a_1 < 1$	$ax^2 + y^2 = 0 \quad y = \pm\sqrt{-ax^2}$	$\Rightarrow$ Punkt $x = 0, y = 0$	$a = 1 - a_1^2$	B_1
----------------------	--	------------------------------------	-----------------	-------

$a_0 = 0, a_1 > 1$	$-ax^2 + y^2 = 0 \quad y = \pm\sqrt{ax^2}$	$\Rightarrow$ Doppelgerade	$a = a_1^2 - 1$	B_2
----------------------	--	----------------------------	-----------------	-------

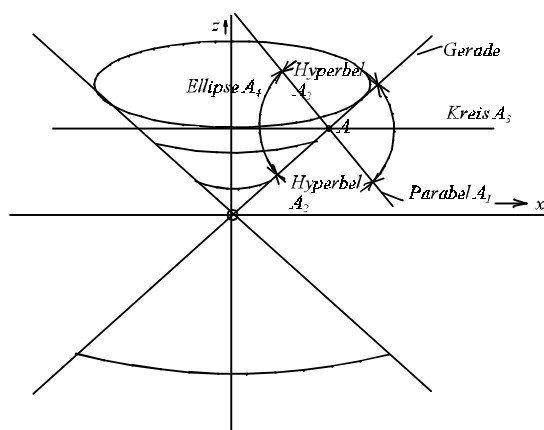


Bild MA44A: Ebene durch Doppelkegel am Punkt A

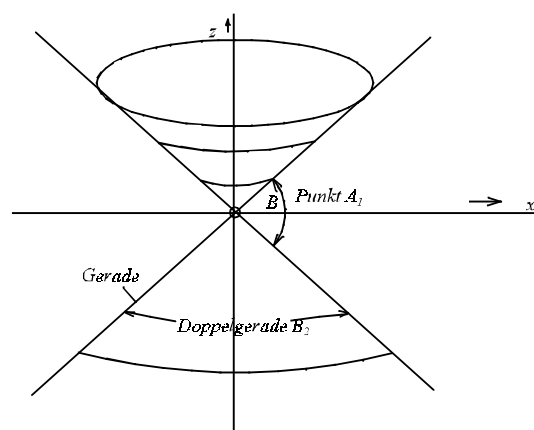


Bild MA44B: Ebene durch Doppelkegel am Punkt B

4.4.1. Kreis

Gleichung: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Geometrische Deutung: Der Kreis sind die geometrischen Orte einer Ebene, die von einem Mittelpunkt den gleichen Abstand aufweisen.

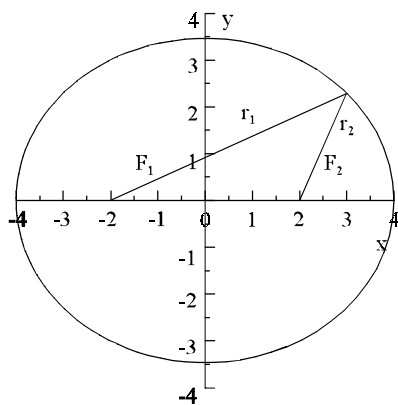
Polargleichungen: $r(\varphi) = \text{konstant} = r$

Parametergleichungen: $x(t) = r \cdot \cos(t) + x_0$ $y(t) = r \cdot \sin(t) + y_0$

4.4.2. Ellipse

Gleichung: $\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$ siehe Arbeitsblatt MAI-9

Geometrische Deutung:



Die Ellipse ist der geometrische Ort von Punkten in einer Ebene, die von zwei Brennpunkten (F_1 und F_2) die gleiche Abstandssumme $2a$ aufweisen, siehe Bild MA442A. Demonstration mit Hilfe eines Bandes.

$$r_1 + r_2 = 2a$$

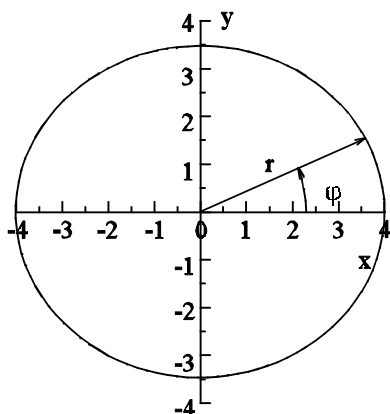
Bild MA442A

Polargleichungen: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

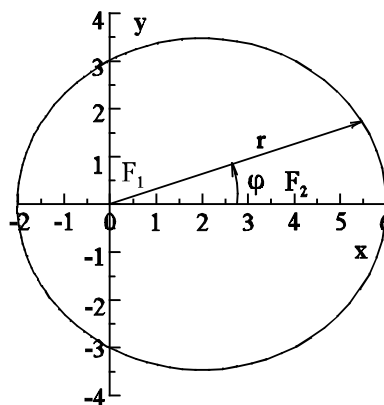
lineare Exzentrizität, Abstand Brennpunkt zum Mittelpunkt

$$\epsilon = \frac{e}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

numerische Exzentrizität ($\epsilon < 1$)

Bild MA442B: $\epsilon = 0.5$, $b = \sqrt{12}$

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - \epsilon^2 \cdot \cos^2(\varphi)}$$

Bild MA442C: $p = 3$, $\epsilon = 0.5$

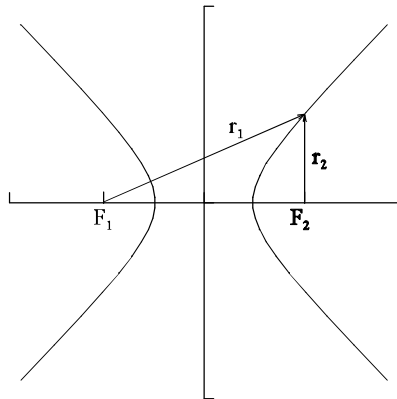
$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cdot \cos(\varphi)}$$

Parametergleichungen: $x = a \cdot \cos(\varphi)$ $y = b \cdot \sin(\varphi)$

4.4.3. Hyperbel

Gleichung: $\pm \left(\frac{y - y_0}{b} \right)^2 \mp \left(\frac{x - x_0}{a} \right)^2 = 1$ siehe Arbeitsblatt MAI-9

Geometrische Deutung:



$$r_1 - r_2 = 2a$$

Bild MA443A

Die Hyperbel sind die geometrischen Orte in einer Ebene, an dem die Abstandsdifferenz zu zwei Punkten überall gleich $2a$ ist, siehe Bild MA443A.

Polargleichungen:

$e = \sqrt{a^2 + b^2}$ lineare Exzentrizität und Abstand zum Brennpunkt

$\epsilon = \frac{e}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2}$ numerische Exzentrizität ($\epsilon > 1$)

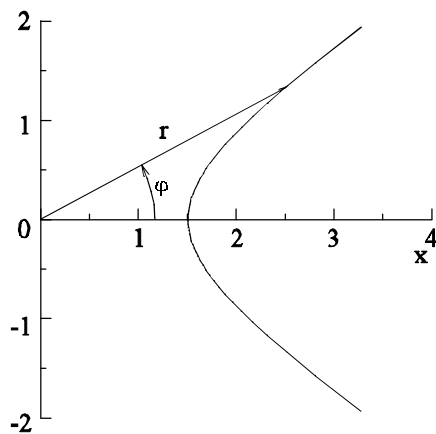


Bild MA443B

$$b = 1, \epsilon = 1.2$$

$$r^2 = \frac{b^2}{\epsilon^2 \cos^2(\varphi) - 1}$$

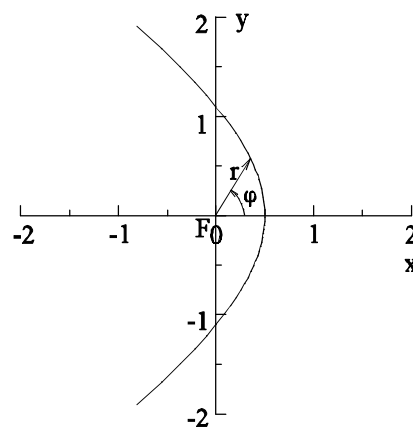


Bild MA443C

$$p = 1.1, \epsilon = 1.2$$

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi)}$$

Parametergleichungen:

$$x = a \cdot \cosh(t)$$

$$y = b \cdot \sinh(t)$$

4.4.4. Parabel**Gleichung:** $y = a \cdot (x - x_0)^2$

$$y = \pm \sqrt{a(x - x_0)}$$

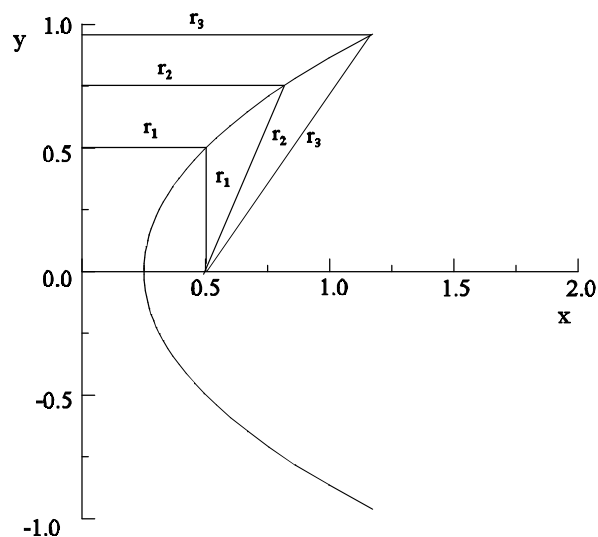
Geometrische Deutung:

Bild MA444A

Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte in einer Ebene, die von einer Geraden und von einem Punkt (dem Brennpunkt) die gleich Entfernung aufweisen.

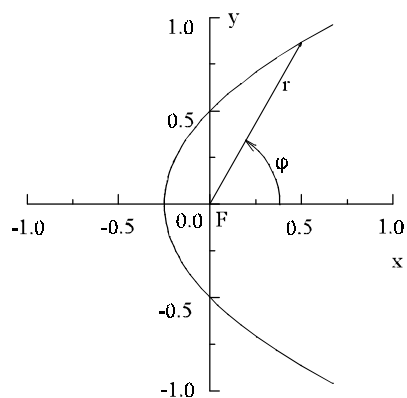
Polargleichungen:

Bild MA444B

$$p = 0.5$$

$$r = \frac{p}{1 - \cos(\varphi)}$$

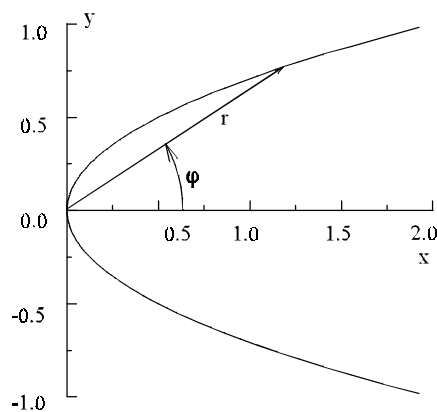


Bild MA444C

$$p = 0.5$$

$$r = p \cdot \cos(\varphi) [1 + \cot^2(\varphi)]$$

Parametergleichungen: $y = bt$

$$x = at^2$$

5. Grundlagen der Differentialrechnung

In diesem Kapitel sollen die Grundlagen der Differentialrechnung vorgestellt werden. Die Anwendungen der Differentialrechnung erfolgt im Kap. 6 (2. Semester).

Die Differentialrechnung wurde gegen 1700 gleichzeitig Newton (mehr physikalisch) und auch von Leibniz (mehr mathematisch) entwickelt.

5.1. Einführung

5.1.1. Beispiel Geschwindigkeit-Weg

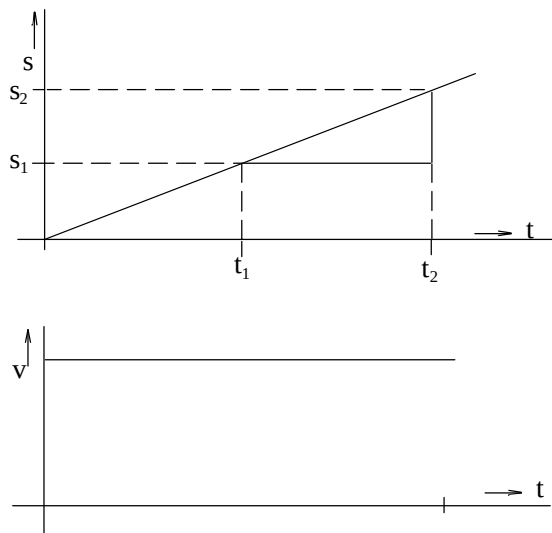


Bild MA511A

Nach Bild MA511A ergibt sich bei einem linear ansteigenden Weg eine konstante Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit lässt sich wie folgt berechnen:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

mit

$$\begin{aligned}\Delta s &= s_2 - s_1 \\ \Delta t &= t_2 - t_1\end{aligned}$$

Obere Formeln sagen aus:

- Die Geschwindigkeit ergibt sich aus dem Weg s dividiert durch die Zeit t . Achtung: Dieses gilt nur in diesem linearen Sonderfall.
- Korrekt lässt sich schon aus Bild MA511A ableiten: Die Geschwindigkeit ergibt sich aus Quotienten der Differenzen aus Weg Δs und Zeit Δt .

Die obere Aussage b soll anhand von Bild MA511B näher erläutert werden, wo ein abschnittsweiser linearer Verlauf von s vorliegt. Die Geschwindigkeit in den einzelnen Abschnitten erhält man, indem die Differenz des Weges Δs durch die Differenz der Zeit Δt dividiert wird. Die Geschwindigkeit entspricht somit der Steigung der Geraden in den einzelnen Abschnitten.

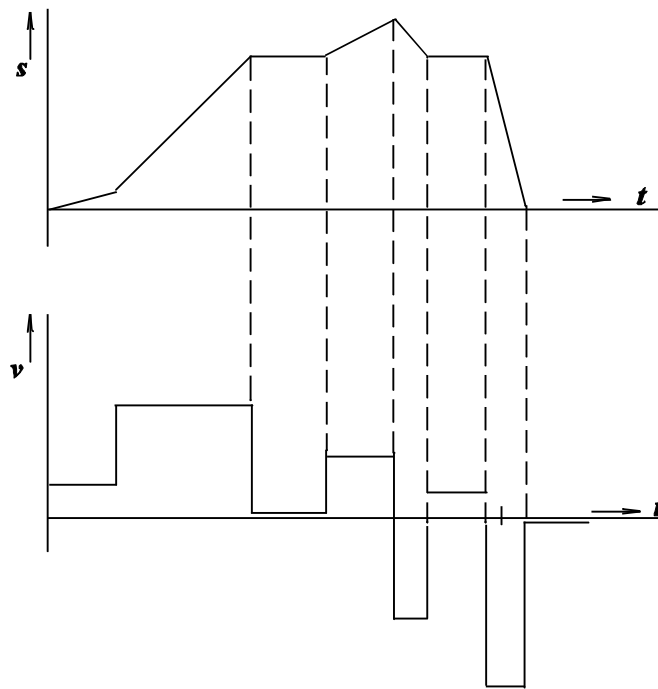


Bild MA511B

Wie aber wird der Geschwindigkeits-Verlauf bei einer nicht linearen Funktion ermittelt?

Nach Bild MA511C lässt sich der Verlauf $s = f(t)$ abschnittsweise durch Geraden annähern, deren Steigung die Geschwindigkeit ergibt. Im linken Teil des Bildes ist durch ein größeres Δt eine gröbere Annäherung vorgenommen worden. Die Abweichung zwischen Näherung und Original-Funktion ist noch relativ groß. Durch eine Verkleinerung von Δt im rechten Teil des Bildes wird die Annäherung zur Original-Funktion besser. Hier ist schon das Prinzip der Differentialrechnung zu erkennen: Durch Verkleinerung auf infinitesimal kleine Größen wird die Steigung der Funktion berechnet.

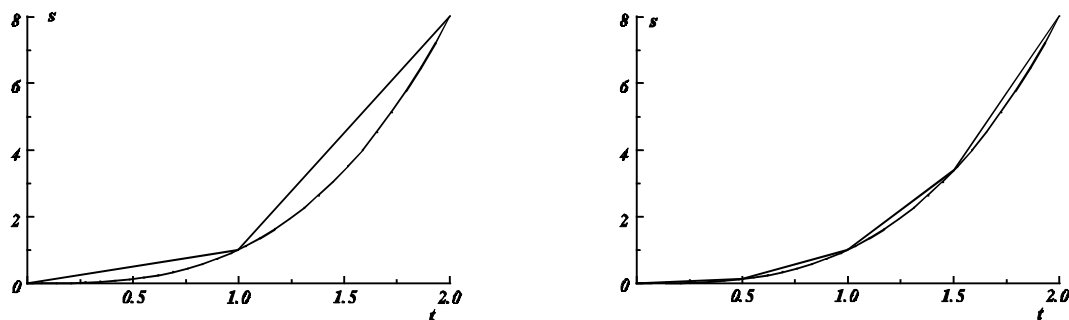


Bild MA511C

Bislang ist mit den physikalischen Größen Weg s , Zeit t und Geschwindigkeit v gerechnet worden. Hier in der Mathematik soll die Funktion $y = f(x)$ betrachtet werden, deren Steigung ermittelt werden soll.

5.1.2. Differenzen- und Differentialquotient

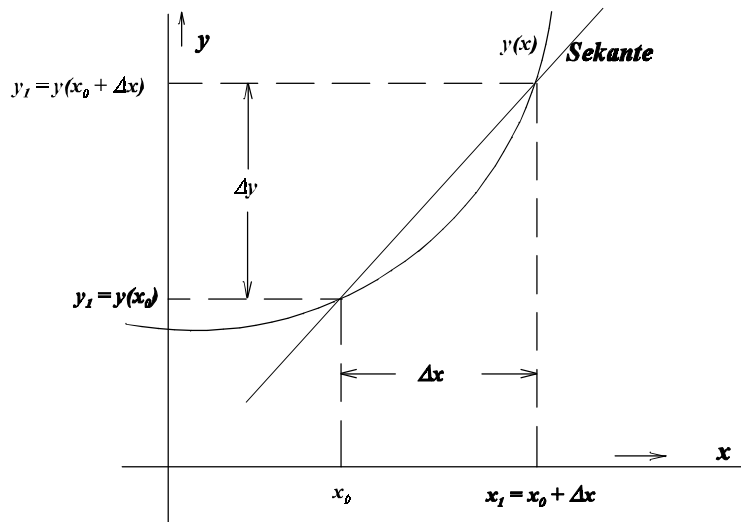


Bild MA512A Differenzenquotient und Sekante

Die Funktion $y = f(x)$ nach Bild MA512A soll in Bezug der Steigung in Punkt x_0 betrachtet werden. Die Steigung der Sekante nach Bild MA512a ergibt sich zu:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \Big|_{x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

oder mit $x_1 = x_0 + \Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \Big|_{x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Die obere Bestimmung der Steigung der Sekanten gilt für den Punkt x_0 . Für kleine Δx ist die Steigung der Sekante fast die Steigung der Tangenten. Die Steigung ist aber von x abhängig. Die Steigung soll nun nicht nur am Punkt x_0 , sondern allgemein berechnet werden. Darum erfolgt der Übergang:

$$x \quad \rightarrow \quad x_0 \quad \text{oder} \quad x_1 \quad \rightarrow \quad x_0$$

Der Differenzenquotient lässt sich dann in zwei Formen angeben:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Der Übergang zum Differentialquotienten ist verbunden mit dem Übergang der Steigung der Sekanten zur Steigung der Tangenten.

Differenzenquotient	→	Differentialquotient
Steigung Sekante	→	Steigung Tangente
endliche Größen Δ	→	infinitesimal kleine Größe d
Δx	→	dx
Δy	→	dy
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	→	$\frac{dy}{dx}$

Den Differentialquotienten zeigt Bild MA512B:

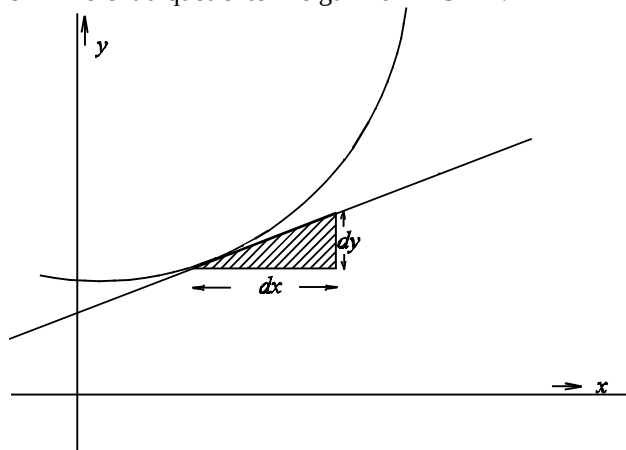


Bild MA512A: Differentialquotient

Mathematisch gesehen ist der Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten eine Grenzwertbildung. Die Größe Δx und somit auch die Größe Δy werden verschwindend klein und gehen gegen Null. Man spricht von **infinitesimal kleinen Größen**.

Die Steigung der Funktionskurve wird mit $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet und mit y' abgekürzt:

Definition:
$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Durch Grenzwertübergang

$$\Delta x \rightarrow 0$$

kann man mathematisch die zwei Formen für den Differentialquotienten angeben:

$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

5.1.3. Differenzieren der Potenzfunktionen $y = x^n$

Ableitung der Konstanten $y = 1$

$$y(x) = 1 \quad y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - 1}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0}$$

$y = 1$	$y' = 0$
---------	----------

Die Ableitung einer konstanten Funktion ergibt Null.

Ableitung der Geraden $y = x$

$$y(x) = x \quad y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (1) = 1$$

$y = x$	$y' = 1$
---------	----------

Ableitung der Normalparabel $y = x^2$

$$y(x) = x^2 \quad y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x$$

$y = x^2$	$y' = 2x$
-----------	-----------

Ableitung der kubischen Parabel $y = x^3$

$$y(x) = x^3 \quad y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}$$

$$\begin{aligned} (x^3 - x_0^3) : (x - x_0) &= x^2 + x_0 \cdot x + x_0^2 \\ \frac{x^2 - x_0 x^2}{+ x_0 x^2} & \\ \frac{+ x_0 x^2 - x_0^2 x}{x_0^2 x - x_0^3} & \\ \frac{x_0^2 x - x_0^3}{0} & \end{aligned}$$

$$y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \{x^2 + x_0 + x_0^2\} = 3x^2$$

$y = x^3$	$y' = 3x^2$
-----------	-------------

 $y = x^n$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ (x^n - x_0^n) : (x - x_0) &= x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + x_0^2 x^{n-3} + \dots + x_0^{n-3} x^2 + x_0^{n-2} x + x_0^{n-1} \\ y' &= \lim_{x \rightarrow x_0} \{x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + x_0^2 x^{n-3} + \dots + x_0^{n-3} x^2 + x_0^{n-2} x_0^{n-1}\} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
-----------	-----------------

5.1.4. Ableitung der Transzendenten Funktion (Teil 1)

5.1.4.1. Sinus-Funktion

Vorbetrachtung eines Grenzwertes:

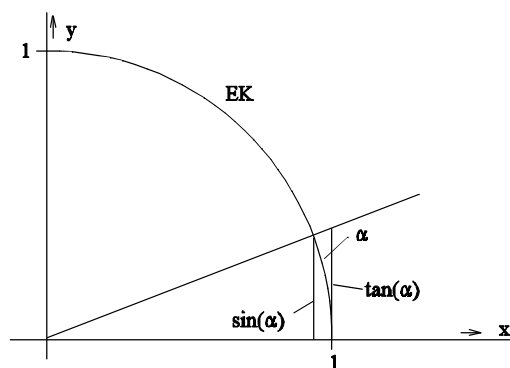


Bild MA5141A

Nach Bild MA5141A, den Winkelbeziehungen am rechtwinkligen Dreieck und der Winkelfunktion ergeben sich die Längen $\sin(\alpha)$, α und $\tan(\alpha)$. Aus Bild MA5141A lassen sich die Größenverhältnisse ablesen

$$\sin(\alpha) \leq \alpha \leq \tan(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) \leq \alpha \leq \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$1 \leq \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} \leq \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

Für $\alpha \rightarrow 0$ ergibt sich:

$$1 \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos(\alpha)} \right)$$

Mit $\cos(\alpha=0) = 1$ erhält man

$$1 \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin(\alpha)} \leq 1$$

Der Grenzwert liegt zwischen den Schranken 1 und 1 und beträgt somit 1 und damit auch der Kehrwert:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$$

$$y = \sin(x)$$

$$y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0}$$

Tabelle:

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} * \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 * \cos \frac{x + x_0}{2} * \sin \frac{x - x_0}{2}}{x - x_0}$$

$$y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \cos \frac{x + x_0}{2} \right\} * \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}}$$

$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
---------------	----------------

5.1.4.2. Kosinus Funktion

$$y = \cos(x)$$

$$y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0}$$

Tabelle:

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} * \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-2 * \sin \frac{x + x_0}{2} * \sin \frac{x - x_0}{2}}{x - x_0}$$

$$y' = - \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \sin \frac{x + x_0}{2} \right\} * \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}}$$

$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
---------------	-----------------

5.1.4.3. Logarithmus Funktion

$$y = \ln(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\frac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x} \right\}$$

$$\Delta x/x \rightarrow 0 \quad \text{weil} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

$$1/n \rightarrow 0 \quad \text{weil} \quad n \rightarrow \infty$$

$$\text{Substitution:} \quad \Delta x/x = 1/n$$

$$y' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{1/n} \cdot \frac{1}{x} \right\} = \frac{1}{x} * \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$$

$$y' = \frac{1}{x} * \ln \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\}^n \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\}^n = e \quad \ln(e) = 1$$

$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$
--------------	--------------------

5.1.4.4. Prinzip: Ableitung mit Hilfe der Umkehrfunktion bilden**A] Theorie:**

gegeben: $y = f(x)$
 gesucht: $y' = \frac{dy}{dx}$

Umkehrfunktion bilden: $x = f_1(y)$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{df_1}{dy} = f_2[y]$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f_2[y]} = \frac{1}{f_2[f(x)]} = f_3(x)$$

B] Beispiel:

gegeben: $y = \sqrt{x}$
 $y^2 = x$

$$\frac{dx}{dy} = 2y = 2\sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Hier ist die Lösung auch direkt möglich:

$$y = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$y' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

5.1.4.5. Exponential-Funktion

$$y = e^x$$

$$x = \ln(y)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = y = e^x$$

$y = e^x$	$y' = e^x$
-----------	------------

5.2. Rechenregeln der Differentialrechnung

5.2.1. Ableitung der bekanntesten Funktionen

Die Ableitungen der in der folgenden Tabelle aufgeführten Funktionen sollte man auswendig können:

$y = 1$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^2$	$y' = 2x$
$y = x^3$	$y' = 3x^2$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = \sinh(x)$	$y' = \cosh(x)$
$y = \cosh(x)$	$y' = \sinh(x)$
$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$

5.2.2. Grundregeln

Additive Konstante

$$y = a \quad y' = 0$$

$$y = f(x) \quad y' = f'(x)$$

$y = a + f(x)$	$y' = f'(x)$	$a \neq f(x)$
----------------	--------------	---------------

Beispiel: $y = 10 + x^2$ $y' = 2x$

Konstanter Faktor

$y = a \cdot f(x)$	$y' = a \cdot f'(x)$	$a \neq f(x)$
--------------------	----------------------	---------------

Beispiel: $y = 20x^3$ $y' = 20 \cdot 3 \cdot x^2$

Summe von Funktionen

$y = f(x) = g(x) + h(x)$	$y' = f'(x) = g'(x) + h'(x)$
--------------------------	------------------------------

Beispiel: $y = x^2 + x^3$

$$y' = 2x + 3x^2$$

Ableitung von Potenzfunktionen

$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
-----------	------------------------

5.2.3. Produktregel

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$y = u \cdot v$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x) \cdot v(x) + u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x) \cdot v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ u(x + \Delta x) \cdot \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right\} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ v(x) \cdot \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right\}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{ u(x + \Delta x) \} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right\} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{ v(x) \} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right\}$$

$$y' = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$$

$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
-----------------	--------------------------------

ohne Beweis:

$y = u \cdot v \cdot z$	$y' = u' \cdot v \cdot z + u \cdot v' \cdot z + u \cdot v \cdot z'$
-------------------------	---

Beispiele:

$$y = (x^2 + 4)(x^3 + 8)$$

$$y' = 2x \cdot (x^3 + 8) + (x^2 + 4) \cdot 3x^2$$

$$y = x^4 \cdot e^x$$

$$y' = 4x^3 \cdot e^x + x^4 \cdot e^x$$

$$y = x^3 \cdot \sin(x)$$

$$y' = 3x^2 \cdot \sin(x) + x^3 \cdot \cos(x)$$

$$y = x^5 \cdot \cos(x) \cdot e^x$$

$$y' = 5x^4 \cdot \cos(x) \cdot e^x - x^5 \cdot \sin(x) \cdot e^x + x^5 \cdot \cos(x) \cdot e^x$$

5.2.4. Quotientenregel

$$y(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad y = \frac{u}{v}$$

$$y \cdot v = u$$

$$y' \cdot v + y \cdot v' = u'$$

$$y' \cdot v = u' - y \cdot v' = u' - \frac{u}{v} \cdot v'$$

$$y' = \frac{u'}{v} - \frac{u \cdot v'}{v^2} = \frac{u' \cdot v}{v^2} - \frac{u \cdot v'}{v^2}$$

$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$
-------------------	--

Eselsbrücke:

Der Nenner wird quadriert und im Zähler der Ableitung eingetragen. Der Ausdruck v wird gleichzeitig mit positiven Vorzeichen im Zähler eingetragen. Im Zähler erscheint jeweils ein Produkt aus u und v, ein Term ist jeweils abgeleitet. Darum wird das schon eingetragene v mit u' multipliziert: v*u'. Einmal muß auch ein Produkt negativ erscheinen. Dieser zweite negative Term des Zählers ergibt sich durch Vertauschen von u und v des ersten Terms: v'*u

Beispiel 1:

$$y = \frac{e^x + \sin(x)}{x^2 + 1}$$

$$y' = \frac{(x^2 + 1) \cdot [e^x + \cos(x)] - [e^x + \sin(x)] \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Beispiel 2:

$$y = \frac{2x^2 + 5x^7}{x^2 + x^5}$$

$$y' = \frac{(x^2 + x^5) \cdot (4x + 35x^6) - (2x^2 + 5x^7) \cdot (2x + 5x^4)}{(x^2 + x^5)^2}$$

Beispiel 3:

$$y = \frac{\ln(x) + x^2}{\cos(x) + 5x^2}$$

$$y' = \frac{(\cos(x) + 5x^2) \cdot \left(\frac{1}{x} + 2x \right) - (\ln(x) + x^2) \cdot (-\sin(x) + 10x)}{(\cos(x) + 5x^2)^2}$$

5.2.5. Kettenregel

A] Theorie:

$$y = f(x) = u[v(x)]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} * \frac{dv}{dv} = \frac{du}{dv} * \frac{dv}{dx}$$

$y = u[v(x)]$	$y' = \frac{du}{dv} * \frac{dv}{dx}$
---------------	--------------------------------------

Obere Formel soll durch Beispiele verständlicher gemacht werden. Anschließend ist die obere Formel nicht mehr so wichtig, weil das Prinzip erkannt worden ist: Die innere Ableitung wird mit der äußeren multipliziert.

Auch für dreifach geschachtelte Funktionen möglich:

$$y = f(x) = u[v\{w(x)\}]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} * \frac{dv}{dv} * \frac{dw}{dw} = \frac{du}{dv} * \frac{dv}{dw} * \frac{dw}{dx}$$

$y = u[v\{w(x)\}]$	$y' = \frac{du}{dv} * \frac{dv}{dw} * \frac{dw}{dx}$
--------------------	--

B] Beispiele

Beispiel 1: Aufgabe 5.5a

$$\begin{aligned}
 y &= [\sin(x)]^3 & y &= u(v) = v^3 & v(x) &= \sin(x) \\
 & & \frac{du}{dv} &= 3v^2 & \frac{dv}{dx} &= \cos(x) \\
 & & \frac{du}{dv} &= 3\sin^2(x) \\
 y' &= \frac{du}{dv} * \frac{dv}{dx} = 3 * \sin^2(x) * \cos(x)
 \end{aligned}$$

Beispiel 2: Aufgabe 5.5e

$$\begin{aligned}
 y &= \ln(x^2 + 2x + 3) & y &= u(v) = \ln(v) & v(x) &= x^2 + 2x + 3 \\
 & & \frac{du}{dv} &= \frac{1}{v} & \frac{dv}{dx} &= 2x + 2 \\
 & & \frac{du}{dv} &= \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \\
 y' &= \frac{du}{dv} * \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x^2 + 2x + 3} * (2x + 2)
 \end{aligned}$$

Beispiel 3: Aufgabe 5.5i

$$y = \sin(e^x)$$

$$y = u(v) = \sin(v)$$

$$v(x) = e^x$$

$$\frac{du}{dv} = \cos(v)$$

$$\frac{dv}{dx} = e^x$$

$$\frac{du}{dv} = \cos(e^x)$$

$$y' = \frac{du}{dv} * \frac{dv}{dx} = \cos(e^x) * e^x$$

Fazit:

Bei allen drei Beispielen kann das gleiche Verfahren angewandt werden: Die äußere Funktion wird abgeleitet und mit der inneren Funktion multipliziert. Bei genügender Übung ist es nicht notwendig, die Formel zur Berechnung zu benutzen.

Beispiel 4: (dreifache Schachtelung)

$$y = \ln[(1 + x^2)^3]$$

$$y = u[v\{w(x)\}]$$

$$u = \ln(v)$$

$$v = w^3$$

$$w = 1 + x^2$$

Probe:

$$v = (1 + x^2)^3$$

$$u = \ln(v) = \ln[(1 + x^2)^3] = y$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{1}{v} = \frac{1}{w^3} = \frac{1}{(1 + x^2)^3}$$

$$\frac{dv}{dw} = 3w^2 = 3(1 + x^2)^2$$

$$\frac{dw}{dx} = 2x$$

$$y' = \frac{du}{dv} * \frac{dv}{dw} * \frac{dw}{dx} = \frac{1}{(1 + x^2)^3} * 3(1 + x^2)^2 * 2x$$

$$y' = \frac{6x}{1 + x^2}$$

Studenten: Teile der Aufgabe 5.5 rechnen

5.2.6. Logarithmische Differentiation

A] Theorie:

$$y(x) = u(x)^{v(x)}$$

$$\ln[y(x)] = \ln[u(x)^{v(x)}] = v(x) * \ln[u(x)]$$

$$\frac{y'}{y} = v'(x) * \ln[u(x)] - v(x) * \frac{1}{u(x)} * u'$$

$$y' = y(x) * \left\{ v'(x) * \ln[u(x)] - v(x) * \frac{1}{u(x)} * u' \right\}$$

$$y(x) = u^{v(x)} \quad y' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) * \ln(u(x)) - \frac{v(x) * u'(x)}{u(x)} \right]$$

$y = u^v$	$y' = u^v \left[v' \ln(u) - \frac{v * u'}{u} \right]$
-----------	--

Besser als die Anwendung der Formel ist den oberen Algorithmus selbst auszuführen: Funktion $y = f(x)$ wird logarithmiert und nach den logarithmischen Rechenregeln umgeformt. Die Funktion $\ln(y)$ wird auf beiden Seiten differenziert. Danach wird nach $y'(x)$ aufgelöst, wobei $y(x)$ wieder durch die gegebene Funktion ersetzt wird.

B] Beispiel:

Beispiel 1: (Aufgabe 5.6a)

$$y = x^x$$

$$\ln(y) = \ln(x^x) = x * \ln(x)$$

$$\frac{1}{y} * y' = \ln(x) + x * \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

$$y' = x^x [\ln(x) + 1]$$

Beispiel 2: (Aufgabe 5.6e)

$$y = (3x + 5)^{7x}$$

$$\ln(y) = \ln[(3x + 5)^{7x}] = 7x * \ln(3x + 5)$$

$$\frac{1}{y} * y' = 7 * \ln(3x + 5) + \frac{7x * 3}{3x + 5}$$

$$y' = (3x + 5)^{7x} \left[7 \ln(3x + 5) + \frac{21x}{3x + 5} \right]$$

Arbeitsblatt MAI-22**Zusammenfassung der Rechenregeln der Differentialrechnung****Grundregeln****Additive Konstante**

$y = a + f(x)$	$y' = f'(x)$	$a \neq f(x)$
----------------	--------------	---------------

Konstanter Faktor

$y = a \cdot f(x)$	$y' = a \cdot f'(x)$	$a \neq f(x)$
--------------------	----------------------	---------------

Summe von Funktionen

$y = f(x) = g(x) + h(x)$	$y' = f'(x) = g'(x) + h'(x)$
--------------------------	------------------------------

Ableitung von Potenzfunktionen

$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
-----------	------------------------

Produktregel

$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
-----------------	--------------------------------

$y = u \cdot v \cdot z$	$y' = u' \cdot v \cdot z + u \cdot v' \cdot z + u \cdot v \cdot z'$
-------------------------	---

Quotientenregel

$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
-------------------	--

Kettenregel

$y = u[v(x)]$	$y' = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$
---------------	--

$y = u[v\{w(x)\}]$	$y' = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$
--------------------	--

Logarithmische Differentiation

$y = u^v$	$y' = u^v \left[v' \ln(u) + \frac{v \cdot u'}{u} \right]$
-----------	--

5.3. Ableitung bekannter Funktionen

5.3.1. Exponentialfunktion

$y = e^{ax}$	$y' = a \cdot e^x$
--------------	--------------------

$$y = a^{bx}$$

$$\ln(y) = \ln(a^{bx}) = \ln(a) \cdot bx$$

$$\frac{y'}{y} = \ln(a) \cdot b$$

$y = a^{bx}$	$y' = a^{bx} \cdot \ln(a) \cdot b$
--------------	------------------------------------

5.3.2. Logarithmusfunktion

$$y = \ln(ax) \qquad y' = \frac{a}{ax} \qquad y = \ln(a) + \ln(x)$$

$y = \ln(ax)$	$y' = \frac{1}{x}$
---------------	--------------------

$$y = \log_b(ax) = \frac{\ln(ax)}{\ln(b)} \qquad y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(b)}$$

$y = \log_b(ax)$	$y' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}$
------------------	---

5.3.3. Trigonometrische Funktionen

$y = \sin(ax)$	$y' = a \cdot \cos(ax)$
$y = \cos(ax)$	$y' = -a \cdot \sin(ax)$

$$y = \tan(ax) = \frac{\sin(ax)}{\cos(ax)}$$

$$y' = \frac{\cos(ax) \cdot \cos(ax) \cdot a - \sin(ax) \cdot [-\sin(ax)] \cdot a}{\cos^2(ax)}$$

$y = \tan(ax)$	$y' = \frac{a}{\cos^2(ax)} = a[1 + \tan^2(ax)]$
----------------	---

$$y = \cot(ax) = \frac{\cos(ax)}{\sin(ax)}$$

$$y' = \frac{\sin(ax) \cdot [-\sin(ax)] \cdot a - \cos(ax) \cdot \cos(ax) \cdot a}{\sin^2(ax)}$$

$$y' = -\frac{a}{\sin^2(ax)}$$

$y = \cot(ax)$	$y' = \frac{-a}{\sin^2(ax)} = -a[1 + \cot^2(ax)]$
----------------	---

Ableitung von Sinus und Kosinus über komplexe Funktionen

$$y = \sin(x) = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})$$

$$y = \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$$

$$y' = \frac{1}{2j}[je^{jx} - (-j)e^{-jx}] = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) = \cos(x)$$

$$y' = \frac{1}{2}j[e^{jx} - e^{-jx}] = -\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = -\sin(x)$$

5.3.4. Arcus-Funktionen

$$y = \arcsin(ax)$$

$$\sin(y) = a \cdot x$$

$$\cos(y) \cdot \frac{dy}{dx} = a$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\cos(y)} = \frac{a}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}}$$

$y = \arcsin(ax)$	$y' = \frac{a}{\sqrt{1 - (ax)^2}}$
-------------------	------------------------------------

$$y = \arccos(ax)$$

$$\cos(y) = a \cdot x$$

$$-\sin(y) \cdot \frac{dy}{dx} = a$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-a}{\sin(y)} = \frac{-a}{\sqrt{1 - \cos^2(y)}}$$

$y = \arccos(ax)$	$y' = \frac{-a}{\sqrt{1 - (ax)^2}}$
-------------------	-------------------------------------

$$y = \arctan(ax)$$

$$\tan(y) = a \cdot x$$

$$[1 + \tan^2(y)] \cdot \frac{dy}{dx} = a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{1 + \tan^2(y)}$$

$y = \arctan(ax)$	$y' = \frac{a}{1 + (ax)^2}$
-------------------	-----------------------------

$$y = \operatorname{arccot}(ax)$$

$$\cot(y) = a \cdot x$$

$$-[1 + \cot^2(y)] \cdot \frac{dy}{dx} = a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a}{1 + \cot^2(y)}$$

$y = \operatorname{arccot}(ax)$	$y' = \frac{-a}{1 + (ax)^2}$
---------------------------------	------------------------------

5.3.5. Hyperbelfunktionen

$$y = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$$

$y = \cosh(x)$	$y' = \sinh(x)$
$y = \cosh(ax)$	$y' = a \cdot \sinh(ax)$

$$y = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$y' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$$

$y = \sinh(x)$	$y' = \cosh(x)$
$y = \sinh(ax)$	$y' = a \cdot \cosh(ax)$

$$y = \tanh(ax) = \frac{\sinh(ax)}{\cosh(ax)}$$

$$y' = \frac{\cosh(ax) \cdot \cosh(ax) \cdot a - a \cdot \sinh(ax) \cdot \sinh(ax)}{\cosh^2(ax)}$$

$y = \tanh(ax)$	$y' = \frac{a}{\cosh^2(ax)} = a[1 - \tanh^2(ax)]$
-----------------	---

$$y = \coth(ax) = \frac{\cosh(ax)}{\sinh(ax)}$$

$$y' = \frac{\sinh(ax) \cdot a \cdot \sinh(ax) - \cosh(ax) \cdot a \cdot \cosh(ax)}{\sinh^2(ax)}$$

$y = \coth(ax)$	$y' = \frac{-a}{\sinh^2(ax)} = -a[1 - \coth^2(ax)]$
-----------------	---

5.3.6. Area-Funktionen

$$y = \operatorname{arsinh}(ax)$$

$$\sinh(y) = a \cdot x \qquad \cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$$

$$\cosh(y) \cdot \frac{dy}{dx} = a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\cosh(y)} = \frac{a}{\sqrt{1 + \sinh^2(y)}}$$

$y = \operatorname{arsinh}(ax)$	$y' = \frac{a}{\sqrt{1 + (ax)^2}}$
---------------------------------	------------------------------------

$$y = \operatorname{arcosh}(ax)$$

$$\cosh(y) = a \cdot x$$

$$\sinh(y) \cdot \frac{dy}{dx} = a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sinh(y)} = \frac{a}{\sqrt{\cosh^2(y) - 1}}$$

$y = \operatorname{arcosh}(ax)$	$y' = \frac{a}{\sqrt{(ax)^2 - 1}}$
---------------------------------	------------------------------------

$$y = \operatorname{artanh}(ax)$$

$$\tanh(y) = a \cdot x$$

$$[1 - \tanh^2(y)] \cdot \frac{dy}{dx} = a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{1 - \tanh^2(y)}$$

$y = \operatorname{artanh}(ax)$	$y' = \frac{a}{1 - (ax)^2}$
---------------------------------	-----------------------------

$$|ax| < 1$$

$$y = \operatorname{arcoth}(ax)$$

$$\coth(y) = a \cdot x$$

$$[1 - \coth^2(y)] \cdot \frac{dy}{dx} = a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{1 - \coth^2(y)}$$

$y = \operatorname{arcoth}(ax)$	$y' = \frac{a}{1 - (ax)^2}$
---------------------------------	-----------------------------

$$|ax| > 1$$

Arbeitsblatt MAI-23

Ableitung einiger bekannter Funktionen

$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	
$y = e^x$	$y' = e^x$	
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln(a)$	
$y = \ln(x)$	$y' = \frac{1}{x}$	
$y = \log_b(x)$	$y' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}$	
$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$	
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$	
$y = \tan(x)$	$y' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	
$y = \cot(x)$	$y' = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$	
$y = \arcsin(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
$y = \arccos(x)$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
$y = \arctan(x)$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	
$y = \operatorname{arccot}(x)$	$y' = \frac{-1}{1+x^2}$	
$y = \cosh(x)$	$y' = \sinh(x)$	
$y = \sinh(x)$	$y' = \cosh(x)$	
$y = \tanh(x)$	$y' = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$	
$y = \coth(x)$	$y' = \frac{-1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x)$	
$y = \operatorname{arsinh}(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
$y = \operatorname{arcosh}(x)$	$y' = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x > 1$
$y = \operatorname{artanh}(x)$	$y' = \frac{1}{1-x^2}$	$ x < 1$
$y = \operatorname{arcoth}(x)$	$y' = \frac{1}{1-x^2}$	$ x > 1$

Arbeitsblatt MAI-24

Ableitung einiger bekannter Funktionen

$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	
$y = e^{ax}$	$y' = a \cdot e^{ax}$	
$y = a^{bx}$	$y' = a^{bx} \cdot \ln(a) \cdot b$	
$y = \ln(ax)$	$y' = \frac{1}{x}$	
$y = \log_b(ax)$	$y' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \frac{1}{x}$	
$y = \sin(ax)$	$y' = a \cdot \cos(ax)$	
$y = \cos(ax)$	$y' = -a \cdot \sin(ax)$	
$y = \tan(ax)$	$y' = \frac{a}{\cos^2(ax)} = a[1 + \tan^2(ax)]$	
$y = \cot(ax)$	$y' = \frac{-a}{\sin^2(ax)} = -a[1 + \cot^2(ax)]$	
$y = \arcsin(ax)$	$y' = \frac{a}{\sqrt{1 - (ax)^2}}$	$ ax < 1$
$y = \arccos(ax)$	$y' = \frac{-a}{\sqrt{1 - (ax)^2}}$	$ ax < 1$
$y = \arctan(ax)$	$y' = \frac{a}{1 + (ax)^2}$	
$y = \operatorname{arccot}(ax)$	$y' = \frac{-a}{1 + (ax)^2}$	
$y = \cosh(ax)$	$y' = a \cdot \sinh(ax)$	
$y = \sinh(ax)$	$y' = a \cdot \cosh(ax)$	
$y = \tanh(ax)$	$y' = \frac{a}{\cosh^2(ax)} = a[1 - \tanh^2(ax)]$	
$y = \coth(ax)$	$y' = \frac{-a}{\sinh^2(ax)} = -a[1 - \coth^2(ax)]$	
$y = \operatorname{arsinh}(ax)$	$y' = \frac{a}{\sqrt{1 + (ax)^2}}$	
$y = \operatorname{arcosh}(ax)$	$y' = \pm \frac{a}{\sqrt{(ax)^2 - 1}}$	$ ax > 1$
$y = \operatorname{artanh}(ax)$	$y' = \frac{a}{1 - (ax)^2}$	$ ax < 1$
$y = \operatorname{arcoth}(ax)$	$y' = \frac{a}{1 - (ax)^2}$	$ ax > 1$

5.4. Höhere Ableitungen

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

$$\frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y''$$

$$\frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^3 y}{dx^3} = y'''$$

...

...

...

Beispiel:

$$y = x^5$$

$$y' = 5x^4$$

$$y'' = 20x^3$$

$$y''' = 60x^2$$

$$y^{(4)} = 120x$$

$$y^{(5)} = 120$$

$$y^{(6)} = 0$$

5.5. Differenzierbarkeit

Begriff der Stetigkeit

Die Funktion $y = f(x)$ ist an der Stelle x stetig, wenn der linksseitige Grenzwert gleich dem rechtsseitigen Grenzwert ist:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{f(x - \epsilon)\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{f(x + \epsilon)\}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{f(x - \Delta x)\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{f(x + \Delta x)\}$$

Die obere Stetigkeit bezieht sich auf die Funktion selbst und nicht auf die Ableitung. Ist die Funktion an der Stelle x unstetig, so kann der Funktion in der Regel kein Wert zugeordnet werden. Die Funktion ist an der Stelle dann nicht definiert.

Beispiel:

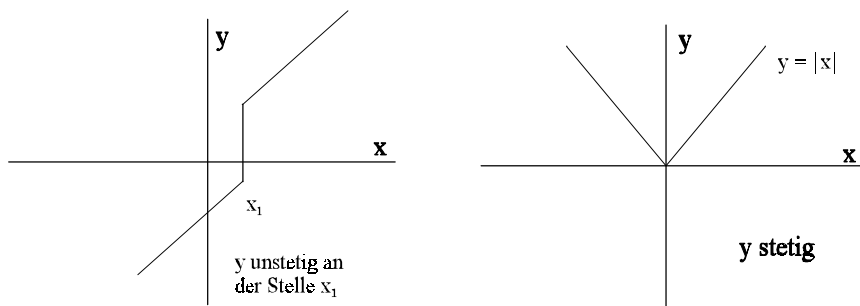


Bild MA55A

Die Funktion $y = |x|$ ist zwar an der Stelle $x = 0$ stetig, sieht aber eckig aus. Dieses läßt sich mit Hilfe der Funktion selbst nicht näher erläutern, aber mit Hilfe der Ableitung:

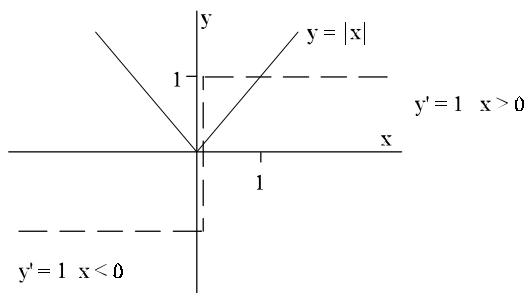


Bild MA55B

Die Funktion

$$\begin{array}{ll} y' = 1 & x > 0 \\ y' = -1 & x < 0 \end{array}$$

ist an der Stelle $x = 0$ unstetig und nicht definiert. D.h. die Funktion ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar, da der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert verschieden sind.

Bei der oberen Funktion ist die Funktion $y = |x|$ selbst stetig. Die erste nicht stetige Ableitung ist die erste Ableitung y' . Bei manchen Kurven im Raum ist von Interesse, bis zu welcher Ableitung die Kurve stetig ist. Z.B. in der Aerodynamik (Flugzeuge) ist es wichtig, daß die dritte Ableitung noch stetig ist, damit keine Turbulenzen sondern laminare Strömungen auftreten.

Beispiel:**gegeben:**

$$\begin{array}{ll} y = x^2 & x \geq 0 \\ y = -x^2 & x \leq 0 \end{array}$$

gesucht:bis zu welcher Ableitung ist die Funktion $y = f(x)$ stetig

zu untersuchen:

$$x = 0$$

$$x < 0$$

$$y = -x^2$$

$$y' = -2x$$

$$y'(x=0) = 0$$

$$y'' = -2$$

$$y''(x=0) = -2$$

$$x > 0$$

$$y = x^2$$

$$y' = 2x$$

$$y'(x=0) = 0$$

$$y'' = 2$$

$$y''(x=0) = 2$$

=> Funktion ist in der "0" und 1. Ableitung stetig, die zweite Ableitung ist unstetig

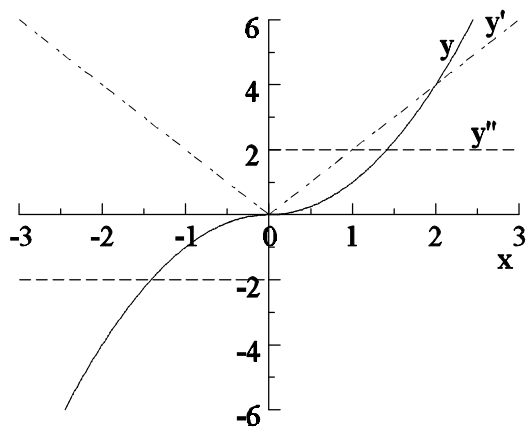


Bild MA55C

Anhang

Aufgaben

Gleichungssystem 1.1

$$7x_1 + 11x_2 = 4$$

$$3x_1 + 5x_2 = 6$$

Gleichungssystem 1.2

$$6x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4$$

$$1x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$$

$$3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2$$

Gleichungssystem 1.3

$$ax_1 + bx_2 = k_1$$

$$cx_1 + dx_2 = k_2$$

Gleichungssystem 1.4

$$\begin{pmatrix} 2a & -a & 0 \\ -a & 4b & -b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ 1c \\ -1c \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem 1.5

$$\begin{pmatrix} 4a & -a & 0 \\ -a & 3a & -a \\ 0 & -a & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem 1.6

$$\begin{pmatrix} 5.25 & 0.91 & 1.13 \\ 1.50 & 6.88 & 2.45 \\ 0.54 & 1.76 & 3.90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.72 \\ 4.38 \\ 2.68 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem 1.7

$$\begin{pmatrix} 3.85 & 1.44 & -3.08 & 0.64 & 1.22 \\ 4.21 & 6.49 & 2.81 & -2.73 & -0.15 \\ 1.08 & -2.33 & 5.19 & 4.08 & -2.77 \\ 2.96 & -0.76 & 4.06 & 7.91 & 2.66 \\ 0.44 & 1.45 & 2.75 & 3.11 & 5.55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.74 \\ 5.11 \\ 1.96 \\ 10.77 \\ 9.38 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.1

Wiederholen Sie die bekannten Verfahren

- A] Einsetzen
 - B] Gleichsetzen
 - C] Addition und Subtraktion
- anhand von
- a] Gleichungssystem 1.1
 - b] Gleichungssystem 1.2

Aufgabe 1.2

Gegeben sind die Gleichungssysteme:

- A] Gleichungssystem 1.1
- B] Gleichungssystem 1.2
- C] Gleichungssystem 1.3
- D] Gleichungssystem 1.4
- E] Gleichungssystem 1.5

- a) Formen Sie das Gleichungssystem in die Matrizen-Schreibweise $\bar{A} * \bar{x} = \bar{k}$ um. Geben Sie $\bar{A}$, $\bar{x}$ und $\bar{k}$ an.
- b) Berechnen Sie die adjungierte Matrix $\bar{A}_{adj}$.
- c) Berechnen Sie die Determinante $\det(\bar{A})$.
- d) Transponieren Sie die adjungierte Matrix $\bar{A}_{adj}$.
- e) Geben Sie die inverse Matrix $\bar{A}^{-1}$.
- f) Berechnen Sie den Vektor $\bar{x}$.
- g) Berechnen Sie zur Kontrolle $\bar{A} * \bar{x}$ und $\bar{A}^{-1} * \bar{A}$.

Aufgabe 1.3

Berechnen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe der Cramer-Regel:

- a) Gleichungssystem 1.1
- b) Gleichungssystem 1.2
- c) Gleichungssystem 1.3
- d) Gleichungssystem 1.4
- e) Gleichungssystem 1.5

Aufgabe 1.4

Man löse mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus:

- a) Gleichungssystem 1.2
- b) Gleichungssystem 1.6
- c) Gleichungssystem 1.7

Aufgabe 1.5

Die Matrix $\bar{A}$ ist numerisch mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus zu invertieren. Führen Sie die Probe aus.

a)

$$\bar{A} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 7 \\ \hline 6 & -3 & -9 \\ \hline 5 & 6 & 8 \\ \hline \end{array}$$

b)

$$\bar{A} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 5 & -6 \\ \hline 3 & -2 & 9 \\ \hline -4 & 6 & 7 \\ \hline \end{array}$$
Aufgabe 1.6

Gegeben ist die Matrix

$$\bar{A} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & j \\ \hline g & h & i \\ \hline \end{array}$$

Berechnen Sie die inverse Matrix. Führen Sie die Probe aus.

Aufgabe 1.7

Gegeben sind die zwei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Man zeichne die Vektoren in die x-y-Ebene
- Die Vektoren $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{D} = \vec{a} - \vec{b}$ sind zu berechnen. Die Addition und Subtraktion ist in der x-y-Ebene graphisch zu verdeutlichen.
- Folgende Vektoren sind zu bestimmen:
 $\vec{c}_1 = 5 * \vec{a}$ $\vec{c}_2 = 6 * \vec{b} + 5 * \vec{a}$
 $\vec{c}_3 = 4 * \vec{a} - 3 * \vec{b}$ $\vec{c}_4 = \vec{a} * \vec{b}$ $\vec{c}_5 = \vec{a} \times \vec{b}$
- Die Projektion des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$ ist zu berechnen.
- Bestimmen Sie die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms unter der Annahme, daß die Werte in cm angegeben sind.

Aufgabe 1.8

Man berechne die Fläche des Dreiecks in der x-y-Ebene mit den Eckpunkten:

$$\begin{array}{ll} P_{Ax} = 4 \text{ cm} & P_{Ay} = 3 \text{ cm} \\ P_{Bx} = 8 \text{ cm} & P_{By} = 5 \text{ cm} \\ P_{Cx} = 5 \text{ cm} & P_{Cy} = 6 \text{ cm} \end{array}$$

Aufgabe 1.9

Gegeben ist die Gleichung

$$y = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$$

- Bestimmen Sie mit Hilfe des Horner Schemas die y-Werte für x = 2, 3, -2 und -3.
- Dividieren Sie das Polynom durch (x - 2), (x - 3), (x + 2) und (x + 3).
- Stellen Sie das Polynom in Potenzen von (x + 5) und (x-5) dar.
- Bestimmen Sie alle Nullstellen der oberen Gleichung

Aufgabe 1.10

Die folgenden Gleichungen sind analytisch zu lösen. Sämtliche Lösungen sind anzugeben.

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| a) $x^2 - 2x - 8 = 0$ | g) $x^4 - 4x^2 + 20 = 0$ |
| b) $x^2 - 2x + 10 = 0$ | h) $x^4 - 16 = 0$ |
| c) $x^2 - 4x + 29 = 0$ | i) $x^4 + 16 = 0$ |
| d) $x^2 + 6x + 100 = 0$ | j) $x^3 - 27 = 0$ |
| e) $x^3 + 8x^2 - 33x = 0$ | k) $x^6 + 27 = 0$ |
| f) $x^3 - 6x^2 - 73x = 0$ | |

Aufgabe 1.11

Man berechne mit Hilfe der Kardanischen Lösungsformel die folgenden Gleichungen:

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| a) $x^3 + 9x^2 - 4x - 36 = 0$ | b) $x^3 + 9x^2 + 4x + 36 = 0$ |
| c) $x^3 - 12x^2 - 15x + 350 = 0$ | d) $x^3 + 18x^2 + 97x + 30 = 0$ |

Aufgabe 1.12

Folgende Gleichungen sind (teils iterativ) zu lösen:

- | | |
|---|------------------------------|
| a) $x^2 - 3x - 40 = 0$ | b) $x^3 + x^2 - 29x + 6 = 0$ |
| c) $x^3 - 4x^2 - 29x - 24 = 0$ | d) $x^4 + 3x - 2 = 0$ |
| f) $x^5 + 9x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 8x - 192 = 0$ | |

Aufgabe 1.13

Bestimmen Sie alle Lösungen der goniometrischen Gleichungen analytisch im Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$.

- | | | | |
|----|---------------------------|----|---|
| a) | $\sin(x) + \cos(x) = 1$ | b) | $\sin(2x) = \tan(x)$ |
| c) | $\cos(x) = 2 - 2\sin(x)$ | d) | $3\sin(x) + 5\cos(x) - 4 = 0$ |
| e) | $\sin(x) + \cos(x) = 1.2$ | f) | $\cos(2x) + 2\sin^2(x) + \sin(x) = 0.5$ |
| g) | $\sin(x + 0.5) = 0.7$ | | |

Aufgabe 1.14

Bestimmen Sie eine Lösung der Exponential-Gleichungen.

- | | | | |
|----|---|----|---|
| a) | $\sqrt[3]{a^{x+2}} = \sqrt{a^{x-5}}$ | b) | $2^{x+1} + 3^{x-3} = 3^{x-1} - 2^{x-2}$ |
| c) | $4^{3x} * 5^{2x-3} = 6^x$ | d) | $\sqrt[5]{a^{x+7}} = \sqrt[4]{a^{x-4}}$ |
| e) | $3^{x+2} + 5^{x-1} = 5^{x+1} - 3^{x+5}$ | f) | $2^{6x} * 4^{2x+5} = 7^x$ |

Aufgabe 1.15

Bestimmen Sie eine Lösung der logarithmischen Gleichungen.

- | | | | |
|----|--------------------------------------|----|---------------------------------------|
| a) | $\ln(2x^2 - 12x - 7) = 2\ln(3 - x)$ | b) | $\ln(x + 2) = \sqrt{2\ln(x + 2) + 3}$ |
| c) | $\ln(4x^2 - 15x + 2) = 2\ln(2x + 5)$ | d) | $\ln(x + 5) = \sqrt{2\ln(x + 5) + 4}$ |

Aufgabe 1.16

Bestimmen Sie eine Lösung näherungsweise grafisch.

- | | | | |
|----|---------------------------|----|--------------------------|
| a) | $x^2 + 2x - 3 = 0$ | b) | $\sin(x) - x + 0.5 = 0$ |
| c) | $e^x - 2 + x = 0$ | d) | $\ln(x) - 2 + 0.1x = 0$ |
| e) | $\sqrt{1 - x^2} - 2x = 0$ | f) | $1 + x - \arctan(x) = 0$ |
| g) | $x^3 - 4x + 1 = 0$ | | |

Aufgabe 1.17

Verbessern Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 1.16 mit Hilfe der Newton Methode.

Aufgabe 2.1

Wie groß ist die Steigung der Geraden, die durch die Punkte

$P_1 = (x_1, y_1) = (2, 3)$ und $P_2 = (x_2, y_2) = (7, 5)$ verläuft?

Aufgabe 2.2

Geben Sie die Gerade in der Form $y = f(x)$ an, die durch die Punkte $P_1 = (x_1, y_1) = (2, 3)$ und $P_2 = (x_2, y_2) = (7, 5)$ verläuft. Berechnen Sie die Gerade nach drei verschiedenen Methoden.

Aufgabe 2.3

Die Gerade, die die Achsen bei $(x_1, y_1) = (0, 5)$ und $(x_2, y_2) = (8, 0)$ schneidet, ist in der Form $y = a_1x + a_0$ anzugeben. Man benutze die Achsenabschnitts-Formel.

Aufgabe 2.4

Berechnen Sie den Schnittpunkt $P_s = (x_s, y_s)$ der beiden Geraden $y = 2x + 5$ und $y = 4x + 9$.

Aufgabe 2.5

Die Normalparabel (2. Ordnung) die ihren Scheitelpunkt bei $(x_1, y_1) = (4, 5)$ hat ist in der Form $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ anzugeben.

Aufgabe 2.6

Die Funktion $y = 2x^2 - 8x + 7$ ist in der Form $y = y_s + a_2 (x - x_s)^2$ zu berechnen.

Aufgabe 2.7

Berechnen Sie die Parabel die durch die Punkte

- | | | | |
|----|------------------------------|----|----------------------------------|
| a) | $P_1 = (x_1, y_1) = (4, -3)$ | b) | $P_1 = (x_1, y_1) = (-0.5, 2.5)$ |
| | $P_2 = (x_2, y_2) = (5, 0)$ | | $P_2 = (x_2, y_2) = (0, 6)$ |
| | $P_3 = (x_3, y_3) = (6, 6)$ | | $P_3 = (x_3, y_3) = (0.5, 10.5)$ |

verläuft. Bestimmen Sie die Scheitelpunkte der Parabel. Man berechne die Nullstellen der Funktion.

Aufgabe 2.8 (Zusatzaufgabe)

Die Parabel 4. Ordnung die durch die Punkte

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| $P_1 = (x_1, y_1) = (-2, -3)$ | $P_2 = (x_2, y_2) = (-1, 11)$ |
| $P_3 = (x_3, y_3) = (0, 15)$ | $P_4 = (x_4, y_4) = (1, 15)$ |
| $P_5 = (x_5, y_5) = (2, 65)$ | |

verläuft ist in der Form

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \text{ anzugeben}$$

Aufgabe 2.9

Für die gebrochen rationale Funktion

$$y = \frac{(x+5) \cdot (x+4) \cdot (x+3) \cdot (x-4) \cdot (x-5)}{(x-2) \cdot (x+3) \cdot (x+6)}$$

sind die Nullstellen, Pole, Lücken und Asymptoten anzugeben. Die unecht gebrochen rationale Funktion ist in eine echt gebrochen rationale Funktion und ein ganze rationale Funktion zu zerlegen.

Aufgabe 2.10

Die folgenden impliziten Funktionen sind zu analysieren und in der x-y- Ebene zu skizzieren. Um welche Art von Funktion handelt es sich jeweils?

- | | | | |
|----|-------------------------------------|----|-------------------------------------|
| a) | $4x^2 - 32x + 9y^2 - 90y + 253 = 0$ | b) | $-4x^2 + 24x + 9y^2 + 36y - 36 = 0$ |
| c) | $-9x^2 - 36x + 4y^2 - 32y + 64 = 0$ | | |

Aufgabe 2.11

Die Parabel $y = x^2 - 4$ ist im u-v-System zu berechnen. Das u-v-System ist um $\varphi = 30^\circ$ gegenüber der x-y-Ebene gedreht. Gesucht ist die Funktion $v = f(u)$.

Aufgabe 2.12

Die folgenden Ausdrücke sind in der Form $A \cdot \cos(\varphi) + B \cdot \sin(\varphi)$ anzugeben.

- | | | | |
|----|------------------------------|----|------------------------------|
| a) | $4 \sin(\varphi + 20^\circ)$ | c) | $3 \sin(\varphi - 40^\circ)$ |
| b) | $8 \cos(\varphi - 10^\circ)$ | d) | $5 \cos(\varphi + 80^\circ)$ |

Aufgabe 2.13

Die folgenden Ausdrücke sind in der Form $A \cdot \cos(\varphi - \varphi_A)$ anzugeben.

- | | | | |
|----|---|----|--|
| a) | $4 \cdot \cos(\varphi - 10^\circ) + 3 \cdot \cos(\varphi + 80^\circ)$ | b) | $10 \cdot \cos(\varphi - 10^\circ) + 8 \cdot \cos(\varphi - 60^\circ)$ |
|----|---|----|--|

Aufgabe 2.14

Gegeben sind gewisse Informationen der drei komplexen Zahlen $\underline{z}_1$, $\underline{z}_2$, $\underline{z}_3$ und die Gleichung $\underline{z}_3 = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$. Sämtliche Zahlen sind in Komponentenform anzugeben.

- a) $\underline{z}_1 = 5 + j0$, $r_2 = 3$, $r_3 = 7$ b) $\underline{z}_1 = 4 + j0$, $r_2 = 8$, $r_3 = 6$
 c) $\underline{z}_1 = 4 + j3$, $r_2 = 4$, $r_3 = 2$

Aufgabe 2.15

Folgende Ausdrücke sind in Komponentenform anzugeben.

- | | |
|---------------------|-----------------------------------|
| a) $\cos(3 + j4)$ | i) $\arccos(2)$ |
| b) $\sin(1 - j3)$ | j) $\arcsin(2)$ |
| c) $\cos(-2 + j1)$ | k) $\operatorname{arsinh}(2j)$ |
| d) $\sin(-2 + j4)$ | l) $\operatorname{arcosh}(1/2)$ |
| e) $\cosh(-2 + j4)$ | m) $\arccos(1 + j)$ |
| f) $\sinh(-5 + j3)$ | n) $\arcsin(1 + j)$ |
| g) $\cosh(4 + j2)$ | o) $\operatorname{arsinh}(1 + j)$ |
| h) $\sinh(2 - j3)$ | p) $\operatorname{arcosh}(1 + j)$ |

Aufgabe 3.1

Man gebe an

- | | | | |
|----------|----------|------------|----------|
| a) j^0 | b) j^1 | c) $1/j$ | d) j^2 |
| e) j^3 | f) j^4 | g) $1/j^3$ | |

Aufgabe 3.2

Formen Sie in die karthesische Schreibweise um.

- | | |
|--|--|
| a) $\underline{z}_1 = \sqrt{2} * e^{j45^\circ}$ | b) $\underline{z}_2 = 4 * e^{j120^\circ}$ |
| c) $\underline{z}_3 = \sqrt{2} * e^{j-45^\circ}$ | d) $\underline{z}_3 = \sqrt{2} * e^{j315^\circ}$ |
| e) $\underline{z}_5 = 5 * e^{j210^\circ}$ | f) $\underline{z}_6 = 7 * e^{j180^\circ}$ |
| g) $\underline{z}_7 = 8 * e^{j270^\circ}$ | |

Aufgabe 3.3

Die folgenden Zahlen sind in die Exponentialschreibweise umzuformen.

- | | | |
|---|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\underline{z}_1 = \sqrt{2} + j\sqrt{2}$ | b) $\underline{z}_2 = 1 + j\sqrt{3}$ | c) $\underline{z}_3 = j$ |
| d) $\underline{z}_4 = -1$ | e) $\underline{z}_5 = -j$ | f) $\underline{z}_6 = 1$ |
| g) $\underline{z}_7 = \sqrt{3} - j$ | h) $\underline{z}_8 = -1 - j$ | i) $\underline{z}_9 = -\sqrt{3} + j$ |

Aufgabe 3.4

Gegeben sind die Zahlen

$$\underline{z}_1 = 2.4 + j1$$

und

$$\underline{z}_2 = 2.5 e^{j53.1^\circ}$$

- a) Die Zahlen $\underline{z}_1$ und $\underline{z}_2$ sind in die jeweils andere Form umzurechnen.

- b) Man berechne die Zahlen

b1) $\underline{z}_3 = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$

b2) $\underline{z}_4 = \underline{z}_1 - \underline{z}_2$

b3) $\underline{z}_5 = \underline{z}_1 * \underline{z}_2$

b4) $\underline{z}_6 = \frac{1}{\underline{z}_2}$

b5) $\underline{z}_7 = \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}$

b6) $\underline{z}_8 = \sqrt{\underline{z}_2}$

b7) $\underline{z}_9 = \ln(\underline{z}_2)$

Für die Unterpunkte b1 bis b7 sind die Ausgangszahlen und das Ergebnis jeweils in eine Gaußsche Zahlenebene einzutragen.

Aufgabe 3.5

Die folgenden komplexen Multiplikationen sind jeweils ohne Zwischenrechnung in einer Gaußschen Zahlenebene geometrisch auszuführen. Das Ergebnis ist als Zahlenwert anzugeben.

- | | |
|---|--|
| a) $\underline{z}_1 = 5 \cdot e^{i45^\circ} \cdot e^{i90^\circ}$ | e) $\underline{z}_5 = (1 + j) \cdot e^{i45^\circ}$ |
| b) $\underline{z}_2 = 3 \cdot e^{i90^\circ} \cdot e^{i180^\circ}$ | f) $\underline{z}_6 = (2 + j) \cdot j$ |
| c) $\underline{z}_3 = 4 \cdot e^{i135^\circ} \cdot e^{i90^\circ}$ | e) $\underline{z}_7 = j \cdot e^{i45^\circ}$ |
| d) $\underline{z}_4 = (1 + j) \cdot e^{i90^\circ}$ | |

Aufgabe 3.6

Von den nachfolgenden Zahlen $\underline{z}$ ist jeweils die konjugiert

komplexe Zahl $\underline{z}$, sowie $\underline{z}_1 = \underline{z} \cdot \underline{z}^*$ und $\underline{z}_2 = \underline{z} + \underline{z}^*$ zu bilden.

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| a) $\underline{z} = 1 + j$ | b) $\underline{z} = j$ |
| c) $\underline{z} = 3 + j4$ | d) $\underline{z} = -3 + j4$ |

Aufgabe 3.7

Man berechne:

- | | |
|-------------------|-----------------------|
| a) $(3 + j4)^5$ | b) $(\sqrt{3} + j)^7$ |
| c) $(1 + j)^{10}$ | |

Aufgabe 3.8

Die folgenden Gleichungen sind zu lösen. Alle Ergebnisse sind anhand einer Probe zu bestätigen (Einsetzen der Lösung in die Ausgangsgleichung).

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| a) $x^2 - 2x - 2 = 0$ | b) $x^2 - 2x + 2 = 0$ |
| c) $x^2 + 2x + 4 = 0$ | d) $x^2 - 6x - 16 = 0$ |
| e) $x^2 - 6x + 25 = 0$ | f) $4x^2 - 13x + 100 = 0$ |
| g) $x^4 - 12x^2 - 64 = 0$ | h) $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$ |
| f) $x^3 + 8 = 0$ | |

Aufgabe 3.9

Gegeben ist die komplexe Zahl $\underline{z}(t)$ als Funktion der reellen Variablen t .

$$\underline{z}(t) = \underline{z}_1 + t \cdot \underline{z}_2$$

mit

$$\underline{z}_1 = 3 + j2 \quad \text{und} \quad \underline{z}_2 = 0.5 + j$$

Die Zahl $\underline{z}(t)$ ist für drei Wert $t = -4, -2, 0, 2$ und 4 zu berechnen und in die Gaußsche Zahlenebene einzutragen.

Aufgabe 3.10

Sämtliche Wurzeln der folgenden Zahlen sind zu berechnen und mit dem Ausgangswert in jeweils eine (für jeden Unterpunkt) Gaußsche Zahlenebene einzutragen.

- | | | |
|--------------------------|------------------|-------------------|
| a) $\sqrt[2]{2 + 2j}$ | b) $\sqrt[3]{8}$ | c) $\sqrt[5]{-1}$ |
| d) $\sqrt[3]{-10 + 20j}$ | e) $\sqrt[4]{1}$ | f) $\sqrt[4]{j}$ |

Aufgabe 3.11

Die komplexen Funktionen

$$\underline{z}(t) = t + j$$

$$\underline{w}(t) = \frac{1}{t + j}$$

sind für die Werte $t = 0; \pm 0.1; \pm 0.2; \pm 0.5; \pm 1; \pm 2; \pm 5$ und ± 10 zu berechnen und in eine Gaußsche Zahlenebene einzutragen (Maßstab $1 \triangleq 5 \text{ cm}$).

Aufgabe 3.12

Die komplexen Funktionen

$$\underline{z}(t) = 1 + j + t(1 - j)$$

$$\underline{w}(t) = \frac{1}{1 + j + t*(1 - j)}$$

sind für die Wert $t = 0; \pm 0.1; \pm 0.2; \pm 0.5; \pm 1; \pm 2; \pm 5$ und ± 10 zu berechnen und in eine Gaußsche Zahlenebene einzutragen (Maßstab $1 \triangleq 5 \text{ cm}$).

Aufgabe 3.13

Mindestens drei Werte sind anzugeben von:

- | | | | |
|----|---------------------------|----|-----------------------|
| a) | $\ln(7.39 e^{i45^\circ})$ | b) | $\ln(10 + j20)$ |
| c) | $\ln(-10 - 10j)$ | d) | $\ln(-1 + j\sqrt{3})$ |

Aufgabe 3.14Für welche Werte von r und s sind die beiden komplexen Zahlen $\underline{z}_1$ und $\underline{z}_2$ gleich?

- | | | |
|----|----------------------------------|-------------------------------|
| a) | $\underline{z}_1 = r + 4j$ | $\underline{z}_2 = 5 + j s$ |
| b) | $\underline{z}_1 = 2r + 5 + 3sj$ | $\underline{z}_2 = 3s + j 4r$ |

Aufgabe 3.15 (Inversion Gerade $\rightarrow$ Kreis)

Für die folgenden komplexen Geraden ist die Inversion grafisch auszuführen. Für die Funktion $\underline{z}(t)$ und für die inverse Funktion $\underline{w}(t) = 1/\underline{z}(t)$ sind der minimale bzw. der maximale Abstand zu berechnen. Daraus ist die inverse Funktion zu zeichnen. Die Ursprungsfunktion und die invertierte Funktion sind in zwei komplexen Ebenen mit unterschiedlichen Maßstäben zu skizzieren. Spezielle Werte von t sind zu kennzeichnen.

- | | | | |
|----|---|----|--|
| a) | $\underline{z}(t) = 5 + j6 + t(1 - 2j)$ | b) | $\underline{z}(t) = 2 + j3 + t(2 - j5)$ |
| c) | $\underline{z}(t) = -4 + j6 + t(-5 - j1)$ | d) | $\underline{z}(t) = (-3 + j8) + t(3 + j2)$ |

Aufgabe 3.16 (Inversion Gerade $\rightarrow$ Gerade)

Die folgenden komplexen Geraden durch den Nullpunkt sind zu zeichnen und für spezielle Werte von t zu kennzeichnen. Die inverse Funktion $\underline{w}(t) = 1/\underline{z}(t)$ ist ebenfalls zu skizzieren. Die Parameter $s = t^{-1}$ und t sind für spezielle Punkte anzugeben.

- | | | | |
|----|---------------------------------|----|----------------------------------|
| a) | $\underline{z}(t) = (2 + j3) t$ | b) | $\underline{z}(t) = (-1 + j4) t$ |
| c) | $\underline{z}(t) = (2j) t$ | d) | $\underline{z}(t) = (-1 + j) t$ |

Aufgabe 3.17

Die folgenden komplexen Ortskurven sind zu zeichnen. Spezielle Parameter t sind zu kennzeichnen. Hinweise: Die Ortskurven sind teils durch Division in Standard-Ortskurven zu zerlegen. Manchmal ist t durch $s = k/t$ zu ersetzen.

- | | | | |
|----|--|----|---|
| a) | $\underline{w}(t) = \frac{(1 + j) + (1 - j)t}{jt}$ | b) | $\underline{w}(t) = \frac{1 + 2jt}{1 + jt}$ |
| c) | $\underline{w}(t) = \frac{2jt}{1 + jt}$ | d) | $\underline{w}(t) = \frac{t + 4j}{1 + jt}$ |
| e) | $\underline{w}(t) = \frac{2 + j + jt}{jt}$ | f) | $\underline{w}(t) = \frac{2}{1 + 3jt}$ |
| g) | $\underline{w}(t) = \frac{-5j + 7t}{3 + jt}$ | h) | $\underline{w}(t) = \frac{2 + j3 + jt}{1 + jt}$ |
| i) | $\underline{w}(t) = \frac{5 + (6 + j9)t}{1 + 3jt}$ | | |

Aufgabe 3.18 (allgemeine Ortskurven)

Man diskutierte und skizziere die folgenden komplexen Ortskurven. Signifikante Werte für t sind zu berechnen bzw. in die Skizze einzutragen.

a)
$$z(t) = \frac{1}{(1 + jt)^3}$$

b)
$$z(t) = \frac{1}{(1 + jt)^4}$$

c)
$$z(t) = \frac{1}{1 + jt} * \frac{1}{1 + j2t}$$

d)
$$z(t) = \frac{1}{1 + jt} * \frac{1}{1 + j2t} * \frac{1}{1 + 3jt}$$

e)
$$z(t) = \frac{2t}{1 + jt}$$

f)
$$z(t) = \frac{2jt}{1 + jt}$$

g)
$$z(t) = \frac{2t}{(1 + jt)^2}$$

h)
$$z(t) = \frac{1 + jt}{1 + (1 + jt)^2}$$

Aufgabe 3.19 (Zusatzaufgabe)

Die folgenden komplexen Ortskurven sind analytisch als $y = f(x)$ zu berechnen:

a)
$$w(t) = 3t + j(2t + 5)$$

b)
$$w(t) = \frac{1}{-1 + jt}$$

c)
$$w(t) = \frac{1}{(-1 + j) + t(1 + j)}$$

d)
$$w(t) = \frac{1}{1 + (1 + j)t}$$

Aufgabe 4.1

Man berechne die folgenden kartesischen Koordinaten in Polar- und Kugelkoordinaten um.

a)
$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) = (4, 6, 3)$$

b)
$$P_2 = (x_2, y_2, z_2) = (-4, -3, 7)$$

c)
$$P_3 = (x_3, y_3, z_3) = (-4, 5, -3)$$

d)
$$P_4 = (x_4, y_4, z_4) = (8, -2, -1)$$

Aufgabe 4.2

Man berechne die folgenden Zylinderkoordinaten in kartesischen und Kugelkoordinaten.

a)
$$P_1 = (R_1, \varphi_1, z_1) = (10, 30^\circ, 5)$$

b)
$$P_2 = (R_2, \varphi_2, z_2) = (5, 120^\circ, -4)$$

c)
$$P_3 = (R_3, \varphi_3, z_3) = (6, 210^\circ, -3)$$

d)
$$P_4 = (R_4, \varphi_4, z_4) = (7, 330^\circ, 8)$$

Aufgabe 4.3

Die folgenden Kugelkoordinaten sind in kartesischen und Polarkoordinaten umzurechnen.

a)
$$P_1 = (r_1, \varphi_1, \Theta_1) = (5, 30^\circ, 60^\circ)$$

b)
$$P_2 = (r_2, \varphi_2, \Theta_2) = (7, 120^\circ, 80^\circ)$$

c)
$$P_3 = (r_3, \varphi_3, \Theta_3) = (4, 210^\circ, 120^\circ)$$

d)
$$P_4 = (r_4, \varphi_4, \Theta_4) = (8, 330^\circ, 150^\circ)$$

Aufgabe 4.4

Die Gerade im Raum, die durch die zwei Punkte P_1 und P_2 verläuft, ist in der Parameterform $P = P_A + \alpha \cdot P_B$ anzugeben.

a)
$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) = (3, 4, 5)$$

$$P_2 = (x_2, y_2, z_2) = (9, -7, 8)$$

b)
$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) = (2, 5, 7)$$

$$P_2 = (x_2, y_2, z_2) = (3, 6, 9)$$

c)
$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) = (1, 2, 3)$$

$$P_2 = (x_2, y_2, z_2) = (9, -8, 4)$$

Aufgabe 4.5

Die Ebene im Raum, die durch die Punkte P_1 , P_2 und P_3 verläuft, ist in der Parameterform $P = P_A + \alpha P_B + \beta P_C$ anzugeben. Anschließend ist die Funktion $z = f(x, y)$ zu bestimmen.

a)
$$P_1 = (8, 5, 7)$$

$$P_2 = (3, 3, 2)$$

$$P_3 = (5, 4, 6)$$

b)
$$P_1 = (-1, 2, 3)$$

$$P_2 = (7, 8, 9)$$

$$P_3 = (5, 4, 3)$$

c)
$$P_1 = (2, -5, 6)$$

$$P_2 = (-5, -3, -6)$$

$$P_3 = (-4, -3, 9)$$

Aufgabe 4.6

Man berechne die Funktion der Ebene $z = f(x, y)$, die durch die drei Punkte P_1 , P_2 und P_3 verläuft.

- | | | | |
|----|--------------------------------------|--------------------|--------------------|
| a) | $P_1 = (x_1, y_1, z_1) = (3, 0, 0)$ | $P_2 = (0, 4, 0)$ | $P_3 = (0, 0, 7)$ |
| b) | $P_1 = (x_1, y_1, z_1) = (-4, 0, 0)$ | $P_2 = (0, -6, 0)$ | $P_3 = (0, 0, 2)$ |
| c) | $P_1 = (x_1, y_1, z_1) = (-3, 0, 0)$ | $P_2 = (0, 9, 0)$ | $P_3 = (0, 0, -5)$ |

Aufgabe 4.7

Gegeben sind die vier Ebenen:

$$\begin{aligned} E_1 &= (1, 2, 3) + \alpha^*(1, 5, 0) + \beta^*(0, 3, 1) & E_2 &= (5, 6, 7) + \alpha^*(0, -2, -1) + \beta^*(4, 2, 1) \\ E_3 &= (2, -4, 8) + \alpha^*(0, -4, -3) + \beta^*(5, 3, 2) & E_4 &= (1, -6, 5) + \alpha^*(2, -4, -3) + \beta^*(3, 2, 9) \end{aligned}$$

Zu bestimmen sind die Schnittgeraden in der Form $P = P_A + \alpha P_B$.

- a) Schnittmenge aus E_1 und E_2
 b) Schnittmenge aus E_1 und E_3
 c) Schnittmenge aus E_1 und E_4

Aufgabe 4.8

Man bestimme die Schnittpunkte $P_s = (x, y, z)$ die sich aus dem Schnitt von Gerade G und Ebene E ergeben.

- | | |
|---|--|
| a) $E_1 = (1, 2, 3) + \alpha^*(1, 5, 0) + \beta^*(0, 3, 1)$, | $G_1 = (5, 1, 3) + \gamma^*(-2, 5, 4)$ |
| b) $E_2 = (3, 7, 2) + \alpha^*(5, 3, 6) + \beta^*(2, 2, 7)$, | $G_2 = (3, 4, 1) + \gamma^*(1, 2, 3)$ |
| c) $E_3 = (3, 2, 5) + \alpha^*(2, 3, 0) + \beta^*(5, 0, 7)$, | $G_3 = (3, 1, 2) + \gamma^*(3, 7, 9)$ |

Aufgabe 4.9

Die kürzesten Entfernungen zu den Ebenen und Geraden aus Aufgabe 4.8 sind zu bestimmen.

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| a) zu E_1 | b) zu E_2 | c) zu E_3 |
| d) zu G_1 | e) zu G_2 | f) zu G_3 |

Für die Aufgabe 5.1 bis 5.5 sind die ersten Ableitungen y' der Funktion y zu bilden.

Aufgabe 5.1 (Ganze rationale Funktionen)

- | | |
|---------------------------------|--|
| a) $y = 3x$ | b) $y = 5x^2$ |
| c) $y = 6x^3 - 17x^2 + 2x$ | d) $y = 4x^4 + 3x^2 + 2x - 5$ |
| e) $y = 20x^5 - 6x^2 + 9x - 20$ | f) $y = 8(x^2 + x^4)$ |
| g) $y = A(bx^2 + cx + a)$ | h) $y = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ |

Aufgabe 5.2 (Summe von Funktionen, Standardfunktion)

- | | |
|--|---------------------------------|
| a) $y = A \cdot \sin(x) + B \cdot \cos(x)$ | b) $y = A \cdot \ln(x) + B e^x$ |
| c) $y = x^2 - 6 \cdot \sin(x)$ | d) $y = x^3 + F \cdot \cos(x)$ |
| e) $y = 10 \cdot \cos(x) - 5e^x$ | f) $y = \ln(x^7) - \ln(x^5)$ |

Aufgabe 5.3 (Produktregel)

- | | |
|---|---|
| a) $y = x^3 \cdot \sin(x)$ | b) $y = x^2 \cdot \ln(x)$ |
| c) $y = (x^2 + 2x + 5) \cdot (x^3 - e^x)$ | d) $y = (x^2 + 1) \cdot \cos(x)$ |
| e) $y = \ln x^5 \cdot \sin(x)$ | f) $y = (x^4 - 5) \cdot (x^3 + 2x - 7)$ |
| g) $y = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$ | h) $y = e^x \cdot \ln(x)$ |

Aufgabe 5.4 (Quotientenregel)

a) $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$

b) $y = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

c) $y = \frac{x}{\ln(x)}$

d) $y = \frac{x^2 + 5x - 2}{x^2 - 1}$

e) $y = \frac{x^2}{x^3 + 5}$

f) $y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$

g) $y = \frac{\sin(x)}{e^x}$

h) $y = \frac{\cos(x)}{\ln(x)}$

Aufgabe 5.5 (Kettenregel)

a) $y = \sin^3(x)$

b) $y = \cos^5(x)$

c) $y = (1 + x^2)^3$

d) $y = [x + \cos(x)]^4$

e) $y = \ln(x^2 + 2x + 3)$

f) $y = \exp[5x^2 + 8x + 2]$

g) $y = \sin(ax)$

h) $y = \sin(x^2 + 5x + 7)$

i) $y = \sin(e^x)$

j) $y = \ln(a \cdot x)$

k) $y = e^{ax}$

l) $y = \ln \frac{x}{1 + x^2}$

m) $y = \ln[\sin(x^2 + 5)]$

n) $y = \exp[\sin(ax^2 + b)]$

o) $y = \sin \frac{x}{1 + x^2} \cdot \cos(1 + x^2)$

Für die Aufgaben 5.6 bis 5.8 sind die ersten Ableitungen y' der Funktionen y zu bilden.

Aufgabe 5.6 (Logarithmische Differentiation)

a) $y = x^x$

b) $y = [\sin(x)]^{\cos x}$

c) $y = (x^2 + 1)^{2x+7}$

d) $y = [\ln(x^2)]^{3x+1}$

e) $y = (3x + 5)^{7x}$

f) $y = [\tanh(x)]^{\ln(x)}$

g) $y = [\cosh(x)]^{\sinh x}$

h) $y = [\sin(x)]^{2x+1}$

Aufgabe 5.7 (Standard-Funktionen)

a) $y = \ln(x^2 + 1)$

b) $y = \lg(x^3 + 2)$

c) $y = \sin(x^2 + 4)$

d) $y = \cos(x^2 + 5)$

e) $y = \tan(4x^3 + 2)$

f) $y = \cot(5x^6 + 1)$

g) $y = \arcsin(2x + 5)$

h) $y = \arccos(x^2)$

i) $y = \arctan(x^3)$

j) $y = \operatorname{arccot}(x^4)$

k) $y = \cosh(x^2 + 5)$

l) $y = \sinh(x^6 + 2)$

m) $y = \tanh(x^5 + 1)$

n) $y = \coth(x^4 + 2)$

o) $y = \operatorname{arcosh}(1 + x^2)$

p) $y = \operatorname{arsinh}(2 + x^3)$

q) $y = \operatorname{artanh}(x^2 - x)$

r) $y = \operatorname{arcoth}(2x + 5)$

Aufgabe 5.8 (allgemein)

a) $y = \sin(1/x) \cdot \cos(ax + 5)$

b) $y = (x^2 + 1) \cdot \sin(x^2 + 5)$

c) $y = \frac{x^3 + 1}{\ln(x)}$

d) $y = [\sin(x^2 + 1)]^{\cos x}$

e) $y = \sin(x^2 + 1) \cdot \cos(x^2 + 1) \cdot \tan(x^2 + 1)$

f) $y = \frac{\sin(x^2 + 1)}{\cos(x^2 - 1)}$

g) $y = \sinh^4(x^3 + 5)$

h) $y = (x^2 + 1) \cdot \cos(x^3 + 1) \cdot \sinh(4x + 5)$

i) $y = \frac{3x + 5}{\ln(x^5 + 2)}$

j) $y = \cosh^5(x^2 + 1)$

k) $y = \sin^3(3x^2 + 2x + 5)$

Aufgabe 5.9

Von den folgenden Funktionen ist jeweils die erste bis vierte Ableitung zu bilden.

a) $y = 5x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 2x + 5$

b) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

c) $y = x \cdot \cos(ax)$

d) $y = x \cdot e^{ax}$

e) $y = x \cdot \ln x$

f) $y = \sin^2(ax)$

Ergebnisse

Gleichungssystem 1.1

$$x_1 = -23$$

$$x_2 = 15$$

Gleichungssystem 1.2

$$x_1 = -14$$

$$x_2 = 121$$

$$x_3 = -110$$

Gleichungssystem 1.3

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a*d - b*c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \quad x_1 = \frac{d*k_1 - b*k_2}{a*d - b*c} \quad x_2 = \frac{-c*k_1 + a*k_2}{a*d - b*c}$$

Gleichungssystem 1.4

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{c}{8a^2*b - 2a*b^2 - a^3} \begin{pmatrix} 7a*b - 2b^2 + a^2 \\ 4a^2 - 2a*b \\ a^2 - 4a*b \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem 1.5

$$x_1 = 0.1111$$

$$x_2 = 0.4444$$

$$x_3 = 0.2222$$

Gleichungssystem 1.6

$$x_1 = 0.5499$$

$$x_2 = 0.3564$$

$$x_3 = 0.4502$$

Gleichungssystem 1.7

$$x_1 = 3.63117$$

$$x_2 = -2.69704$$

$$x_3 = 1.10581$$

$$x_4 = -1.68644$$

$$x_5 = 2.56471$$

Aufgabe 1.5

$$\text{a) } \bar{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.1667 & -2 \\ -7.75 & -0.25 & 6.5 \\ 4.25 & 0.0833 & -3.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \bar{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.1239 & 0.1293 & -0.0601 \\ 0.1038 & 0.0055 & 0.0820 \\ -0.0182 & 0.0692 & 0.0383 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.6

$$\det(\bar{A}) = a*e*i + b*f*g + c*d*h - c*e*g - a*f*h - b*d*i$$

$$\bar{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\bar{A})}$$

(e*i - f*h)	-(b*i - c*h)	(b*f - c*e)
-(d*i - f*g)	(a*i - c*g)	-(a*f - c*d)
(d*h - e*g)	-(a*h - b*g)	(a*e - b*d)

Aufgabe 1.7

$$b) \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 37 \\ 39 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_4 = 22 \quad \vec{c}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$d) \quad a_b = 4.919$$

$$e) \quad A = 14 \text{ cm}^2$$

Aufgabe 1.8

$$A = 5 \text{ cm}^2$$

Aufgabe 1.9

$$a) \quad y(2) = 0 \quad y(3) = -6 \quad y(-2) = 24 \quad y(-3) = 0$$

$$b) \quad (x^3 - 3x^2 - 10x + 24) : (x - 2) = x^2 - x - 12$$

$$(x^3 - 3x^2 - 10x + 24) : (x - 3) = x^2 - 10 - \frac{6}{x - 3}$$

$$(x^3 - 3x^2 - 10x + 24) : (x + 2) = x^2 - 5x + \frac{24}{x + 2}$$

$$(x^3 - 3x^2 - 10x + 24) : (x + 3) = x^2 - 6x + 8$$

$$c) \quad x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x + 5)^3 - 18(x + 5)^2 + 95(x + 5) - 126$$

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x - 5)^3 + 12(x - 5)^2 + 35(x - 5) + 24$$

$$d) \quad x_1 = 4 \quad x_2 = -3 \quad x_3 = 2$$

Aufgabe 1.10

$$a) \quad x_1 = 4 \quad x_2 = -2$$

$$b) \quad x_1 = 1 + 3j \quad x_2 = 1 - 3j$$

$$c) \quad x_1 = 2 + 5j \quad x_2 = 2 - 5j$$

$$d) \quad x_1 = -3 + 9.53939j \quad x_2 = -3 - 9.53939j$$

$$e) \quad x_1 = 3 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = -11$$

$$f) \quad x_1 = 0 \quad x_2 = -6.05539 \quad x_3 = 12.05539$$

$$g) \quad x_1 = 1.79891 + 1.11179j \quad x_2 = 1.79891 - 1.11179j$$

$$x_3 = -1.79891 + 1.11179j \quad x_4 = -1.79891 - 1.11179j$$

$$h) \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -2 \quad x_3 = 2j \quad x_4 = -2j$$

$$i) \quad x_1 = 1.41421 + 1.41421j \quad x_2 = 1.41421 - 1.41421j$$

$$x_3 = -1.41421 + 1.41421j \quad x_4 = -1.41421 - 1.41421j$$

$$j) \quad x_1 = 3 \quad x_2 = -1.5 + 2.59808j \quad x_3 = -1.5 - 2.59808j$$

$$k) \quad x_1 = 1.5 + 0.86603j \quad x_2 = 0 - 1.73205j \quad x_3 = -1.5 + 0.86603j$$

$$x_4 = 1.5 - 0.86603j \quad x_5 = 0 + 1.73205j \quad x_6 = -1.5 - 0.86603j$$

Aufgabe 1.11

- | | | | |
|----|----------------|----------------------------|----------------------------|
| a) | $x_1 = 2$ | $x_2 = -2$ | $x_3 = -9$ |
| b) | $x_1 = 0 + 2j$ | $x_2 = 0 - 2j$ | $x_3 = -9$ |
| c) | $x_1 = 7$ | $x_2 = 10$ | $x_3 = -5$ |
| d) | $x_1 = -0.329$ | $x_2 = -8.8355 + 3.62218j$ | $x_3 = -8.8355 - 3.62218j$ |

Aufgabe 1.12

- | | | | |
|----|------------------------|------------------------|----------------|
| a) | $x_1 = 8$ | $x_2 = -5$ | |
| b) | $x_1 = 0.20871$ | $x_2 = 4.79129$ | $x_3 = -6$ |
| c) | $x_1 = -1$ | $x_2 = 8$ | $x_3 = -3$ |
| d) | $x_1 = 0.61803$ | $x_2 = 0.5 + 1.32288j$ | |
| | $x_3 = 0.5 - 1.32288j$ | $x_4 = -1.61803$ | |
| f) | $x_1 = 2$ | $x_2 = 0 + 2j$ | $x_3 = 0 - 2j$ |
| | $x_4 = -3$ | $x_5 = -8$ | |

Aufgabe 1.13

- | | | | | | |
|----|------------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|--|
| a) | $x_1 = \frac{\pi}{2}$ | $x_3 = 0$ | $x_4 = 2\pi$ | | |
| b) | $x_1 = 0$ | $x_2 = \pi$ | $x_3 = 2\pi$ | | |
| | $x_4 = \frac{\pi}{4}$ | $x_5 = \frac{3}{4}\pi$ | $x_6 = \frac{5}{4}\pi$ | $x_7 = \frac{7}{4}\pi$ | |
| c) | $x_1 = \frac{\pi}{2}$ | $x_2 = 0.6435$ | | | |
| d) | $x_1 = 1.3552$ | $x_3 = 6.0088$ | | | |
| e) | $x_1 = 0.2278$ | $x_3 = 1.34302$ | | | |
| f) | $x_1 = \frac{7}{6}\pi$ | $x_2 = \frac{11}{6}\pi$ | | | |
| g) | $x_1 = 0.27540$ | $x_2 = 1.86620$ | | | |

Aufgabe 1.14

- | | | | |
|----|--|----|---------------|
| a) | $x = 19$ | b) | $x = 5$ |
| c) | $x = \frac{3\ln 5}{3\ln 4 + 2\ln 5 - \ln 6} = 0.86440$ | d) | $x = 48$ |
| e) | $x = 7.7537$ | f) | $x = -1.3903$ |

Aufgabe 1.15

- | | | | |
|----|----------------------|----|---------------------------|
| a) | $x_2 = -2$ | b) | $x_2 = -2 + e^3 = 18.086$ |
| c) | $x = -\frac{23}{35}$ | d) | $x = 20.434$ |

Aufgabe 1.16 und Aufgabe 1.17

- | | | | |
|----|---------------|----|---------------|
| a) | $x = 1$ | b) | $x = 1.4973$ |
| c) | $x = 0.44285$ | d) | $x = 4.6441$ |
| e) | $x = 0.44721$ | f) | $x = -2.1323$ |
| g) | $x = 0.25410$ | | |

Aufgabe 2.1 $a_1 = \frac{2}{5}$

Aufgabe 2.2 $y = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}x$

Aufgabe 2.3
 $a_0 = 5$ $a_1 = -\frac{5}{8}$

Aufgabe 2.4 $x_s = -2$ $y_s = 1$

Aufgabe 2.5 $y = 21 - 8x + x^2$

Aufgabe 2.6 $y = -1 + 2(x - 2)^2$

Aufgabe 2.7
 a) $y = 1.5x^2 - 10.5x + 15$ $y = 1.5(x - 3.5)^2 - 3.375$
 b) $y = 6 + 8x + 2x^2$ $y = -2 + 2(x + 2)^2$

Aufgabe 2.8 $y = 2x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 3x + 15$

Aufgabe 2.9
 $x_L = -3$ $x_{p1} = 2$ $x_{p2} = -6$
 $x_{N1} = -5$ $x_{N2} = -4$ $x_{N3} = 4$ $x_{N4} = 5$

$$y = x^2 - 4x - 13 + \frac{4x + 244}{x^2 + 4x - 12}$$

Aufgabe 2.10
 a) $\left(\frac{x-4}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-5}{2}\right)^2 = 1$

Ellipse $x_0 = 4$ $y_0 = 5$ $a = 3$ $b = 2$

b) $-\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{2}\right)^2 = 1$

Hyperbel nach oben und unten geöffnet

$x_0 = 3$ $y_0 = -2$ $a = 3$ $b = 2$

c) $-\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-4}{3}\right)^2 = -1$

Hyperbel nach rechts und links geöffnet

$x_0 = -2$ $y_0 = 4$ $a = 2$ $b = 3$

Aufgabe 2.11
 a) $A = 4 \cdot \sin 20^\circ$ $B = 4 \cdot \cos 20^\circ$
 b) $A = 8 \cdot \cos 10^\circ$ $B = 8 \cdot \sin 10^\circ$
 c) $A = -3 \cdot \sin 40^\circ$ $B = 3 \cdot \cos 40^\circ$
 d) $A = 5 \cdot \cos 80^\circ$ $B = -5 \cdot \sin 80^\circ$

Aufgabe 2.12

a) $5 \cdot \cos(\varphi + 26.870^\circ)$ b) $16.335 \cdot \cos(\varphi - 32.034^\circ)$

Aufgabe 2.13

a) $\underline{z}_3 = 6.5 \pm j2.591$ $\underline{z}_2 = z_3 - z_1 = 1.5 \pm j2.5981$
 b) $\underline{z}_3 = -1.5 \pm j5.8094$ $\underline{z}_2 = z_3 - z_1 = -5.5 \pm j5.8094$
 c) $\underline{z}_3 = 0.1238 + j1.996$ $\underline{z}_2 = -3.8762 - j1.004$ (1.Lösung)
 $\underline{z}_3 = 1.951 - j0.4400$ $\underline{z}_2 = -2.049 - j3.4400$ (2.Lösung)

Aufgabe 2.14

a) $\cos(3 + j4) = -27.03495 - j3.85115$ b) $\sin(1 - j3) = 8.47165 - j5.41268$
 c) $\cos(-2 + j1) = -0.64215 + j1.06861$ d) $\sin(-2 + j4) = -24.83131 - j11.35661$
 e) $\cosh(-2 + j4) = -2.45914 + j2.74482$ f) $\sinh(-5 + j3) = 73.46062 + j10.47251$
 g) $\cosh(4 + j2) = -11.36423 + j24.81465$ h) $\sinh(2 - j3) = -3.59056 - j0.53092$
 i) $\arccos(2 + j0) = 0.00000 + j1.31696$ j) $\arcsin(2 + j0) = 1.57080 - j1.31696$
 k) $\operatorname{arsinh}(0 + j2) = 1.31696 + j1.57080$ l) $\operatorname{arcosh}(1 + j0) = 0.00000 + j1.04720$
 m) $\arccos(1 + j1) = -0.90456 + j1.06128$ n) $\arcsin(1 + j1) = 0.66624 + j1.06128$
 o) $\operatorname{arsinh}(1 + j1) = 1.06128 + j0.66624$ p) $\operatorname{arcosh}(1 + j1) = 1.06128 + j0.90456$

Aufgabe 3.1

a) $j^0 = 1$ b) $j^1 = j$ c) $\frac{1}{j} = -j$
 d) $j^2 = -1$ e) $j^2 = -j$ f) $j^4 = 1$
 g) $\frac{1}{j} = j$

Aufgabe 3.2

a) $\underline{z}_1 = 1 + j$ b) $\underline{z}_2 = -2 + j2 \cdot \sqrt{3}$ c) $\underline{z}_3 = 1 - j$
 d) $\underline{z}_4 = 1 - j$ e) $\underline{z}_5 = -\frac{5}{2}\sqrt{3} - j2.5$ f) $\underline{z}_6 = -7$
 g) $\underline{z}_7 = -8j$

Aufgabe 3.3

a) $\underline{z}_1 = \sqrt{2} + j\sqrt{2} = 2 \cdot e^{j45^\circ}$ f) $\underline{z}_6 = 1 = 1 \cdot e^{j0^\circ} = 1/\underline{0^\circ}$
 b) $\underline{z}_2 = 1 + j\sqrt{3} = \sqrt{45} \cdot e^{j60^\circ} = 2/\underline{60^\circ}$ g) $\underline{z}_7 = \sqrt{3} - j = \sqrt{4} \cdot e^{-j30^\circ} = 2/\underline{-30^\circ}$
 c) $\underline{z}_2 = j = 1 \cdot e^{j90^\circ}$ h) $\underline{z}_8 = -1 - j = \sqrt{2} \cdot e^{-j180^\circ + 45^\circ} = \sqrt{2}/\underline{225^\circ}$
 d) $\underline{z}_4 = -1 = 1 \cdot e^{j180^\circ}$ i) $\underline{z}_9 = -\sqrt{3} + j = \sqrt{4} \cdot e^{j(180^\circ - 30^\circ)} = 2/\underline{150^\circ}$
 e) $\underline{z}_5 = 1e^{j90^\circ} = j$

Aufgabe 3.4

- a) $\underline{z}_1 = 2.4 + j1$ $\underline{z}_1 = 2.6 / 22.62^\circ$ $\underline{z}_2 = 2.5 / 53.13^\circ$ $\underline{z}_2 = 1.500 + j2.0000$
- b1) $\underline{z}_3 = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = 3.9 + j3 = 4.9204 / 37.569^\circ$ b2) $\underline{z}_4 = \underline{z}_1 - \underline{z}_2 = 0.9 - j1 = 1.3454 / -48.013^\circ$
- b3) $\underline{z}_5 = \underline{z}_1 * \underline{z}_2 = 6.5 / 75.75^\circ = 1.6 + j6.3$ b4) $\underline{z}_6 = 1/\underline{z}_2 = 0.4 / -53.13^\circ = 0.24 - j0.32$
- b5) $\underline{z}_7 = \underline{z}_1/\underline{z}_2 = 1.04 / -30.51^\circ = 0.8960 - j0.5280$
- b6) $\underline{z}_8 = \sqrt{\underline{z}_2} = 1.581/26.56^\circ = 1.4142 + j0.7071$
- $\underline{z}_8 = \sqrt{\underline{z}_2} = -1.581/206.56^\circ = -1.4142 - j0.7071$
- b7) $\underline{z}_9 = \ln(\underline{z}_2) = 0.9163 + j(0.9273 + k*2\pi)$

Aufgabe 3.5

- a) $5 * e^{j45^\circ} * e^{j90^\circ} = 5 * e^{j135^\circ}$ b) $3 * e^{j90^\circ} * e^{j180^\circ} = 3 * e^{j270^\circ}$
- c) $4 * e^{j135^\circ} * e^{j90^\circ} = 4 * e^{j225^\circ}$
- d) $(1 + j) * e^{j90^\circ} = \sqrt{2} * e^{45^\circ} * e^{j90^\circ} = \sqrt{2} * e^{j135^\circ}$
- e) $(1 + j) * e^{j45^\circ} = \sqrt{2} * e^{45^\circ} * e^{j45^\circ} = \sqrt{2} * e^{j90^\circ} = \sqrt{2}j$
- f) $(2 + j) * j = -1 + 2j$ g) $j * e^{j45^\circ} = e^{j90^\circ} * e^{j45^\circ} = e^{j135^\circ}$

Aufgabe 3.6

- a) $\underline{z} = 1 + j$ $\underline{z}^* = 1 - j$ $\underline{z} + \underline{z}^* = 2$ $\underline{z} * \underline{z}^* = 2$
- b) $\underline{z} = j$ $\underline{z}^* = -j$ $\underline{z} + \underline{z}^* = 0$ $\underline{z} * \underline{z}^* = 1$
- c) $\underline{z} = 3 + j4$ $\underline{z}^* = 3 - j4$ $\underline{z} + \underline{z}^* = 6$ $\underline{z} * \underline{z}^* = 25$
- d) $\underline{z} = -3 + j4$ $\underline{z}^* = -3 - j4$ $\underline{z} + \underline{z}^* = -6$ $\underline{z} * \underline{z}^* = 25$

Aufgabe 3.7

- a) $(3 + j4)^5 = -237 - j3116$ c) $(1 + j)^{10} = 32j$
- b) $(1 + \sqrt{3})^6 = 64$ d) $(\sqrt{3} + j)^7 = -110.85 - j64$

Aufgabe 3.8

- a) $x_{12} = 1 \pm \sqrt{3}$ b) $x_{12} = 1 \pm j$
- c) $x_{12} = -1 \pm j\sqrt{3}$ d) $x_1 = 8 \ x_2 = -2$
- e) $x_{12} = 3 \pm 4j$ f) $x_{12} = \frac{1}{8}(13 \pm j\sqrt{1431})$
- g) $x_{12} = \pm 4$ $x_{34} = \pm 2j$
- h) $x_1 = 1.099 \pm j0.4551$ $x_2 = -1.099 \pm j0.4551$
- i) $x_1 = -2$ $x_{23} = 1 \pm j\sqrt{3}$

Aufgabe 3.9

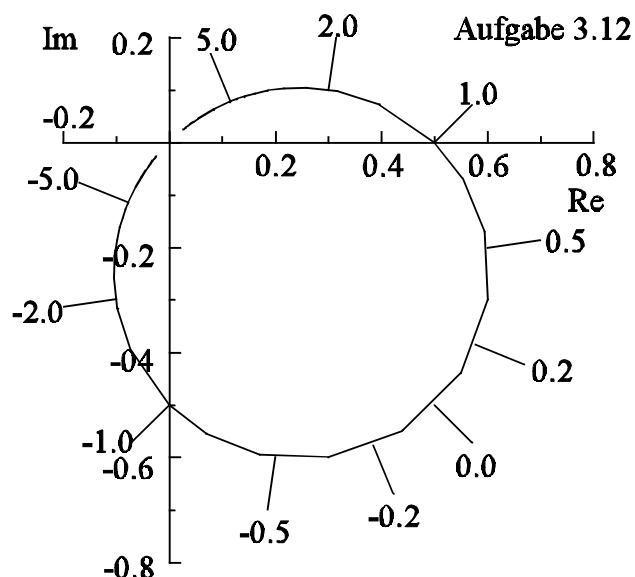
Komplexe Gerade in Gauß'scher Ebene

Aufgabe 3.10

- a) $z_1 = 1.5538 + j0.6436 = 1.6818 \angle 22.500^\circ$ $z_2 = -1.5538 - j0.6436 = 1.6818 \angle 202.500^\circ$
- b) $z_1 = 2.0 + j0.0000 = 2.0000 \angle 0.000^\circ$ $z_2 = -1.0000 + j1.7321 = 2.0000 \angle 120.000^\circ$
 $z_3 = -1.0000 - j1.7321 = 2.0000 \angle 240.000^\circ$
- c) $z_1 = 0.8090 + j0.5878 = 1.0000 \angle 36.000^\circ$ $z_2 = -0.3090 + j0.9511 = 1.0000 \angle 108.000^\circ$
 $z_3 = -1.0000 + j0.0000 = 1.0000 \angle 180.000^\circ$ $z_4 = -0.3090 - j0.9511 = 1.0000 \angle 252.000^\circ$
 $z_5 = 0.8090 - j0.5878 = 1.0000 \angle -36.000^\circ$
- d) $z_1 = 2.1939 + j1.7674 = 2.8173 \angle 38.855^\circ$ $z_2 = -2.6276 + j1.0163 = 2.8173 \angle 158.855^\circ$
 $z_3 = 0.4337 - j2.7837 = 2.8173 \angle -81.145^\circ$
- e) $z_1 = 1.0000 + j0.0000 = 1.0000 \angle 0.000^\circ$ $z_2 = -0.0000 + j1.0000 = 1.0000 \angle 90.000^\circ$
 $z_3 = -1.0000 - j0.0000 = 1.0000 \angle 180.000^\circ$ $z_4 = 0.0000 - j1.0000 = 1.0000 \angle 270.000^\circ$
- f) $z_1 = 0.9239 + j0.3827 = 1.0000 \angle 22.500^\circ$ $z_2 = -0.3827 + j0.9239 = 1.0000 \angle 112.500^\circ$
 $z_3 = -0.9239 - j0.3827 = 1.0000 \angle 202.500^\circ$ $z_4 = 0.3827 - j0.9239 = 1.0000 \angle -67.500^\circ$

Aufgabe 3.11

$$\begin{aligned}
 w(t=-10) &= -0.0990 - j0.0099 = 0.0995 \angle 185.711^\circ \\
 w(t=-5) &= -0.1923 - j0.0385 = 0.1961 \angle 191.310^\circ \\
 w(t=-2) &= -0.4000 - j0.2000 = 0.4472 \angle 206.565^\circ \\
 w(t=-1) &= -0.5000 - j0.5000 = 0.7071 \angle 225.000^\circ \\
 w(t=-0.5) &= -0.4000 - j0.8000 = 0.8944 \angle 243.435^\circ \\
 w(t=-0.2) &= -0.1923 - j0.9615 = 0.9806 \angle 258.690^\circ \\
 w(t=-0.1) &= -0.0990 - j0.9901 = 0.9950 \angle 264.289^\circ \\
 w(t=0) &= 0.0000 - j1.0000 = 1.0000 \angle 270.000^\circ \\
 w(t=0.1) &= 0.0990 - j0.9901 = 0.9950 \angle -84.289^\circ \\
 w(t=0.2) &= 0.1923 - j0.9615 = 0.9806 \angle -78.690^\circ \\
 w(t=0.5) &= 0.4000 - j0.8000 = 0.8944 \angle -63.435^\circ \\
 w(t=1) &= 0.5000 - j0.5000 = 0.7071 \angle -45.000^\circ \\
 w(t=2) &= 0.4000 - j0.2000 = 0.4472 \angle -26.565^\circ \\
 w(t=5) &= 0.1923 - j0.0385 = 0.1961 \angle -11.310^\circ \\
 w(t=10) &= 0.0990 - j0.0099 = 0.0995 \angle -5.711^\circ
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.12

$$\begin{aligned}
 w(t=-10) &= -0.0446 - j0.0545 = 0.0704 \angle 230.711^\circ \\
 w(t=-5) &= -0.0769 - j0.1154 = 0.1387 \angle 236.310^\circ \\
 w(t=-2) &= -0.1000 - j0.3000 = 0.3162 \angle 251.565^\circ \\
 w(t=-1) &= 0.0000 - j0.5000 = 0.5000 \angle 270.000^\circ \\
 w(t=-0.5) &= 0.2000 - j0.6000 = 0.6325 \angle -71.565^\circ \\
 w(t=-0.2) &= 0.3846 - j0.5769 = 0.6934 \angle -56.310^\circ \\
 w(t=-0.1) &= 0.4455 - j0.5446 = 0.7036 \angle -50.711^\circ \\
 w(t=0) &= 0.5000 - j0.5000 = 0.7071 \angle -45.000^\circ \\
 w(t=0.1) &= 0.5446 - j0.4455 = 0.7036 \angle -39.289^\circ \\
 w(t=0.2) &= 0.5769 - j0.3846 = 0.6934 \angle -33.690^\circ \\
 w(t=0.5) &= 0.6000 - j0.2000 = 0.6325 \angle -18.435^\circ \\
 w(t=1) &= 0.5000 + j0.0000 = 0.5000 \angle 0.000^\circ \\
 w(t=2) &= 0.3000 + j0.1000 = 0.3162 \angle 18.435^\circ \\
 w(t=5) &= 0.1154 + j0.0769 = 0.1387 \angle 33.690^\circ \\
 w(t=10) &= 0.0545 + j0.0446 = 0.0704 \angle 39.289^\circ
 \end{aligned}$$

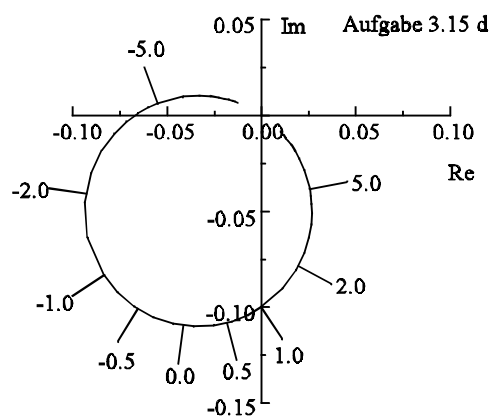
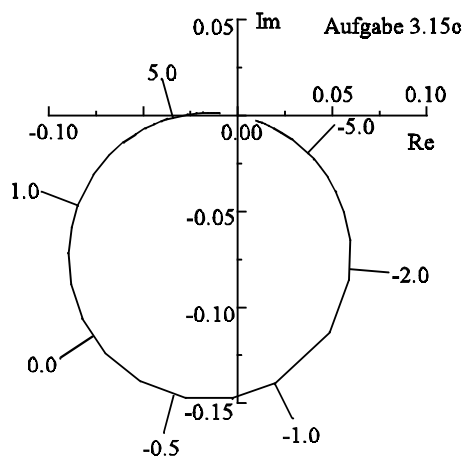
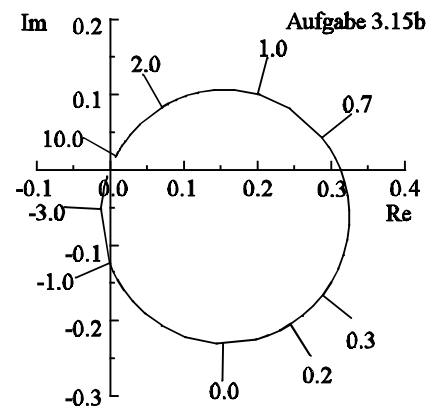
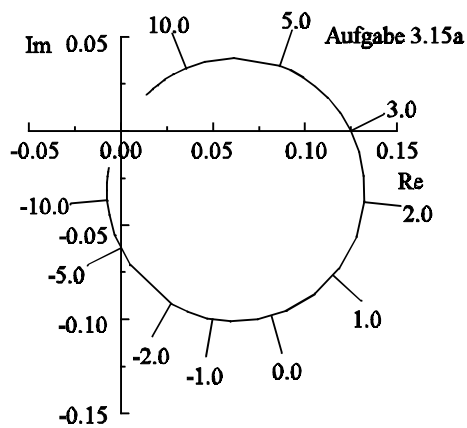
Aufgabe 3.13

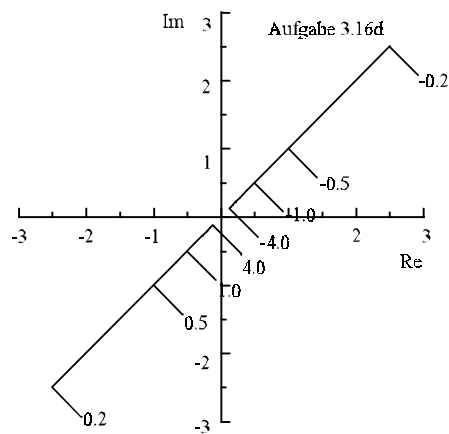
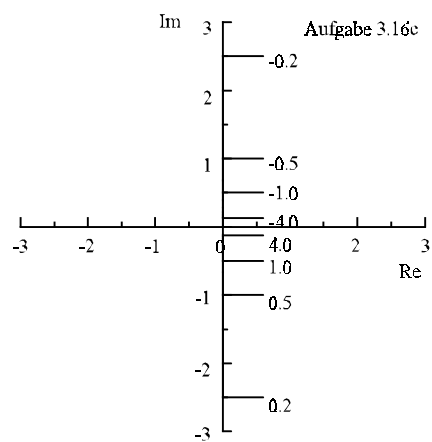
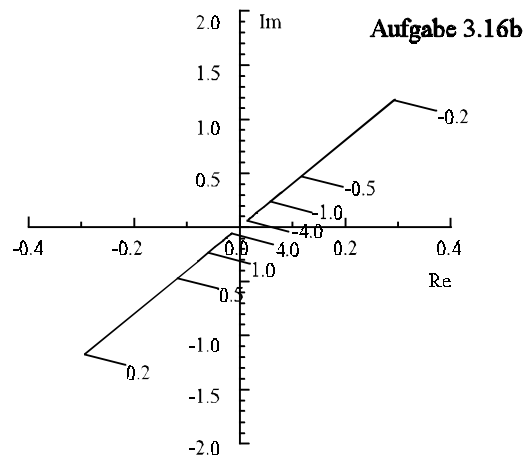
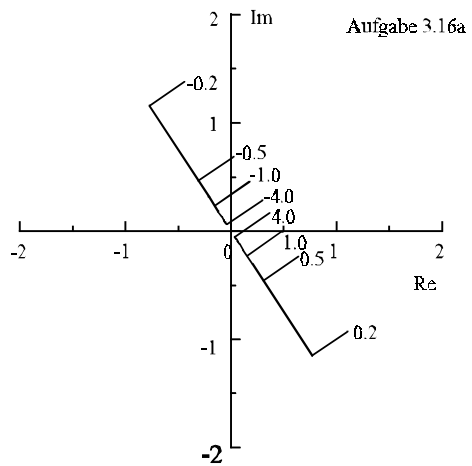
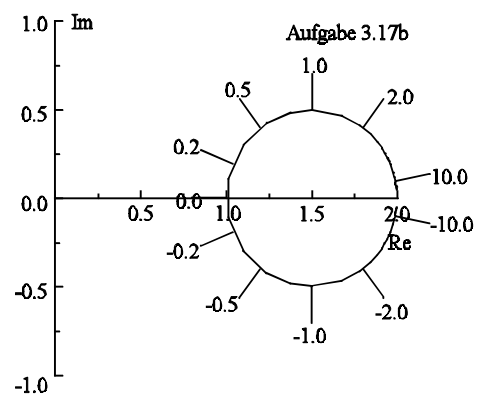
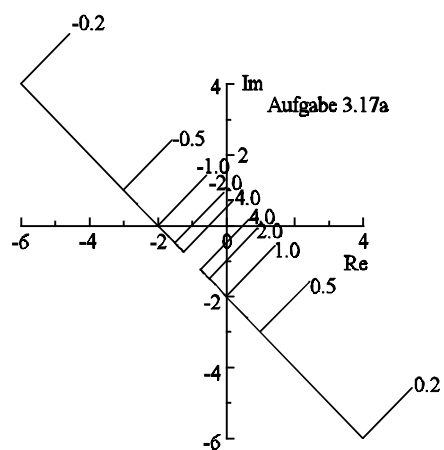
- a) $z_1 = 2.0000 + j0.7854 = 2.1487 / 21.440^\circ$
 $z_2 = 2.0000 + j7.0686 = 7.3461 / 74.202^\circ$
 $z_3 = 2.0000 - j5.4978 = 5.8503 / -70.009^\circ$
- b) $z_1 = 3.1073 + j1.1071 = 3.2987 / 19.611^\circ$
 $z_2 = 3.1073 + j7.3903 = 8.0170 / 67.195^\circ$
 $z_3 = 3.1073 - j5.1760 = 6.0371 / -59.023^\circ$
- c) $z_1 = 2.6492 + j3.9270 = 4.7370 / 55.996^\circ$
 $z_2 = 2.6492 + j10.2102 = 10.5483 / 75.455^\circ$
 $z_3 = 2.6492 - j2.3562 = 3.5454 / -41.650^\circ$
- d) $z_1 = 0.6931 + j2.0944 = 2.2061 / 71.688^\circ$
 $z_2 = 0.6931 + j8.3776 = 8.4062 / 85.270^\circ$
 $z_3 = 0.6931 - j4.1888 = 4.2458 / -80.604^\circ$

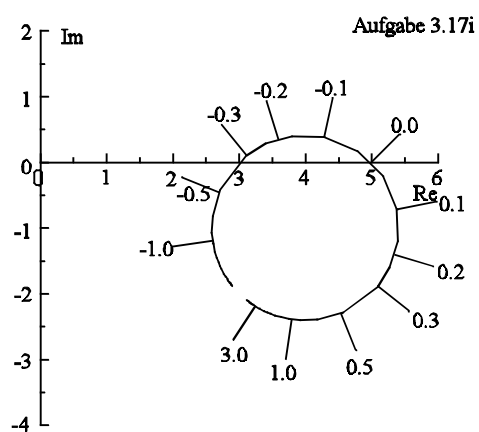
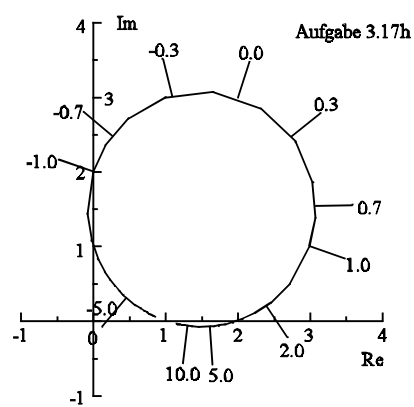
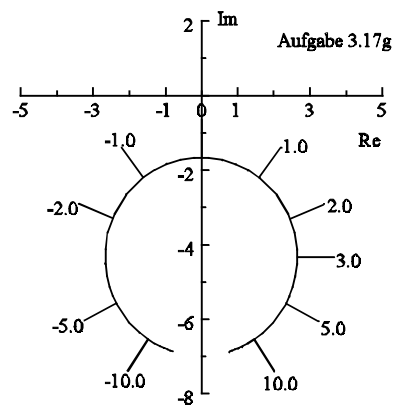
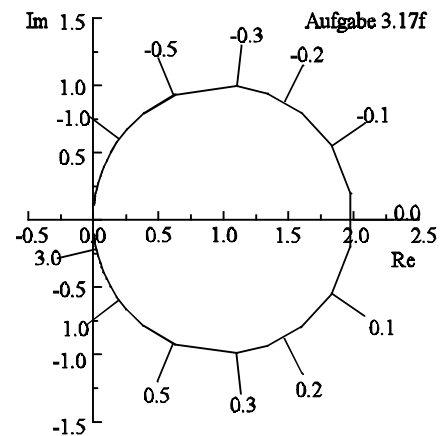
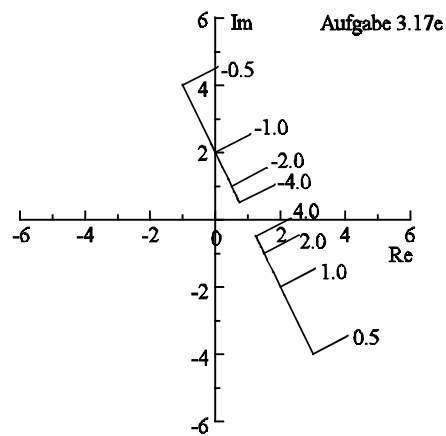
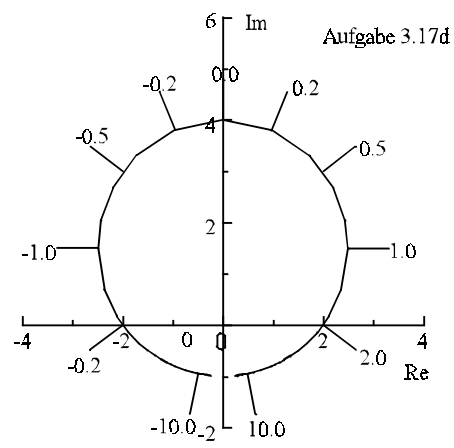
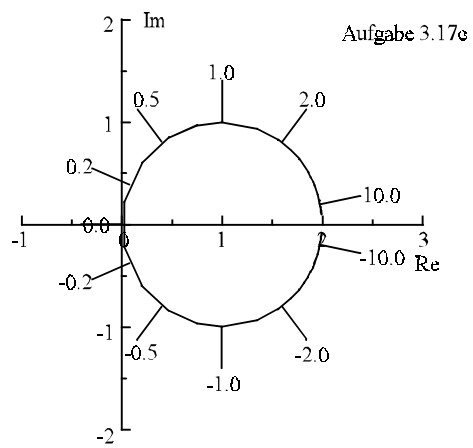
Aufgabe 3.14

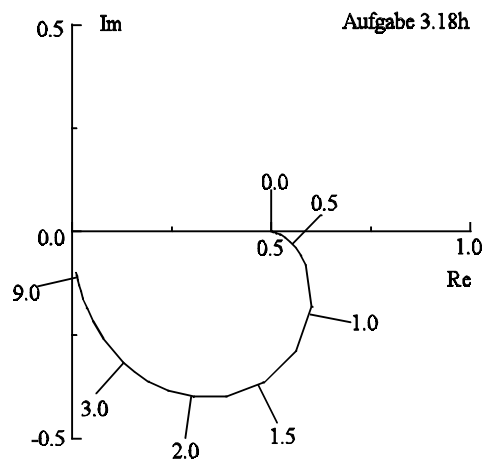
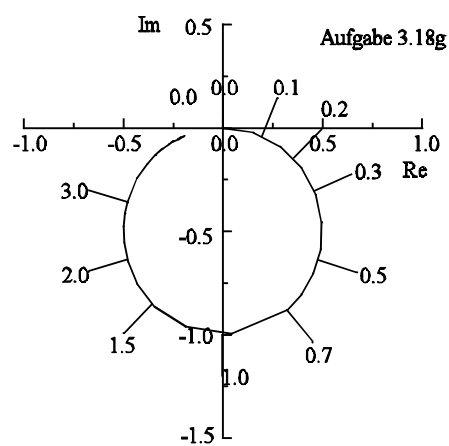
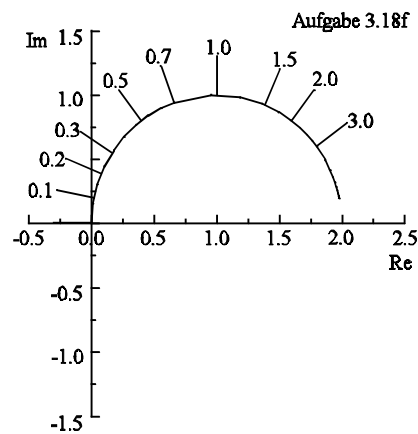
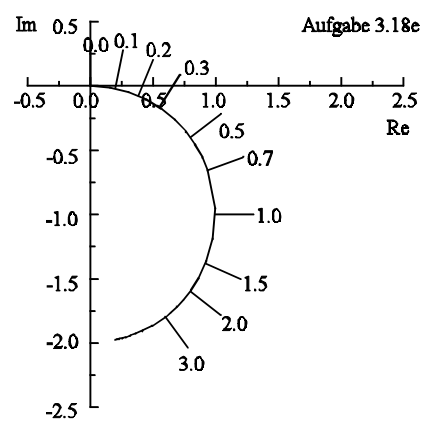
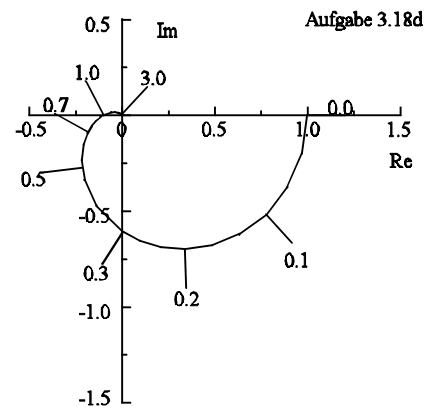
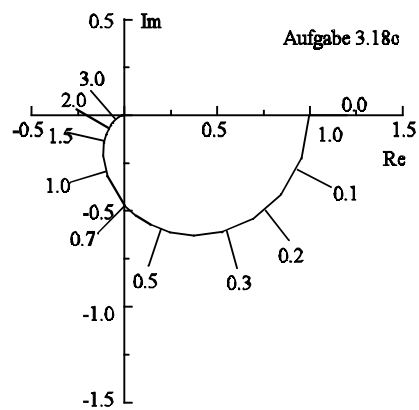
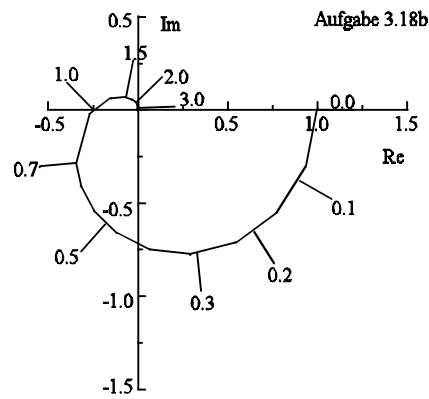
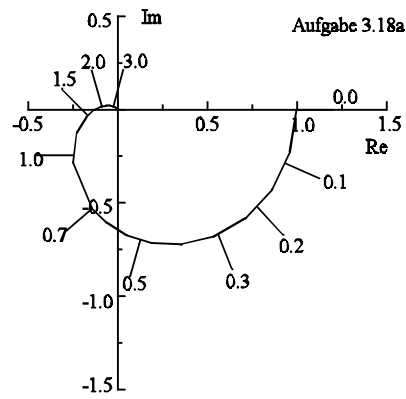
a) $r = 5 \quad s = 4$

b) $r = 2.5 \quad s = 3.333$

Aufgabe 3.15

Aufgabe 3.16**Aufgabe 3.17**



Aufgabe 3.18

Aufgabe 4.1

- a) $P_1 = (R_1, \varphi_1, z_1) = (7.2111, 56.3099^\circ, 3.000)$
 $P_2 = (r_1, \varphi_1, \Theta_1) = (7.8102, 56.3099^\circ, 67.4115^\circ)$
- b) $P_2 = (R_2, \varphi_2, z_2) = (5.0, 216.8699^\circ, 7.0)$
 $P_2 = (r_2, \varphi_2, \Theta_2) = (8.6023, 216.8699^\circ, 35.5377^\circ)$
- c) $P_3 = (R_3, \varphi_3, z_3) = (6.4031, 128.6598^\circ, -3.0)$
 $P_3 = (r_3, \varphi_3, \Theta_3) = (7.0711, 128.6598^\circ, 115.1041^\circ)$
- d) $P_4 = (R_4, \varphi_4, z_4) = (8.2462, -14.0362^\circ, -1.0)$
 $P_4 = (r_4, \varphi_4, \Theta_4) = (8.3066, 14.0362^\circ, 96.9144^\circ)$

Aufgabe 4.2

- a) $P_1 = (x_1, y_1, z_1) = (8.6603, 5.0, 5.0)$ $P_1 = (r_1, \varphi_1, \Theta_1) = (11.1803, 30^\circ, 63.4349^\circ)$
- b) $P_2 = (x_2, y_2, z_2) = (-2.5, 4.3301, -4.0)$ $P_2 = (r_2, \varphi_2, \Theta_2) = (6.4031, 120^\circ, 128.6598^\circ)$
- c) $P_3 = (x_3, y_3, z_3) = (-5.1962, -3.0, -3.0)$ $P_3 = (r_3, \varphi_3, \Theta_3) = (6.7082, 210^\circ, 116.5651^\circ)$
- d) $P_4 = (x_4, y_4, z_4) = (6.0622, -3.5, 8.0)$ $P_4 = (r_4, \varphi_4, \Theta_4) = (10.6301, 330^\circ, 41.1859^\circ)$

Aufgabe 4.3

- a) $P_1 = (R_1, \varphi_1, z_1) = (4.3301, 30^\circ, 2.5)$ $P_1 = (x_1, y_1, z_1) = (3.7500, 2.1651, 2.5)$
- b) $P_2 = (R_2, \varphi_2, z_2) = (6.8937, 120^\circ, 1.2155)$ $P_2 = (x_2, y_2, z_2) = (-3.4468, 5.9701, 1.1255)$
- c) $P_3 = (R_3, \varphi_3, z_3) = (3.4641, 210^\circ, -2.0)$ $P_3 = (x_3, y_3, z_3) = (-3.0, -1.7321, -2.0)$
- d) $P_4 = (R_4, \varphi_4, z_4) = (4.0, 330^\circ, -6.9282)$ $P_4 = (x_4, y_4, z_4) = (3.4641, -2.0, -6.9282)$

Aufgabe 4.4

- a) $G = (3, 4, 5)^T + \alpha \cdot (6, -11, 3)^T$ b) $G = (2, 5, 7)^T + \alpha \cdot (1, 1, 2)^T$
- c) $G = (1, 2, 3)^T + \alpha \cdot (8, -10, 1)^T$

Aufgabe 4.5

- a) $E = (8, 5, 7)^T + \alpha \cdot (-5, -2, -5)^T + \beta \cdot (-3, -1, -1)^T$ $z = 10y - 3x - 19$
- b) $E = (-1, 2, 3)^T + \alpha \cdot (8, 6, 6)^T + \beta \cdot (6, 2, 0)^T$ $z = (x, y) = -1.2 - 0.6x + 1.8y$
- c) $E = (2, -5, 6)^T + \alpha \cdot (-7, 2, -12)^T + \beta \cdot (-6, 2, 3)^T$ $z = 208.5 + 15x + 46.5y$

Aufgabe 4.6

- a) $z = 7 - \frac{7}{3}x - \frac{7}{4}y$ b) $z = 2 + \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$ c) $z = -5 - \frac{5y}{9} + \frac{5x}{3}$

Aufgabe 4.7

- a) $G = (5, -50, -21)^T + \beta_2 (4, -40, -20)^T$ b) $G = (2, -24.8, -7.6)^T + \beta_2 (5, -19.4, -14.8)^T$
- c) $G = (-4.6, 5.2, 13.4)^T + \beta_2 (-13, 34, 33)^T$

Aufgabe 4.8

- a) $\alpha = -10$ $\beta = 28$ $\gamma = 7$ $P_s = (-9, 36, 31)$
- b) $\alpha = 0.2$ $\beta = 0.8$ $\gamma = 2.6$ $P_s = (5.6, 9.2, 8.8)$
- c) $\alpha = 0.4765$ $\beta = 0.0176$ $\gamma = 0.3471$ $P_s = (4.0412, 3.4294, 5.1235)$

Aufgabe 4.9

a)	$\alpha = 0.71429$	$\beta = -1.97143$	$P_{\min} = (1.7143, -0.3429, 1.0286)$	$r_{\min} = 2.02837$
b)	$\alpha = -1.22045$	$\beta = 0.64537$	$P_{\min} = (-1.8115, 4.6294, -0.8051)$	$r_{\min} = 5.03597$
c)	$\alpha = -0.45012$	$\beta = -0.61485$	$P_{\min} = (-0.9745, 0.6497, 0.6961)$	$r_{\min} = 1.36241$
d)	$\gamma = -0.15556$		$P_{\min} = (5.3111, 0.2222, 2.3778)$	$r_{\min} = 5.82332$
e)	$\gamma = -1$		$P_{\min} = (2, 2, -2)$	$r_{\min} = 3.46410$
f)	$\gamma = -0.24460$		$P_{\min} = (2.2662, -0.7122, -0.2014)$	$r_{\min} = 2.38400$

Aufgabe 5.1

a)	$y' = 3$	b)	$y' = 10x$
c)	$y' = 18x^2 - 34x + 2$	d)	$y' = 16x^3 + 6x + 2$
e)	$y' = 100x^4 - 12x + 9$	f)	$y' = 8(2x + 4x^3)$
g)	$y' = A(2bx + c)$	h)	$y' = 7x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x^2 + 1$

Aufgabe 5.2

a)	$y' = A \cdot \cos(x) - B \cdot \sin(x)$	b)	$y' = \frac{A}{x} + B \cdot e^x$
c)	$y' = 2x - 6 \cdot \cos(x)$	d)	$y' = 3x^2 - F \cdot \sin(x)$
e)	$y' = -10 \cdot \sin(x) - 5 \cdot e^x$	f)	$y' = \frac{2}{x}$

Aufgabe 5.3

a)	$y' = 3x^2 \cdot \sin(x) + x^3 \cdot \cos(x)$	b)	$y' = 2x \cdot \ln(x) + x$
c)	$y' = (2x + 2) \cdot (x^3 - e^x) + (x^2 + 2x + 5) \cdot (3x^2 - e^x)$	d)	$y' = 2x \cdot \cos(x) - (x^2 + 1) \sin(x)$
e)	$y' = 5 \cdot \frac{\sin(x)}{x} + 5 \ln(x) \cdot \cos(x)$	f)	$y' = 4x^3 \cdot (x^3 + 2x - 7) + (x^4 - 5)(3x^2 + 2)$
g)	$y' = 2[\cos^2(x) - \sin^2(x)]$	h)	$y' = e^x \cdot \ln(x) + \frac{e^x}{x}$

Aufgabe 5.4

a)	$y' = \frac{2x}{[1 + x^2]^2}$	b)	$y' = 1 + \left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right]^2 = \frac{1}{\cos^2(x)}$
c)	$y' = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$	d)	$y' = \frac{(x^2 - 1) \cdot (2x + 5) - 2x \cdot (x^2 + 5x - 2)}{(x^2 - 1)^2}$
e)	$y' = \frac{(x^3 + 5) \cdot 2x - 3x^2 \cdot x^2}{(x^3 + 5)^2}$	f)	$y' = \frac{(x^2 + 1) \cdot e^x - e^x \cdot (2x)}{(x^2 + 1)^2}$
g)	$y' = \frac{e^x \cdot \cos(x) - e^x \cdot \sin(x)}{e^{2x}} = e^{-x} [\cos(x) - \sin(x)]$		
h)	$y' = \frac{-\ln(x) \cdot \sin(x) - \frac{\cos(x)}{x}}{\ln^2 x}$		

Aufgabe 5.5

a) $y' = 3 \cdot \sin^2(x) \cdot \cos(x)$

c) $y' = 3(1 + x^2)^2 \cdot 2x$

e) $y' = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3}$

g) $y' = a \cdot \cos(ax)$

i) $y' = \cos(e^x) \cdot e^x$

k) $y' = a \cdot e^{ax}$

m) $y' = \frac{1}{\sin(x^2 + 5)} \cdot \cos(x^2 + 5) \cdot 2x$

o) $y' = \cos \frac{x}{1 + x^2} \cos(1 + x^2) \cdot \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} - \sin \frac{x}{1 + x^2} \cdot \sin(1 + x^2) \cdot 2x$

b) $y' = -5 \cdot \cos^4(x) \cdot \sin(x)$

d) $y' = 4[x + \cos(x)]^3 [1 - \sin(x)]$

f) $y' = \exp[5x^2 + 8x + 2] \cdot (10x + 8)$

h) $y' = (2x + 5) \cdot \cos(x^2 + 5x + 7)$

j) $y' = \frac{1}{x}$

l) $y' = \frac{1 + x^2}{x} \cdot \frac{(1 + x^2) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{x(1 + x^2)}$

n) $y' = \exp[\sin(ax^2 + b)] \cdot \cos(ax^2 + b) \cdot 2ax$

Aufgabe 5.6

a) $y' = x^x \cdot [\ln(x) + 1]$

b) $y' = [\sin(x)]^{\cos(x)} \cdot \left[-\sin(x) \cdot \ln[\sin(x)] + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} \right]$

c) $y' = (x^2 + 1)^{2x+7} \cdot \left[2\ln(x^2 + 1) + (2x + 7) \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \right]$

d) $y' = [\ln(x^2)]^{(3x+1)} \cdot \left[3\ln[2 \cdot \ln(x)] + \frac{3x + 1}{x \cdot \ln(x)} \right]$

e) $y' = (3x + 5)^{7x} \cdot \left[7 \cdot \ln(3x + 5) + \frac{21x}{3x + 5} \right]$

f) $y' = [\tanh(x)]^{\ln(x)} \cdot \left[\frac{\ln[\tanh(x)]}{x} + \frac{\ln(x)}{\sinh(x) \cdot \cosh(x)} \right]$

g) $y' = [\cosh(x)]^{\sinh(x)} \cdot \left[\cosh(x) \cdot \ln[\cosh(x)] + \frac{\sinh^2(x)}{\cosh(x)} \right]$

h) $y' = [\sin(x)]^{2x+1} \cdot \left[2\ln[\sin(x)] + (2x + 1) \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right]$

Aufgabe 5.7

a) $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$

c) $y' = \cos(x^2 + 4) \cdot 2x$

e) $y' = \frac{12x^2}{\cos^2(4x^3 + 2)} = 12x^2 [1 + \tan^2(4x^3 + 2)]$

f) $y' = -\frac{30x^5}{\sin^2(5x^6 + 1)} = -30x^5 [1 + \cot^2(5x^6 + 1)]$

g) $y' = \frac{2}{\sqrt{1 - (2x + 5)^2}}$

i) $y' = \frac{3x^2}{1 + x^6}$

k) $y' = 2x \cdot \sinh(x^2 + 5)$

m) $y' = \frac{5x^4}{\cosh^2(x^5 + 1)} = 5x^4 [1 - \tanh^2(x^5 + 1)]$

n) $y' = -\frac{4x^3}{\sinh^2(x^4 + 2)} = 4x^3 [1 - \coth^2(x^4 + 2)]$

o) $y' = \frac{2x}{\sqrt{(x^2 + 1)^2 - 1}}$

q) $y' = \frac{2x - 1}{1 - (x^2 - x)^2}$

b) $y' = \frac{3x^2}{(x^3 + 2) \cdot \ln(10)}$

d) $y' = -\sin(x^2 + 5) \cdot 2x$

h) $y' = \frac{-2x}{\sqrt{1 - x^4}}$

j) $y' = \frac{-4x^3}{1 + x^8}$

l) $y' = 6x^5 \cdot \cosh(x^6 + 2)$

p) $y' = \frac{3x^2}{\sqrt{(x^3 + 2)^2 + 1}}$

r) $y' = \frac{2}{1 - (2x + 5)^2}$

Aufgabe 5.8

- a) $y' = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) * \frac{1}{x^2} * \cos(ax + 5) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) * \sin(ax + 5) * a$
- b) $y' = 2x * \sin(x^2 + 5) + (x^2 + 1) * \cos(x^2 + 5) * 2x$
- c) $y' = \frac{\ln(x) * 3x^2 - (x^3 + 1) * x^{-1}}{\ln^2(x)}$
- d) $y' = [\sin(x^2 + 1)]^{\cos(x)} * \{-\sin(x) * \ln[\sin(x^2 + 1)] + 2x * \cos(x) * \cot(x^2 + 1)\}$
- e) $y' = 4x * \sin(x^2 + 1) * \cos(x^2 + 1)$
- f) $y' = 2x \frac{\cos(x^2 - 1) * \cos(x^2 + 1) + \sin(x^2 - 1) * \sin(x^2 + 1)}{\cos^2(x^2 - 1)} = \frac{2x \cos(2)}{\cos^2(x^2 - 1)}$
- g) $y' = 4 * \sinh^3(x^3 + 5) * \cosh(x^3 + 5) * 3x^2$
- h) $y' = 2x * \cos(x^3 + 1) * \sinh(4x + 5) - (x^2 + 1) * \sin(x^3 + 1) * 3x^2 * \sinh(4x + 5) + (x^2 + 1) * \cos(x^3 + 1) * \cosh(4x + 5) * 4$
- i) $y' = \frac{\ln(x^5 + 2) * 3 - (3x + 5) * 5x^4 * (x^5 + 2)^{-1}}{\ln^2(x^5 + 2)}$
- j) $y' = 5 * \cosh^4(x^2 + 1) * \sinh(x^2 + 1) * 2x$
- k) $y' = 3 * \sin^2(3x^2 + 2x + 5) * \cos(3x^2 + 2x + 5) * (6x + 2)$

Aufgabe 5.9

- | | | |
|----|---|---|
| a) | $y' = 20x^3 + 9x^2 + 16x + 2$
$y'' = 120x + 18$ | $y'' = 60x^2 + 18x + 16$
$y''' = 120$ |
| b) | $y' = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$
$y''' = 6 \frac{-x^4 + 6x^2 - 1}{(x^2 + 1)^4}$ | $y'' = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3}$
$y'''' = 24 \frac{x^5 - 10x^3 + 5x}{(x^2 + 1)^5}$ |
| c) | $y' = \cos(ax) - ax * \sin(ax)$
$y''' = -3a^2 * \cos(ax) + a^3 * x * \sin(ax)$ | $y'' = -2 * a * \sin(ax) - a^2 * x * \cos(ax)$
$y'''' = 4 * a^3 * \sin(ax) + a^4 * x * \cos(ax)$ |
| d) | $y' = e^{ax} + a * x * e^{ax}$
$y''' = 3a^2 * e^{ax} + a^3 * x * e^{ax}$ | $y'' = 2ae^{ax} + a^2 * x * e^{ax}$
$y'''' = 4a^3 * e^{ax} + a^4 * x * e^{ax}$ |
| e) | $y' = \ln(x) + 1$
$y''' = \frac{-1}{x^2}$ | $y'' = \frac{1}{x}$
$y'''' = \frac{2}{x^3}$ |
| f) | $y' = 2a * \sin(ax) * \cos(ax) = a * \sin(2ax)$
$y''' = -4a^3 * \sin(2ax)$ | $y'' = 2a^2 * \cos(2ax)$
$y'''' = -8a^4 * \cos(2ax)$ |