

Deterministische Signalverarbeitung Signalräume

Univ.-Prof., Dr.-Ing. Markus Rupp

SS 04

Letzte Änderung: 9.4.2004

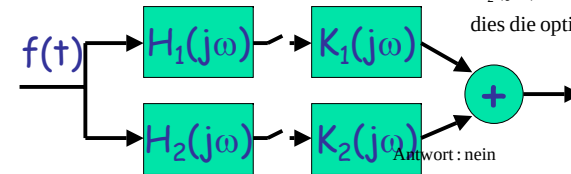
Resumee

- Verallgemeinerte Abtastung: Ist

$$K_1(j\omega) = H_1^*(j\omega) / \left[|H_1(j\omega)|^2 + |H_2(j\omega)|^2 \right]$$

$$K_2(j\omega) = H_2^*(j\omega) / \left[|H_1(j\omega)|^2 + |H_2(j\omega)|^2 \right]$$

dies die optimale Lösung zum Interpolator?



Antwort: nein

Die korrekte Antwort lautet:

$$K_1(j\omega, \tau) = [H_2(j(\omega + 2\pi/T)) - H_2(j\omega)\exp(j2\pi\tau/T)] / \Delta(j\omega)$$

$$K_2(j\omega, \tau) = [-H_1(j(\omega + 2\pi/T)) + H_1(j\omega)\exp(j2\pi\tau/T)] / \Delta(j\omega)$$

$$\Delta(j\omega) = [H_1(j\omega)H_2(j(\omega + 2\pi/T)) - H_2(j\omega)H_1(j(\omega + 2\pi/T))]$$

Lernziele

- Vektorräume und Lineare Algebra
 - Metrische Räume, Folgen, Cauchy Folgen, Supremum, Infimum
 - Gruppen, Vektorräume, Linearkombination, lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension
 - Normen und normierte Vektorräume
 - Innere Vektorprodukte und innere Produkträume
 - Induzierte Normen und Cauchy-Schwarz Ungleichung
 - Orthogonalität, Hilbert und Banach Räume

Metrische Räume

- Betrachte eine Menge X in $\mathbb{R}$
- Definition 2.1:** Unter einer Metrik:

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

- Versteht man eine funktionale Zuordnung, mit dem Zweck Abstände von Elementen in der Menge X anzugeben. Damit diese Funktion eine Metrik genannt werden darf, müssen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

- 1) $d(x, y) = d(y, x)$
- 2) $d(x, y) \geq 0$
- 3) $d(x, y) = 0$, dann und nur dann wenn $x = y$
- 4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$; für alle $x, y, z \in X$

Metrische Räume

- **Beispiel 2.1:** Betrachte folgende Metrik $d_1(\underline{x}, \underline{y})$

$$d_1 : R^n \times R^n \rightarrow R$$

$$d_1(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

- definiert über den Vektoren $\underline{x}, \underline{y}$. Diese wird auch l_1 Metrik genannt.
- **Beispiel 2.2:** Betrachte folgende verallgemeinerte Metrik $d_p(\underline{x}, \underline{y})$

$$d_p : R^n \times R^n \rightarrow R$$

$$d_p(\underline{x}, \underline{y}) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

Metrische Räume

- Von den l_p Metriken ist neben der l_1 und l_2 Metrik auch die l_∞ Metrik von besonderem Interesse:

$$d_\infty : R^n \times R^n \rightarrow R$$

$$d_\infty(\underline{x}, \underline{y}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

- **Beispiel 2.3:** Hamming Distanz

$$B = \{0,1\}, d_H : B^n \times B^n \rightarrow N$$

$$d_H(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^n x_i \oplus y_i$$

Metrische Räume

- **Definition 2.2:** Ein **Metrischer Raum** (X, d) besteht aus einer Menge X und einer Metrik d , die auf dieser Menge Gültigkeit hat.
- **Beispiel 2.4:** Die Menge R^n zusammen mit der Metrik $d_2(\underline{x}, \underline{y})$ bildet einen metrischen Raum.
- **Beispiel 2.5:** Betrachte die unendlich langen Zahlenfolgen reell- oder komplex-wertiger Zahlen x_i , $i=0,1,\dots,\infty$, welche die Eigenschaft haben, dass

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

Metrische Räume

- Gemeinsam mit der l_p Metrik, bilden diese Folgen einen metrischen Raum, genannt der $l_p(0,\infty)$ Raum, oder auch Folgenraum.
- Betrachtet man dagegen die Folgen x_i , $i=-\infty,\dots,-1,0,1,\dots,\infty$ mit den selben Eigenschaften und der selben Metrik, so spricht man vom $l_p(-\infty,\infty)$ Raum.
- Betrachtet man die Metrik $p \rightarrow \infty$, und betrachtet die Folgen für die gilt: $|x_i| < M$, so erhält man entsprechend den $l_\infty(0,\infty)$ oder $l_\infty(-\infty,\infty)$ Raum.

$$d_\infty(\underline{x}, \underline{y}) = \sup_n |x_n - y_n|$$

Supremum und Infimum

- **Definition Supremum:** Betrachte eine Menge S in $\mathbb{R}$ mit den Elementen x_i . Die kleinste Zahl z in $\mathbb{R}$, für die gilt:

$$z \geq x_i; \text{ für alle } i$$

heißt Supremum (sup) der Menge S . Sie wird auch als kleinste obere Schranke bezeichnet (engl.: least upper bound).

- Gibt es in $\mathbb{R}$ keine Zahl mehr, die größer ist als das größte Element in S , so gilt $\sup(S)=\infty$.

Supremum und Infimum

- **Definition Infimum:** Betrachte eine Menge S in $\mathbb{R}$ mit den Elementen x_i . Die größte Zahl z in $\mathbb{R}$, für die gilt:

$$z \leq x_i; \text{ für alle } i$$

heißt Infimum (inf) der Menge S . Sie wird auch als größte, untere Schranke bezeichnet (engl.: greatest lower bound).

- Gibt es in $\mathbb{R}$ keine Zahl mehr, die kleiner ist als das kleinste Element in S , so gilt $\inf(S)=-\infty$.

Supremum und Infimum

- **Beispiel 2.9:** Sei $S=(2,5)$ eine offene Menge, dann gilt: $\inf(S)=2$, $\sup(S)=5$
- Sei $T=[4,7)$, dann gilt: $\inf(T)=4$, $\sup(T)=7$
- Sei $U=[1,\infty)$, dann gilt: $\inf(U)=1$, $\sup(U)=\infty$
- Warum wählen wir nicht einfach das Maximum (Minimum) von S ?

Metrische Räume

- So können auch metrische Räume mit ganz bestimmten Eigenschaften gebildet werden:
- **Beispiel 2.6:** Sei $l_p(0,\infty)$ ein metrischer Folgenraum in dem quadratisch summierbare Folgen existieren. Also x_i in $l_p(0,\infty)=l_{p=2}(0,\infty)$ bedeutet, dass

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 < \infty$$

Metrische Räume

- Metrische Räume müssen nicht notwendigerweise nur über Zahlenmengen definiert sein, sie können auch über Funktionen definiert sein (denn diese stellen ja auch Zahlenmengen dar).
- Man spricht dann vom Funktionenraum.

Metrische Räume

- Definition 2.3:** Sei $X=C[a,b]$ eine Menge reell- oder komplex-wertiger kontinuierlicher Funktionen, definiert auf dem Intervall $[a,b]$ mit $b>a$, mit der Eigenschaft:

$$\int_a^b |x(t)|^p dt < \infty \quad ; 1 \leq p < \infty$$

- Dann lautet eine Metrik der Funktionen x,y aus X :

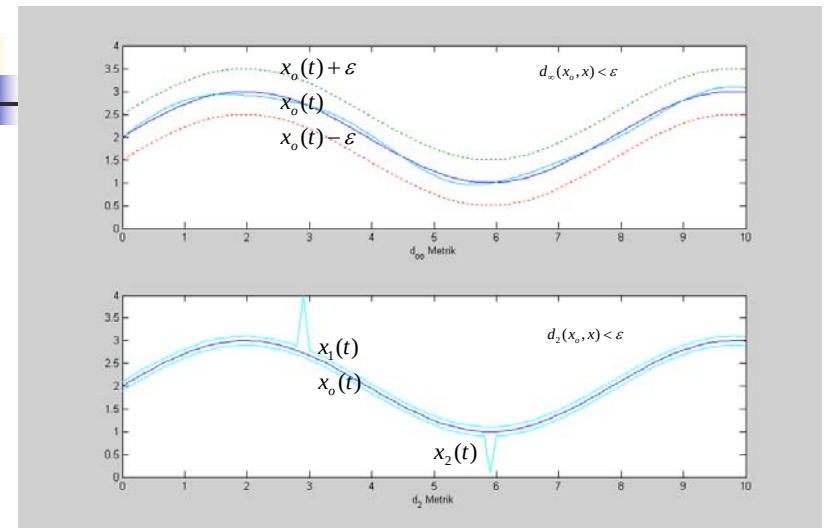
$$d_p(x, y) = \left[\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt \right]^{1/p} \quad ; 1 \leq p < \infty$$

Metrische Räume

- Die Metrik d_p zwischen Funktionen wird als L_p Metrik bezeichnet. Der Metrische Raum ist definiert als $(C[a,b], L_p)$.
- Für $p \rightarrow \infty$ gilt für nach oben und unten beschränkte Funktionen:

$$\sup_{t \in [a,b]} |x(t)| < \infty$$

$$d_\infty(x, y) = \sup \{ |x(t) - y(t)| ; a \leq t \leq b \}$$

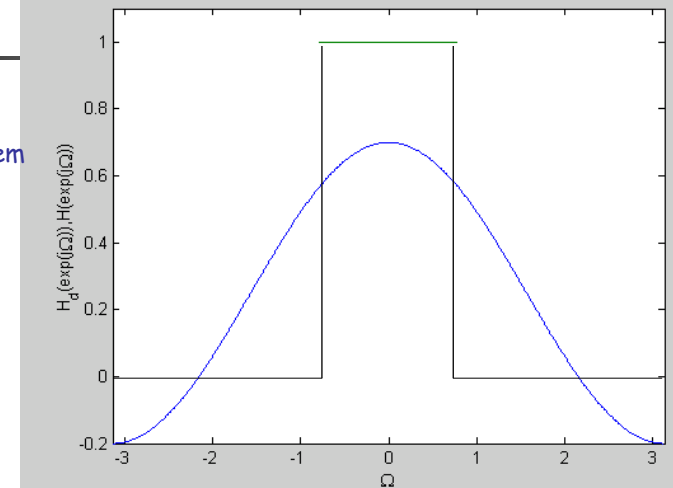


Metrische Räume

Beispiel 2.7 Filterentwurf: Ein lineares zeitdiskretes Filter mit linearer Phase $H(\exp(j\Omega)) = a_0 + a_1 \exp(j\Omega) + a_1 \exp(-j\Omega) = a_0 + 2a_1 \cos(\Omega)$ ist zu entwerfen, so dass es einem vorgegebenen Amplitudenverlauf $|H_d(\exp(j\Omega))| = 1$ für $|\Omega| < \Omega_G$ (null sonst) optimal folgt.

$$\begin{aligned} & \min_H \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(\exp(j\Omega)) - H(\exp(j\Omega))|^2 d\Omega \\ &= \min_{a_0, a_1} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(\exp(j\Omega)) - a_0 - 2a_1 \cos(\Omega)|^2 d\Omega \\ &= \min_{a_0, a_1} \int_{-\Omega_G}^{\Omega_G} |1 - a_0 - 2a_1 \cos(\Omega)|^2 d\Omega + \int_{\text{Rest}} |0 - a_0 - 2a_1 \cos(\Omega)|^2 d\Omega \\ &= \min_{a_0, a_1} 2\Omega_G [(1 - a_0)^2 - a_0^2] + 2\pi [a_0^2 + 2a_1^2] - 8a_1 \sin(\Omega_G) \\ & a_0 = \frac{\Omega_G}{\pi}; \quad a_1 = \frac{\sin(\Omega_G)}{\pi}; \quad (\text{vgl. Fourierreihe}) \end{aligned}$$

Minimierung
der
quadratischen
Metrik L_2



Metrische Räume

- Konvergenz von Folgen
- **Definition 2.4:** Wenn es zu jedem Abstand δ eine Zahl n_δ derart gibt, dass $d(x_n, y) < \delta$ für jedes $n > n_\delta$ bei einem festen Wert y , dann sagt man, dass die Folge x_n zu y hin konvergiert.

$$x_n \rightarrow y$$

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

- y ist dann der Grenzwert von x_n .
- Alle Punkte, die sich in einem verschwindend kleinem Abstand um y herum befinden, werden Nachbarschaft von y genannt.

Metrische Räume

- **Beispiel 2.8:** die folgenden beiden zwei Folgen divergieren: $a_n = n^2$
 $b_n = 1 + (-1)^n$
- **Definition 2.5:** Falls die Folge x_n unendlich oft einen bestimmten Wert, sagen wir z , annimmt, dann spricht man von einem Grenzpunkt. Die Folge b_n nimmt beispielsweise unendlich oft den Grenzpunkt $z=0$ ein.
- Existieren Grenzpunkte, so muss es auch Teilfolgen von x_n geben, die konvergieren.

Metrische Räume

- Der größte Grenzpunkt einer Folge x_n heißt limes superior, oder

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

- Der kleinste Grenzpunkt einer Folge x_n heißt limes inferior, oder

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

- Eine Folge konvergiert, wenn gilt:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Metrische Räume

- Beispiel 2.10:** Betrachte die Folge

$$c_n = 1 + \frac{1}{n} + (-1)^n$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = 2$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

- Es gibt zwei Grenzpunkte. Die Teilfolge $\{c_0, c_2, c_4, \dots\}$ hat den Grenzpunkt 2, während die Teilfolge $\{c_1, c_3, c_5, \dots\}$ den Grenzpunkt 0 hat.

Metrische Räume

- Definition 2.6:** Eine Folge x_n in einem metrischen Raum (X, d) heißt Cauchy-Folge, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) > 0$ derart gibt, dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für jedes $m, n > N$.

- Man kann zeigen, dass Folgen, die konvergieren, auch Cauchy-Folgen sind. Das Umgekehrte ist jedoch nicht immer richtig.

Metrische Räume

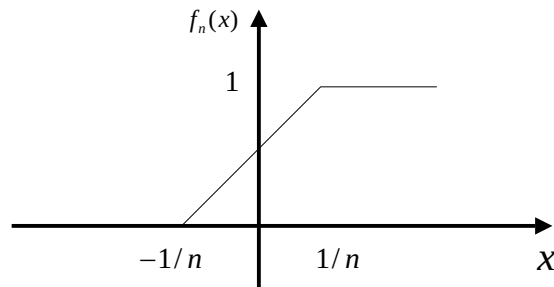
- Beispiel 2.11:** sei $X = C[-1, 1]$ eine Menge kontinuierlicher Funktionen und $f_n(t)$ eine Folge von Funktionen, definiert durch

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & t < -1/n \\ nt/2 + 1/2 & -1/n \leq t \leq 1/n \\ 1 & t > 1/n \end{cases}$$

- Betrachte den metrischen Raum (X, d_2) mit

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_{-1}^1 (f(t) - g(t))^2 dt}$$

Metrische Räume



Metrische Räume

- Wir finden

$$d_2(f_n(t), f_m(t)) = \begin{cases} \frac{(m-n)^2}{6n^3} & ; m > n \\ \frac{(m-n)^2}{6m^3} & ; m < n \end{cases}$$
- Mit $d_2 \rightarrow 0$ für große m und n . Somit handelt es sich bei der Folge um eine Cauchy Folge.
- Aber die Grenzfunktion lautet:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

- Diese Funktion ist also nicht kontinuierlich und damit nicht in X . Sie ist nicht konvergent in X !

Metrische Räume

- Der Grund warum die Cauchy-Folge nicht in X konvergiert, kann als „Fehlstelle“ oder Loch in der Funktionenmenge X angesehen werden.
- Hätten wir X als die Funktionenmenge der diskontinuierlichen Funktionen definiert, so hätten wir eine Cauchy Folge erhalten, die konvergiert.
- Definition 2.7:** Ein Metrischer Raum (X, d) heißt vollständig (engl. complete), wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

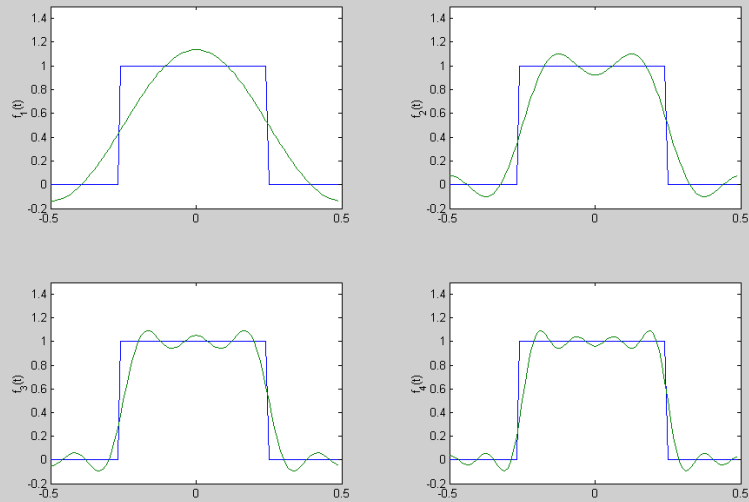
Metrische Räume

- Gibbs Phänomen
- Es ist wohl bekannt, dass periodische Funktionen durch Fourier Reihen dargestellt werden können.
- Beispiel 2.12:** Betrachte folgendes periodisches Signal der Periode 1:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -0.5 \leq t < -0.25 \\ 1 & -0.25 \leq t \leq 0.25 \\ 0 & 0.25 < t < 0.5 \end{cases}$$

- mit der Fourier-Reihe:

$$g_n(t) = 0.5 + \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cos(2(2k-1)\pi t) \right\}$$



Metrische Räume

- Beachte, dass gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_2(f(t), g_n(t)) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(f(t), g_n(t)) > 0$$

Resumee

- Betrachte die folgenden Folgen im metrischen Raum $l_{\infty}(0, \infty)$:

$$x_n = \frac{1}{n+1}; y_n = \frac{n}{n+1}$$

Zeige, dass

$$d_\infty(x_n, y_n) > |x_n - y_n|; \text{ für alle } n \geq 1$$

Resumee

- Was können Sie über die Konvergenz dieser Zahlenfolgen sagen?

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} [1 - (-1)^n]$$

$$b_n = 1 + \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{n} \right) [1 - (-1)^n]$$

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$d_n = \left(0.5 + \frac{3}{n} \right)^{2n}$$

- Welche dieser Zahlenfolgen liegt im metrischen Raum $l_2(0, \infty)$?

Resumee

- Welchen Grenzwert haben Zahlenfolgen in $l_2(0,\infty)$?
- Betrachte die folgende Zahlenfolge in Q :

$\frac{1}{1}, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \frac{141421}{100000}, \dots$
 Konvergiert diese Folge?
 Ist sie eine Cauchy - Folge in Q ?

Metrische Räume

- **Robustheit:** Oftmals werden in der Nachrichtentechnik nicht nur *mittlere Eigenschaften* (mittlere Datenrate, BER) optimiert, sondern es sind auch die schlimmstmöglichen Eigenschaften von Interesse (engl. worst case).
- Ist ein System unempfindlich gegenüber solchen schlimmstmöglichen Einflussgrößen, so spricht man von Robustheit.

Metrische Räume

- Robustheit lässt sich in Form von Energiebetrachtungen quantifizieren.
- Sei x_i die Eingangsfolge und y_i die Ausgangsfolge eines Systems T . Die Ausgangsgröße sei durch eine unbekannte Folge v_i gestört.
- Man interessiert sich dann für den Einfluss dieser Störgröße:

$$\frac{\sum_{i=0}^N y_i^2}{\sum_{i=0}^N v_i^2} \leq \gamma^2$$

Metrische Räume

- Oder, etwas genauer:

$$\sup_{v \in l_2(0,N)} \frac{\sum_{i=0}^N y_i^2}{\sum_{i=0}^N v_i^2} \leq \gamma^2$$

- Hat man die Möglichkeit unter verschiedenen Abbildungen $T(F)$ in Abhängigkeit einer Strategie F zu wählen, so lautet das Robustheitskriterium:

$$\inf_F \sup_{v \in l_2(0,N)} \frac{\sum_{i=0}^N y_i^2}{\sum_{i=0}^N v_i^2}$$

Vektorräume

- **Definition 2.11:** Ein linearer Vektorraum S über einer Menge von Skalaren T (C, R, Q, Z, N, B) ist eine Ansammlung von Vektoren zusammen mit einer additiven und multiplikativen Operation, die folgende Eigenschaften erfüllen:
- 1) S formt eine Gruppe bzgl. der Addition
- 2) Für jedes $a, b \in T$ und x, y in S gilt:
 $a\underline{x} \in S, a(b\underline{x}) = (ab)\underline{x}, (a+b)\underline{x} = a\underline{x} + b\underline{x}$
 $a(\underline{x} + \underline{y}) = a\underline{x} + a\underline{y}$
- 3) Bzgl. der Multiplikation existiert ein Eins- und ein Nullelement:

$$1\underline{x} = \underline{x}; \quad 0\underline{x} = \underline{0}$$

Gruppen

- **Definition 2.8 (Gruppe):** Eine Menge S , für die eine binäre Operation $*$ (Operation bzgl. zweier Elemente von S) definiert ist, heißt Gruppe, wenn gilt:
 - 1) Für jedes a, b in S gilt: $(a*b)$ in S
 - 2) es existiert ein Identitätselement e in S , so dass für jedes Element a in S gilt: $e*a = a*e = a$.
 - 3) Für jedes Element a in S existiert ein inverses Element b in S , so dass: $a*b = b*a = e$.
 - 4) Die binäre Operation $*$ ist assoziativ, d.h.: $(a*b)*c = a*(b*c)$
- Die Gruppe wird mit $(S, *)$ bezeichnet.
 - Gilt weiterhin für jedes Paar a, b aus S , dass $a*b = b*a$ (kommutativität), so heißt die Gruppe kommutativ oder Abelsch.

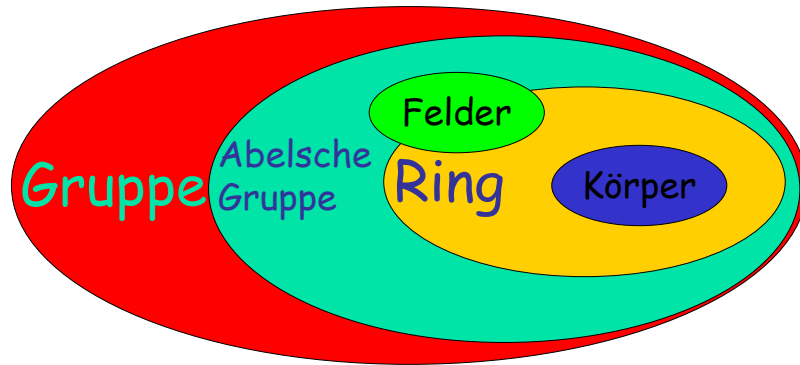
Gruppen

- **Beispiel 2.13:** Sei S die Menge der Vektoren einer bestimmten Dimension. S formt eine Gruppe bzgl. der Addition, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:
 - 1) Für jedes $\underline{x}, \underline{y} \in S$ gilt: $\underline{x} + \underline{y} \in S$
 - 2) Es existiert ein Identitätselement $\underline{0}$ in S , so dass
 $\underline{x} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{x} = \underline{x}$
 - 3) Für jedes Element $\underline{x} \in S$ existiert ein zweites $\underline{y} \in S$, so dass
 $\underline{x} + \underline{y} = \underline{0} \quad ; \quad \underline{y} = -\underline{x}$
 - 4) Die Addition ist assoziativ:
 Für jedes $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in S$ gilt: $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$

Ringe

- **Definition 2.9 (Ring):** Eine Menge S , für die zwei binäre Operationen $+$ und $*$ definiert sind, heißt Ring, wenn folgendes gilt:
 - $(S, +)$ ist eine Abelsche Gruppe
 - Die Operation $*$ ist assoziativ.
 - Es gilt Distributivität bzgl. $+$: $a(b+c) = ab+ac, (a+b)c = ac+bc$.
- Ein Ring wird mit $(S, +, *)$ bezeichnet.
- Beachte: für $*$ muss es kein Identitäts oder inverses Element geben.
- Existiert zusätzlich das inverse Element zu $*$, dann spricht man von einem Körper.

Körper



Felder

- **Definition 2.10 (Feld):** Eine Menge S , für die zwei binäre Operationen $+$ und $*$ definiert sind, heißt Feld, wenn gilt:
 - 1) $(S, +)$ ist eine Abelsche Gruppe
 - 2) $(S \setminus \{0\}, *)$ ist eine Abelsche Gruppe
 - 3) Distributivität gilt für $+$ und $*$.

Felder

- **Beispiel 2.14:** Das Galois Feld $GF(2)$ stellt ein Feld dar.
 - Die Elemente des Feldes sind 0 und 1.
 - Definiere die Operatoren $+$ und $*$

a	b	a+b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a	b	a*b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Felder

- Bzgl. $+$ muss S eine Abelsche Gruppe sein, also:
 - $a+b$ ist in S .
 - Identitätselement ist 0: $0+0=0, 1+0=1$.
 - Inverses Element ist: $0+0=0, 1+1=0$.
 - Assoziativität: $(a+b)+c=a+(b+c)$.
 - Man prüfe selbst die anderen Eigenschaften...

Vektorräume

- **Definition 2.11:** Ein linearer Vektorraum S über einer Menge von Skalaren T (C, R, Q, Z, N, B) ist eine Ansammlung von Vektoren zusammen mit einer additiven und multiplikativen Operation, die folgende Eigenschaften erfüllen:
- 1) S formt eine Gruppe bzgl. der Addition
- 2) Für jedes $a, b \in T$ und x, y in S gilt:
 $a\underline{x} \in S, a(b\underline{x}) = (ab)\underline{x}, (a+b)\underline{x} = a\underline{x} + b\underline{x}$
 $a(\underline{x} + \underline{y}) = a\underline{x} + a\underline{y}$
- 3) Bzgl. der Multiplikation existiert ein Eins- und ein Nullelement:

$$1\underline{x} = \underline{x}; \quad 0\underline{x} = \underline{0}$$

Vektorräume

- **Beispiel 2.15:** für endlich dimensionale lineare Vektorräume:
- 1) Betrachte den linearen Vektorraum in R^4 (Menge der Quadrupel)

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}; \underline{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}; \underline{x} + \underline{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}; 3\underline{x} + 2\underline{y} = \begin{bmatrix} 13 \\ 19 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- 2) Die Menge der $m \times n$ Matrizen mit reellwertigen Elementen
- 3) Die Menge der Polynome vom Grade $0..n$ mit reellwertigen Koeffizienten

Vektorräume

- **Noch Beispiel 2.15:** Betrachte den (3,2) single parity check code in $GF(2)^3$ mit den Elementen:
 $V = \{[000], [011], [101], [110]\}$

Vektorräume

- **Beispiel 2.16:** für unendlich-dimensionale lineare Vektorräume:
- 1) Betrachte die Menge der unendlich langen Folgen $\{x_n\}$
- 2) Die Menge der kontinuierlichen Funktionen über dem Intervall $[a,b] \rightarrow C[a,b]$
- 3) Die Menge der Funktionen in $L_p \rightarrow L_p[a,b]$

Vektorräume

- **Definition 2.12:** Sei S ein linearer Vektorraum. Wenn V eine Teilmenge von S darstellt mit der Eigenschaft, dass V selbst wieder einen Vektorraum darstellt, dann heißt V **Unterraum** von S .
- **Beispiel 2.17a:** Sei S die Menge der Polynome von beliebigem Grad und V die Menge der Polynome vom Grad kleiner als sechs, dann ist V ein Unterraum von S .
- **Beispiel 2.17b:** Ein (n,k) binärer linearer Blockcode ist ein k -dimensionaler Unterraum von $GF(2)^n$.

Vektorräume

- **Definition 2.13:** Sei S ein linearer Vektorraum über R und T eine Teilmenge von S . Ein Element $\underline{x}$ aus S heißt Linearkombination von Elementen aus T , wenn es eine endliche Menge mit Elementen $\underline{p}_i ; i=1..m$ aus T und eine endliche Menge $c_i ; i=1..m$ von Skalaren aus R gibt, so dass:

$$\underline{x} = c_1 \underline{p}_1 + c_2 \underline{p}_2 + \dots + c_m \underline{p}_m$$

Vektorräume

- **Beispiel 2.18:** Sei $S=C(R)$, die Menge der kontinuierlichen Funktionen auf den reellen Zahlen. Sei weiterhin $p_1(t)=1$; $p_2(t)=t$, $p_3(t)=t^2$. Eine Linearkombination dieser Funktionen ist dann gegeben durch: $x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$
- Betrachte das Polynom $x(t)=6+5t+t^2$, sowie die Funktion $p_4(t)=t^2-1$.

$$\begin{aligned} x(t) &= 6p_1(t) + 5p_2(t) + p_3(t) \\ &= 8p_1(t) + 5p_2(t) - p_3(t) + 2p_4(t) \\ &= 9p_1(t) + 5p_2(t) - 2p_3(t) + 3p_4(t) \end{aligned}$$
- Offensichtlich ist die Darstellung nicht eindeutig.

Vektorräume

- An dieser Stelle ergeben sich einige interessante Fragen:
 - Ist die Darstellung eines Vektors als Linearkombination von anderen Vektoren eindeutig?
 - Wie lautet die kleinste Menge Vektoren, die nötig ist, um jeden Vektor aus S darzustellen?
 - Wenn ein Vektor $\underline{x}$ aus einer Linearkombination $\underline{p}_i ; i=1..m$ dargestellt werden kann, wie erhält man die linearen Gewichte $c_i ; i=1..m$?
 - Wie müssen die Vektoren $\underline{p}_i ; i=1..m$ gestaltet sein, um damit jeden Vektor $\underline{x}$ aus S darzustellen?
 - Wenn $\underline{x}$ nicht exakt aus einer Linearkombination von $\underline{p}_i ; i=1..m$ dargestellt werden kann, wie kann er am besten approximiert werden?

Vektorräume

- **Definition 2.14:** Sei S ein linearer Vektorraum und T eine Teilmenge von S . Die Menge T heißt linear unabhängig, wenn es für jede nichtleere Teilmenge von T mit endlich vielen Elementen (also $\underline{p}_i; i=1..m$) nur eine Menge von Skalaren gibt, welche die Gleichung
$$c_1 \underline{p}_1 + c_2 \underline{p}_2 + \dots + c_m \underline{p}_m = \underline{0}$$
 erfüllt und für die gilt, $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$.
- Wird die obige Gleichung von einer Menge von Skalaren erfüllt, die nicht alle Null sind, dann heißt die gewählte Teilmenge ($\underline{p}_i; i=1..m$) linear abhängig.

Vektorräume

- **Beispiel 2.19:** Die vorgestellten Polynome $p_1(t), \dots, p_4(t)$ sind linear abhängig, da gilt:

$$p_1(t) - p_3(t) + p_4(t) = 0$$

- Die Polynome $p_1(t), \dots, p_3(t)$ sind linear unabhängig!
- Die Vektoren $\underline{p}_1=[2,-3,4], \underline{p}_2=[-1,6,-2]$ und $\underline{p}_3=[1,6,2]$ sind linear abhängig, da gilt

$$4 \underline{p}_1 + 5 \underline{p}_2 + 3 \underline{p}_3 = \underline{0}$$

Vektorräume

- **Noch Beispiel 2.19:** Betrachte die Darstellung komplexer Zahlen $z=r+j i$ in $\mathbb{R}^2$:

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} r \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ -i \end{bmatrix} \right\}$$

- Also, die Darstellung als z und z^* . Diese Elemente sind linear unabhängig!

Beispiel

- Schreibe Linearkombination als Matrix-Vektor Beziehung:

$$c_1 \underline{p}_1 + c_2 \underline{p}_2 + \dots + c_m \underline{p}_m = \underline{x}$$

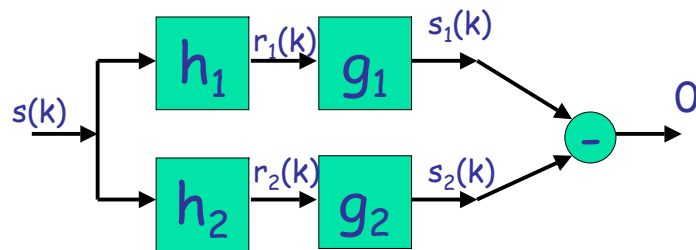
$$= \begin{bmatrix} \underline{p}_1 & \underline{p}_2 & \dots & \underline{p}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \underline{P} \underline{c}$$

Wenn also gelten soll: $\underline{P} \underline{c} = \underline{0}$,

dann ist $\underline{c} = \underline{0}$, wenn die Zeilen von $\underline{P}$ linear unabhängig sind.

Beispiel

- Betrachte blinde Entzerrung:



Beispiel

- In Gleichungsform:

$$g_{11}r_{11} + g_{12}r_{12} + \dots + g_{1m}r_{1m} = g_{21}r_{21} + g_{22}r_{22} + \dots + g_{2m}r_{2m}$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{M1} & r_{M2} & \dots & r_{Mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ \vdots \\ g_{1m} \\ g_{21} \\ g_{22} \\ \vdots \\ g_{2m} \\ \vdots \\ g_{M1} \\ g_{M2} \\ \vdots \\ g_{Mm} \end{bmatrix} = \underline{R} \underline{g} = \underline{0}$$

- SOS=Second Order Statistic

Resumee

- Welche der folgenden Mengen von Vektoren sind LU bzw. nicht LU?

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} \right\}$$

Resumee

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(K-1) \\ y(K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & & & & \\ h_1 & h_0 & & & \\ \vdots & h_1 & h_0 & & \\ h_{M-1} & & h_1 & h_0 & \\ & \ddots & & h_1 & h_0 \\ & & h_{M-1} & & h_1 & h_0 \\ & & & h_{M-1} & & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(K-2) \\ x(K-1) \\ x(K) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(k-N+1) \\ \vdots \\ y(k-2) \\ y(k-1) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{M-1} & \dots & h_0 \\ & h_{M-1} & \dots & h_0 \\ & & h_{M-1} & \dots & h_0 \\ & & & h_{M-1} & \dots & h_0 \\ & & & & h_{M-1} & \dots & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k-N-M+1) \\ \vdots \\ x(k-2) \\ x(k-1) \\ x(k) \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_k = H_N \underline{x}_k$$

Vektorräume

- **Definition 2.15:** Sei T eine Teilmenge von Vektoren aus einem linearen Vektorraum S über einer Skalarenmenge aus $R(C, Q, Z, N, B)$. Die Menge V der Vektoren, die durch alle Linearkombinationen aus T dargestellt werden können, heißt die von T aufgespannte oder erzeugte Menge (engl. span):

$$V = \text{span}(T)$$

Vektorräume

- **Definition 2.16:** Sei S ein Vektorraum und T eine Menge von Vektoren aus S , so dass $\text{span}(T)=S$. Ist T linear unabhängig, so sagt man, dass T eine Hamel Basis für S darstellt.
- **Beispiel 2.20:** Die Vektoren $p_1=[1,6,5]$, $p_2=[-2,4,2]$, $p_3=[1,1,0]$ und $p_4=[7,5,2]$ sind linear abhängig. Aber $T=\{p_1, p_2, p_3\}$ spannt den Raum R^3 auf und bildet damit eine Basis für R^3 .
- **Beispiel 2.21:** Die Vektoren $p_1=[1,0,0]$, $p_2=[0,1,0]$ und $p_3=[0,0,1]$ sind linear unabhängig und bilden damit eine Basis für R^3 . Diese Basis wird oft auch natürliche Basis genannt.

Vektorräume:

- **Beispiel 2.22:** Betrachte den (3,2) single parity check code in $GF(2)^3$ mit den Elementen:
 $V=\{[000],[011],[101],[110]\}$
Eine Hamel Basis ist gegeben durch je

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel

- Diese 3x3 Matrizen bilden eine Hamel Basis in R :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel

- Bilden diese 3x3 Matrizen eine Hamel Basis?:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vektorräume

- Definition 2.17:** Die Anzahl der Elemente in einer Menge A heißt Kardinalität $|A|$.
 $A = \{1+j, 1-j, -1+j, -1-j\}, |A| = 4$
- Satz 2.1:** Sind zwei Mengen T und U Hamelbasen für den Vektorraum S , so haben T und U die selbe Kardinalität.
- Beweis:** (nur für den endlich dimensionalen Fall).
Seien $T = \{\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_m\}$; $U = \{\underline{q}_1, \underline{q}_2, \dots, \underline{q}_n\}$
zwei Basen für S und $\underline{q}_1 = c_1 \underline{p}_1 + c_2 \underline{p}_2 + \dots + c_m \underline{p}_m$
mit mindestens einem Koeffizienten ungleich 0,

Vektorräume

- also c_1 , damit gilt: $\underline{p}_1 = \frac{1}{c_1}(\underline{q}_1 - c_2 \underline{p}_2 - \dots - c_m \underline{p}_m)$
- Also stellt $\{\underline{q}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_m\}$
auch eine Basis dar. Weiteres
Substituieren führt zu

$$\begin{aligned} &\{\underline{q}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3, \dots, \underline{p}_m\} \\ &\{\underline{q}_1, \underline{q}_2, \underline{p}_3, \dots, \underline{p}_m\} \\ &\dots \\ &\{\underline{q}_1, \underline{q}_2, \underline{q}_3, \dots, \underline{q}_{m-1}, \underline{p}_m\} \\ &\{\underline{q}_1, \underline{q}_2, \underline{q}_3, \dots, \underline{q}_{m-1}, \underline{q}_m\} \end{aligned}$$

Vektorräume

- Also muss gelten: $m \geq n$
- Beginnt man mit $\underline{q}_1$ statt mit $\underline{p}_1$, so erhält man aber $n \geq m$.
- Damit muss gelten $n=m$.
- Definition 2.18:** Sei T eine Hamelbasis für S . Die Kardinalität von T ist die Dimension von S , $|T| = \dim(S)$. Sie ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen Vektoren, die benötigt wird, um den Raum S aufzuspannen.

Vektorräume

- Beachte: Jeder Vektorraum besitzt (mindestens) eine Hamelbasis.
- Operationen im Vektorraum können meist einfacher in der Basis ausgeführt werden.

Vektorräume

- **Definition 2.19:** eine (Hamel) Basis der Dimension m heißt orthogonal, wenn für alle Basisvektoren $T = \{\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3, \dots, \underline{p}_m\}$ gilt:

$$\langle \underline{p}_i, \underline{p}_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ \neq 0 & ; i = j \end{cases}$$

- **Definition 2.20:** eine (Hamel) Basis der Dimension m heißt orthonormal, wenn für alle Basisvektoren $T = \{\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3, \dots, \underline{p}_m\}$ gilt:

$$\langle \underline{p}_i, \underline{p}_j \rangle = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ 1 & ; i = j \end{cases} \\ = \delta_{i-j}$$

Vektorräume

- **Definition 2.21:** Gibt es zwei Basen,

$T = \{\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_m\}; \quad U = \{\underline{q}_1, \underline{q}_2, \dots, \underline{q}_m\}$
die den selben Raum aufspannen mit
der Eigenschaft:

$$\langle \underline{p}_i, \underline{q}_j \rangle = k_{i,j} \delta_{i-j}$$

so heißen diese Basen dual oder
biorthogonal (biorthonormal für
 $k_{i,j}=1$).

Vektorräume

- **Beispiel 2.23:** Gegen seien:

$$\underline{p}_1^T = [1, 0]; \quad \underline{p}_2^T = [-1, 1]; \quad \underline{q}_1^T = [1, 1]; \quad \underline{q}_2^T = [0, 1];$$

Diese bilden duale Basen in $\mathbb{R}^2$. Betrachte

$$\underline{f}^T = [a, b]$$

Dann gilt:

$$\underline{f} = \langle \underline{f}, \underline{q}_1 \rangle \underline{p}_1 + \langle \underline{f}, \underline{q}_2 \rangle \underline{p}_2 = (a+b) \underline{p}_1 + b \underline{p}_2$$

$$\underline{f} = \langle \underline{f}, \underline{p}_1 \rangle \underline{q}_1 + \langle \underline{f}, \underline{p}_2 \rangle \underline{q}_2 = a \underline{q}_1 + (-a+b) \underline{q}_2$$

Normen

- **Definition 2.22:** Sei S ein Vektorraum mit Elementen $\underline{x}$. Dann heißt eine reell-wertige Funktion $||\underline{x}||$ Norm (Länge) von $\underline{x}$, wenn sie folgende vier Eigenschaften erfüllt:

- 1) $||\underline{x}|| \geq 0$ für jedes $\underline{x} \in S$
- 2) $||\underline{x}|| = 0$ dann und nur dann, wenn $\underline{x} = \underline{0}$
- 3) $||\alpha \underline{x}|| = |\alpha| ||\underline{x}||$ für $\alpha \in \mathbb{C}$
- 4) $||\underline{x} + \underline{y}|| \leq ||\underline{x}|| + ||\underline{y}||$ (Dreiecksungleichung)

Normen

- Beachte, dass Normen und Metriken verwandte Objekte sind:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = ||\underline{x} - \underline{y}||$$

- **Beispiel 2.24:**

$$l_1\text{-norm} : ||\underline{x}||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad L_1\text{-norm} : ||x(t)||_1 = \int_a^b |x(t)| dt$$

$$l_2\text{-norm} : ||\underline{x}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad L_2\text{-norm} : ||x(t)||_2 = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt}$$

$$l_\infty\text{-norm} : ||\underline{x}||_\infty = \max_i |x_i| \quad L_\infty\text{-norm} : ||x(t)||_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|$$

Normen

- **Definition 2.23:** Ein normierter linearer Raum ist ein Paar $(S, ||\cdot||)$ worin S einen Vektorraum und $||\cdot||$ eine Norm auf S darstellt.
- Metriken eines normierten, linearen Raumes sind definiert durch Normen.
- **Definition 2.24:** Ein Vektor heißt normiert (Einheitsvektor), wenn $||\underline{x}|| = 1$.
- Bis auf den Nullvektor, können alle Vektoren normiert werden.

Normen

- **Äquivalenzsatz 2.2:** Seien $||\cdot||$ und $||\cdot||'$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n, \mathbb{Q}^n, \mathbb{Z}^n, \mathbb{N}^n, \mathbb{B}^n$), dann gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ||\underline{x}_k|| = 0 \quad , \text{ dann und nur dann, wenn } \lim_{k \rightarrow \infty} ||\underline{x}_k||' = 0$$

- **Beweis:** Zu zeigen ist, dass $\alpha ||\underline{x}|| \leq ||\underline{x}'|| \leq \beta ||\underline{x}||$
- Dazu setzen wir (obdA) $||\cdot||' = ||\cdot||_2$ und erhalten für die untere Schranke:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{e}_i$$

$$||\underline{x}|| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| ||\underline{e}_i|| \leq \max_i |x_i| \sum_{i=1}^n ||\underline{e}_i|| \leq ||\underline{x}'||_2 \sum_{i=1}^n ||\underline{e}_i|| = \frac{1}{\alpha} ||\underline{x}'||_2$$

$$\text{Also: } \alpha ||\underline{x}'|| \leq ||\underline{x}'||_2$$

Normen

- Für die obere Schranke β betrachten wir den Fall:

$$\|\underline{x}\|_2 = 1$$

- Und erhalten:

$$\|\underline{x}\| = \left\| \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|_2} \right\| \|\underline{x}\|_2 \geq \beta \|\underline{x}\|_2$$

- Denn mit der obigen Bedingung, kann $\underline{x}$ nicht gleich dem Nullvektor sein und somit muss es eine positive untere Schranke β geben.
- Da die gesuchte Eigenschaft für die l_2 Norm gilt, gilt sie auch für alle anderen!

Resumee

- Kardinalität:
 $A = \{1+j, 1-j, -1+j, -1-j\}, |A| = 4$
- Dimension= Kardinalität der Hamel-Basis
- Normen sind Metriken im Vektorraum.
- Die Kenntnis einer Norm genügt.
- Eine Norm definiert über einem Vektorraum, macht ihn zu einem normierten Vektorraum.
- Spezielle (orthogonale, orthonormale) Basen bieten geringen Aufwand.

Orthogonalität

- Definition 2.28:** Vektoren eines inneren Vektorproduktraums heißen orthogonal, wenn gilt $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = 0$. Damit gleichbedeutend sind Begriffe wie normal (engl.: perpendicular).
- Definition 2.29:** Eine Menge von Vektoren $\{\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_m\}$ heißt orthonormal, wenn für jedes Paar gilt:

$$\langle \underline{p}_i, \underline{p}_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Orthogonalität

- Beispiel 2.30:** Die folgende Menge von Vektoren ist orthogonal:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- Wie muss die Menge modifiziert werden, um die Vektoren orthonormal zu machen?
- Beispiel 2.31:** Die folgende Menge von Funktionen ist orthonormal in $[-\pi, \pi]$: $\{1, e^{j\pi/4}, e^{j2\pi/4}, e^{j3\pi/4}\}$

Orthogonalität

- Gegeben sei eine Menge $T = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ von Vektoren. Wie kann eine Menge $S = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ mit m kleiner gleich n gefunden werden, so dass $\text{span}(S) = \text{span}(T)$ und die Vektoren in S zueinander orthonormal sind?
- Gram-Schmidt Methode:**
 - 1) Nehme p_1 und bilde $q_1 = p_1 / \|p_1\|$
 - 2) Bilde $e = p_2 - \langle p_2, q_1 \rangle q_1$; $q_2 = e / \|e\|$
 - 3) fahre so fort: $e = p_3 - \langle p_3, q_1 \rangle q_1 - \langle p_3, q_2 \rangle q_2$; $q_3 = e / \|e\| \dots$
 - 4) falls $e = 0$, werfe ihn fort.

Orthogonalität

- Vorteil der orthogonalen Basis:

$$\underline{f}^T = [a, b, c], \quad P = \{\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3\} \text{ sei orthonormale Basis}$$

$$\underline{f} = \langle f, \underline{p}_1 \rangle \underline{p}_1 + \langle f, \underline{p}_2 \rangle \underline{p}_2 + \langle f, \underline{p}_3 \rangle \underline{p}_3$$

$$= [\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3] \begin{bmatrix} \langle f, \underline{p}_1 \rangle \\ \langle f, \underline{p}_2 \rangle \\ \langle f, \underline{p}_3 \rangle \end{bmatrix}$$

Beweis durch Multiplikation von $[\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3]^T$ von links.

Innere Vektorprodukte

- Definition 2.25:** Ein Vektorraum für den ein inneres Vektorprodukt definiert ist, heißt Innerer Vektorproduktraum (Vor-Hilbertraum).
- Ein inneres Vektorprodukt bildet zwei Vektoren auf eine skalare Größe ab, mit den Eigenschaften:

$$1) \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle^*$$

$$2) \langle \alpha \underline{x}, \underline{y} \rangle = \alpha \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$$

$$3) \langle \underline{x} + \underline{y}, \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle + \langle \underline{y}, \underline{z} \rangle$$

$$4) \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle > 0 \text{ für } \underline{x} \neq 0 \text{ und } 0 \text{ sonst.}$$

Innere Vektorprodukte

- Beispiel 2.25:** Betrachte den Raum $C[a, b]$ der kontinuierlichen Funktionen mit den beiden Elementen $x(t)$ und $h(t)$. Sei $x(t)$ ein Eingangssignal und $h(t)$ die Impulsantwort eines Tiefpasses. Es gilt:

$$y(T) = \int_0^T x(\tau) h(T - \tau) d\tau$$

$$= \int_0^T x(\tau) g(\tau) d\tau = \langle x, g \rangle$$

- Beispiel 2.26:** Auch Matrizen können innere Produkte bilden.

$$\text{Spur}(B^H A) = \langle A, B \rangle$$

Innere Vektorprodukte

- **Beispiel 2.27:** Man betrachte die Berechnung des Erwartungswertes:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{xy}] &= \int xy f_{xy}(x, y) dx dy \\ &= \langle \mathbf{xy} \rangle_f \end{aligned}$$

- Auch hierbei handelt es sich um ein inneres Vektorprodukt, allerdings mit einer zusätzlichen Gewichtungsfunktion.

Induzierte Normen

- Innere Vektorprodukte sind sehr hilfreich bei der Definition von Normen. So kann die (quadratische) l_2 Norm als inneres Vektorprodukt geschrieben werden:

$$\|\underline{x}\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle$$

$$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$$

- Man spricht daher von einer induzierten (engl. induced) Norm. Die Norm wird durch das innere Vektorprodukt induziert.
- Bei den l_p Normen ist nur die l_2 Norm eine induzierte Norm!

Induzierte Normen

- **Beispiel 2.28:** induzierte Norm in $L_2[a,b]$

$$\|x(t)\|_2 = \langle x(t), x(t) \rangle^{1/2} = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

- Beachte dass für reell-wertige Signale gilt:

$$\|\underline{x}\|_2^2 + \|\underline{y}\|_2^2 - \|\underline{x} - \underline{y}\|_2^2 = 2\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$$

- Wie lässt sich dies für komplex-wertige Signale schreiben?

Induzierte Normen

- Matrix-Normen sind üblicherweise induzierte Normen. Betrachte eine Matrix $A \in R^{m \times n}$:

$$\|A\|_p = \|A\|_{p, \text{ind}} = \sup_{\underline{x} \neq 0} \frac{\|A\underline{x}\|_p}{\|\underline{x}\|_p} = \sup_{\underline{x} \neq 0} \left\| A \left(\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|_p} \right) \right\|_p = \sup_{\|\underline{x}\|_p = 1} \|A\underline{x}\|_p$$

- Beachte, dass gilt (Spektralnrm):

$$\|A\|_2 = \sup_{\|\underline{x}\|_2 = 1} \|A\underline{x}\|_2 = \sigma_{\max} = |\lambda_{\max}|^2$$

- Also der größte Singulärwert der Matrix

Weitere Matrixnormen

- Beachte, dass gilt:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |A_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |A_{ij}|$$

- Oft wird die Frobeniusnorm verwendet:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2} = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_p$$

$$p = \min(m, n)$$

Submultiplikative Eigenschaft

- Einige Matrixnormen (p-Normen) erfüllen die folgende submultiplikative Eigenschaft:

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p ; p = 1, 2, \dots, \infty$$

- Beachte dass diese Eigenschaft für beliebige Matrizen gilt, also beispielsweise $A \in R^{2 \times 3}$, $B \in R^{3 \times 4}$
- Dann sind die p-Normen aber jeweils unterschiedliche Funktionen!

$$\|ABx\|_p \leq \|Ax\|_p \|Bx\|_p$$

Submultiplikative Eigenschaft

- Allerdings erfüllen nicht alle Matrixnormen diese Eigenschaft.
- Beispiel 2.29:**

$$\|A\|_\Delta = \max |A_{ij}|$$

$$\text{Für } A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ gilt :}$$

$$\|AB\|_\Delta > \|A\|_\Delta \|B\|_\Delta$$

Spektralnrm

- Betrachte zunächst einen Vektor der Länge M, der eine Teilfolge der Folge $\exp(j\Omega k)$ enthält:

$$\underline{x}_{M,k} = [\exp(j\Omega k), \exp(j\Omega(k-1)), \dots, \exp(j\Omega(k-M+1))]^T$$

$$\underline{x}_{M,k+1} = [\exp(j\Omega(k+1)), \exp(j\Omega(k)), \dots, \exp(j\Omega(k-M+1))]^T = \exp(j\Omega) \underline{x}_{M,k}$$

...

$$\underline{x}_{M,k+m} = [\exp(j\Omega(k+m)), \exp(j\Omega(k+m-1)), \dots, \exp(j\Omega(k+m-M+1))]^T = \exp(j\Omega m) \underline{x}_{M,k}$$

- Mit anderen Worten, all diese Vektoren sind linear abhängig unabhängig von ihrer Länge M und der Frequenz Ω .
- Wählt man aber M verschiedene Frequenzen, so kann man leicht M linear unabhängige Vektoren erhalten.

Spektralnorm

- Betrachte nun die Spektralnorm für den Vektor $\underline{x}_{M,k}$:

$$\begin{aligned}
 A \underline{x}_{M,k} &= \begin{bmatrix} h_0 & \dots & h_{M-1} & 0 \\ h_0 & \dots & h_{M-1} & \\ & h_0 & & \exp(j\Omega(k+l+m-1)) \\ & & \ddots & \exp(j\Omega(k+l+m+n)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(j\Omega(k+l)) \\ \dots \\ \exp(j\Omega(k+l+m-1)) \\ \exp(j\Omega(k+l+m+n)) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} H(\exp(j\Omega)) \exp(j\Omega l) \\ H(\exp(j\Omega)) \exp(j\Omega(l+m-1)) \\ H(\exp(j\Omega)) \exp(j\Omega(l+m+n)) \end{bmatrix} = H(\exp(j\Omega)) \begin{bmatrix} \exp(j\Omega l) \\ \exp(j\Omega(l+m-1)) \\ \exp(j\Omega(l+m+n)) \end{bmatrix} \\
 \|A\|_2 &= \sup_{\|\underline{x}\|_2=1} \frac{\|A\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} \\
 &= \sup_{\|\underline{x}_{M,k}\|_2=1} \frac{\|A \underline{x}_{M,k}\|_2}{\|\underline{x}_{M,k}\|_2} = \sup_{\Omega} |H(\exp(j\Omega))|
 \end{aligned}$$

Matrixnormen

- Beachte, dass neben dem Supremum auch das Infimum von Interesse sein mag:

$$\|A\|_p = \|A\|_{p,\text{ind}} = \sup_{\underline{x} \neq 0} \frac{\|A\underline{x}\|_p}{\|\underline{x}\|_p}$$

$$\inf_{\underline{x} \neq 0} \frac{\|A\underline{x}\|_p}{\|\underline{x}\|_p} \geq 0$$

Wenn gilt, dass

$$\sup_{\underline{x} \neq 0} \frac{\|A\underline{x}\|_p}{\|\underline{x}\|_p} = \inf_{\underline{x} \neq 0} \frac{\|A\underline{x}\|_p}{\|\underline{x}\|_p}$$

dann beschreibt A einen Allpass.

Matrixnormen

- Beispiel:** Betrachte eine kausale Impulsantwortfolge $h(n)$. Wann handelt es sich bei $h(n)$ um einen Allpass?

$$\begin{bmatrix} y(k-N+1) \\ \vdots \\ y(k-2) \\ y(k-1) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{M-1} & \dots & h_0 & & \\ & h_{M-1} & \dots & h_0 & \\ & & h_{M-1} & \ddots & \\ & & & \ddots & h_0 \\ h_{M-1} & \dots & h_0 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k-N-M+1) \\ \vdots \\ x(k-2) \\ x(k-1) \\ x(k) \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_{N,k} = H_N \underline{x}_{N+M,k}$$

- Offensichtlich muss die Energie der Eingangsfolge identisch zur Energie der Ausgangsfolge sein.
- Allerdings haben die Vektoren $\underline{x}_{N+M,k}$ und $\underline{y}_{N,k}$ unterschiedliche Länge!

Matrixnormen

- Also muss hier gelten:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \underline{y}_{N,k} \right\|_p = \lim_{N \rightarrow \infty} \|H_N \underline{x}_{N+M,k}\|_p = \lim_{N \rightarrow \infty} \|\underline{x}_{N+M,k}\|_p \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|H_N\|_p \|\underline{x}_{N+M,k}\|_p$$

$$\|H_N\|_p = \sup_{\underline{x} \neq 0} \frac{\|H_N \underline{x}_{N+M,k}\|_p}{\|\underline{x}_{N+M,k}\|_p} = \sup_{\underline{x} \neq 0} \frac{\|\underline{y}_{N,k}\|_p}{\|\underline{x}_{N+M,k}\|_p} = 1$$

- Dies erfordert, dass $N \rightarrow \infty$.
- Für die Spektralnorm gilt:

$$\|H(e^{j\Omega})\|_{\infty} = \max_{\Omega} |H(e^{j\Omega})| = \lim_{N \rightarrow \infty} \|H_N\|_2$$

Matrixnormen

- Allpässe lassen sich auch durch die Zustandsdarstellung finden. Beachte:

$$\begin{aligned} \underline{z}_{k+1} &= A \underline{z}_k + \underline{b} x(k) \\ y(k) &= \underline{c}^T \underline{z}_k + d x(k) \\ \begin{bmatrix} \underline{z}_{k+1} \\ y(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & \underline{b} \\ \underline{c}^T & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}_k \\ x(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Beispiel: $y(k) = x(k-2)$

$$\begin{aligned} \underline{z}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{z}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(k) \\ y(k) &= [1, 0] \underline{z}_k + 0 x(k) \\ \begin{bmatrix} \underline{z}_{k+1} \\ y(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}_k \\ x(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrixnormen

- Diese allgemeinere Beschreibungsform für Allpässe, erlaubt es auch lineare, zeit-variante Systeme als Allpass zu beschreiben.
- Beispiel: Sei $b = \sqrt{1-a^2}$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \underline{x}$$

A beschreibt einen Allpass.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(k) & b(k) \\ -b(k) & a(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A(k) \underline{x}$$

$A(k)$ beschreibt einen Allpass.

Small Gain Theorem

- Man kann das so genannte Small Gain Theorem als eine Erweiterung der Stabilitätsaussage von linearen Systemen auf nicht-lineare Systeme interpretieren.
- Bei einem linearen System ist die Verstärkung der offenen Schleife für die Stabilität (BIBO stability) der geschlossenen Schleife verantwortlich.
- Das Small Gain Theorem kann sowohl für nicht-lineare als auch zeitvariante Systeme angewendet werden.

Small Gain Theorem

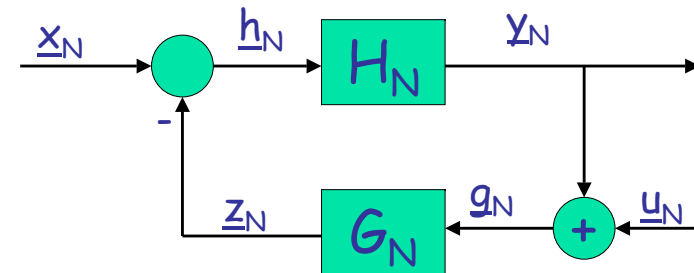
- Betrachte hierzu die Ein-Ausgangsbeziehung eines Systems durch Vektoren: $\underline{y}_N = H_N \underline{x}_N$
- Definition 2.26:** Eine Abbildung H wird l-stabil wenn zwei positive Konstanten β, γ derart existieren, dass für alle Eingangssequenzen folgendes gilt: $\|\underline{y}_N\| = \|H_N \underline{x}_N\| \leq \gamma \|\underline{x}_N\| + \beta$
- Definition 2.27:** Der kleinste positive Wert γ , für den l-Stabilität garantiert ist, heißt die Verstärkung (engl.: gain) von H .
- Bemerkung:** BIBO (Bounded Input Bounded Output) Stabilität ist äquivalent zu l_{∞} -Stabilität.

Small Gain Theorem

- Betrachte nun ein rückgekoppeltes System, bestehend aus zwei Systemen G und H mit korrespondierenden Verstärkungen γ_g und γ_h mit den folgenden Signalen:

$$\begin{aligned}\underline{y}_N &= H_N \underline{h}_N = H_N [\underline{x}_N - \underline{z}_N] \\ \underline{z}_N &= G_N \underline{g}_N = G_N [\underline{u}_N + \underline{y}_N]\end{aligned}$$

Small Gain Theorem



Small Gain Theorem

- Satz 2.4:** (Small Gain Theorem) Sind die beiden Verstärkungen γ_g und γ_h derart dass:

$$\gamma_g \gamma_h < 1$$

so sind die Signale $\underline{g}_N$ und $\underline{h}_N$ des rückgekoppelten Systems begrenzt durch:

$$\|\underline{h}_N\| \leq \frac{1}{1 - \gamma_g \gamma_h} [\|\underline{x}_N\| + \gamma_g \|\underline{u}_N\| + \beta_g + \gamma_g \beta_h]$$

$$\|\underline{g}_N\| \leq \frac{1}{1 - \gamma_g \gamma_h} [\|\underline{u}_N\| + \gamma_h \|\underline{x}_N\| + \beta_h + \gamma_h \beta_g]$$

Small Gain Theorem

- Beweis:** Beginne mit: $\underline{h}_N = \underline{x}_N - \underline{z}_N$; $\underline{g}_N = \underline{u}_N + \underline{y}_N$
die Norm ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\|\underline{h}_N\| &\leq \|\underline{x}_N\| + \|G_N \underline{g}_N\| \\ &\leq \|\underline{x}_N\| + \gamma_g \|\underline{g}_N\| + \beta_g \\ &\leq \|\underline{x}_N\| + \gamma_g [\|\underline{u}_N\| + \gamma_h \|\underline{h}_N\| + \beta_h] \beta_g \\ &= \gamma_g \gamma_h \|\underline{h}_N\| + \|\underline{x}_N\| + \gamma_g \|\underline{u}_N\| + \beta_g + \gamma_g \beta_h \\ &= \frac{1}{1 - \gamma_g \gamma_h} [\|\underline{x}_N\| + \gamma_g \|\underline{u}_N\| + \beta_g + \gamma_g \beta_h]\end{aligned}$$

- Die Herleitung für $\underline{g}_N$ folgt einem ähnlichen Pfad.

Chauchy Schwarz'sche Ungleichung

- **Satz 2.3:** In einem inneren Vektorproduktraum S in $\mathbb{R}^n$ mit induzierter Norm $||\cdot||$ gilt:

$$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\|_2 \|\underline{y}\|_2$$

- Die Ungleichung gilt mit Gleichheit dann und nur dann, wenn $\underline{x} = \alpha \underline{y}$.
- **Beweis:** Man beginnt mit der Tatsache, dass

$$\|\underline{x} - \alpha \underline{y}\|_2 \geq 0$$

Chauchy Schwarz'sche Ungleichung

- Weiterhin gilt, dass

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\underline{x} - \alpha \underline{y}\|_2^2 &= \|\underline{x}\|_2^2 - 2 \operatorname{Re} \langle \underline{x}, \alpha \underline{y} \rangle + |\alpha|^2 \|\underline{y}\|_2^2 \\ &= \|\underline{x}\|_2^2 - \frac{|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle|^2}{\|\underline{y}\|_2^2} + \|\underline{y}\|_2^2 \left[\alpha - \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{y}\|_2^2} \right] \left[\alpha^* - \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^*}{\|\underline{y}\|_2^2} \right] \end{aligned}$$

- Das Minimum des Ausdrucks erhält man für: $\alpha = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{y}\|_2^2}$
- Wodurch:

$$0 \leq \min_{\alpha} \|\underline{x} - \alpha \underline{y}\|_2^2 = \|\underline{x}\|_2^2 - \frac{|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle|^2}{\|\underline{y}\|_2^2}$$

Chauchy Schwarz'sche Ungleichung

- Wir sind noch nicht fertig!
- Für $\underline{x} = \alpha \underline{y}$ erhält man $||\underline{x} - \alpha \underline{y}|| = 0$.
- Wegen der Normeigenschaft $\|\underline{x}\| \geq 0$, kann die Eigenschaft $||\cdot|| = 0$ aber nur für das Argument identisch Nulle erreicht werden. Also gilt Gleichheit nur und nur für den Fall $\underline{x} = \alpha \underline{y}$.

Chauchy Schwarz'sche Ungleichung

- Die Cauchy- Schwarz'sche Ungleichung kann leicht erweitert werden
- Für S in C^n : $|\underline{x}^H \underline{y}|^2 \leq (\underline{x}^H \underline{x})(\underline{y}^H \underline{y})$
- Für den Raum der reell-wertigen Funktionen im Intervall $[a, b]$:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt$$

Vollständiger Raum

- Erinnerung:
- **Definition 2.7:** Ein Metrischer Raum (X, d) heißt vollständig (engl. complete), wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Hilbert- und Banach Räume

- **Definition 2.30:** Ein vollständiger, normierter Vektorraum heißt Banachraum. Gilt in diesem Raum zusätzlich ein inneres Vektorprodukt (die Norm ist eine induzierte Norm), so spricht man von einem Hilbertraum.
- **Beispiel 2.32:** Der Raum der kontinuierlichen Funktionen $(C[a, b], d_{\infty})$ stellt einen Banachraum dar.
- **Beispiel 2.33:** Der Raum der kontinuierlichen Funktionen $(C[a, b], d_p)$ stellt keinen Banachraum dar, da er nicht vollständig ist.

Hilbert- und Banach Räume

- **Beispiel 2.34:** Der Folgenraum $l_p(0, \infty)$ stellt einen Banachraum dar. Für $p=2$ handelt es sich um einen Hilbertraum.
- **Beispiel 2.35:** Der Raum $L_p[a, b]$ stellt einen Banachraum dar. Für $p=2$ handelt es sich um einen Hilbertraum.
Dieser wird üblicherweise mit $L_p(\mathbb{R})$ bezeichnet.
- Im weiteren Teil der Vorlesung werden wir ausschließlich Hilberträume betrachten.