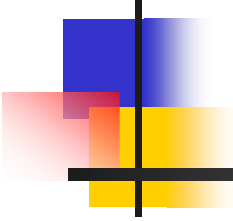


Deterministische Signalverarbeitung Grundlagen



Univ.-Prof., Dr.-Ing. Markus Rupp

SS 04

Mi 9:15-10:45EI4,

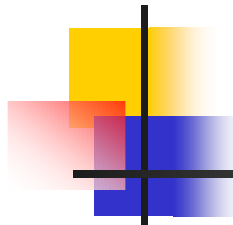
Fr 8:45-10:15EI2

LVA 389.068

Letzte Änderung: 18.3.2004



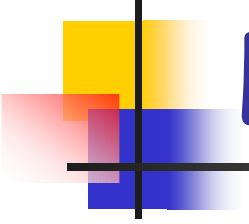
INSTITUT FÜR
NACHRICHTENTECHNIK UND
HOCHFREQUENZTECHNIK



Lernziele

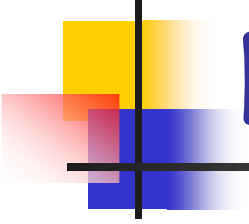
- Grundlagen

- Notation: Vektor, Matrix, Zufallsgrößen, determinierte Größen
- Beschreibungsformen linearer Systeme
 - Faltungsoperationen
 - Operator (Polynomdarstellungen), Bezout
 - Matrizen und Vektorschreibweise
 - Zustandsraumdarstellungen, Zeitinvariante Systeme
 - Eigenschaften linearer Systeme
- Abtasttheoreme



Lernziele

- Die behandelten Signale lassen sich in Form von endlichen oder unendlichen Folgen darstellen.
- Endliche Folgen lassen sich aber auch als Vektoren darstellen, die linearen Systeme können dann als Matrizen beschrieben werden.
- Digitale Signalverarbeitung ist damit angewandte lineare Algebra.
- Alle „Ingenieurs-Konzepte“ der digitalen Signalverarbeitung können durch Methoden der linearen Algebra exakt beschrieben werden.



Notation

- * konjugiert komplex
- T transponiert
- H hermitesch = konjugiert und transponiert
- a, b, c deterministischer Scalar
- $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ Zufallsvariablen mit Dichtefunktion $f_a(a)$, Varianz σ_a^2 und Mittelwert $m_a^{(1)}$.
- $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ deterministischer Spaltenvektor
- $\underline{1}$ Vektor mit nur "Einsen" als Einträgen
- $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}}, \underline{\mathbf{c}}$ Zufalls-Spaltenvektoren mit Verbunddichtefunktion $f_{\underline{\mathbf{a}}}(\underline{\mathbf{a}})$, Varianz $\underline{\sigma}_a^2$ und Mittelwert $\underline{m}_a^{(1)}$. Ihre Autokorrelationsmatrix ist gegeben durch $R_{\underline{\mathbf{a}}} = E[\underline{\mathbf{a}}\underline{\mathbf{a}}^H]$.

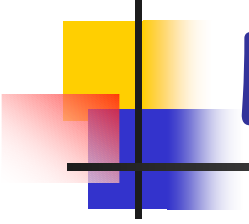


Notation

- A, B, C deterministische Matrizen
- $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ Matrizen mit Zufallsvariablen als Einträgen
- $\mathbf{I}$ Einheitsmatrix, d.h. "Einsen" auf der Hauptdiagonalen, sonst Null.
- $\|\underline{a}\|_p^q$ Vektor p -Norm, hoch q

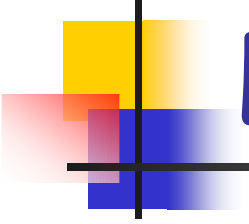
$$\|\underline{a}\|_p^q = \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^p \right)^{q/p}$$

- $\|\underline{a}\|_Q = \sqrt{\underline{a}^H \mathbf{Q} \underline{a}}$



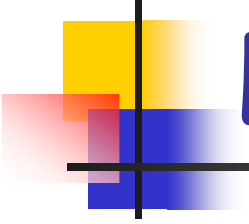
Lineare Systeme

- Lineare Systeme sind eine dominante Annahme zur Beschreibung der Systeme, deren Ein/Ausgangsverhalten uns interessiert.
- Lineare Systeme sind
 - linear durch Design
 - (hinreichend) linear durch Beobachtung
 - linearisiert durch Vereinfachung



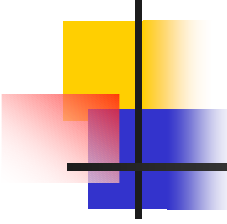
Lineare Systeme

- Ein System heißt linear, wenn gilt
 - Verändert man das Eingangssignal durch eine Konstante α , so ändert sich das Ausgangssignal um dieselbe Konstante: $y=S[x]$;
 $S[\alpha x]=\alpha S[x]= \alpha y$
 - Besteht das Eingangssignal aus zwei Komponenten, so kann man das Ausgangssignal auch aus zwei Komponenten darstellen, die eindeutig den Eingangssignalen zuzuordnen sind:
 $y_1=S[x_1]$; $y_2=S[x_2]$; $y=S[x_1+x_2]=y_1+y_2$.



Lineare Systeme

- Wir bezeichnen die Systembeschreibung $S[]$ eines linearen Systems als lineare Transformation, oder, äquivalent als Operator.
- Beachte, dass wir die betroffenen Signale nicht näher spezifiziert haben, es kann sich hierbei sowohl um Folgen als auch um Vektoren handeln.



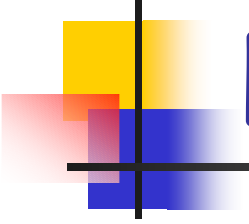
Faltungsooperationen

- Die Faltungsooperation ist eine bedeutende lineare Beschreibungsform für Signale, die als zeit-kontinuierliche Funktion oder als zeit-diskrete Zahlenfolge dargestellt werden:

$$H[x(t)] = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau; \text{ kausales System}$$

$$H[x(t)] = \int_0^{t_0} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{t-t_0}^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau; \text{ kausales System, bei } t_0 \text{ endend}$$

$$H[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau; \text{ nicht - kausales System}$$



Faltungsooperationen

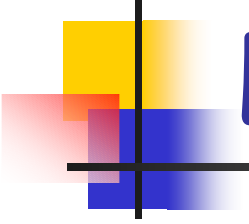
- Ebenso gilt für Zahlenfolgen:

$$H[x(k)] = \sum_{l=0}^{\infty} h(l)x(k-l) = \sum_{l=-\infty}^k h(k-l)x(l); \text{ kausales System}$$

$$H[x(k)] = \sum_{l=0}^{k_0} h(l)x(k-l) = \sum_{l=k-k_0}^k h(k-l)x(l); \text{ kausales System, bei } k_0 \text{ endend}$$

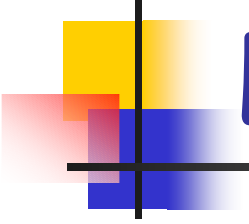
$$H[x(k)] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)x(k-l); \text{ nicht - kausales System}$$

- In der Nachrichtentechnik werden meist nichtkausale Folgen betrachtet, da bei einer „sehr langen“ Datenübertragung die Anfangswerte keine Rolle spielen.



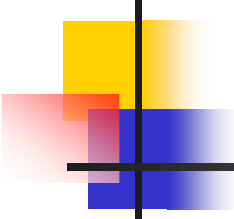
Lineare Operatoren

- Neben der Faltung kennen wir bereits viele andere lineare Operatoren
 - Fourier-Transformation
 - Laplace-Transformation
 - Z-Transformation
- Diese stellen, je nach ihrem Existenzbereich (engl.: ROC=Region of Convergence), Einschränkungen für die verwendbaren Signale bereit.
- Die Eigenschaft „lineares System“ ist allerdings unabhängig davon, welche Eingangssignale verwendet werden.



Lineare Operatoren

- Will man daher nur die lineare Operator-Eigenschaft betonen, ohne spezielle Eigenschaften der Transformation zu nutzen, so kann man einfacher einen allgemeinen linearen Operator einführen.
- Linearer Operator: $H[]$
- Ohne sich auf eine spezielle Transformation festzulegen, kann man bereits wichtige Eigenschaften zu diesem Operator angeben:
Verzögerung: $H[] = q^{-1}[]$; $q^{-1}[x(k)] = x(k-1)$



Lineare Operatoren

- Aus der Faltungssumme lässt sich vermuten, dass lineare Operatoren durch Linearkombinationen von Verzögerungsoperationen zusammengefügt werden können:

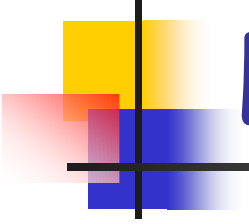
$$H[] = h_0 + h_1 q^{-1} + \dots + h_n q^{-n} \quad ; \text{ für kausales System}$$

$$H[] = h_{-n} q^n + \dots + h_0 + h_1 q^{-1} + \dots + h_n q^{-n}; \text{ für nicht-kausales System}$$

- **Beispiel 1.1:** Auch komplizierte Filter können so dargestellt werden:

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{1 - A(q^{-1})} [x(k)] = A(q^{-1})[y(k)] + B(q^{-1})[x(k)]$$

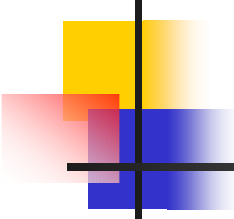
$$= \sum_{i=1}^N a_i y(k-i) + \sum_{i=0}^{M-1} b_i x(k-i)$$



Lineare Operatoren

- Diese Darstellung wird auch oft Polynomdarstellung genannt, da die linearen Operatoren in (endlicher oder unendlicher) Polynomform vorliegen.
- Der Vorteil liegt darin, dass die Faltungseigenschaft nun als Polynommultiplikation erkannt wird:

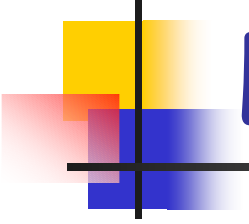
$$\begin{aligned} G(q^{-1})H(q^{-1}) &= (h_0 + h_1 q^{-1} + \dots + h_{n_H} q^{-n_H}) (g_0 + g_1 q^{-1} + \dots + g_{n_G} q^{-n_G}) \\ &= h_0 g_0 + (h_1 g_0 + h_0 g_1) q^{-1} + \dots + h_{n_H} g_{n_G} q^{-(n_H + n_G)} \end{aligned}$$



Lineare Operatoren

Zero-Forcing (1)

- Das inverse Problem kann lauten: gegeben sei eine Übertragungsfunktion in Form eines Polynoms $H(q^{-1})$, suche das Polynom $G(q^{-1})$, für das gilt: $H(q^{-1})G(q^{-1})=q^{-D}$.
- **Beispiel 1.2:** H ist Kanal, G ist Entzerrer
Die Lösung für $G(q^{-1})$ ist üblicherweise doppelt unendlich, d.h. $G(q^{-1})=g_{-\infty}q^{\infty}+\dots+g_{-1}q^1+g_0+g_1q+\dots$
Diese Situation ändert sich allerdings, wenn man mehr als nur eine Übertragungsfunktion betrachtet.



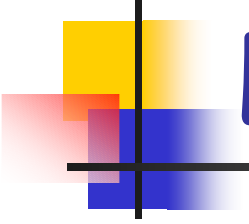
Lineare Operatoren

■ Zero-Forcing (2)

- Satz 1.1 (Bezout): Gegeben seien die Übertragungsfunktionen $H_1(q^{-1}), \dots, H_N(q^{-1})$. Die Gleichung

$$\sum_{l=1}^N H_l(q^{-1})G_l(q^{-1}) = q^{-D}$$

hat genau dann eine (endlich-dimensionale) Lösung, wenn alle $H_l(q^{-1})$ keine gemeinsame Nullstelle haben (engl.: co-prime).

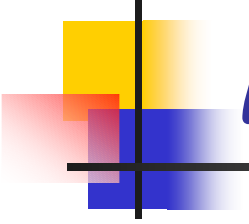


Lineare Operatoren

■ Zero Forcing (3)

- **Beispiel 1.3:** Sei $H_1(q^{-1}) = (1 + hq^{-1}) C_1(q^{-1})$ und $H_2(q^{-1}) = (1 + hq^{-1}) C_2(q^{-1})$, $C_1(q^{-1})$ und $C_2(q^{-1})$ seien co-prime. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 H_l(q^{-1}) G_l(q^{-1}) &= \sum_{l=1}^2 (1 + hq^{-1}) C_l(q^{-1}) G_l(q^{-1}) \\ &= (1 + hq^{-1}) \underbrace{\sum_{l=1}^2 C_l(q^{-1}) G_l(q^{-1})}_{\neq q^{-D} / (1 + hq^{-1})} \end{aligned}$$



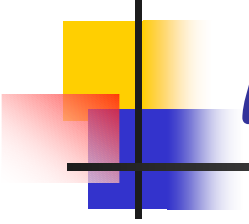
Matrizen und Vektoren

- Betrachten wir noch einmal die Faltungsoption für ein kausales System ohne Anfangsbedingungen:

$$H[x(k)] = \sum_{l=0}^{k_0} h(l)x(k-l) = \sum_{l=k-k_0}^k h(k-l)x(l)$$

$$(h_0 + h_1 q^{-1} + \dots + h_{k_0} q^{-k_0})[x(k)] = h_0 x(k) + h_1 x(k-1) + \dots + h_{k_0} x(k-k_0)$$

- Die Summendarstellung lässt erkennen, dass sowohl für das System $h(k)$ als auch für das Signal $x(k)$ nur eine endliche Anzahl von Werten benötigt wird, um die Operation zu beschreiben.



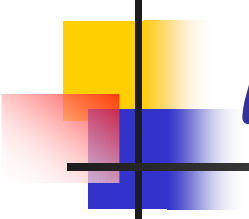
Matrizen und Vektoren

- Ordnet man das Signal $x(k)$ und das System $h(k)$ in einem Vektor an, so kann man folgendes in äquivalenter Form schreiben:

$$\underline{x}_k = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-k_0)]^T$$

$$\underline{h} = [h(0), h(1), \dots, h(k_0)]^T$$

$$y(k) = \underline{h}^T \underline{x}_k = \underline{x}_k^T \underline{h}$$



Matrizen und Vektoren

- Betrachte nun lineares FIR System h mit M Koeffizienten:

$$\underline{h} = [h_0, h_1, \dots, h_{M-1}]^T$$

- Ein Signal $x(k)$ liege am Eingang dieses Systems

$$\underline{x}_k = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-M+1)]^T$$

- Somit beschreibt das innere Vektorprodukt $\underline{h}^T \underline{x}_k$ bzw $\underline{x}_k^T \underline{h}$ den Ausgang $y(k)$ des Systems h zu jedem Zeitpunkt k .
- Das Eingangssignal muss also nicht von endlicher Dauer sein, um mit Hilfe der Vektorbeschreibung eine Faltungsoperation zu beschreiben.

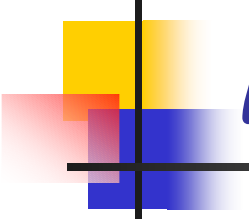
Matrizen und Vektoren

- Betrachten wir nun den Ausgang eines solchen Systems für mehrere Zeitpunkte $k=0..K$:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(K-1) \\ y(K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & & & & & \\ & h_1 & h_0 & & & \\ & & h_1 & h_0 & & \\ & & & h_1 & h_0 & \\ h_{M-1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & h_{M-1} & & h_1 & h_0 \\ & & & h_{M-1} & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(K-2) \\ x(K-1) \\ x(K) \end{bmatrix}$$

$\underline{y} = H \underline{x}$

- Für h_0 ungleich Null ist dieses System invertierbar!



Matrizen und Vektoren

- Diese Form der Matrixbeschreibung beinhaltet somit auch Anfangswerte.
- Man beachte, dass die Dimensionen mit größer werdendem Zeitindex auch ansteigen.
- Daher ist so eine Beschreibungsform im allgem. nicht sehr praktikabel.
- Legt man keinen Wert auf die Anfangswerte, so erhält man eine andere Form der Matrixbeschreibung.

Matrizen und Vektoren

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(K-1) \\ y(K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & & & & \\ h_1 & h_0 & & & \\ \vdots & h_1 & h_0 & & \\ h_{M-1} & & h_1 & h_0 & \\ & \ddots & & \ddots & \ddots \\ & & h_{M-1} & & h_1 & h_0 \\ & & & h_{M-1} & h_1 & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(K-2) \\ x(K-1) \\ x(K) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y(k-N+1) \\ \vdots \\ y(k-2) \\ y(k-1) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{M-1} & \dots & h_0 & & \\ & h_{M-1} & \dots & h_0 & \\ & & h_{M-1} & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & h_0 \\ & & & & h_{M-1} & \dots & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k-N-M+1) \\ \vdots \\ x(k-2) \\ x(k-1) \\ x(k) \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_k = H_N \underline{x}_k$$

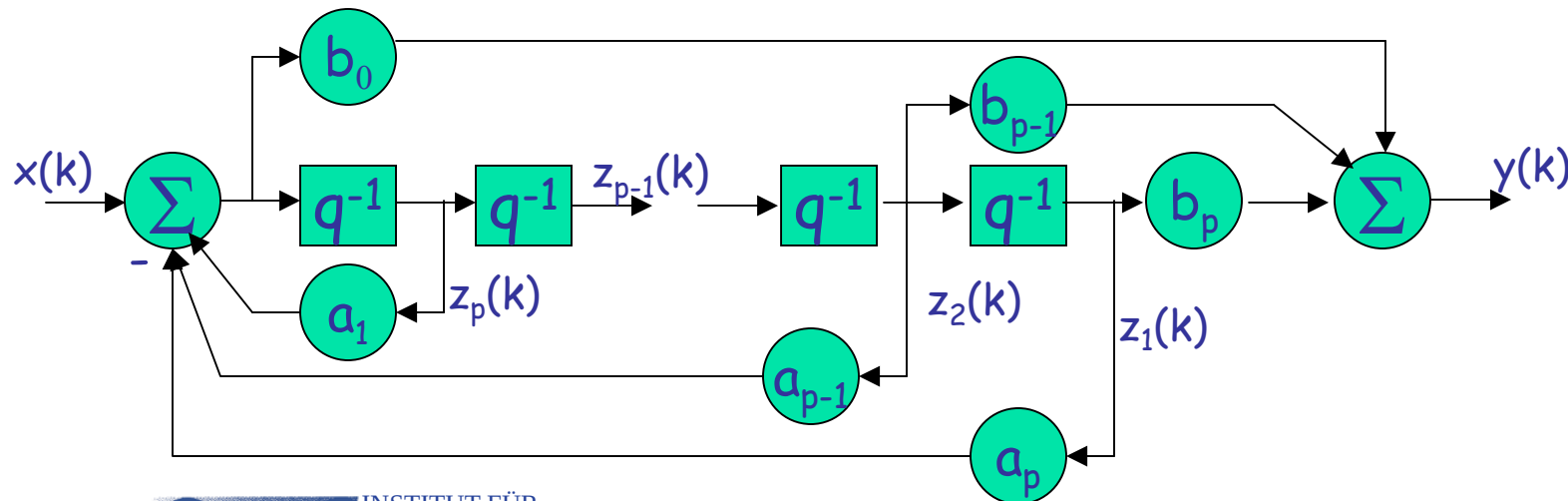
Matrizen und Vektoren

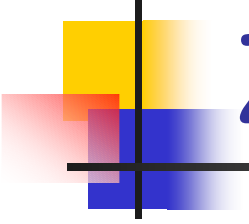
- Diese Form der Bandmatrix-Darstellung ist sehr üblich, wenngleich sie keine Inversion der Matrix zulässt. Beachte den Index N, der den Beobachtungszeitraum (engl.: observation window) angibt.
- Manchmal werden auch zwei Ausgänge gleichzeitig betrachtet (Sylvestermatrix):

$$\begin{bmatrix} y(k-N+1) \\ \vdots \\ y(k-1) \\ y(k) \\ z(k-N+1) \\ \vdots \\ z(k-1) \\ z(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{M-1} & \cdots & h_0 & & & \\ & h_{M-1} & & h_0 & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & h_{M-1} & \cdots & h_0 \\ g_{M-1} & \cdots & g_0 & & & \\ & g_{M-1} & & g_0 & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & g_{M-1} & \cdots & g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k-N-M+1) \\ x(k-N-M) \\ \vdots \\ x(k-2) \\ x(k-1) \\ x(k) \end{bmatrix}$$

Zustandsraumdarstellung

- Die vielleicht wichtigste Matrixdarstellung ist die so genannte Zustandsraumdarstellung (engl.: State-Space-Form)
- Wir betrachten dazu folgendes Signalflussdiagramm eines IIR Filters:





Zustandsraumdarstellung

- Die Variablen $z_1(k) \dots z_p(k)$ definieren den Zustand des Systems zum Zeitpunkt k .
- Durch die Verzögerungskette gilt:
 $z_1(k+1)=z_2(k), z_2(k+1)=z_3(k), \dots, z_{p-1}(k+1)=z_p(k)$
- Außerdem finden wir:
 $z_p(k+1)=x(k)-a_1z_p(k)-a_2z_{p-1}(k)-\dots-a_pz_1(k)$
 $y(k)=b_pz_1(k)+b_{p-1}z_2(k)+\dots+b_1z_p(k)+b_0z_p(k+1)$
- Damit lässt sich die Beziehung des Eingangs $x(k)$ zum Ausgang $y(k)$ auch folgendermaßen darstellen.

Zustandsraumdarstellung

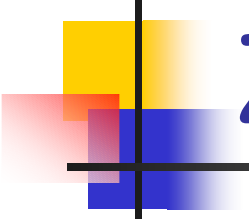
$$\begin{bmatrix} z_1(k+1) \\ \vdots \\ z_{p-1}(k+1) \\ z_p(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_p & -a_{p-1} & & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ \vdots \\ z_{p-1}(k) \\ z_p(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_p & b_{p-1} & \cdots & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ \vdots \\ z_{p-1}(k) \\ z_p(k) \end{bmatrix} + b_0 x(k) - \begin{bmatrix} a_p & a_{p-1} & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ \vdots \\ z_{p-1}(k) \\ z_p(k) \end{bmatrix}$$

$$\underline{z}_{k+1} = A \underline{z}_k + \underline{b} x(k)$$

$$y(k) = \underline{c}^T \underline{z}_k + d x(k)$$

$$= \begin{bmatrix} b_p - b_0 a_p, & b_{p-1} - b_0 a_{p-1}, & \cdots, & b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ \vdots \\ z_{p-1}(k) \\ z_p(k) \end{bmatrix} + b_0 x(k)$$



Zustandsraumdarstellung

- Lösung des Gleichungssystems

$$\underline{z}_{k+1} = A\underline{z}_k + \underline{b}x(k)$$

$$y(k) = \underline{c}^T \underline{z}_k + dx(k)$$

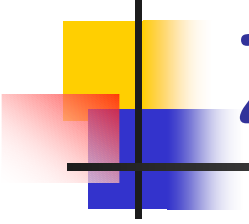
- Führe Z-Transformierte bzgl. der Signale aus:

$$z\underline{Z}(z) = A\underline{Z}(z) + \underline{b}X(z)$$

$$Y(z) = \underline{c}^T \underline{Z}(z) + dX(z)$$

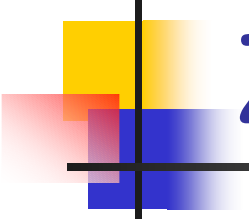
$$(zI - A)\underline{Z}(z) = \underline{b}X(z); \quad \underline{Z}(z) = (zI - A)^{-1} \underline{b}X(z)$$

$$Y(z) = \underbrace{\left(\underline{c}^T (zI - A)^{-1} \underline{b} + d \right)}_{H(z)} X(z)$$



Zustandsraumdarstellung

- Ähnlichkeitstransformation:
 - Nehme an es existiere eine Matrix T , deren Inverse ebenso existiert.
 - Dann kann durch
$$A' = T^{-1}AT; \quad \underline{b}' = T^{-1}\underline{b}; \quad \underline{c}' = T^T \underline{c}; \quad d' = d$$
eine äquivalente Beschreibung erreicht werden.
 - Besonders beliebt sind solche Darstellungsformen, bei denen A' Diagonalstruktur oder Jordan Form annimmt.

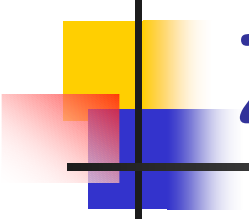


Zustandsraumdarstellung

- Beachte, dass die besondere Form der Zustandsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_p & -a_{p-1} & & -a_1 \end{bmatrix}$$

- Kardinalform (engl. companion form) heißt. Sie kann direkt aus der charakteristischen Gleichung bzw. deren Wurzeln (also den Eigenwerten von A) gewonnen werden.



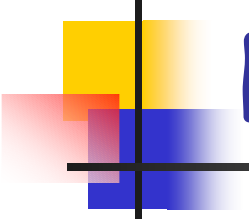
Zustandsraumdarstellung

- Der Zusammenhang zur Diagonalmatrix D mit den Eigenwerten $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ ist durch eine Ähnlichkeitstransformation mit Vandermonde Matrizen gegeben:

$$VD=AV$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & & & \lambda_m^2 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{bmatrix}$$

Beachte: A und D haben die gleichen Eigenwerte $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$

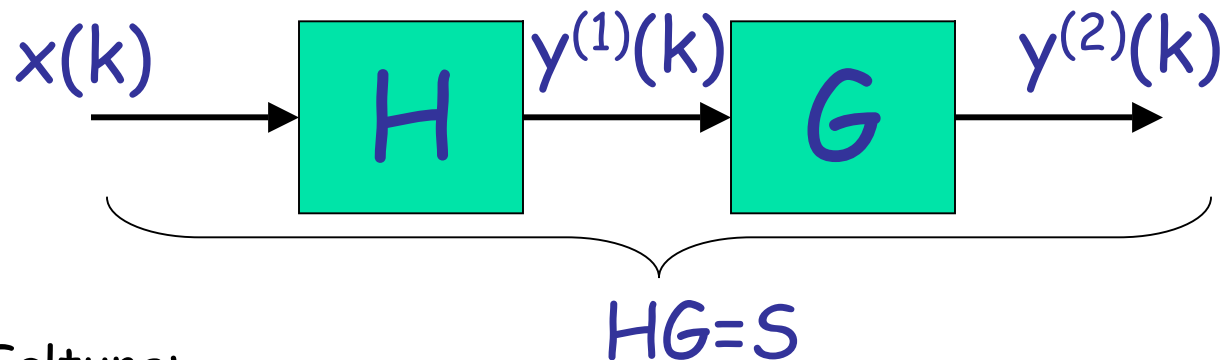


Resume

- Es gibt mehrere äquivalente Formen der Darstellung für lineare, zeitinvariante (LTI) Systeme
 - Faltung, Multiplikative Abbildung im Bildbereich
 - Polynombeschreibung
 - Inneres Vektorprodukt
 - Matrix-Vektor Schreibweise
 - Zustandsraumdarstellung

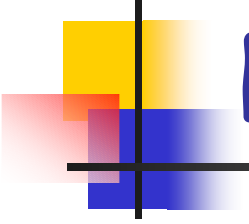
Resume

- Beispiel: Die Hintereinanderschaltung zweier LTI Systeme ergibt wieder ein LTI System.



- Faltung:

$$s(k) = \sum_{l=0}^{\infty} h(l)g(k-l)$$



Resume

- Bildbereich:

$$S(z)=H(z)G(z); \quad S(s)=H(s)G(s)$$

- Polynomdarstellung:

$$\begin{aligned} S(q^{-1}) &= G(q^{-1})H(q^{-1}) \\ &= (h_0 + h_1 q^{-1} + \dots + h_{n_H} q^{-n_H}) (g_0 + g_1 q^{-1} + \dots + g_{n_G} q^{-n_G}) \\ &= h_0 g_0 + (h_1 g_0 + h_0 g_1) q^{-1} + \dots + h_{n_H} g_{n_G} q^{-(n_H+n_G)} \\ &= s_0 + s_1 q^{-1} + \dots + s_{n_H+n_G} q^{-(n_H+n_G)} \end{aligned}$$

Resume

■ Matrix-Vektor Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} y^{(1)}(k-N+1) \\ \vdots \\ y^{(1)}(k-2) \\ y^{(1)}(k-1) \\ y^{(1)}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{M-1} & \dots & h_0 & & \\ & h_{M-1} & \dots & h_0 & \\ & & h_{M-1} & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & h_0 \\ & & & & h_{M-1} & \dots & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k-N-M+1) \\ \vdots \\ x(k-2) \\ x(k-1) \\ x(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y^{(2)}(k-N+1) \\ \vdots \\ y^{(2)}(k-2) \\ y^{(2)}(k-1) \\ y^{(2)}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{M-1} & \dots & g_0 & & \\ & g_{M-1} & \dots & g_0 & \\ & & g_{M-1} & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & g_0 \\ & & & & g_{M-1} & \dots & g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{M-1} & \dots & h_0 \\ & h_{M-1} & \dots & h_0 & \\ & & h_{M-1} & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & h_0 \\ & & & & h_{M-1} & \dots & h_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k-N-M+1) \\ \vdots \\ x(k-2) \\ x(k-1) \\ x(k) \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_k^{(1)} = H_N \underline{x}_k$$

$$\underline{y}_k^{(2)} = G_N \underline{y}_k^{(1)} = G_N H_N \underline{x}_k = S_N \underline{x}_k$$

Resume

■ Zustandsraumdarstellung:

$$\underline{z}_{k+1}^{(1)} = A^{(1)} \underline{z}_k^{(1)} + B^{(1)} \underline{x}_k; \quad \text{System G}$$

$$\underline{y}_k^{(1)} = C^{(1)} \underline{z}_k^{(1)} + D^{(1)} \underline{x}_k$$

$$\underline{z}_{k+1}^{(2)} = A^{(2)} \underline{z}_k^{(2)} + B^{(2)} \underline{y}_k^{(1)}; \quad \text{System H}$$

$$\underline{y}_k^{(2)} = C^{(2)} \underline{z}_k^{(2)} + D^{(2)} \underline{y}_k^{(1)}$$

$$\underline{z}_{k+1}^{(2)} = A^{(2)} \underline{z}_k^{(2)} + B^{(2)} \underline{y}_k^{(1)} = A^{(2)} \underline{z}_k^{(2)} + B^{(2)} C^{(1)} \underline{z}_k^{(1)} + B^{(2)} D^{(1)} \underline{x}_k$$

$$= \begin{bmatrix} A^{(2)} & B^{(2)} C^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}_k^{(2)} \\ \underline{z}_k^{(1)} \end{bmatrix} + B^{(2)} D^{(1)} \underline{x}_k$$

$$\underline{y}_k^{(2)} = C^{(2)} \underline{z}_k^{(2)} + D^{(2)} \underline{y}_k^{(1)} = C^{(2)} \underline{z}_k^{(2)} + D^{(2)} C^{(1)} \underline{z}_k^{(1)} + D^{(2)} D^{(1)} \underline{x}_k$$

$$= \begin{bmatrix} C^{(2)} & D^{(2)} C^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}_k^{(2)} \\ \underline{z}_k^{(1)} \end{bmatrix} + D^{(2)} D^{(1)} \underline{x}_k$$

$$\begin{bmatrix} \underline{z}_{k+1}^{(2)} \\ \underline{z}_{k+1}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{(2)} & B^{(2)} C^{(1)} \\ & A^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}_k^{(2)} \\ \underline{z}_k^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^{(2)} D^{(1)} \\ B^{(1)} \end{bmatrix} \underline{x}_k$$

$$\underline{y}_k^{(2)} = \begin{bmatrix} C^{(2)} & D^{(2)} C^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{z}_k^{(2)} \\ \underline{z}_k^{(1)} \end{bmatrix} + D^{(2)} D^{(1)} \underline{x}_k$$

Zustandsraumdarstellung

- Erweiterung:

- Beachte, dass dieselbe Darstellungsform auch für mehr als ein Eingangs/Ausgangssignal verwendbar ist:

$$\underline{z}_{k+1} = A\underline{z}_k + \underline{b}_1 x_1(k) + \underline{b}_2 x_2(k)$$

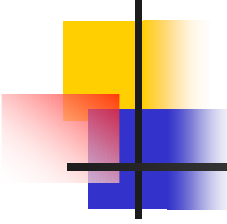
$$= A\underline{z}_k + B \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix};$$

$$y_1(k) = \underline{c}^T \underline{z}_k + d_1 x_1(k) + d_2 x_2(k)$$

$$= \underline{c}^T \underline{z}_k + \underline{d}^T \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix};$$

$$\underline{z}_{k+1} = A\underline{z}_k + B\underline{x}_k$$

$$\underline{y}_k = C\underline{z}_k + D\underline{x}_k$$



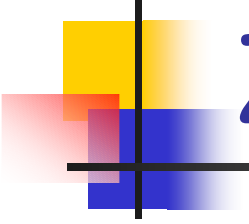
Zustandsraumdarstellung

- Die bisherige Darstellung im Zustandsraum ist nicht beschränkt auf lineare, zeitinvariante Systeme (engl.: time-invariant), sondern lassen sich auch für lineare zeitvariante (engl.: time-variant) Systeme angeben:

$$\underline{z}_{k+1} = A_k \underline{z}_k + B_k \underline{x}_k$$

$$\underline{y}_k = C_k \underline{z}_k + D_k \underline{x}_k$$

- Zwar lassen sich die Lösungen nicht in einfachen geschlossenen Formen angeben, oft aber genügt es schon die Lösungsstruktur anzupassen. (siehe Kalman Filter)



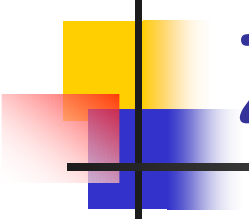
Zustandsraumdarstellung

- Lösung des zeitvarianten Systems
 - Betrachte zunächst nur Lösung der Zustandsgleichung ohne externe Anregung.

$$\underline{z}_k = A_{k-1} \underline{z}_{k-1} = A_{k-1} A_{k-2} \underline{z}_{k-2} = \Phi(k, j) \underline{z}_j$$

- Es existiere eine Übergangsmatrix (engl.: transition matrix) $\Phi(k, j)$ mit der Eigenschaft

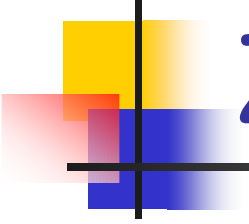
$$\Phi(k, j) = A_{k-1} A_{k-2} \dots A_j, \Phi(k, k) = I$$



Zustandsraumdarstellung

- Lösung des zeitvarianten Systems
 - Betrachte nun die Lösung der Zustandsgleichung mit externer Anregung.

$$\begin{aligned}\underline{z}_k &= A_{k-1} \underline{z}_{k-1} + B_{k-1} \underline{x}_{k-1} \\ &= A_{k-1} A_{k-2} \underline{z}_{k-2} + A_{k-1} B_{k-2} \underline{x}_{k-2} + B_{k-1} \underline{x}_{k-1} \\ &= \vdots \\ &= \Phi(k, j) \underline{z}_j + \sum_{l=j}^{k-1} \Phi(k, l+1) B_l \underline{x}_l\end{aligned}$$



Zustandsraumdarstellung

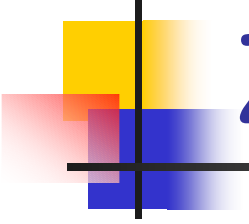
- Im Spezialfall des zeitinvarianten Systems gilt:

$$\Phi(k, j) = A^{k-j} \quad ; k \geq j$$

- Durch eine Ähnlichkeitstransformation können die Eigenwerte von A berechnet werden. Der betragsgrößte Eigenwert bestimmt das Verhalten des Systems.
- Die allgemeine Lösung für $\underline{y}_k$ ergibt sich durch Substitution:

$$\underline{y}_k = C \underline{z}_k + D \underline{x}_k$$

$$= C \Phi(k, j) \underline{z}_j + C \sum_{l=j}^{k-1} \Phi(k, l+1) B \underline{x}_l + D \underline{x}_k$$



Zustandsraumdarstellung

- **Beispiel 1.4:** Lineares, zeitinvariantes System mit additiver Störung $w(k)$

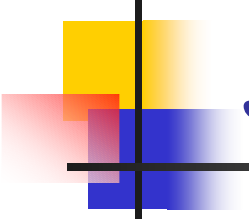
$$\underline{z}_k = I \underline{z}_{k-1} + \underline{0}w(k)$$

$$y(k) = \underline{x}_k^T \underline{z}_k + w(k)$$

- **Beispiel 1.5:** Lineares, zeitvariantes System mit additiver Störung $w(k)$

$$\underline{z}_k = A \underline{z}_{k-1} + \underline{0}w(k); \quad \underline{z}_0 = \underline{c}$$

$$y(k) = \underline{x}_k^T \underline{z}_k + w(k)$$

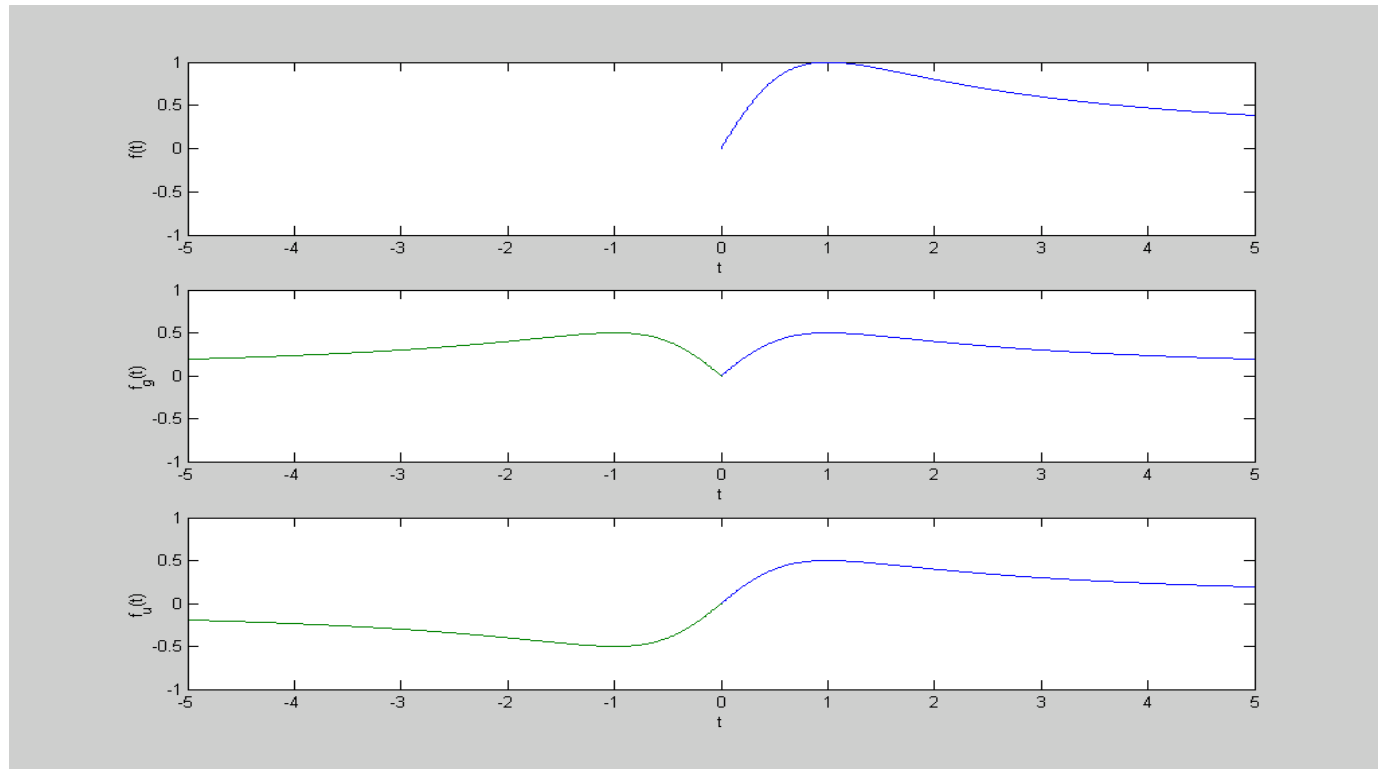


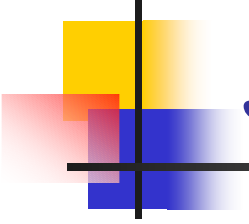
Systemeigenschaften

- 1) Kausale Systeme
- 2) Linear phasige Systeme
- 3) Passive/aktive Systeme (Allpässe)
- 4) Mindestphasen-Systeme
Maximalphasen-Systeme

Systemeigenschaften

■ 1) Kausale Systeme





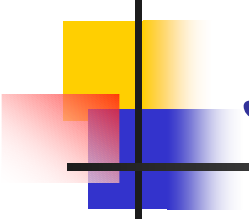
Systemeigenschaften

- Es gilt:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2f_g(t) = 2f_u(t), \quad t > 0 \\ &= f_g(t) + f_u(t) \end{aligned}$$

$$f_g(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$$

$$f_u(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$$



Systemeigenschaften

■ Es gilt:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

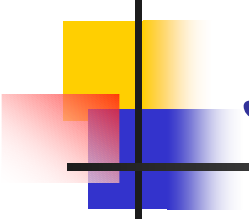
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F_R(j\omega) + jF_I(j\omega)] \exp(j\omega t) d\omega$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [f_g(t) + f_u(t)] \exp(-j\omega t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [f_g(t) \cos(\omega t) - jf_u(t) \sin(\omega t)] dt$$

$$= F_R(j\omega) + jF_I(j\omega)$$



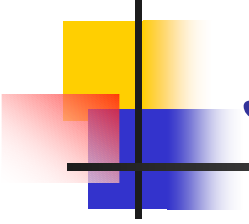
Systemeigenschaften

■ Also:

$$F_R(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_g(t) \cos(\omega t) dt = 2 \int_0^{\infty} f_g(t) \cos(\omega t) dt$$

$$F_I(j\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_u(t) \sin(\omega t) dt = -2 \int_0^{\infty} f_u(t) \sin(\omega t) dt$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_R(j\omega) \cos(\omega t) d\omega \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_I(j\omega) \sin(\omega t) d\omega \end{aligned}$$



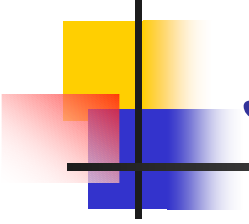
Systemeigenschaften

- Nochmaliges Einsetzen liefert:

$$F_R(j\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F_I(j\omega') \sin(\omega't) \cos(\omega t) d\omega' dt$$

$$F_I(j\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F_R(j\omega') \cos(\omega't) \sin(\omega t) d\omega' dt$$

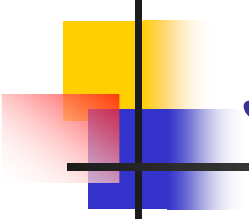
- Für kausale lineare Systeme gilt, dass Real und Imaginärteil eindeutig miteinander verbunden sind.
- Es genügt also vollkommen den Realteil oder den Imaginärteil zu kennen.



Systemeigenschaften

- Betrachte:

$$\begin{aligned} F_I(j\omega) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty F_R(j\omega') \cos(\omega' t) \sin(\omega t) d\omega' dt \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_R(j\omega') \left(\int_0^\infty \cos(\omega' t) \sin(\omega t) dt \right) d\omega' \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_R(j\omega') \left(\frac{1}{\omega - \omega'} \right) d\omega' \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{F_R(j\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \end{aligned}$$



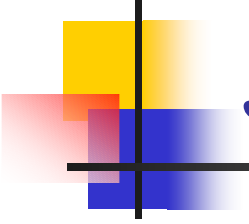
Systemeigenschaften

- Durch Ausnutzen dieser Integraleigenschaften erhält man also die einfacheren Beziehungen:

$$F_R(j\omega) = F_R(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_I(j\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' = F_R(\infty) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' F_I(j\omega')}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega'$$

$$F_I(j\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_R(j\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F_R(j\omega')}{\omega^2 - \omega'^2} d\omega'$$

- Diese Darstellung (mit $1/(\omega - \omega')$) nennt man auch Hilbert Transformation.



Systemeigenschaften

- 2) Linear-phasige Systeme
Betrachte zunächst folgende Korrespondenzen:

$$f(t) \exp(j\omega_o t) \Leftrightarrow F(j(\omega - \omega_o))$$

$$f(t) \cos(\omega_o t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \{F(j(\omega - \omega_o)) + F(j(\omega + \omega_o))\}$$

$$f(t - t_o) \Leftrightarrow F(j\omega) \exp(-j\omega t_o)$$

- Schmalbandsystem:

$$H(j\omega) = A(\omega) \exp(-j\phi(\omega))$$

$$\approx A(\omega_o) \begin{cases} \exp(-j[\phi(\omega_o) + (\omega - \omega_o)\phi'(\omega_o)]) & ; |\omega - \omega_o| < \Omega \\ \exp(j[\phi(\omega_o) - (\omega + \omega_o)\phi'(\omega_o)]) & ; |\omega + \omega_o| < \Omega \end{cases}$$

Systemeigenschaften

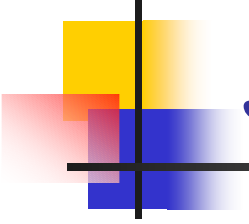
- Betrachte schmalbandige Anregung $F(j\omega)$.
- Sei $Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega)$ der Ausgang des Systems:

$$Y(j\omega) = \frac{A(\omega_o)}{2}$$

$$\left\{ F(j(\omega - \omega_o)) \exp(-j[\phi(\omega_o) + (\omega - \omega_o)\phi'(\omega_o)]) \right\} \\ + F(j(\omega + \omega_o)) \exp(j[\phi(\omega_o) - (\omega + \omega_o)\phi'(\omega_o)]) \left\}$$

$$y(t) = \frac{A(\omega_o)}{2} \left\{ f(t - \phi'(\omega_o)) \exp(-j[\phi(\omega_o) - \omega_o \phi'(\omega_o) - \omega_o t]) \right\} \\ + f(t - \phi'(\omega_o)) \exp(j[\phi(\omega_o) - \omega_o \phi'(\omega_o) - \omega_o t]) \left\}$$

$$= \frac{A(\omega_o)}{2} f(t - \phi'(\omega_o)) \cos \left(\omega_o \left[t - \phi'(\omega_o) + \frac{\phi(\omega_o)}{\omega_o} \right] \right)$$

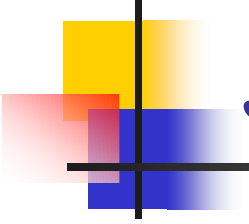


Systemeigenschaften

$$y(t) = \frac{A(\omega_o)}{2} f\left(t - \underbrace{\phi'(\omega_o)}_{T_G}\right) \cos\left(\omega_o \left[t - \underbrace{\phi'(\omega_o)}_{T_G} + \underbrace{\frac{\phi(\omega_o)}{\omega_o}}_{T_P} \right]\right)$$

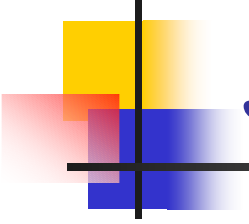
- $T_G = \left. \frac{\partial \phi(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_o} = \phi'(\omega_o)$ Gruppenlaufzeit

- $T_P = \frac{\phi(\omega_o)}{\omega_o}$ Phasenlaufzeit



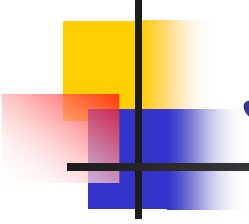
Systemeigenschaften

- Die Gruppenlaufzeit gibt also an, wie schnell eine kleine Gruppe von (Energie-)Anteilen um ω_0 durch das lineare System läuft.
- Laufen Gruppen zu verschiedenen Frequenzen ω_0 mit unterschiedlicher Geschwindigkeit, dann wird sich das Signal verzerren.
- Um ein unverzerrtes (und nur verzögertes) Signal zu erhalten, muss also konstante Gruppenlaufzeit gefordert werden: man sagt das System muss linear-phasig sein.



Systemeigenschaften

- **Beispiel 1.6:** Linear-phasiges System
Betrachte ein zeit-diskretes System $H(\exp(j\Omega))$,
das folgendermaßen konstruiert wird:
- $H(\exp(j\Omega)) = G(\exp(j\Omega)) G(\exp(-j\Omega)) \exp(-j\Omega T)$
- Sei $G(\exp(j\Omega)) = 1 + a \exp(-j\Omega)$, $T=1$
- Dann ist: $H(\exp(j\Omega)) = a + (1+a^2) \exp(-j\Omega) + a \exp(-2j\Omega)$
 $= \exp(-j\Omega) [1 + a^2 + 2a \cos(\Omega)]$
- Symmetrische Filter sind linear-phasig.

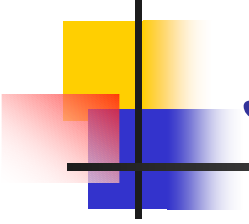


Systemeigenschaften

- 3) Passive/aktive Systeme (Allpässe)
- Ein System heißt passiv, wenn an seinem Ausgang weniger Energie erscheint, als in seinen Eingang hineingeht (nach Abklingen von Speichereffekten!).
- Ist die Energie am Ausgang größer als am Eingang, so heißt das System aktiv.
- Beispiel:

$$\underline{y}_k = H \underline{x}_k$$

$$\max_{\|\underline{x}_k\|_2^2=1} \frac{\|\underline{y}_k\|_2^2}{\|\underline{x}_k\|_2^2} = ?$$

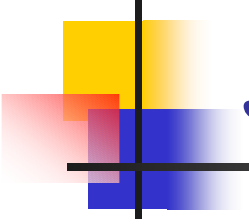


Systemeigenschaften

- **Beispiel 1.7:** Betrachte ein lineares System beschrieben durch seine Übertragungsfunktion:
 $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$.
- Nehmen wir an, das Maximum(Minimum) der Übertragungsfunktion trete bei einer bestimmten Frequenz $\omega_+(\omega_-)$ auf. Dann werden also alle Signale mit spektralen Anteilen ungleich $\omega_+(\omega_-)$ mit weniger(mehr) Energie herauskommen. Damit die gleiche Energie am Ausgang wie am Eingang besteht, muss gelten:

$$\max_{X(j\omega) \neq 0} \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right|^2 = \max_{\omega} |H(j\omega)|^2 = \min_{\omega} |H(j\omega)|^2 = 1$$

- Ein System, das genauso viel Energie abgibt, wie es aufnimmt, also selbst keine Energie verbraucht oder erzeugt, heißt Allpass.



Systemeigenschaften

- **Beispiel 1.8:** Betrachte folgendes, lineares System:

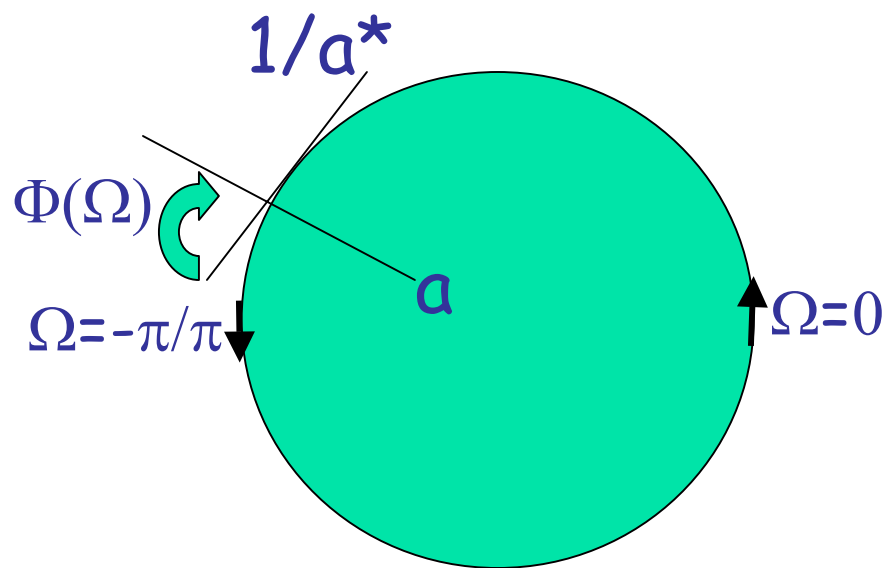
$$\begin{aligned} G(\exp(j\Omega)) &= \frac{H(\exp(j\Omega))}{H(\exp(-j\Omega))} \\ &= \frac{A(\Omega) \exp(-j\phi(\Omega))}{A(\Omega) \exp(j\phi(\Omega))} \\ &= \exp(-2j\phi(\Omega)) \end{aligned}$$

- Offensichtlich handelt es sich um einen Allpass.

Systemeigenschaften

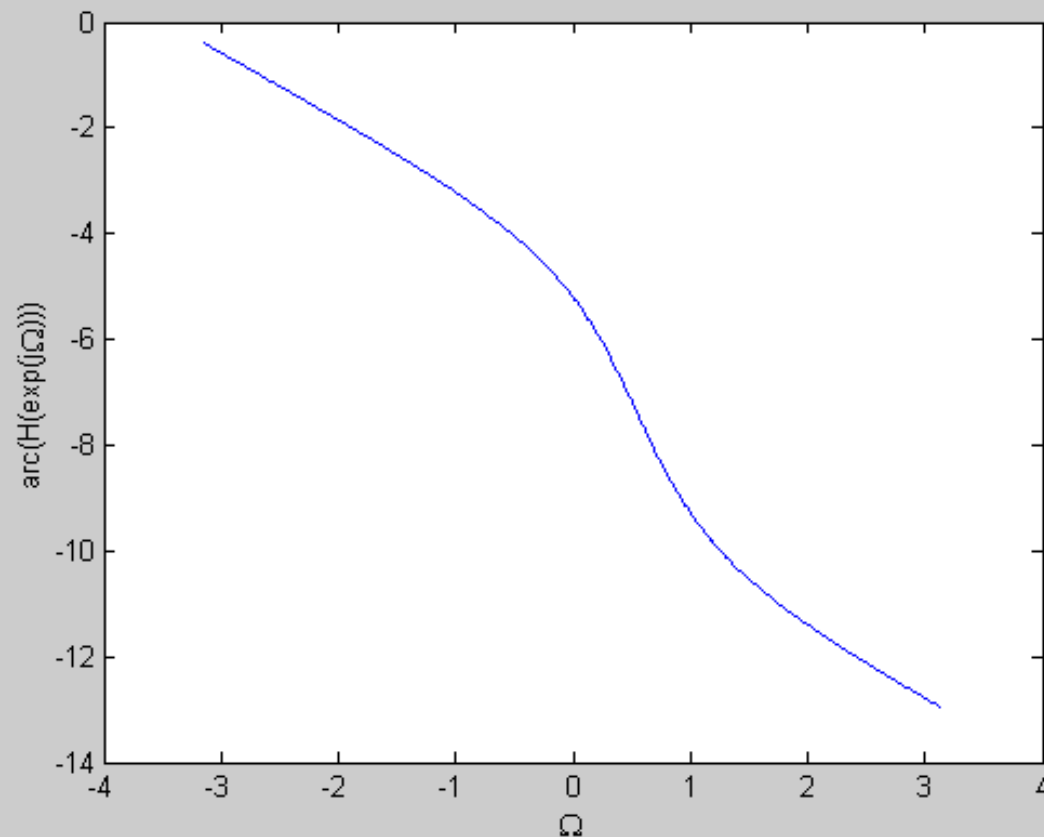
- **Beispiel 1.9:** Betrachte die rationale Übertragungsfunktion

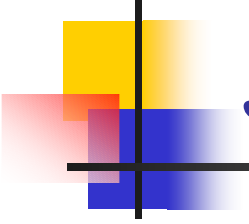
$$H(\exp(j\Omega)) = \frac{a^* - \exp(-j\Omega)}{a - \exp(j\Omega)}$$



Kreis des Apollonius:
Der Winkel $\phi(\Omega)$ fällt, wenn man von $\Omega = -\pi$ bis $+\pi$ wandert.
Diese Eigenschaft gilt natürlich auch, wenn man mehrere solcher Glieder hintereinander schaltet.

Allpass $a=0.5+j=0.3$ (noch Beispiel 1.9)





Systemeigenschaften

- 4) Mindestphasen-Systeme
- Es stellt sich die Frage, ob es auch einen eindeutigen Zusammenhang zwischen Betrag und Phase eines linearen Systems gibt, oder ob diese Größen für kausale Systeme unabhängig voneinander wählbar sind.
- Offensichtlich ist dies nicht der Fall, denn wir haben gerade gesehen, dass es Allpässe gibt, die ja die Amplitude unverändert lassen, aber die Phase verändern.

Systemeigenschaften

- Betrachte folgende rationale Übertragungsfunktion:

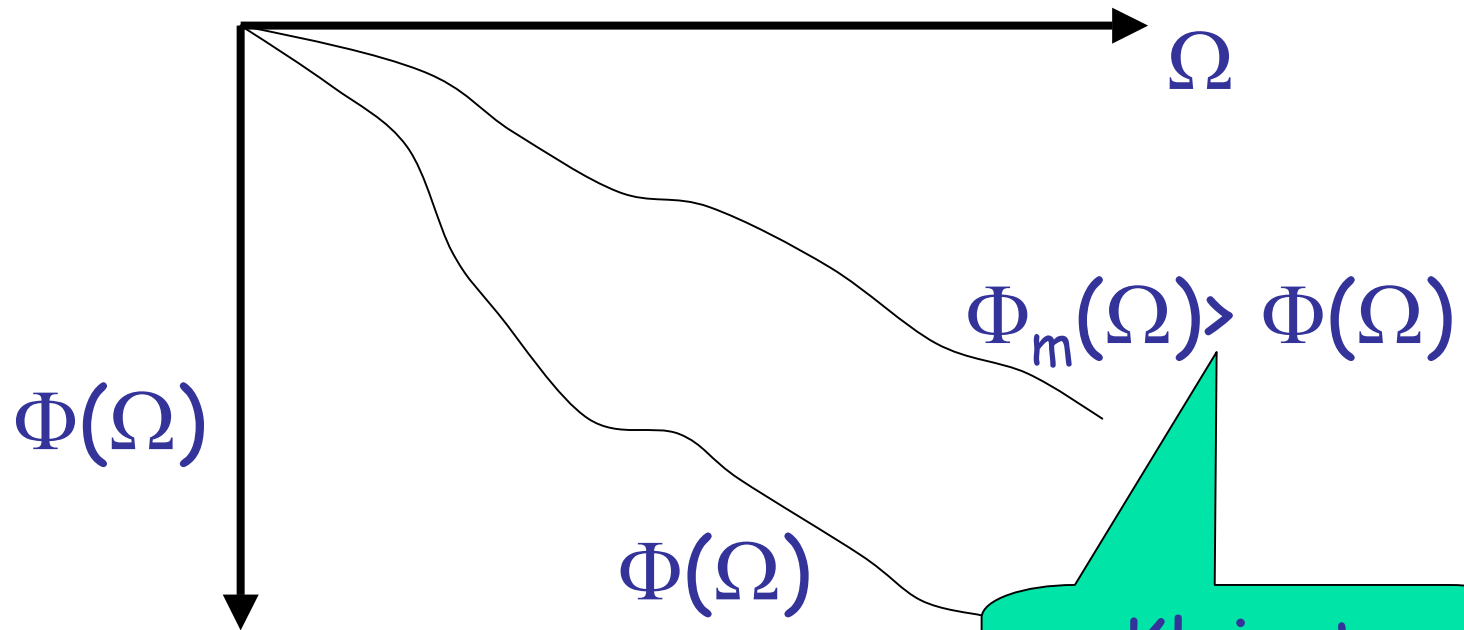
$$\begin{aligned} H(\exp(j\Omega)) &= \frac{Z(\exp(j\Omega))}{N(\exp(j\Omega))} = \frac{Z_i(\exp(j\Omega))Z_a(\exp(j\Omega))}{N(\exp(j\Omega))} \\ &= \frac{Z_a(\exp(j\Omega))}{Z_a(\exp(-j\Omega))} \frac{Z_a(\exp(-j\Omega))Z_i(\exp(j\Omega))}{N(\exp(j\Omega))} \\ &= H_a(\exp(j\Omega)) H_m(\exp(j\Omega)) \end{aligned}$$

Allpass

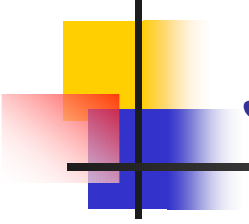
Mindestphasensystem
Alle Pole und Nullst. im Einheitskreis

Systemeigenschaften

- Beispiel: Phase eines linearen Systems



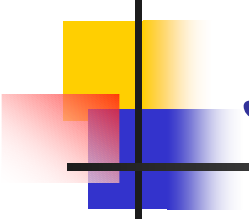
Kleinste
Phase!



Systemeigenschaften

- **Satz 1.2:** Ein zeitkontinuierliches, rationales Mindestphasensystem (engl.: minimum phase system) $H_m(\exp(j\Omega))$ mit Phase $\phi_m(\Omega)$ hat alle Nullstellen und Pole im Einheitskreis.
- **Beweis:** Betrachte ein zweites rationales Übertragungssystem $H(\exp(j\Omega))$ mit $\phi(\Omega)$ und der Bedingung:

$$|H_m(\exp(j\Omega))| = |H(\exp(j\Omega))|; \quad \phi'(\Omega) > \phi_m'(\Omega)$$



Systemeigenschaften

- Dann muss gelten, dass

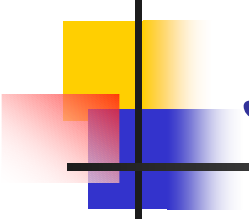
$$H_a(\exp(j\Omega)) = \frac{H(\exp(j\Omega))}{H_m(\exp(j\Omega))}$$

- ein Allpass ist. Für den gilt aber, dass $\phi_a'(\Omega) < 0$.
- Weiterhin muss dann auch gelten:

$$\phi_a'(\Omega) = \phi'(\Omega) - \phi_m'(\Omega) < 0$$

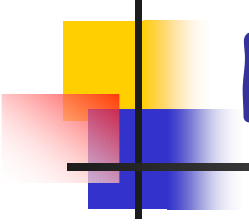
- Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme $\phi'(\Omega) > \phi_m'(\Omega)$.

- Also stimmt der Satz.



Systemeigenschaften

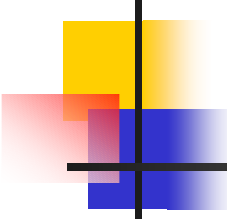
- Es stellt sich nun die anfängliche Frage noch einmal, ob es auch einen eindeutigen Zusammenhang zwischen Betrag und Phase eines linearen, mindestphasigen Systems gibt, oder ob diese Größen unabhängig voneinander wählbar sind.
- Diese Frage lässt sich interessanterweise wieder im Kontext der Eigenschaft Kausalität beantworten.



Resume

- Linearphasige Systeme (Systeme mit konstanter Gruppenlaufzeit) garantieren verzerrungsfreie Signale!
- Allpässe sind verlustfreie Systeme
- Lineare Systeme können in Allpässe und Mindestphasensysteme zerlegt werden.
- Real und Imaginärteil kausaler Funktionen hängen eindeutig zusammen:

$$F_I(j\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F_R(j\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'$$



Systemeigenschaften

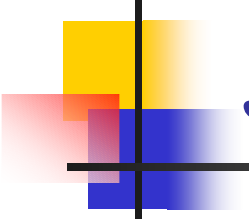
- **Satz 1.3 (Paley-Wiener):** Sei $H(j\omega) = A(\omega)\exp(j\phi(\omega))$. Gilt für eine gerade, nicht negative Amplitudenfunktion $A(\omega)$ mit Energiebeschränkung

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) d\omega < \infty$$

- die Eigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln(A(\omega))|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$$

- dann und nur dann beschreibt die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ ein kausales System.
- Somit existiert dann zur Amplitudenfunktion $A(\omega)$ eindeutig eine Phasenfunktion $\phi(\omega)$.

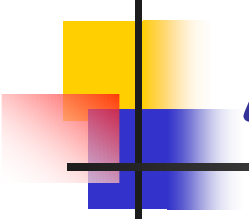


Systemeigenschaften

- Man beachte, dass der Satz auch umkehrbar ist: Wenn es ein kausales System gibt, dann gilt auch...
- In entsprechender Weise gilt diese Bedingung auch für zeitdiskrete Systeme:

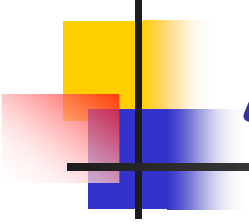
$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln(A(\Omega))| d\Omega < \infty$$

- Eng zusammenhängend ist mit diesem Problem das der Faktorisierung: Gegeben sei eine Amplitudencharakteristik $A(\Omega)$. Kann diese in $A^2(\Omega) = W(\exp(j\Omega))W(\exp(-j\Omega))$ zerlegt werden, so dass $w(k)$ auch kausal ist?



Abtasttheorem

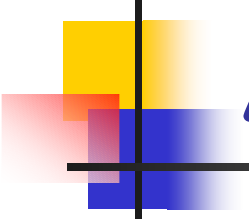
- Unter welchen Umständen kann eine kontinuierliche Funktion $f(t)$ durch Abtastwerte $f(nT)$ bzw. $f(t_n)$ eindeutig dargestellt werden und somit auch wieder aus den Abtastwerten erzeugt werden?
- **Satz 1.4 (Gewöhnliches Abtasttheorem):** Eine kontinuierliche Funktion $f(t)$ kann eindeutig durch ihre Abtastwerte $f(nT)$ dargestellt werden, wenn sie mindestens mit $|\omega| < \pi/T$ bandbegrenzt ist.



Abtasttheorem

- Beweis:
- Betrachten wir also die Abtastung mit äquidistantem Abstand T . Es muss also eine Interpolationsfunktion $k(t)$ geben, mit deren Hilfe aus $f(nT)$ wieder $f(t)$ gewonnen werden kann.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)Tk(t-nT)$$



Abtasttheorem

- Betrachte die Fouriertransformierte:

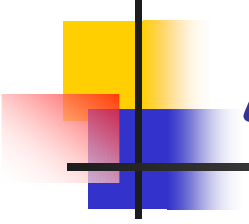
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)Tk(t-nT)$$

$$F(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)TK(j\omega)\exp(-jn\omega T)$$

$$= K(j\omega) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} Tf(nT)\exp(-jn\omega T)}_{F_*(j\omega)}$$

$$f_*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tf(nT)\delta(t-nT)$$

$$F_*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tf(nT)\exp(-jn\omega T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(j\left(\omega + \frac{2n\pi}{T}\right)\right)$$



Abtasttheorem

- Warum gilt ?:

$$F_*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T f(nT) \exp(-jn\omega T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(j\left(\omega + \frac{2n\pi}{T}\right)\right)$$

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega') \exp(jn\omega' T) d\omega'$$

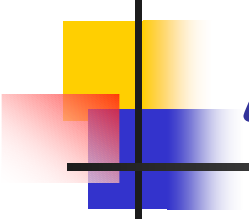
$$F_*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega') \exp(jn\omega' T) d\omega' \exp(-jn\omega T)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega') \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T}{2\pi} \exp(jn(\omega' - \omega)T) d\omega'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega') \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega' - \omega - 2n\pi/T) d\omega'$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega') \delta(\omega' - \omega - 2n\pi/T) d\omega' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(j\left(\omega + \frac{2n\pi}{T}\right)\right)$$

Fourierreihe
(Poisson'scher
Summensatz)

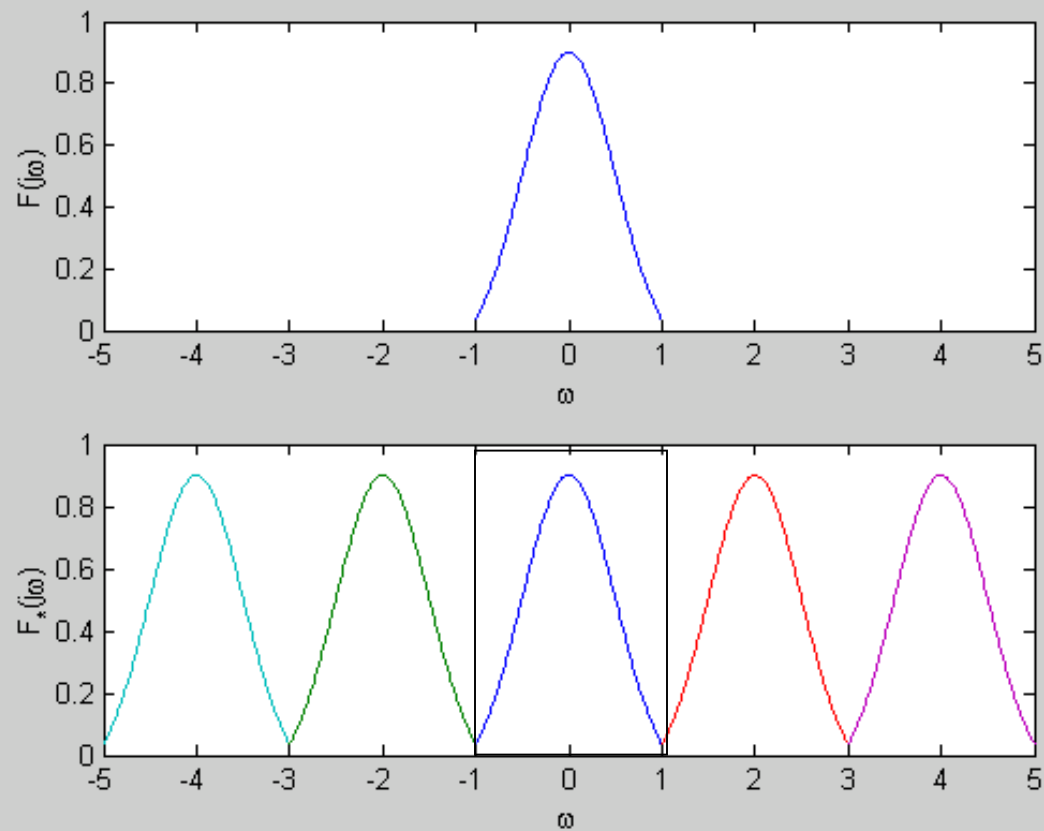


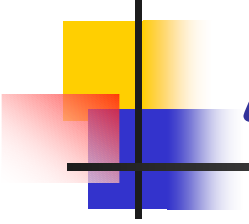
Abtasttheorem

- Somit gilt also:
$$F(j\omega) = K(j\omega)F_*(j\omega)$$
$$= K(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(j\left(\omega + \frac{2\pi n}{T}\right)\right)$$

- Diese Gleichung nimmt eine praktische Gestalt an, wenn $F(j\omega)$ bandbegrenzt ist mit $|\omega| < \pi/T$. In dem Fall gilt $F(j\omega) = F_*(j\omega)$ für $|\omega| < \pi/T$ und $K(j\omega) = 1$ in diesem Bereich.
- $K(j\omega) = 1$ in $|\omega| < \pi/T$ und Null sonst ist aber ein idealer Tiefpass.

Abtasttheorem





Abtasttheorem

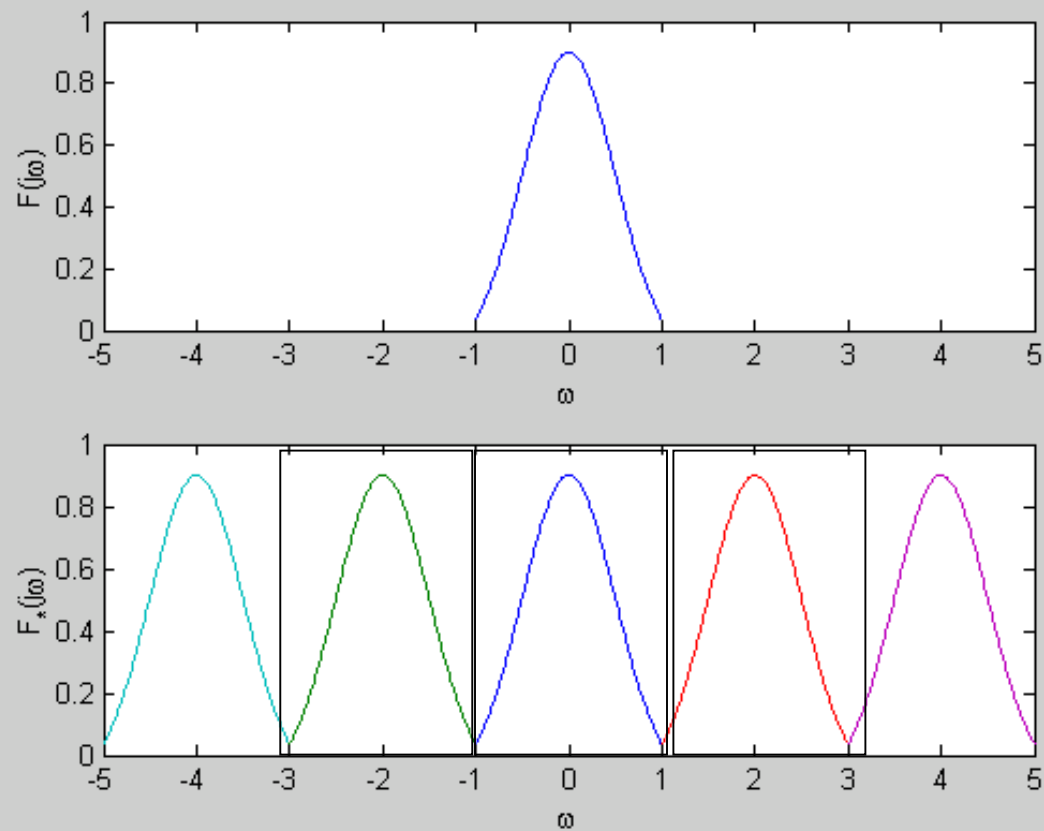
- Damit wird also:

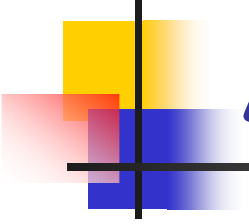
$$K(j\omega) \Leftrightarrow k(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\frac{\pi}{T}t} = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T}t\right)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T f(nT) \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right)$$

- Die Gleichung lässt aber auch andere Lösungen zu. Betrachte eine bandbegrenzte Funktion $F(j\omega)$ in $|\omega + k2\pi/T| < \pi/T$ und einen Bandpass $k(t)$ für diesen Bereich.

Abtasttheorem





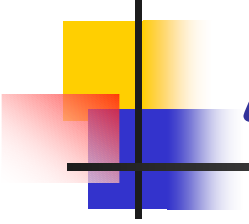
Abtasttheorem

- Eine Funktion $f(t)$ sei nun nicht direkt zugänglich, sondern nur indirekt über den Ausgang eines linearen Systems $H(j\omega)$. Man betrachte die abgetasteten Ausgangswerte dieses Systems:

$$g(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) H(j\omega) \exp(j\omega nT) d\omega$$

- Kann man aus diesen Werten durch Interpolation auf $f(t)$ schließen?

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) k(t - nT)$$



Abtasttheorem

- Betrachte wieder Fouriertransformierte:

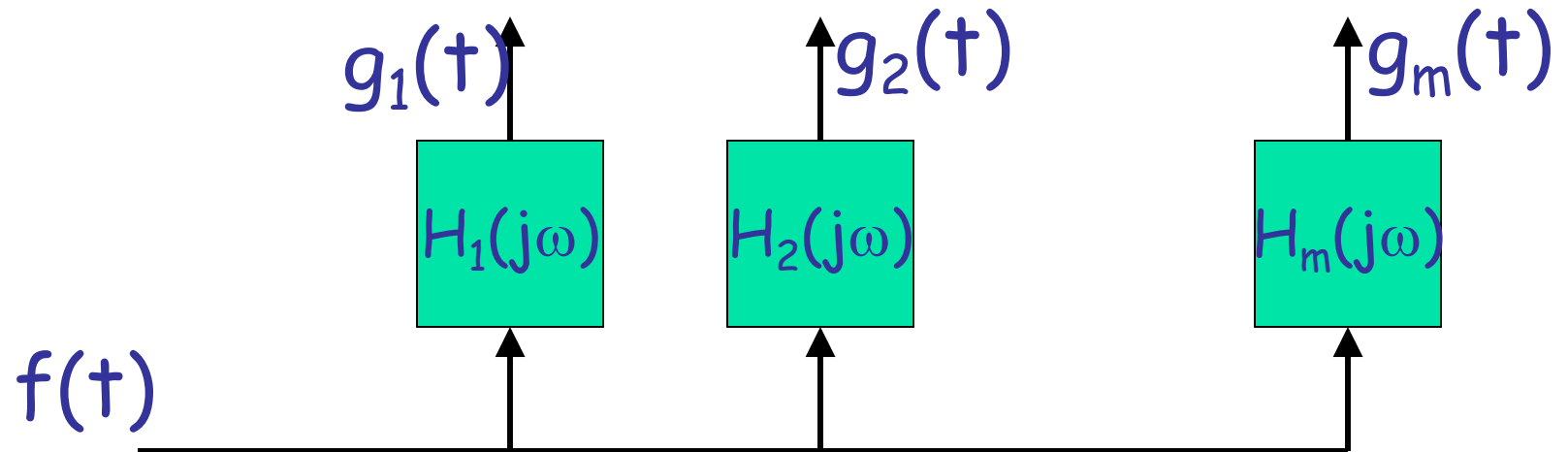
$$\begin{aligned} F(j\omega) &= K(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(j\left(\omega + \frac{2\pi n}{T}\right)\right) \\ &= K(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j(\omega + 2n\sigma)) H(j(\omega + 2n\sigma)) \end{aligned}$$

- Die Gleichung lässt sich also dadurch lösen, dass man für $K(j\omega)$ eine bandbegrenzte Version für $1/H(j\omega)$ wählt.

$$k(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \frac{\exp(j\omega t)}{H(j\omega)} d\omega \Leftrightarrow K(j\omega) = \begin{cases} 1/H(j\omega) & ; |\omega| < \frac{\pi}{T} = \sigma \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

Abtasttheorem

- Verallgemeinerung:

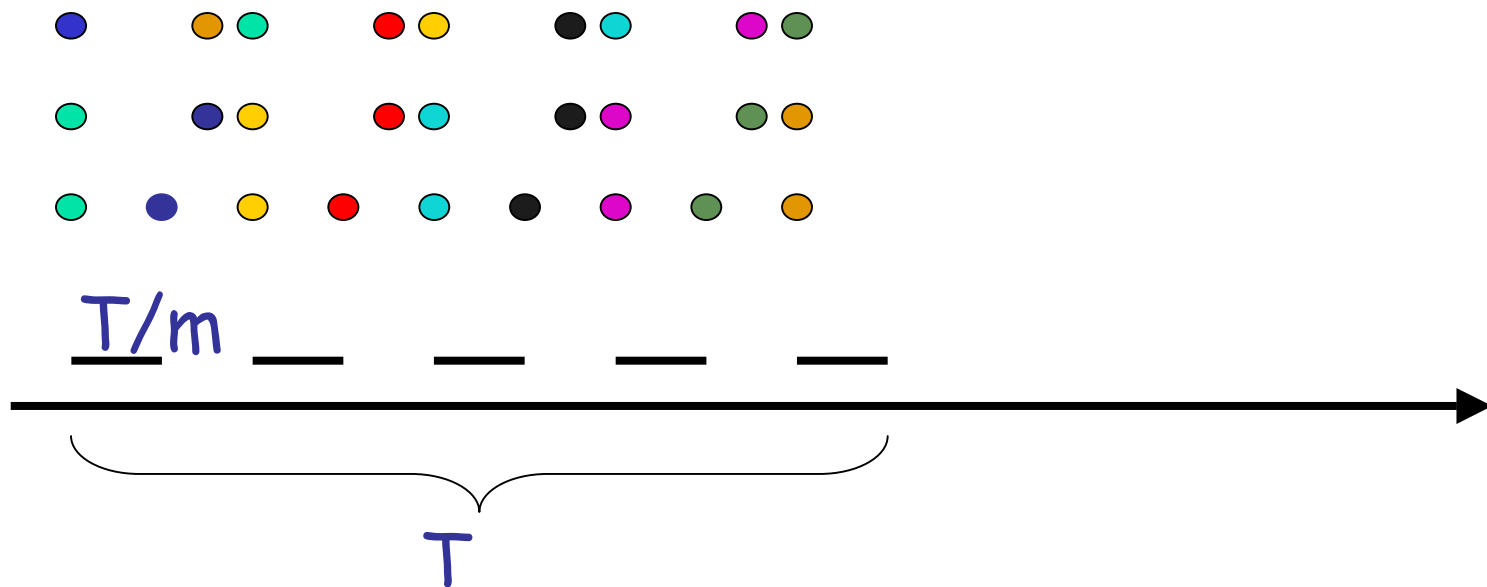


$$G_k(j\omega) = H_k(j\omega)F(j\omega)$$

$$g_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} H_k(j\omega)F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

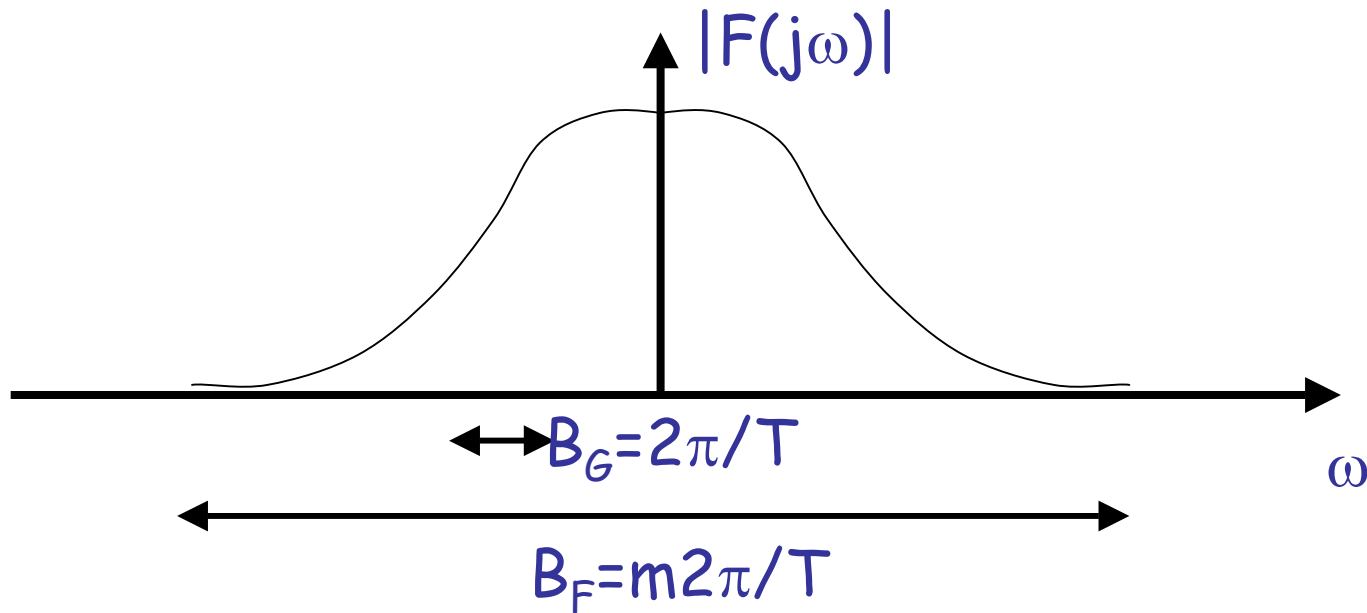
Abtasttheorem

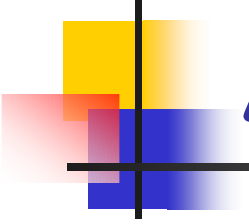
- Mögliche Abtastzeitpunkte:



Abtasttheorem

- Was bedeutet dies für die Bandbreite von $F(j\omega)$?





Abtasttheorem

- Kann man durch die Werte $g_k(nT)$; $k=1,2,\dots,m$ abgetastet im Intervall $T=m\pi/\sigma$ auch wieder $f(t)$ durch Interpolation gewinnen?

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^m g_k(nT) k_k(t - nT)$$

- **Beispiel 1.10:** Seien $H_k(j\omega)$ Interpolatoren, mit $H_k(j\omega) = \exp(-jkT/m\omega)$; $k=1,2,\dots,m$. Dann erhalten wir gerade wieder das Abtasttheorem für äquidistante Abtastung.
- **Beispiel 1.11:** Seien $H_k(j\omega)$ Interpolatoren, mit nicht äquidistanten Zeitverzögerungen.
- **Beispiel 1.12:** Seien $H_k(j\omega)$ m beliebige lineare Systeme.

Abtasttheorem

- Rekonstruktion:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^m g_k(nT) k_k(t-nT)$$

$$G_k(j\omega) = H_k(j\omega)F(j\omega)$$

- Gesucht sind also Interpolatoren, so dass am Ausgang das selbe Eingangssignal $f(t)$ wieder erscheint:

$$H_1(j\omega)K_1(j\omega) + H_2(j\omega)K_2(j\omega) + \dots + H_m(j\omega)K_m(j\omega) = 1$$

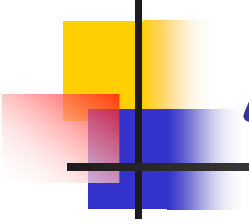
bzw.

$$H_1\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right)K_1(j\omega) + H_2\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right)K_2(j\omega) + \dots + H_m\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right)K_m(j\omega) = \exp\left(j\frac{2\pi}{T}t\right)$$

...

$$H_1\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}(m-1)\right)\right)K_1(j\omega) + H_2\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}(m-1)\right)\right)K_2(j\omega) + \dots + H_m\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}(m-1)\right)\right)K_m(j\omega) = \exp\left(j\frac{2\pi}{T}(m-1)t\right)$$

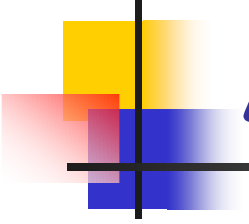
- Beachte, dass $\omega \in \left[-\sigma, -\sigma + \frac{2\pi}{T}\right] = \left[-\frac{m\pi}{T}, -\frac{(m-2)\pi}{T}\right]$



Abtasttheorem

- **Satz 1.5:** Sei $G_k(j\omega) = H_k(j\omega) F(j\omega)$ für $k=1,2$ und $H_1(j\omega) = H_2(j\omega)$ für $|\omega| < \pi/T$ und $f(t)$ sei ein bandbegrenzter Zufallsprozess mit π/T . Dann gilt $g_1(t) = g_2(t)$.
- **Beweis:** Betrachte die Energie des Differenzsignals:

$$E\left[|g_1(t) - g_2(t)|^2\right] = \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |H_1(j\omega) - H_2(j\omega)|^2 S_{ff}(\omega) d\omega = 0$$



Abtasttheorem

- **Satz 1.6:** Eine Interpolation für $f(t)$ aus den Ausgangswerten $g_k(nT)$ mit

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^m g_k(nT) k_k(t - nT)$$

$$k_k(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\sigma}^{-\sigma + \frac{2\pi}{T}} K_k(\omega, t) \exp(j\omega t) d\omega; \quad k = 1, 2, \dots, m$$

- wird dann erreicht, wenn das folgende Gleichungssystem lösbar ist:

Abtasttheorem

$$\begin{bmatrix} H_1(j\omega) & H_2(j\omega) & \dots & \dots & H_m(j\omega) \\ H_1\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right) & H_2\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right) & & & \\ H_1\left(j\left(\omega + 2\frac{2\pi}{T}\right)\right) & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ H_1\left(j\left(\omega + (m-1)\frac{2\pi}{T}\right)\right) & & \dots & H_m\left(j\left(\omega + (m-1)\frac{2\pi}{T}\right)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1(j\omega, t) \\ K_2(j\omega, t) \\ K_3(j\omega, t) \\ \vdots \\ K_m(j\omega, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp\left(j\frac{2\pi t}{T}\right) \\ \exp\left(j2\frac{2\pi t}{T}\right) \\ \vdots \\ \exp\left(j(m-1)\frac{2\pi t}{T}\right) \end{bmatrix}$$

Dabei ist t beliebig und ω muss im Intervall $[-\sigma, -\sigma + 2\pi/T] = [-m\pi/T, -m\pi/T + 2\pi/T]$ liegen.

Abtasttheorem

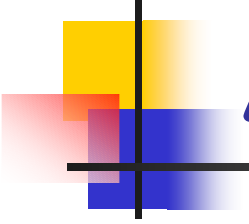
- Beweis: Das Ausgangssignal $g_k(t-nT)$ ist zum einen die Antwort des Systems $H_k(j\omega)$ auf $f(t-nT)$ als auch die Antwort des Systems $H_k(j\omega) \exp(jn\omega T)$ auf $f(t)$. Wenn also gilt, dass

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^m g_k(nT) k_k(t-nT)$$

- dann gilt für die spezielle Anregung $f(t)=\exp(j\omega(t+\tau))$:

$$\begin{aligned} \exp(j\omega(t+\tau)) &= \sum_{k=1}^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(j\omega') \exp(jn\omega'T) d\omega' k_k(\tau-nT) \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(j\omega') F(j\omega') \exp(jn\omega'T) d\omega' k_k(\tau-nT) \\ &= \sum_{k=1}^m H_k(j\omega) \exp(j\omega\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_k(\tau-nT) \exp(jn\omega T) \end{aligned}$$

- Und wegen dem vorherigen Satz, sind auch ihre Ausgangssignale identisch.



Abtasttheorem

- Es genügt also die Identität

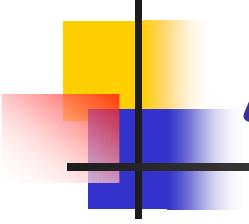
$$\exp(j\omega\tau) = \sum_{k=1}^m H_k(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_k(\tau - nT) \exp(jn\omega T)$$

- zu beweisen.
- Betrachte hierzu das Gleichungssystem.
 - Die Matrixeinträge $H_k(j(\omega + m2\pi/T))$ sind unabhängig von t oder τ .
 - Die rechte Seite ist periodisch mit Periodendauer T .
 - Also muss auch gelten: $K_k(j\omega, \tau) = K_k(j\omega, \tau - T)$ und somit auch $K_k(j\omega, \tau) = K_k(j\omega, \tau - mT)$.

Abtasttheorem

$$\begin{bmatrix} H_1(j\omega) & H_2(j\omega) & \dots & \dots & H_m(j\omega) \\ H_1\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right) & H_2\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right) & & & \\ H_1\left(j\left(\omega + 2\frac{2\pi}{T}\right)\right) & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ H_1\left(j\left(\omega + (m-1)\frac{2\pi}{T}\right)\right) & & \dots & H_m\left(j\left(\omega + (m-1)\frac{2\pi}{T}\right)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1(j\omega, t) \\ K_2(j\omega, t) \\ K_3(j\omega, t) \\ \vdots \\ K_m(j\omega, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp\left(j\frac{2\pi t}{T}\right) \\ \exp\left(j2\frac{2\pi t}{T}\right) \\ \vdots \\ \exp\left(j(m-1)\frac{2\pi t}{T}\right) \end{bmatrix}$$

Dabei ist t beliebig und ω muss im Intervall $[-\sigma, -\sigma + 2\pi/T] = [-m\pi/T, -m\pi/T + 2\pi/T]$ liegen.



Abtasttheorem

- Weiterhin soll gelten:

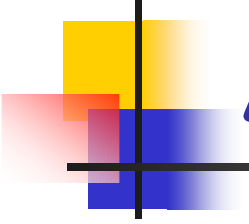
$$k_k(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\sigma}^{-\sigma + \frac{2\pi}{T}} K_k(\omega, t) \exp(j\omega t) d\omega; \quad k = 1, 2, \dots, m$$

also auch :

$$k_k(\tau - nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\sigma}^{-\sigma + \frac{2\pi}{T}} K_k(\omega, \tau) \exp(j\omega(\tau - nT)) d\omega; \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Interpretation : Fourierentwicklung im Intervall $[-\sigma, -\sigma + 2\pi / T]$:

$$K_k(\omega, \tau) \exp(j\omega\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_k(\tau - nT) \exp(j\omega nT)$$



Abtasttheorem

- Einsetzen in das Gleichungssystem (beliebige Zeile) ergibt, dass

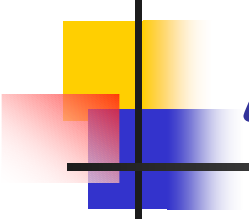
$$\exp(j\omega\tau) = \sum_{k=1}^m H_k(j\omega) K_k(\omega, \tau) \exp(j\omega\tau)$$

$$= \sum_{k=1}^m H_k(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_k(\tau - nT) \exp(jn\omega T)$$

- korrekt ist und somit ist auch

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^m g_k(nT) k_k(t - nT)$$

- korrekt.



Abtasttheorem

- Interpretation: Damit das Gleichungssystem lösbar ist, muss seine Determinante ungleich null sein.
- Dies ist beispielsweise erfüllt, wenn $H_k(j\omega) = (j\omega)^k$.
- Dies ist auch erfüllt wenn $H_k(j\omega) = \exp(j\omega\alpha_k)$, so lange $|\alpha_k| < T/2$ und alle α_k sind verschieden, korrespondierend zu $f(nT + \alpha_k)$.
- Ebenso ist es erfüllt, wenn alle Funktionen $H_k(j\omega)$ Bandpässe (Tiefpass) sind, die zusammen genau die benötigte Bandbreite B_F ausfüllen.