

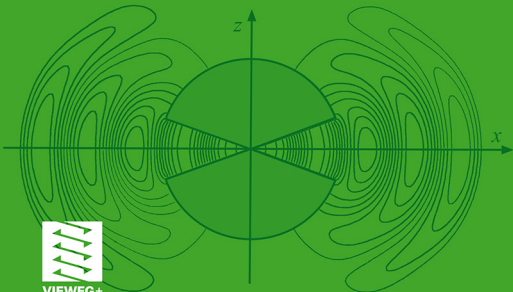
Klaus W. Kark

Antennen und Strahlungsfelder

Elektromagnetische Wellen auf Leitungen,
im Freiraum und ihre Abstrahlung

4. Auflage

STUDIUM



**VIEWEG+
TEUBNER**

Klaus W. Kark

Antennen und Strahlungsfelder

„Man kann durchaus sagen, dass der Autor dieses Buches bezogen auf seine hochfrequenztechnische Kompetenz über alle Zweifel erhaben ist, denn sein Werk „Antennen und Strahlungsfelder“ ist eines der besten Grundlagenwerke zum Thema überhaupt. Für einen ausgebildeten Techniker ist es ein wahrer Fundus an Fachwissen und damit ein ideales Nachschlagewerk. [...] Das Werk ist eine ausgezeichnete und sehr fachkundige Arbeit.“

Telekom Praxis, 05-06/2007

„Sehr detaillierte und anschauliche Darstellung von Hohlleitern, Drahtantennen und Aperturstrahlern. Zeitgemäße Verwendung von EM Feldberechnungen zur Visualisierung. Nachvollziehbare mathematische Herleitungen. Zahlreiche Übungsaufgaben und Beispiele.“

Professor Dr. Frank Gustrau, FH Dortmund

„Erweiterung eines schon bewährten Buchs um die wichtigen Kapitel „Dielektrische Stabantenne“ und die Erweiterungen zum Thema „Helixantenne“

Professor Dr.-Ing. Wolfgang Skupin, HTWG Konstanz

„Das Buch ist sowohl optisch als auch inhaltlich enorm dicht; der Autor liebt es knackig. Argumentation mit Anstrichen, eine Menge Übersichten und ein äußerst zügiger, mathematisch gehaltener Grundton bewirken ein hohes Tempo in der Abhandlung. Trotzdem baut alles aufeinander auf, wirkt fundiert und nachvollziehbar, aber eben nur mit Bleistift und vielen Nebenrechnungen, wie es für das Selbststudium sein muss. Dankbar ist der Leser auch für den Anhang, die sehr spezielle Historie und die vielen inhaltvollen Tabellen. Und die Kap. 9 bis 17 sind wahrscheinlich ein echtes Alleinstellungsmerkmal.“

Professor Dr.-Ing. Frank-Dietrich Leimer

„Didaktisch sehr gut aufbereitet. Durchgerechnete Beispiele zum besseren Verständnis der Antennentheorie. Eine sehr ausführliche und aktuelle Darstellung der Strahlungsfelder und der Antennenheorie.“

Professor Dr. rer. nat. Georg Terlecki, FH Kaiserslautern

Klaus W. Kark

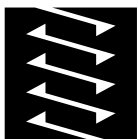
Antennen und Strahlungsfelder

Elektromagnetische Wellen auf Leitungen,
im Freiraum und ihre Abstrahlung

4., aktualisierte und erweiterte Auflage

Mit 266 Abbildungen, 84 Tabellen
und 128 Übungsaufgaben

STUDIUM



**VIEWEG+
TEUBNER**

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Das in diesem Werk enthaltene Programm-Material ist mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Der Autor übernimmt infolgedessen keine Verantwortung und wird keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Art aus der Benutzung dieses Programm-Materials oder Teilen davon entsteht.

Höchste inhaltliche und technische Qualität unserer Produkte ist unser Ziel. Bei der Produktion und Auslieferung unserer Bücher wollen wir die Umwelt schonen: Dieses Buch ist auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier gedruckt. Die Einschweißfolie besteht aus Polyäthylen und damit aus organischen Grundstoffen, die weder bei der Herstellung noch bei der Verbrennung Schadstoffe freisetzen.

1. Auflage 2004
2. Auflage 2006
3. Auflage 2010
- 4., aktualisierte und erweiterte Auflage 2011

Alle Rechte vorbehalten

© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2011

Lektorat: Reinhard Dapper | Walburga Himmel

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.

Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg

Druck und buchbinderische Verarbeitung: STRAUSS GMBH, Mörlenbach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

ISBN 978-3-8348-1495-1

Vorwort

Die moderne Informationsgesellschaft zeigt einen zunehmenden Bedarf an schneller Verarbeitung und Übertragung großer Datenmengen. So ist z. B. die dynamische Entwicklung im Bereich des Mobilfunks und bei den Funknetzwerken noch lange nicht abgeschlossen. Notwendige hohe Datenraten bedingen breitbandige Spektren der beteiligten Signale, die sich als elektromagnetische Wellen entlang von Leitungen oder im Funkfeld ausbreiten. Mit dem weiteren Vordringen der drahtlosen Nachrichtentechnik in immer höhere Frequenzbereiche und in neue Anwendungsgebiete muss auch eine Fülle neuer Antennenformen entwickelt werden, wobei man sich die enormen Fortschritte bei den Berechnungsmethoden mit Hilfe rechnergestützter Simulationsverfahren zu Nutze macht. Verschiedene **Anwendungsbereiche** der modernen Kommunikationstechnik wie z. B. Ortung, Navigation, Mobilfunk, Richtfunk, Satellitenfunk sowie die Raumfahrt wären ohne eine weit entwickelte Antennentechnik undenkbar.

Dieses Buch basiert auf zweisemestrigen Vorlesungen, die für Studierende der Elektrotechnik und Informationstechnik an der Hochschule Ravensburg-Weingarten seit 18 Jahren gehalten werden. Es wendet sich auch an Studierende verwandter Fachgebiete sowie an Ingenieure und Naturwissenschaftler, die mit Fragestellungen zur Abstrahlung und Ausbreitung elektromagnetischer Wellen betraut sind. Das Buch eignet sich zum vertiefenden Selbststudium neben der Vorlesung, zur Prüfungsvorbereitung oder als praktisches Nachschlagewerk für alle Funkanwender.

Der Inhalt gliedert sich in 17 Kapitel. In den **Kapiteln 1 bis 6** wird eine solide mathematische Basis für die Theorie elektromagnetischer Felder und Wellen gelegt und daraus werden die Methoden der Elektrodynamik ausführlich entwickelt. An einfachen Beispielen (TEM-Welle im Freiraum, Hohlleiterwellen) werden erste Feldlösungen hergeleitet. Wer in der Elektrodynamik bereits ausreichende Erfahrungen mitbringt, kann diese Einführung zunächst überblättern oder dort gegebenenfalls einzelne Details wieder auffrischen, um dann direkt in **Kapitel 7** einzusteigen, wo die Grundbegriffe der Antennentechnik behandelt werden. Das **Kapitel 8** bietet eine Vertiefung für mathematisch orientierte Leser und kann von eher technisch interessierten eventuell ausgelassen werden. Die **Kapitel 9 bis 17** können weitgehend unabhängig voneinander bearbeitet werden, da sie sich jeweils mit ausgewählten Antennenformen beschäftigen:

- (9) Elementardipole und Rahmenantennen
- (10) Lineare Antennen
- (11) Gruppenantennen
- (12) Breitbandantennen
- (13) Hohlleiterantennen
- (14) Hornantennen
- (15) Linsenantennen
- (16) Reflektorantennen
- (17) Streifenleitungsantennen, Schlitzantennen, Helixantennen und Stielstrahler.

In diesen Kapiteln wird der Leser an praxisorientierte Fragestellungen bei der Abstrahlung elektromagnetischer Wellen durch verschiedenste Antennentypen herangeführt. Ein benutzerfreundlicher **Anhang** stellt wichtige Formeln kompakt zusammen und erleichtert das Nachschlagen häufig gebrauchter Ergebnisse.

Viele durch Computersimulationen berechnete Feldbilder und Richtdiagramme machen die Elektrodynamik anschaulich begreifbar und ermöglichen ein tiefer gehendes Verständnis. Es wurde neben einer nachvollziehbaren Ausarbeitung der mathematischen Methoden großer Wert auf die physikalische Interpretation und Visualisierung der erhaltenen Ergebnisse gelegt, wozu 266 Abbildungen und 84 Tabellen wesentlich beitragen.

In der komplett überarbeiteten **vierten Auflage** wurden im gesamten Text an vielen Stellen kleinere Änderungen und Ergänzungen vorgenommen, die zum besseren Verständnis beitragen. Außerdem wurden alle bekannt gewordenen Druckfehler beseitigt und die Literaturangaben auf den neuesten Stand gebracht.

Insbesondere sind folgende **Neuerungen** im Vergleich zur dritten Auflage hervorzuheben: stark erweiterte Behandlung von Linsenantennen und Streifenleitungsantennen, verbesserte Designformeln für Doppelkonusantennen, neue Tabelle zu elektrischen Eigenschaften ausgewählter Materialien und Erweiterung der Übersetzungstabelle wichtiger Fachbegriffe. Klassische Entwurfsformeln für die genannten Antennenformen wurden durch **numerische Simulationen** mit modernen 3D-Gitterverfahren nochmals überprüft und konnten in ihrer Genauigkeit gesteigert werden.

Mit 128 anwendungsbezogenen Übungsaufgaben (mehrheitlich mit vollständigen Lösungen) wird eine noch bessere Vertiefung ermöglicht. Bei weiterführenden Problemen helfen jetzt 249 Literaturangaben – wieder mehr als bei der vorherigen Auflage, da in den vergangenen zwei Jahren viele neue Veröffentlichungen hinzugekommen sind. In 70 Kurzbiografien werden bahnbrechende Arbeiten bekannter Wissenschaftler gewürdigt, die maßgeblich zur Entwicklung der Elektrodynamik und der Antennentechnik beigetragen haben.

Ich danke dem Vieweg+Teubner Verlag für die sehr gute Zusammenarbeit und dafür, dass auf meine Änderungs- und Ergänzungswünsche für die vorliegende vierte Auflage verständnisvoll eingegangen wurde. Ein besonderer **Dank** gilt meinen Studierenden und allen Lesern, die wertvolle Anregungen und Verbesserungsvorschläge gemacht haben. Insbesondere habe ich mich über die freundliche Aufnahme der ersten drei Auflagen durch die Leserschaft sehr gefreut. Ein ausdrücklicher Dank gilt wieder meiner lieben Frau, Elisabeth Höbner-Kark, die meine Bemühungen um die umfangreiche Überarbeitung der dritten Auflage in jeder Weise unterstützt hat.

Bad Wurzach, im Juli 2011

Klaus W. Kark

E-Mail: kark@hs-weingarten.de

Internet: <http://portal.hs-weingarten.de/web/kark>

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
1.1 Frequenzbereiche	1
1.2 Elektromagnetische Grundgrößen	2
1.3 Antennen und Strahlungsfelder im Überblick	4
2 Mathematische Grundlagen	8
2.1 Vektoralgebra	8
2.1.1 Skalarprodukt	9
2.1.2 Vektorprodukt	10
2.1.3 Spatprodukt	11
2.2 Vektoranalysis	13
2.2.1 Differenziation von skalaren Feldern	13
2.2.2 Differenziation von Vektorfeldern	16
2.2.3 Rechnen mit dem Nabla-Operator	20
2.2.4 Integralsätze der Vektoranalysis	23
2.2.5 Helmholtzsches Theorem	26
2.3 Koordinatensysteme	27
2.4 Übungen	29
3 Grundlagen der Elektrodynamik	30
3.1 Energieerhaltungssatz	30
3.1.1 Darstellung im Zeitbereich	30
3.1.2 Darstellung im Frequenzbereich	32
3.2 Maxwellsche Gleichungen	33
3.2.1 Grundgleichungen	33
3.2.2 Einteilung der elektromagnetischen Felder	35
3.2.3 Prinzip von der Ladungserhaltung	35
3.2.4 Quellen der Vektorfelder	37
3.3 Wellengleichung	39
3.4 Helmholtz-Gleichung	40
3.5 Wellenausbreitung in anisotropen Medien	42
3.6 Rand- und Stetigkeitsbedingungen	43
3.7 Relativitätsprinzip	45
3.7.1 Lorentz-Transformation	46
3.7.2 Feld einer gleichförmig bewegten Ladung	51
3.8 Strahlung beschleunigter Elektronen	53
3.8.1 Strahlungsleistung	55
3.8.2 Linear beschleunigte Punktladung	56
3.8.3 Kreisförmig beschleunigte Punktladung	57
3.9 Übungen	58

4 Ebene Wellen	59
4.1 Ebene Wellen im Dielektrikum	59
4.1.1 Lösung der Helmholtz-Gleichung	59
4.1.2 Geschwindigkeitsdefinitionen	63
4.2 Ebene Wellen im Leiter	68
4.3 Ebene Wellen im Supraleiter	73
4.3.1 Londonsche Gleichungen	74
4.3.2 Telegraf- und Helmholtz-Gleichung	75
4.4 Leistungstransport	79
4.5 Übungen	81
5 Ausbreitungseffekte	82
5.1 Polarisation	82
5.2 Senkrechter Einfall auf eine ebene Trennfläche	86
5.2.1 Reflexions- und Durchlassfaktoren	87
5.2.2 Stehende Wellen	90
5.2.3 Leistungstransport	93
5.2.4 Strahlungsdruck	94
5.3 Radarreflexion an bewegten Objekten	95
5.3.1 Gleichförmig bewegter ebener Metallspegel	95
5.3.2 Doppler-Effekt und Aberration	97
5.4 Schiefer Einfall auf eine ebene Trennfläche	100
5.4.1 Brechungsgesetz	100
5.4.2 Fresnelsche Formeln	104
5.4.3 Totaltransmission	108
5.4.4 Totalreflexion	114
5.5 Ebenes Drei- und Vierschichtenproblem	117
5.6 Beugung an einer metallischen Schirmkante	120
5.7 Übungen	122
6 Wellenleiter	123
6.1 Schwingungsformen in Hohlleitern	124
6.2 Rechteckhohlleiter	128
6.2.1 Eigenwellen	128
6.2.2 Hohlleiterschaltungen und Orthogonalentwicklung	137
6.3 Rundhohlleiter	142
6.3.1 Eigenwellen	142
6.3.2 Feldbilder	147
6.4 Besondere Hohlleitertypen	148
6.5 Hohlraumresonatoren	151
6.6 Koaxialleitung	152
6.6.1 Grundwelle	152
6.6.2 Höhere Wellentypen	154
6.7 Übungen	157

7 Grundbegriffe der Antennentechnik	158
7.1 Isotroper Strahler	158
7.2 Hertzscher Dipol als elektrischer Elementarstrahler	158
7.3 Kenngrößen von Antennen	160
7.3.1 Richtdiagramm	160
7.3.2 Richtfaktor und Gewinn	165
7.3.3 Äquivalenter Raumwinkel	167
7.3.4 Antennenwirkfläche	169
7.3.5 Polarisierung	173
7.4 Übungen	175
8 Grundbegriffe von Strahlungsfeldern	176
8.1 Grundgleichungen	176
8.2 Potenziallösung der Feldgleichungen	178
8.2.1 Magnetisches Vektorpotenzial	179
8.2.2 Elektrisches Vektorpotenzial	185
8.2.3 Darstellung der Feldstärken	186
8.3 Fernfeldnäherungen	189
8.3.1 Fresnel-Näherung	191
8.3.2 Fraunhofer-Näherung	192
8.3.3 Fernfeldabstand und Antennengewinn	195
8.3.4 Fernfelder und Fourier-Transformation	197
8.4 Ausstrahlungsbedingung	200
8.5 Kantenbedingung	201
8.6 Huygenssches Prinzip	203
8.6.1 Vektorielle Formulierung	203
8.6.2 Skalare Formulierung	206
8.7 Kopolarisation und Kreuzpolarisation	211
8.8 Übungen	214
9 Elementardipole und Rahmenantennen	215
9.1 Elektrischer Elementarstrahler	215
9.1.1 Strahlungsfelder	216
9.1.2 Wellengeschwindigkeiten und Nahfeldablösung	223
9.2 Magnetischer Elementarstrahler	227
9.3 Kreisförmige Rahmenantenne beliebigen Umfangs	229
9.3.1 Vektorpotenzial eines kreisförmigen Ringstroms	230
9.3.2 Kreisförmige Rahmenantenne mit Umfang $U = n \lambda_0$	233
9.3.3 Erweiterung auf beliebigen Umfang	235
9.4 Übungen	241

10 Lineare Antennen	242
10.1 Zylinderantenne.....	243
10.2 Dünne Linearantenne.....	244
10.2.1 Strahlungsfelder.....	244
10.2.2 Wanderwellenantenne (Langdrahtantenne).....	253
10.2.3 Strahlungswiderstand.....	256
10.2.4 Verkürzungsfaktor.....	263
10.2.5 Richtfaktor und Gewinn.....	266
10.3 Übungen.....	269
11 Gruppenantennen	270
11.1 Gruppenfaktor bei räumlicher Anordnung.....	272
11.2 Lineare Gruppen.....	273
11.2.1 Gruppencharakteristik.....	273
11.2.2 Querstrahler.....	278
11.2.3 Längsstrahler.....	280
11.2.4 Richtfaktor linearer Gruppen.....	284
11.2.5 Kreuzdipol.....	287
11.2.6 Yagi-Uda-Antenne.....	288
11.2.7 Phasengesteuerte Gruppenantennen.....	290
11.2.8 Inhomogene Amplitudenbelegung.....	292
11.2.9 Verdünnte Gruppen.....	296
11.3 Ebene Gruppen.....	299
11.4 Antennen über Erde.....	300
11.5 Strahlungskopplung in ebenen Dipolgruppen.....	307
11.6 Übungen.....	309
12 Breitbandantennen	310
12.1 Doppelkonusantenne.....	310
12.1.1 Unendlich lange symmetrische Doppelkonusleitung.....	311
12.1.2 Symmetrische Doppelkonusantenne endlicher Länge.....	312
12.1.3 Näherungslösung bei kleinem Reflexionsfaktor.....	319
12.1.4 Doppelkonusantenne mit optimiertem Gewinn.....	324
12.2 Logarithmisch-periodische Antenne.....	325
12.3 Spiral- und Fraktalantennen.....	329
12.4 Übungen.....	331
13 Aperturstrahler I (Hohlleiterantennen)	332
13.1 Prinzipien der Aperturstrahler.....	332
13.2 Ebene Apertur im freien Raum (Chu-Modell).....	334
13.3 Ebene Apertur im unendlichen ebenen Schirm (E-Feld-Modell).....	340
13.3.1 Hohlleiterstrahler.....	341
13.3.2 Richtfaktor und Flächenwirkungsgrad.....	346
13.4 Übungen.....	348

14 Aperturstrahler II (Hornantennen)	349
14.1 Bauformen	349
14.2 Sektorhorn	349
14.3 Pyramidenhorn	353
14.4 Kegelhorn und Rillenhorn	359
14.4.1 Phasenfehler in der ebenen Hornapertur	359
14.4.2 Berechnungsverfahren	360
14.4.3 Optimale Bauweise	363
14.5 Übungen	365
15 Aperturstrahler III (Linsenantennen)	366
15.1 Konvexe Verzögerungslinse	366
15.2 Aperturlinse im optimalen Kegelhorn	369
15.2.1 Einfluss des Linsenmaterials	370
15.2.2 Berechnungsbeispiel	372
15.3 Konkave Beschleunigungslinse	374
15.4 Luneburg-Linse	375
15.5 Übungen	376
16 Aperturstrahler IV (Reflektorantennen)	377
16.1 Bauformen	377
16.2 Mehrspiegelantennen	380
16.3 Entwurf einer Cassegrain-Antenne	381
16.4 Gewinnverlust durch Aperturabschattung	385
16.5 Gewinnverlust durch Fehler der Oberflächenkontur	386
16.6 Gewinnverlust durch inhomogene Amplitudenbelegung	390
16.7 Übungen	393
17 Spezielle Antennenformen	394
17.1 Streifenleitungsantenne	394
17.1.1 Grundlegende Entwurfsrichtlinien	394
17.1.2 Cavity-Modell für ein Patch mit abgeschnittenem Substrat (Fall ①)	399
17.1.3 Grundplatte und Substrat mit unendlicher Ausdehnung (Fall ②+③)	401
17.1.4 Numerische Ergebnisse	403
17.1.5 Strahlungsleistung, Strahlungsleitwerte und Richtfaktor im Fall ②	404
17.1.6 Gruppenantennen in Streifenleitungstechnik	406
17.2 Schlitzantenne	408
17.3 Wendel- oder Helixantenne	412
17.4 Dielektrische Oberflächenwellenantenne	416
17.5 Übungen	418

Anhang	419
A Mathematische Formeln.....	419
A.1 Konstanten.....	419
A.2 Trigonometrische Beziehungen	419
A.3 Reihenentwicklungen für kleine Argumente.....	419
A.4 Asymptotische Darstellungen für große Argumente.....	420
A.5 Beziehungen zwischen Besselfunktionen	420
A.6 Nützliche Integrale	420
A.7 Lommelsche Funktionen mit einem Index und zwei Argumenten	421
A.8 Krummlinige orthogonale Koordinatensysteme	422
B Elektrotechnische Formeln	423
B.1 Abkürzungen	423
B.2 Grundgleichungen	423
B.3 Vektorpotenziale	423
B.4 Feldgrößen.....	423
B.5 Verschiedenes.....	423
C Formeln zum Antennendesign.....	424
C.1 Schlanke Dipolantennen im Freiraum mit Mittelpunktspesung.....	424
C.2 Gruppencharakteristik linearer Antennengruppen	424
C.3 Strahlung einer linearen Belegung bzw. einer Rechteckapertur	425
C.4 Strahlung einer Kreisapertur.....	425
C.5 Ausbreitungskonstanten von Hohlleiterwellen	425
C.6 Hornstrahler mit Maximalgewinn bei fester Baulänge	426
C.7 Beam efficiency und pattern factor elektrisch großer Antennen.....	426
D Eigenschaften ausgewählter Materialien.....	427
C.1 Relative Permittivität und Verlustfaktor (bei 300 K und 3 GHz)	427
C.2 Elektrische Leitfähigkeit von Metallen (bei 300 K)	427
Englische Übersetzungen wichtiger Fachbegriffe.....	428
Literaturverzeichnis	430
Sachwortverzeichnis	439
Personenverzeichnis.....	446

Formelzeichen und Abkürzungen

Naturkonstanten

c_0	$2,997\,924\,58 \cdot 10^8$ m/s
μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/(Am)
ε_0	$1/(\mu_0 c_0^2) \approx 8,854 \cdot 10^{-12}$ As/(Vm)
Z_0	$\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 376,73$ Ω
h	$6,626\,068\,96 \cdot 10^{-34}$ Js
k	$1,380\,650\,4 \cdot 10^{-23}$ J/K
e	$1,602\,176\,487 \cdot 10^{-19}$ C
m_e	$9,109\,382\,6 \cdot 10^{-31}$ kg

Allgemeines

$\underline{A}$	komplexe Amplitude
$\text{Im}\{A\}$	Imaginärteil
$\text{Re}\{A\}$	Realteil
$\mathbf{A}$	Vektor
$ \mathbf{A} = A$	Betrag eines Vektors
A_i	Vektorkomponente
A_n, A_t	normale, tangentielle Komponente
$A_{ }$	parallele Komponente
$A_{\perp}$	senkrechte Komponente
$\underline{\mathbf{A}}$	komplexer Vektor
$\underline{\mathbf{A}}^*$	konjugiert komplexer Vektor
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	Skalarprodukt
$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	Vektorprodukt
$[\mathbf{A}]$	Matrix
$[\mathbf{A}]^{-1}$	inverse Matrix
$\varepsilon * \mathbf{E}$	Faltungsintegral $\int \varepsilon(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau$
∂	partielle Ableitung
δ_{mn}	Kronecker-Symbol
ε_{ij}	Tensor
$d\Phi$	totales Differenzial
div	Divergenz
grad	Gradient
rot	Rotation
lim	Limes (Grenzwert)
∇	Nabla-Operator
Δ_t	transversaler Laplace-Operator
Δ, ∇^2	Laplace-Operator
$\square^2$	d'Alembert-Operator
$\langle S \rangle$	Mittelwert
$\parallel$	parallel
$\perp$	senkrecht

$\angle$	Winkel
$=$	gleich
$\equiv$	identisch gleich
$\approx$	ungefähr gleich
$\hat{=}$	entspricht
$\propto$	proportional
∞	unendlich
$\oint, \oiint$	Kontur- und Hüllintegrale

Vektoren

$\underline{\mathbf{A}}$	magnetisches Vektorpotenzial, A
$\mathbf{B}$	magnet. Flussdichte, T = Vs/m ²
$\mathbf{D}$	elektrische Flussdichte, As/m ²
$d\mathbf{A}$	Flächenelement, m ²
$d\mathbf{r}, d\mathbf{s}$	Wegelement, m
$\mathbf{E}$	elektrische Feldstärke, V/m
$\underline{\mathbf{E}}_A$	elektrische Aperturfeldstärke, V/m
$\mathbf{e}_i$	Einheitsvektor
$\mathbf{F}$	Kraft, N
$\underline{\mathbf{F}}$	elektrisches Vektorpotenzial, V
$\mathbf{H}$	magnetische Feldstärke, A/m
$\underline{\mathbf{H}}_A$	magnetische Aperturfeldstärke, A/m
$\mathbf{J}$	elektrische Stromdichte, A/m ²
$\mathbf{J}_E$	eingeprägte Stromdichte, A/m ²
$\mathbf{J}_F$	elektr. Flächenstromdichte, A/m
$\mathbf{J}_K$	Konvektionsstromdichte, A/m ²
$\mathbf{J}_L$	Leitungsstromdichte, A/m ²
$\mathbf{J}_n$	normalleitende Stromdichte, A/m ²
$\mathbf{J}_s$	Suprastromdichte, A/m ²
$\mathbf{M}$	magnetische Stromdichte, V/m ²
$\mathbf{M}_F$	magnet. Flächenstromdichte, V/m
$\underline{\mathbf{m}}$	magnetisches Dipolmoment, Am ²
$\mathbf{n}$	normaler Einheitsvektor
$\underline{\mathbf{p}}$	E-Feld-Aperturintegral, Vm
$\underline{\mathbf{p}}$	elektrisches Dipolmoment, Cm
$\mathbf{p}$	Impuls, Ns
$\mathbf{p}_V$	Impulsdichte, Ns/m ³
$\underline{\mathbf{Q}}$	H-Feld-Aperturintegral, Am
$\underline{\mathbf{R}}$	Abstandsvektor, m
$\mathbf{r}$	Ortsvektor zum Beobachter, m
$\mathbf{r}'$	Ortsvektor zum Quellpunkt, m
$\underline{\mathbf{S}}$	komplexer Poyntingvektor, W/m ²
$\underline{\mathbf{S}}_R$	reeller Poynting-Vektor, W/m ²

$\mathbf{t}$	tangentialer Einheitsvektor
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeit, m/s
$\dot{\mathbf{v}}$	Beschleunigung, m/s ²

Lateinische Buchstaben

A	Aperturabmessung, m
A_W	Wirkfläche, m ²
A_{geo}	geometrische Aperturfläche, m ²
a	Längenabmessung, m
a_N	Nebenkeulendämpfung, dB
$\underline{a}_n$	Wellenamplitude
B	Aperturabmessung, m
B	Bandbreite f_o/f_u
B_E	Eingangssuszeptanz, S
B_r	relative Bandbreite $(f_o - f_u)/f_m$
B_s	Strukturbandbreite (LPDA)
b	Längenabmessung, m
$\underline{b}_i, \underline{b}_n$	Wellenamplituden
C	Kapazität, F
$C = \ln \gamma$	Eulersche Konstante
$C(\vartheta, \varphi)$	Richtcharakteristik
C_E	Elementcharakteristik
C_{Gr}	Gruppencharakteristik
$C_{\text{Gr}}^H(\varphi)$	Horizontalschnitt von C_{Gr}
$C_H(\varphi)$	horizontales Richtdiagramm
$C_V(\vartheta)$	vertikales Richtdiagramm
C_{co}	kopolare Richtcharakteristik
C_{xp}	kreuzpolare Richtcharakteristik
$C(x)$	Fresnelsches Integral
$\text{Ci}(x)$	Integralkosinus
c	Lichtgeschwindigkeit, m/s
c_0	Vakuumllichtgeschwindigkeit, m/s
D	Durchmesser einer Apertur, m
D	Richtfaktor (Direktivität)
$D(\vartheta, \varphi)$	richtungsabhängiger Richtfaktor
D_E	Richtfaktor des E-Sektorhorns
D_H	Richtfaktor des H-Sektorhorns
D_K	Richtfaktor des Kegelhorns
D_P	Richtfaktor des Pyramidenhorns
D_R	Richtfaktor des Rillenhorns
d	Durchmesser, Dicke, m
$\underline{d}$	Durchlassfaktor
dV	Volumenelement, m ³
$\hat{E}$	reelle Amplitude, V/m
$\underline{E}_0$	komplexe Amplitude, V/m
$\underline{E}_{\text{co}}$	kopolare Feldstärke, V/m

E_d	Durchbruchfeldstärke, V/m
$\underline{E}_{\text{xp}}$	kreuzpolare Feldstärke, V/m
e	elektrische Elementarladung, C
e	lineare Exzentrizität
F	Brennweite, m
$\underline{F}$	Gruppenfaktor bei Patch-Antennen
$\underline{F}(x)$	Fresnelsches Integral
F_{eff}	effektive Brennweite, m
$\underline{F}_{\text{Gr}}$	Gruppenfaktor
f	Frequenz, Hz
$f(x)$	Separationsfunktion
$f_{1,2}$	Brennweiten, m
f_c	Grenzfrequenz im Hohlleiter, Hz
f_e	Empfangsfrequenz, Hz
f_m	Frequenzbandmitte $(f_o + f_u)/2$, Hz
f_o	obere Frequenzbandgrenze, Hz
f_R	Resonanzfrequenz, Hz
f_s	Sendefrequenz, Hz
f_u	untere Frequenzbandgrenze, Hz
G	Gewinn über Kugelstrahler
G	elektrischer Leitwert, S
$\underline{G}$	Gruppenfaktor bei Patch-Antennen
$\underline{G}_D$	Gewinn über Halbwellendipol
G_E	Eingangsleitwert, S
G_H	Gewinn über Hertzschen Dipol
G_S	Gesamtstrahlungsleitwert, S
G_n	Strahlungsleitwert <u>eines</u> non-radiating slots, S
G_r	Strahlungsleitwert <u>eines</u> radiating slots, S
$G_r^{(s)}$	Selbstleitwert <u>eines</u> radiating slots, S
$G_r^{(k)}$	Koppelleitwert <u>eines</u> radiating slots, S
$\underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$	Greensche Funktion, 1/m
g	Ganghöhe bzw. Speisespalt, m
g	logarithmierter Gewinn in dBi
g_d	logarithmierter Gewinn in dBd
$g(y)$	Separationsfunktion
H, h_E	Höhe über Erde, m
$\underline{H}_n^{(2)}(x)$	Riccati-Hankelfunktion
h	Längenabmessung, Substrathöhe, m
h	Plancksche Konstante, Js
h_i	Metrikkoeffizient
$\hbar$	$h/(2\pi) \approx 1,05457 \cdot 10^{-34}$ Js
Δh	elektrische Verlängerung, m

I, i	elektrischer Strom, A	p_s	Strahlungsdruck, Pa
$\underline{I}$	Stromamplitude, A	Q	Blindleistung, VA, Resonatorgüte
I_0	Speisestrom, A	$Q(\rho)$	Aperturbelegung
$I_{\max}$	Maximalstrom, A	Q, q	elektrische Ladungsmenge, C
$J_m(x)$	Besselfunktion	$Q_{\mu_i}(x)$	Kugelfunktion zweiter Art
$J'_m(x)$	Ableitung nach dem Argument	q	Flächenwirkungsgrad
$\hat{J}_{\mu_i}(x)$	Riccati-Besselfunktion	q_m	magnetische Ladungsmenge, Vs
j	imaginäre Einheit = $\sqrt{-1}$	R	Abstand, m
j_{mn}	n-te Nullstelle von J_m	R	elektrischer Widerstand, Ω
j_{mn}	n-te Nullstelle von J_m	R	Krümmungsradius, m
K	Eigenwert im Rundhohlleiter, 1/m	R	Reflexionskoeffizient
$K_{E,H}$	Korrekturfaktoren im Sektorhorn	R_0	Gleichstromwiderstand, Ω
k	Boltzmann-Konstante, J/K	R_E	Eingangswiderstand, Ω
k	Wellenzahl in Materie, 1/m	R_S	Strahlungswiderstand, Ω
k_0	Wellenzahl im Vakuum, 1/m	R_V	Verlustwiderstand, Ω
k_c	Grenzwellenzahl im Hohlleiter, 1/m	R_{nm}	Kopplungswiderstand, Ω
k_x, k_y	Eigenwerte Rechteckhohlleiter, 1/m	r	Radius, m
k_p	pattern factor	$\underline{r}$	Reflexionsfaktor
$\underline{k}_z$	Ausbreitungskonstante, 1/m	$\underline{r}_A$	Ausgangsreflexionsfaktor
L	Induktivität, H bzw. Drehimpuls, Js	$\underline{r}_E$	Eingangsreflexionsfaktor
L, l	Längenabmessung, m	r_g	Grenzradius, m
ΔL	elektrische Verlängerung, m	S	Inertialsystem
l_m	mechanische Dipollänge, m	S	Strahlungsdichte, W/m ²
M	Anzahl der Gruppenelemente	$S(x)$	Fresnelsches Integral
M	Vergrößerung F_{eff}/F	$\text{Si}(x)$	Integralsinus
$\underline{M}_{mn}$	Lommelsche Hilfsintegrale	$\underline{S}_{ij}$	Streuparameter
m	Modenindex bzw. Masse, kg	$\underline{S}_{11}$	Reflexionsfaktor
m_e	Elektronenmasse, kg	$\underline{S}_{21}$	Transmissionsfaktor
N	Anzahl der Gruppenelemente	s	Schlankheitsgrad
N	Windungsanzahl	$\text{si}(x)$	si-Funktion
N	Normierungsfaktor	T	absolute Temperatur, K
$N_m(x)$	Neumannfunktion	T_C	Sprungtemperatur, K
$N'_m(x)$	Ableitung nach dem Argument	t	Zeitvariable, s
n	Modenindex	t_r	retardierte Zeitvariable, s
n	Brechungsindex $\sqrt{\epsilon_r}$	U	Umfang, m
n_{mn}	n-te Nullstelle von N_m	$\underline{U}_0$	Speisespannung, V
n_{mn}	n-te Nullstelle von N_m	$U_n(w, z)$	Lommelsche Funktion
P	Beobachterpunkt	u	elektrische Spannung, V
P	Wirkleistung, W	u_m	magnetische Spannung, A
P_E	Empfangsleistung, W	V	Verkürzungsfaktor
P_G	Generatorleistung, W	v	Geschwindigkeit, m/s
P_S	Strahlungsleistung, W	v_E	Energiegeschwindigkeit, m/s
P_V	Verlustleistung, W	v_F	Frontgeschwindigkeit, m/s
$P_n(x)$	Legendre-Polynom	v_g	Gruppengeschwindigkeit, m/s
$P_{\mu_i}(x)$	Kugelfunktion erster Art	v_p	Phasengeschwindigkeit, m/s
p	Modenindex	$\underline{W}$	Patchbreite, m
		w	Gesamtenergiedichte, J/m ³

w_e	elektrische Energiedichte, J/m ³
w_m	magnetische Energiedichte, J/m ³
X	Reaktanz, Ω
X_E	Eingangsreaktanz, Ω
X_S	Strahlungsreaktanz, Ω
X_{nm}	Kopplungsreaktanz, Ω
x, y, z	kartesische Koordinaten, m
x_s	Speisepunkt, m
Y	Admittanz, S
Y_A	Abschlussadmittanz, S
Y_A	Aperturadmittanz, S
Y_E	Eingangsadmittanz, S
y_s	Speisepunkt, m
Z	Impedanz, Ω
Z_A	Abschlussimpedanz, Ω
Z_A	Aperturimpedanz, Ω
Z_E	Eingangsimpedanz, Ω
Z_F	Feldwellenimpedanz, Ω
Z_L	Leitungswellenimpedanz, Ω
Z_S	Strahlungsimpedanz, Ω
Z_{nm}	Kopplungsimpedanz, Ω
Z_0	Feldwellenwiderstand des freien Raums, Ω

Griechische Buchstaben

α	Dämpfungskonstante, 1/m
α	Hornsteigungswinkel
α	Steigungswinkel (LPDA)
β	Phasenkonstante, 1/m
β	normierte Geschwindigkeit v/c_0
β	zeitliche Ableitung, 1/s
$\Gamma(x)$	Gammafunktion
γ	Ausbreitungskonstante, 1/m
γ	Linsenrandwinkel
$\gamma(\beta)$	relativistischer Parameter
$\Delta\vartheta$	Halbwertsbreite (3-dB-Breite)
$\Delta\vartheta_0$	Nullwertbreite
$\Delta\varphi$	Halbwertsbreite (3-dB-Breite)
$\Delta\varphi_0$	Nullwertbreite
δ	Eindringtiefe beim Skineffekt, m
δ	Gangunterschied, m
δ	Phasenverschiebung
δ_L	Londonsche Eindringtiefe, m
δ_ε	dielektrischer Verlustwinkel
δ_n	Phasengang in Gruppenantennen
$\delta(\mathbf{r})$	Diracsche Deltafunktion, 1/m ³

ε	numerische Exzentrizität
ε	Permittivität, As/(Vm)
ε	Reflektortoleranzen, m
ε_0	elektr. Feldkonstante, As/(Vm)
ε_r	relative Permittivität eines materiellen Mediums
$\varepsilon_{r,\text{eff}}$	effektive, relative Permittivität
ε_M	beam efficiency
η	Antennenwirkungsgrad
η	Integrationsvariable, 1/s
η_B	Bandbreitenwirkungsgrad
η_P	Polarisationswirkungsgrad
Θ_E	Halbwertsbreite in E-Ebene
Θ_H	Halbwertsbreite in H-Ebene
$\Theta_{0,E}$	Nullwertbreite in E-Ebene
$\Theta_{0,H}$	Nullwertbreite in H-Ebene
ϑ_0	Nullwertswinkel $\Theta_0/2$
$\vartheta_{1/2}$	Halbwertswinkel $\Theta/2$
θ	Winkel
θ_B	Brewster-Winkel
θ_c	Grenzwinkel der Totalreflexion
θ_i	Einfallswinkel
θ_m	Hauptreflektorwinkel
θ_r	Reflexionswinkel
θ_s	Subreflektorwinkel
θ_t	Brechungswinkel
κ	Korrekturfaktor (Reflektorantenne)
κ	elektrische Leitfähigkeit, S/m
κ_n	normale Leitfähigkeit, S/m
κ_s	Supraleitfähigkeit, S/m
$\kappa(t_r)$	Ableitung der Zeit nach der retardierten Zeit
$\Lambda(T)$	Londonsche Konstante, Ωms
λ	Wellenlänge in Materie, m
λ_0	Vakuumwellenlänge, m
λ_L	Leitungswellenlänge, m
λ_c	Grenzwellenlänge im Hohlleiter, m
λ_{eff}	effektive Wellenlänge, m
μ	Permeabilität, Vs/(Am)
μ_0	magnet. Feldkonstante, Vs/(Am)
μ_i	Eigenwerte im Doppelkonus
μ_r	relative Permeabilität eines materiellen Mediums
$\mu_{r,\text{eff}}$	effektive, relative Permeabilität
$\mu_{r,\text{Fe}}$	relative Permeabilität von Ferrit
ξ	Streufaktor einer Spule
π	Kreiskonstante

r, ϑ, φ	Kugelkoordinaten
ρ, φ, z	Zylinderkoordinaten
ρ	elektr. Raumladungsdichte, C/m ³
ρ	Horntiefe, m
ρ_M	magnet. Raumladungsdichte, Vs/m ³
σ	Abstandsfaktor (LPDA)
σ'	mittlerer Abstandsfaktor (LPDA)
τ	Integrationsvariable
τ	Polarisationswinkel
τ	Skalierungsfaktor (LPDA)
Φ	magnetischer Fluss, Wb = Vs
$\Phi(\mathbf{r})$	skalare Ortsfunktion, V oder A
φ, ϕ	Winkel
φ_S	Schwenkwinkel
Ψ	elektrischer Fluss, As
ψ	Hornöffnungswinkel 2α
Ω	gesamter Raumwinkel, sr = rad ²
Ω_M	Hauptkeulenraumwinkel, sr = rad ²
ω	Kreisfrequenz, 1/s

Abkürzungen

AR	Achsenverhältnis: <u>A</u> xial <u>R</u> atio
EIRP	Äquivalente isotrope Strahlungsleistung
ET	Randabfall: <u>E</u> dge <u>T</u> aper
FDTD	Methode der <u>F</u> initen <u>D</u> ifferenzen
FEM	<u>M</u> ethode der <u>F</u> initen <u>E</u> lemente
GTD	<u>G</u> eometrical <u>T</u> heory of <u>D</u> iffraction
IEC	<u>I</u> nternational <u>E</u> lectrical <u>C</u> ommission
IL	Einfügungsdämpfung: <u>I</u> nsertion <u>L</u> oss
GO	<u>G</u> eometrische <u>O</u> ptik
LHC	<u>L</u> eft <u>H</u> and <u>C</u> ircular (Polarisation)
LPDA	<u>L</u> ogarithmisch-periodische <u>D</u> ipol- <u>a</u> ntenne
PO	<u>P</u> hysikalische <u>O</u> ptik
RHC	<u>R</u> ight <u>H</u> and <u>C</u> ircular (Polarisation)
RL	Rückflusdämpfung: <u>R</u> eturn <u>L</u> oss
SLL	Nebenkeulenniveau: <u>S</u> ide <u>L</u> obe <u>L</u> evel
SLS	<u>S</u> ide <u>L</u> obe <u>S</u> uppression = -SLL
XP	Kreuzpolarisationsmaß

SI-Basiseinheiten

Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
elektr. Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

SI-verträgliche Einheiten

Ebener Winkel	Grad	°
Pegel	Bel	B
Pegel	Neper	Np

Metrische SI-Vielfache

10 ⁻²⁴	Yocto	y
10 ⁻²¹	Zepto	z
10 ⁻¹⁸	Atto	a
10 ⁻¹⁵	Femto	f
10 ⁻¹²	Piko	p
10 ⁻⁹	Nano	n
10 ⁻⁶	Mikro	μ
10 ⁻³	Milli	m
10 ⁻²	(Zenti)	c
10 ⁻¹	(Dezi)	d
10 ¹	(Deka)	da
10 ²	(Hekto)	h
10 ³	Kilo	k
10 ⁶	Mega	M
10 ⁹	Giga	G
10 ¹²	Tera	T
10 ¹⁵	Peta	P
10 ¹⁸	Exa	E
10 ²¹	Zetta	Z
10 ²⁴	Yotta	Y

Abgeleitete SI-Einheiten mit eigenen Symbolen

Kraft	Newton	$N = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$
Arbeit, Energie	Joule	$J = N \cdot \text{m} = W \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$
Leistung	Watt	$W = J/\text{s} = V \cdot A = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$
Druck	Pascal	$\text{Pa} = N/\text{m}^2 = \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$
Frequenz	Hertz	$\text{Hz} = 1/\text{s}$
elektr. Ladung	Coulomb	$C = A \cdot \text{s}$
elektr. Spannung	Volt	$V = J/C = \text{kg} \cdot \text{m}^2/(\text{A} \cdot \text{s}^3)$
elektr. Widerstand	Ohm	$\Omega = V/A = \text{kg} \cdot \text{m}^2/(\text{A}^2 \cdot \text{s}^3)$
elektr. Leitwert	Siemens	$S = A/V = \text{A}^2 \cdot \text{s}^3/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$
elektr. Kapazität	Farad	$F = C/V = \text{A}^2 \cdot \text{s}^4/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$
magn. Flussdichte	Tesla	$T = V \cdot \text{s}/\text{m}^2 = \text{kg}/(\text{A} \cdot \text{s}^2)$
magn. Fluss	Weber	$\text{Wb} = V \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/(\text{A} \cdot \text{s}^2)$
Induktivität	Henry	$H = V \cdot \text{s}/A = \text{kg} \cdot \text{m}^2/(\text{A}^2 \cdot \text{s}^2)$
ebener Winkel	Radian	rad
Raumwinkel	Steradian	sr

1 Einleitung

1.1 Frequenzbereiche

In der Hochfrequenztechnik werden elektromagnetische Wellen mit Frequenzen zwischen etwa 30 kHz und 300 GHz eingesetzt. Dieser Bereich erstreckt sich in Bild 1.1 über sieben Zehnerpotenzen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum des freien Raums ist eine Naturkonstante und für alle Frequenzen gleich. Sie hängt mit den elektrischen und magnetischen Feldkonstanten $\epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$ bzw. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ wie folgt zusammen:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \lambda_0 f = 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1.1)$$

Ist der Raum mit einem Dielektrikum der Dielektrizitätszahl ϵ_r erfüllt, so verringert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit. In der als homogen angenommenen Standardatmosphäre (0°C , auf Meeresniveau) gilt angenähert $\epsilon_r \approx 1,0006$ und man erhält $c = c_0 / \sqrt{\epsilon_r} \approx 2,9970 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

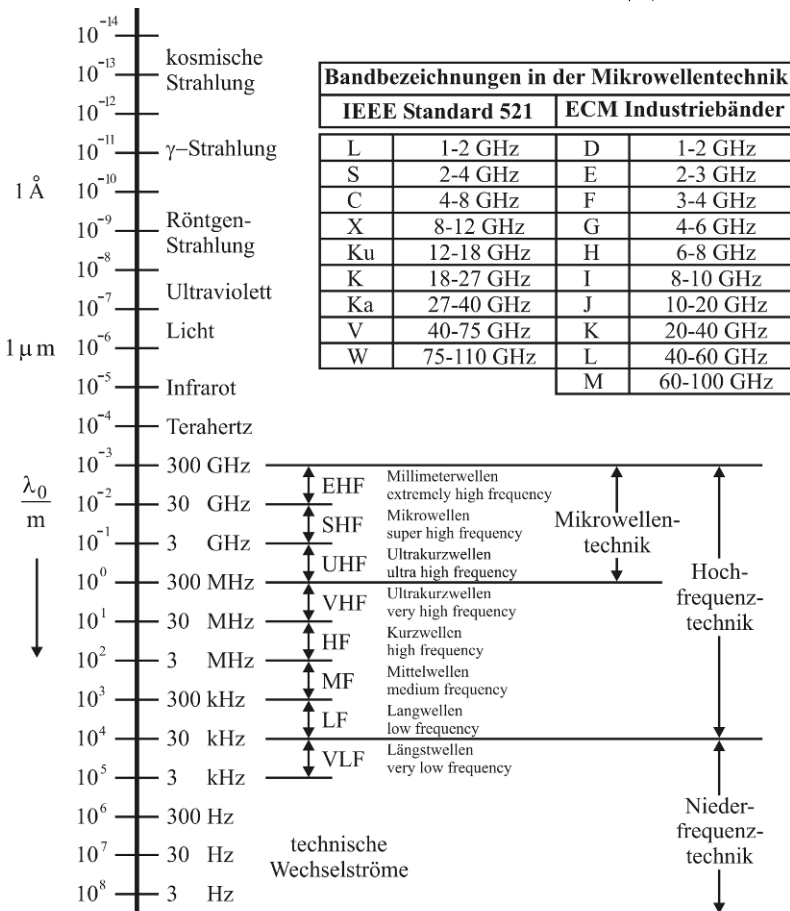


Bild 1.1 Spektrum elektromagnetischer Wellen und gebräuchliche Bandbezeichnungen

1.2 Elektromagnetische Grundgrößen

Jedes theoretische Modell zur Beschreibung physikalischer Erscheinungen muss sich in seinen Vorhersagen an experimentellen Beobachtungen in der Natur messen lassen. Solange kein Widerspruch zwischen Theorie und Messungen erkennbar wird, gilt ein solches Modell als allgemein akzeptiert. Für die Modellbildung geht man üblicherweise in fünf Schritten vor:

- Definition von Observablen (messbaren physikalischen Größen),
- Vernachlässigen unwesentlicher Aspekte durch Einführung sinnvoller Vereinfachungen,
- Entwurf einer mathematischen Verknüpfung der Grundgrößen,
- Ableiten grundlegender Zusammenhänge und Gesetze und
- Überprüfung durch Experimente unter reproduzierbaren Versuchsbedingungen.

Als bekanntes Beispiel soll hier die „**Theorie elektrischer Schaltungen**“ genannt werden [Küp05]. In einem vereinfachten Modell für reale Schaltungen werden die konzentrierten Bauelemente Widerstand (R), Spule (L) und Kondensator (C) betrachtet, die von idealen Spannungs- oder Stromquellen gespeist werden. Die Ströme und Spannungen sind in solchen RLC-Schaltungen (Bild 1.2) durch Differenzialgleichungen miteinander verknüpft.

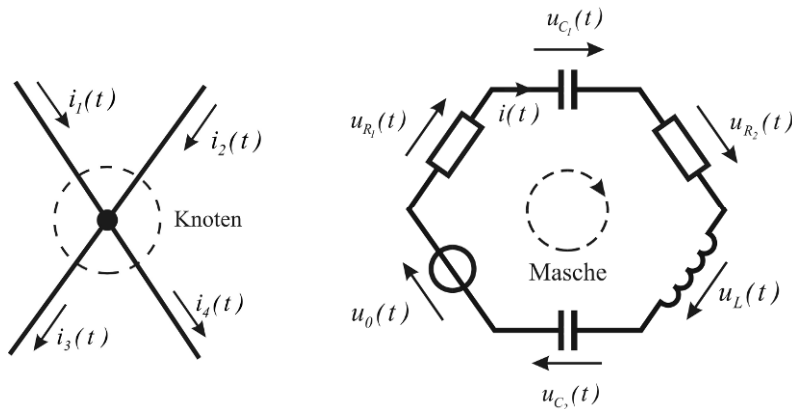


Bild 1.2 Stromverzweigung an einem Knoten und Spannungsaufteilung in einer Masche

Mit Hilfe der Kirchhoffschen¹ Knoten- und Maschengleichungen [Phi89]

$$\boxed{\sum_{\mu=1}^m i_{\mu}^{zu}(t) = \sum_{v=1}^n i_v^{ab}(t)} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\sum_{v=1}^n u_v(t) = 0} \quad (1.2)$$

können die wesentlichen Gesetzmäßigkeiten in elektrischen Netzwerken beschrieben und das Verhalten von Strom und Spannung an Zwei- und Vierpolen untersucht werden. Die gute Genauigkeit und die relativ einfachen mathematischen Zusammenhänge dieses Modells konzentrierter Schaltungen haben zu seiner hohen Akzeptanz und weiten Verbreitung beigetragen.

Die Beschreibung elektromagnetischer Felder erfordert ein ähnlich strukturiertes Modell. Wir wollen die physikalischen Größen, mit denen wir arbeiten werden, in zwei Gruppen einteilen. Einerseits sind dies **Quellen** und andererseits die von diesen Quellen erzeugten **Felder**.

¹ Gustav Robert **Kirchhoff** (1824-1887): dt. Physiker (Elektrizität, Strahlung, Spektralanalyse, Beugung)

Die Quellen elektromagnetischer Felder sind ruhende oder bewegte elektrische **Ladungen**, die makroskopisch als ganzzahlige Vielfache der Elementarladung des Elektrons $-e$ auftreten:

$$e \approx 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C} . \quad (1.3)$$

Dabei ist $1 \text{ C} = 1 \text{ As}$ die Abkürzung für die Einheit der elektrischen Ladung, das Coulomb². Das Prinzip von der Erhaltung der Ladung ist wie der Impuls- oder der Energieerhaltungssatz ein fundamentales Naturgesetz, das nicht aus anderen Beziehungen abgeleitet werden kann. Bewegte elektrische Ladungen bilden einen **elektrischen Strom**:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} , \quad (1.4)$$

wobei ΔQ diejenige Ladungsmenge ist, die während des Zeitintervalls Δt eine Kontrollfläche passiert. Verläuft der Ladungstransport nicht gleichförmig, so benutzt man den Momentanwert der zeitabhängigen Stromstärke

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} . \quad (1.5)$$

Wir definieren damit eine vektorielle **Stromdichte** **J**, als Maß für den senkrechten Stromfluss durch eine Einheitsfläche. Der Betrag dieses Vektors wird in A/m^2 gemessen, seine Richtung weist in Richtung des Stromflusses. Neben den Quellgrößen gibt es in der Elektrodynamik vier **Vektorfelder**, die in Tabelle 1.1 zusammengestellt sind.

Tabelle 1.1 Elektrische und magnetische Feldgrößen

Feldgröße	Symbol	Einheit
Elektrische Feldstärke	E	V/m
Elektrische Flussdichte	D	As/m^2
Magnetische Flussdichte	B	$\text{T} = \text{Vs}/\text{m}^2$
Magnetische Feldstärke	H	A/m

Die prinzipielle Messvorschrift des elektromagnetischen Feldes erfolgt mittels seiner Kraftwirkung auf Punktladungen im **Lorentzschen**³ Kraftgesetz [Pur89]:

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (1.6)$$

Dabei ist $\mathbf{v}$ die Geschwindigkeit der Punktladung. In der **Elektrostatik** wird $\mathbf{v} = 0$; deswegen ist die elektrische Feldstärke **E** das einzige Vektorfeld, das im freien Raum benötigt wird. Dagegen ist die elektrische Flussdichte **D** ein rechnerisches Hilfsfeld, mit dem man die Polarisierbarkeit von Materie beschreibt. In ruhenden, linearen und isotropen Medien gilt dann:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} . \quad (1.7)$$

² Charles Augustin de **Coulomb** (1736-1806): frz. Physiker und Ingenieur, der 1785 das Coulombsche Gesetz über die gegenseitige Kraftwirkung zweier Punktladungen formulierte

³ Hendrik Antoon **Lorentz** (1853-1928): niederld. Physiker (Thermodynamik, Elektronentheorie, Lorentz-Transformation, Nobelpreis f. Physik 1902)

Analog der Bedeutung des **E**-Feldes für die Elektrostatik ist in der **Magnetostatik** im freien Raum zur Beschreibung aller Phänomene nur die magnetische Flussdichte **B** notwendig, die man aus heutiger Sicht besser als magnetische Feldstärke bezeichnen sollte. Doch ist dieser Name historisch bereits für das rechnerische Hilfsfeld **H** vergeben, das in magnetisierbarer Materie von Bedeutung ist. In ruhenden, linearen und isotropen Medien gilt:

$$\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}. \quad (1.8)$$

Die primär durch die Quellen angeregten Felder sind also das **E**- und das **B**-Feld, während **D**- und **H**-Felder als abgeleitete Größen zu gelten haben. Magnetische Elementarladungen – so genannte Monopole – konnten bisher im Experiment noch nicht nachgewiesen werden [Reb99]. Das (1.6) entsprechende Kraftgesetz für ruhende oder bewegte magnetische Punktladungen müsste

$$\mathbf{F} = q_m (\mathbf{H} + \mathbf{v} \times \mathbf{D}) \quad (1.9)$$

lauten, wobei die hypothetische, magnetische Ladungsmenge q_m in der Einheit Vs zu messen wäre. Bei magnetischen Ladungen müssten das **H**- und das **D**-Feld als Primärfelder und das **E**- und das **B**-Feld als abgeleitete Größen betrachtet werden.

Bei zeitlich veränderlichen Ladungs- und Stromverteilungen treten miteinander verknüpfte elektrische und magnetische Felder auf. Dabei entsteht eine elektromagnetische **Strahlung**, die sich mit Lichtgeschwindigkeit von den Quellen weg bewegt. Im freien Raum läuft diese Strahlung bis ins Unendliche; sie transportiert Energie und Impuls.

1.3 Antennen und Strahlungsfelder im Überblick

Antennen, als Quellen oder Empfänger elektromagnetischer Strahlung, können je nach Frequenz verschiedene Form und Größe haben (Bild 1.3). Antennen sind **Wellentypwandler** – als Sendeantennen sollen sie leitungsgeführte elektromagnetische Wellen in solche Wellen umformen, die sich im freien Raum ausbreiten. Dagegen nehmen Empfangsantennen Energie aus dem Raum auf und wandeln diese in leitungsgedundene Wellen um. Die Umformung der Wellen soll mit möglichst wenig Verlusten und Reflexionen vor sich gehen. Außerdem soll meistens eine bestimmte Richtungsabhängigkeit der Strahlung bzw. des Empfangs eingehalten werden.

Im Prinzip ist jede Antenne sowohl als Sende- als auch als Empfangsantenne geeignet. Die Auswahl des **Antennentyps** hängt vom speziellen Anwendungsfall ab. Außer den gewünschten Strahlungseigenschaften spielen Gewicht, Volumen und mechanische Stabilität eine wichtige Rolle. Antennen müssen Abmessungen in der Größenordnung einer halben Wellenlänge haben oder größer sein, um effektiv zu arbeiten. Deshalb kommen für den niederfrequenten Bereich des elektromagnetischen Spektrums (bei den Mittel- und Langwellen des Rundfunks) nur lineare Antennen in Betracht. Sie bestehen aus Drähten oder Stäben mit – im Verhältnis zu ihrer Länge – geringen Querschnittsabmessungen. Eine wesentliche Bündelung der Strahlung ist mit größeren Strahlergruppen möglich, die vom Kurzwellenbereich ($f > 3 \text{ MHz}$) an mit erträglichem Aufwand realisiert werden können. Stark bündelnde Antennen wie Hornstrahler und Reflektorantennen sind erst im Mikrowellenbereich ($f > 1 \text{ GHz}$) ausführbar (Bild 1.3).

Wir wollen einen kurzen **Überblick** zu den nachfolgenden Kapiteln geben. Nach Bereitstellung elementarer Hilfsmittel der Vektorrechnung beschäftigen wir uns mit den Grundlagen der Elektrodynamik. Als einfachste Lösung der Feldgleichungen betrachten wir ebene Wellen im

freien Raum und ihre gestörte Ausbreitung bei Anwesenheit von Hindernissen. Nach der Untersuchung wichtiger Speiseleitungen geben wir charakteristische Kenngrößen von Antennen an und betrachten den Zusammenhang zwischen den Strömen auf der Antennenoberfläche und ihrem zugehörigen Strahlungsfeld. In der zweiten Hälfte des Buches beschäftigen wir uns mit weitergehenden Untersuchungen zum Themenkreis der Analyse und Synthese verschiedenster Antennenformen mit ihren vielfältigen Anwendungen.

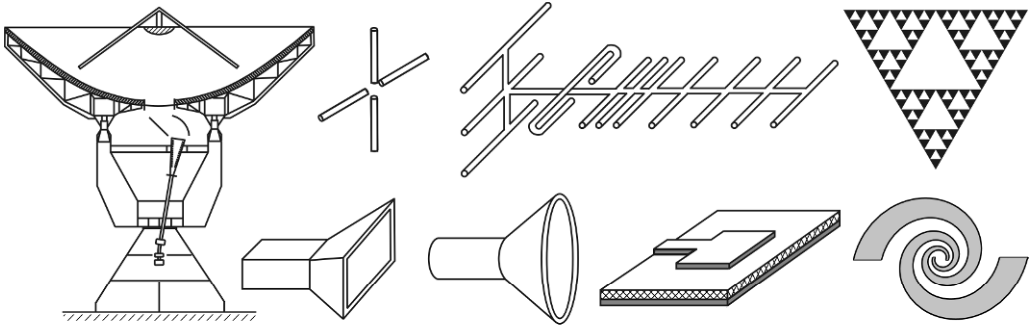


Bild 1.3 Verschiedene Antennenformen: Aperturantennen [Sie92], Drahtantennen und Planarantennen

Die folgende tabellarische Zusammenstellung gibt einen auszugsweisen Überblick einiger bedeutender historischer Ereignisse auf dem Gebiet der Mikrowellen- und Antennentechnik.

1800	Volta baut die erste Batterie (Volta'sche Säule).
1820	Gesetz von Biot und Savart . Oersted entdeckt die magnetische Wirkung elektrischer Ströme.
1820/26	Durchflutungsgesetz von Ampère .
1826	Ohm findet das Ohmsche Gesetz
1831	Induktionsgesetz von Faraday .
1842	Entdeckung des Doppler -Effektes.
1873	Maxwell veröffentlicht seine Theorie über den Elektromagnetismus.
1886	Hertz experimentiert mit elektromagnetischen Wellen bei $\lambda \approx 8$ m und später bei $\lambda \approx 30$ cm.
1892	Tesla baut die erste Elektronenröhre zum Einsatz in Funksystemen.
1894	Lodge demonstriert eine drahtlose Nachrichtenübertragung.
1895	Popow weist Blitze in Gewittern mit einer vertikalen Drahtantenne nach.
1897	Tesla überträgt Funksignale bei $f = 2$ MHz über eine Strecke von 40 km.
	Lord Rayleigh untersucht Hohlleiterwellen als Randwertproblem.
1898	Marconi und Jackson übertragen ein Signal drahtlos über eine Strecke von 100 km.
1899	Sommerfeld untersucht die Ausbreitung längs verlustbehafteter Drähte.
1901	Transatlantik-Funkverbindung (Marconi) mittels eines 200 m langen Drahtstücks.
1904	Hülsmeier patentiert sein Telemobiloskop (Vorläufer moderner Radargeräte).
1906	Drahtlose Telefonie (Poulsen).
1907	Harms untersucht die Wellenausbreitung auf dielektrisch beschichteten Drähten.
1909	Hondros und Debye : Oberflächenwellen längs dielektrischer Drähte. Hilpert : Ferrite
1918	Die Großfunkstation Nauen bei Berlin sendet um die Erde.
1920	Hull entwickelt einen Vorläufer des Magnetrons (für 30 GHz).
1922	Hinweis auf die Verwendung von Funkwellen zu Ortungszwecken (Marconi).
1923	Öffentlicher Rundfunk in Deutschland durch Bredow .
1924	Erste Richtantennen aus mehreren Halbwellendipolen.
1926	Yagi-Uda -Antenne. Einweihung des Berliner Funkturmes . Watson-Watt schlägt den Begriff Ionosphäre vor.
1930	Ardenne gelingt die erste elektronische Fernsehübertragung.
1932	Jansky weist bei $\lambda = 14,6$ m Radiostrahlung aus dem Zentrum unserer Galaxis nach. Southworth untersucht die H_{11} -Welle im Rundhohlleiter.
1933	Armstrong erhält ein Patent auf das Verfahren der Breitband-Frequenzmodulation.
1934	Schelkunoff und Meade entdecken die dämpfungsarme H_{01} - Rundhohlleiterwelle.

- 1935 Eröffnung des ersten **Fernseh-Programmdienstes** in Berlin. **Pulsradar** bei 60 MHz (USA).
- 1936 Erste Richtfunkstrecken. **Brillouin**: Hohlleiter-Eigenwellen. **Barrow**: Hornantennen.
- 1937 **Schelkunoff** untersucht Rechteckhohlleiter mit Verlusten.
Die Gebrüder **Varian** entwickeln das Klystron.
- 1938 **Chu** untersucht den Hohlleiter mit elliptischem Querschnitt.
Radiokarte des Himmels mit der ersten Parabolantenne ($D = 9$ m, $\lambda = 2$ m) durch **Reber**.
- 1939 **Barrow** entwickelt Hohlleiterschaltungen (Magisches T). **Smith**: Smith-Diagramm.
Barrow und **Lewis** entwickeln die Sektorhorn-Antenne. Erstes Flugzeug-Bordradar (England).
- 1940 **Schwinger** und **Marcuvitz** untersuchen Diskontinuitäten in Hohlleitern.
- 1942 **Kompfner** entwickelt die Wanderfeldröhre.
- 1943 **Bethe** entwickelt erste Richtkoppler.
- 1944 **Luneburg** entwickelt sphärische Linsenantennen. **Friis** definiert die Rauschzahl.
- 1945 Ausnutzung des Doppler-Effekts in Radaranlagen zur Festzielunterdrückung.
Clarke schlägt geostationäre Kommunikationssatelliten vor.
- 1946 **Brillouin**: Wellenausbreitung in periodischen Strukturen. **Kraus**: Wendelantenne.
Erster Empfang von Radarechos vom Mond.
- 1947 **Bardeen**, **Brattain** und **Shockley** entwickeln den Transistor.
- 1950 **Goubau** untersucht Oberflächenwellenleiter.
- 1953 Entwicklung von **Streifenleitungen** und ersten **Patch-Antennen** durch **Deschamps**.
- 1957 Erster Satellit (**Sputnik I**). Doppler-Navigation im Flugverkehr.
- 1958 **Kilby** und **Noyce** entwickeln die erste Integrierte Schaltung (IC).
- 1959 Erste Funkbilder von der Rückseite des Mondes (**Lunik III**).
- 1960 Erster Nachrichtensatellit (**Echo I**).
- 1963 Erster geostationärer Satellit (**Syncom**). **Arecibo** Radioteleskop (305 m) geht in Betrieb.
- 1964 Erdefunkstelle **Raisting** am Ammersee geht in Betrieb.
- 1965 **Penzias** und **Wilson**: kosmische Hintergrundstrahlung bei $T \approx 2,7$ K (Hornparabolantenne).
Kurokawa beschreibt Mehrtore mittels Leistungswellen und Streumatrizen (S-Parameter).
- 1966 **Yee** entwickelt die Methode der Finiten Differenzen (FDTD), numerische Feldberechnung.
- 1969 Die ersten Menschen betreten im Verlauf der Raumfahrtmission **Apollo 11** den Mond.
Das **Arpanet** startet als früher Vorläufer des Internets.
- 1970 **Silvester** wendet die Methode der Finiten Elemente (FEM) auf Hohlleiterwellen an.
- 1971 Erste Raumsonde auf Mars. Erste Raumstation (**Saljut I**).
Itoh und **Mitra** untersuchen Eigenmoden auf Streifenleitungen.
- 1972 Größtes frei bewegliches Radioteleskop der Erde (100 m) in **Effelsberg** (Eifel).
Die NASA startet **Pioneer 10**.
- 1974 **Streifenleitungsantennen** werden einsetzbar. Sonnensonde **Helios I**.
- 1975 **Phased-Array-Antennen** mit elektronischer Strahlschwenkung.
- 1980 Fernerkundung der Erde mit Radar (**remote sensing**). Mit **GaAs-Feldeffekttransistoren** werden Ausgangsleistungen von 10 Watt bei Frequenzen von 10 GHz erzeugt.
- 1981 Wieder verwendbarer Raumtransporter (**space shuttle**).
- 1985 Satellitennavigation – global positioning system (**GPS**).
- 1987 **Taga** entwickelt eine spezielle Patch-Antenne, die Planar Inverted F-Shaped Antenna (PIFA).
- 1990 **Supraleitende Antennen**. **Fraktale** Breitbandantennen. **Satellitenfernsehen**.
Antennen mit intelligenter Signalverarbeitung (**smart antennas**). **Hubble**-Weltraum-Teleskop.
- 1991 Start des digitalen **GSM**-Mobilfunksystems in Deutschland.
- 1992 **DECT** wird zum europäischen Standard für digitale schnurlose Telekommunikation.
Erste Kurznachricht (**SMS**) gesendet.
- 1997 **Digitales Fernsehen**, **WLAN**-Standard bei 2,4 GHz.
- 1998 Mobiles satellitengestütztes Kommunikationssystem **Iridium**.
- 1999 Start der internationalen Raumstation **ISS**. **Bluetooth** Nahbereichsfunktechnologie (2,4 GHz).
- 2000 **Abstandsradar** für PKW. **Green Bank Offset Radioteleskop** (100-110 m Durchmesser).
- 2002 **WLAN**-Standard bei 5,5 GHz.
- 2003 Unbemannte Missionen **Mars Rover** und **Mars Express**. Letzter Kontakt zu **Pioneer 10**.
- 2006 Unbemannte Mission **New Horizons** zu Pluto.
- 2014 Geplante Inbetriebnahme des europäischen Satellitennavigationssystems **Galileo**.

Mit dem heute noch nicht abgeschlossenen Vordringen der drahtlosen Nachrichtentechnik in immer höhere Frequenzbereiche und in neue Anwendungsgebiete wurde eine Fülle neuer **Antennenformen** entwickelt, so zum Beispiel Reflektor-, Horn- und Linsenantennen, Wendel- und Spiralantennen, Schlitz- und Fraktalantennen, planare Antennen und viele andere. Verschiedene Anwendungsbereiche der modernen Nachrichtentechnik, wie z. B. Ortung, Navigation, Richtfunk-, Satellitenfunk- und Mobilfunktechnik sowie die Raumfahrt wären ohne eine weit entwickelte Antennentechnik undenkbar. Insbesondere durch enorme Fortschritte bei den Berechnungsmethoden mit Hilfe rechnergestützter Simulationsverfahren können heute neue Antennenformen mit hohem Gewinn, geringen Nebenkeulen und niedriger Kreuzpolarisation wesentlich einfacher entwickelt werden als in früheren Jahren.

2 Mathematische Grundlagen

2.1 Vektoralgebra

Ein **Vektor** ist eine gerichtete Größe (z. B. Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, elektrische und magnetische Feldstärke usw.). Im Gegensatz dazu wird jede durch eine Zahlenangabe bestimmte Größe als **Skalar** bezeichnet (z. B. Temperatur, Arbeit, elektrische Spannung usw.).

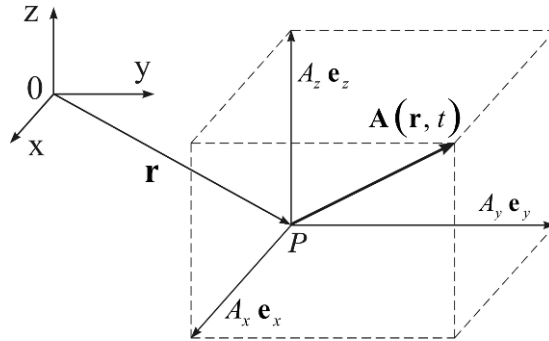


Bild 2.1 Zerlegung eines Vektors $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ in seine kartesischen Komponenten

In Bild 2.1 ist ein Vektor $\mathbf{A}$ zusammen mit seinen Projektionen auf die drei Achsen eines rechtshändigen, kartesischen Koordinatensystems dargestellt. Für die Nomenklatur gelte:

$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$	Vektor mit kartesischen Komponenten,
x, y, z	kartesisches Koordinatensystem (Rechtssystem),
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	Einheitsvektoren in Richtung x, y bzw. z und
$\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$	Aufpunktvektor.

Der Vektor $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ hängt im Allgemeinen vom Ort $\mathbf{r}$ und von der Zeit t ab. Mit Hilfe der Einheitsvektoren kann er in seine Komponenten zerlegt werden:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \quad \text{Komponentendarstellung,}$$

$$|\mathbf{e}_x| = |\mathbf{e}_y| = |\mathbf{e}_z| = 1 \quad \text{Einheitsvektoren der Länge eins und}$$

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad \text{Vektorlänge.}$$

Neben Addition und Subtraktion bildet die Multiplikation eine der wichtigsten Verknüpfungen zwischen zwei Vektoren. Bei dem Produkt zweier Vektoren kann das Ergebnis wieder ein Vektor sein – dann spricht man vom Vektorprodukt – das Ergebnis kann aber auch ein Skalar sein.

2.1.1 Skalarprodukt

Wir betrachten zunächst das Skalarprodukt zweier Vektoren **A** und **B**, das als Summe der Produkte der gleichartigen Komponenten definiert wird [Spi77]:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos(\angle \mathbf{A} \mathbf{B}) = AB \cos \varphi \quad \text{mit } 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (2.1)$$

Als eingeschlossener Winkel φ wird dabei der kleinere der zwischen **A** und **B** liegenden Winkel bezeichnet (Bild 2.2).

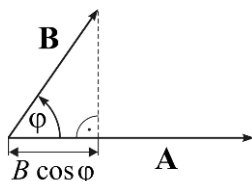


Bild 2.2 Eingeschlossener Winkel φ beim Skalarprodukt und Projektion von **B** auf **A**

Das Skalarprodukt (2.1) wird positiv, wenn der eingeschlossene Winkel φ spitz ist; ein stumpfer Winkel führt zu einem negativen Zahlenwert. Das Skalarprodukt verschwindet, wenn die Vektoren **A** und **B** senkrecht aufeinander stehen, d. h. wenn der eingeschlossene Winkel gerade $\varphi = \pi/2$ beträgt. Insbesondere gelten für die kartesischen Einheitsvektoren folgende wichtige Beziehungen:

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1 \quad (2.2)$$

und

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0. \quad (2.3)$$

Übung 2.1: Skalarprodukt

- Beweisen Sie mit Hilfe des Skalarproduktes den Kosinussatz für ebene Dreiecke:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \varphi}. \quad (2.4)$$

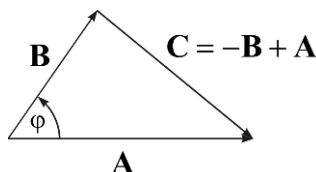


Bild 2.3 Schiefwinkliges Dreieck, dessen Seiten als Vektoren dargestellt werden

- **Lösung:**

Werden die Seiten des Dreiecks wie in Bild 2.3 als Vektoren **A**, **B** und **C** definiert und bildet man mit $C = |\mathbf{C}|$ das Skalarprodukt

$$C^2 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}), \quad (2.5)$$

so gilt nach der zweiten binomischen Formel und wegen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$:

$$C^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.6)$$

woraus sofort die Behauptung folgt:

$$C^2 = A^2 - 2AB \cos \varphi + B^2. \quad \square \quad (2.7)$$

2.1.2 Vektorprodukt

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ist ein Vektor, der auf der von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ aufgespannten Ebene senkrecht steht und einen Betrag gleich dem Flächeninhalt des von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gebildeten Parallelogramms besitzt. Das Vektorprodukt $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ zeigt in die Richtung, in der sich eine *rechtsgängige* Schraube bewegt, wenn man den ersten Vektor auf dem *kürzesten* Weg in die Richtung des zweiten Vektors dreht. Daher ist das Vektorprodukt nicht kommutativ, d. h. es gilt:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}. \quad (2.8)$$

Den Betrag des Vektorproduktes erhalten wir aus Bild 2.4.

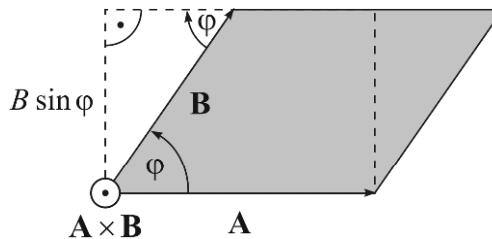


Bild 2.4 Zur Berechnung des Betrags beim Vektorprodukt

$$\text{Es gilt: } |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin(\angle \mathbf{A} \mathbf{B}) = AB \sin \varphi \quad \text{mit } 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (2.9)$$

Das Vektorprodukt zweier verschiedenartigen Einheitsvektoren ergibt den dritten Einheitsvektor:

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y. \quad (2.10)$$

Das richtige Vorzeichen erhält man aus der zyklischen Vertauschungsregel. Entspricht die Reihenfolge im Vektorprodukt der in Bild 2.5 dargestellten Umlaufrichtung, so wird das Vektorprodukt positiv – im umgekehrten Falle negativ.

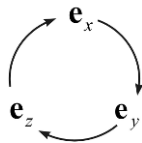


Bild 2.5 Zyklische Vertauschungsregel zur Festlegung des Vorzeichens beim Vektorprodukt

Das Vektorprodukt zweier paralleler Vektoren ist stets null; insbesondere gilt:

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0} = 0. \quad (2.11)$$

Anstelle des Nullvektors (fettgedruckt) schreibt man zugunsten einer einfacheren Notation häufig eine skalare Null. Mit Hilfe dieser Beziehungen ergibt sich folgende Komponentendarstellung des Vektorprodukts:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \times (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) = \\ &= \mathbf{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{e}_z (A_x B_y - A_y B_x).\end{aligned}\quad (2.12)$$

Das Ergebnis kann – als Merkhilfe – in Determinantenform geschrieben werden:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.\quad (2.13)$$

Vertauscht man in einer Determinante die Reihenfolge zweier Zeilen, so ändert diese ihr Vorzeichen; damit wird die Beziehung $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ sofort klar.

Übung 2.2: Vektor- und Skalarprodukt

- Berechnen Sie den Ausdruck

$$C = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2.\quad (2.14)$$

- **Lösung:**

Aus

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\quad (2.15)$$

folgt sofort:

$$C = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2,\quad (2.16)$$

d. h. es gilt:

$$C = (AB \sin \varphi)^2 + (AB \cos \varphi)^2\quad (2.17)$$

mit φ als Winkel zwischen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$. Mit $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ wird schließlich:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = A^2 B^2. \quad \square\quad (2.18)$$

2.1.3 Spatprodukt

Neben dem Skalar- und dem Vektorprodukt treten in den Anwendungen auch mehrfache Produkte zwischen Vektoren auf, wobei auf sinnvolle Kombinationen zu achten ist – so sind z. B. Ausdrücke der Form $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ oder $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ nicht zulässig, weil jeweils der Klammerausdruck kein Vektor mehr ist. Der Skalar $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ stellt allerdings eine sinnvolle Verknüpfung dreier Vektoren dar und wird Spatprodukt der drei Vektoren $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ genannt. Das Ergebnis des Spatprodukts ist ein Skalar, dessen Betrag den Rauminhalt V desjenigen Prismas angibt, das von den drei Vektoren $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ aufgespannt wird (Bild 2.6):

$$V = |\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|.\quad (2.19)$$

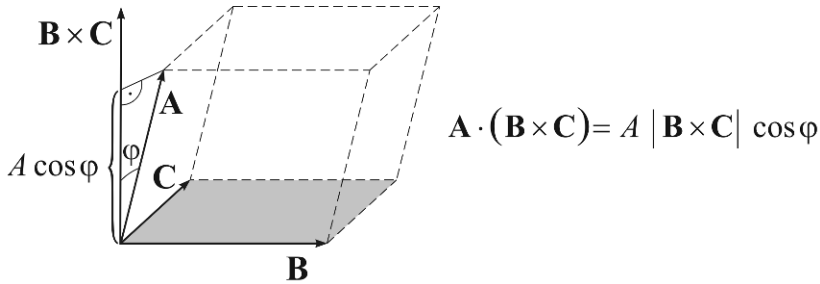


Bild 2.6 Prisma, dessen Volumen durch den Betrag des Spatprodukts seiner drei Kantenvektoren gegeben ist

In Determinantenform erhält man:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (2.20)$$

Bei zyklischer Vertauschung der Vektoren gilt:

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})}, \quad (2.21)$$

da das Volumen eines Prismas auf drei verschiedene Arten berechnet werden kann:

$$\text{Grundfläche} \times \text{Höhe} = \text{Seitenfläche} \times \text{Breite} = \text{Stirnfläche} \times \text{Tiefe}. \quad (2.22)$$

Für das *Vorzeichen* des Spatproduktes (2.20) können wir folgende Regel aufstellen: Das Produkt $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ ist dann positiv, wenn die drei Vektoren $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ zueinander wie die Achsen eines rechtshändigen Koordinatensystems orientiert sind.

Das Hintereinanderausführen zweier Vektorprodukte kann man mit Hilfe des **Graßmannschen¹ Entwicklungssatzes** („bac-cab“ Regel) als Differenz zweier einfacher Vektoren ausdrücken:

$$\boxed{\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}}. \quad (2.23)$$

Ferner gelten für mehrfache Produkte folgende Formeln der Vektoralgebra (**Lagrange² - Identitäten**)

$$\boxed{\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D}]\mathbf{C} - [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}]\mathbf{D}. \end{aligned}} \quad (2.24)$$

Der Vorteil dieser Umformungen besteht darin, dass sich die Anzahl der zu berechnenden Vektorprodukte reduziert, die natürlich aufwändiger zu berechnen wären als einfachere Skalarprodukte.

¹ Hermann Günther **Graßmann** (1809-1877): dt. Mathematiker, Physiker und Philologe (Begründer der Vektor- und Tensorrechnung)

² Joseph Louis de **Lagrange** (1736-1813): it.-frz. Mathematiker, Physiker und Astronom (Variationsrechnung, Differenzialgleichungen, Wahrscheinlichkeitsrechnung)

2.2 Vektoranalysis

Die Vektoranalysis, deren Ursprung in der Mitte des neunzehnten Jahrhunderts liegt, ist heute zu einem wesentlichen mathematischen Werkzeug in den Ingenieur- und Naturwissenschaften geworden. Die mathematische Formulierung von Gesetzen elektromagnetischer – wie auch anderer – Vektorfelder wird durch vektoranalytische Hilfsmittel einfacher und prägnanter. Insbesondere die Differenziation und Integration von Vektorfeldern wird uns in diesem einführenden Kapitel noch näher beschäftigen [Spi77, Stra03].

2.2.1 Differenziation von skalaren Feldern

Ist eine skalare Größe, z. B. eine Temperatur oder ein Potenzial, als Funktion des Ortes gegeben, so sprechen wir von einem **skalaren Feld**. An einem bestimmten Punkt habe diese skalare Ortsfunktion den Wert $\Phi(x, y, z)$, für den wir mit dem Ortsvektor $\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$ abgekürzt $\Phi(\mathbf{r})$ schreiben wollen. Beim Fortschreiten um eine infinitesimal kleine Wegstrecke $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz$ stellt sich ein neuer Wert $\Phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$ ein. Die Änderung $d\Phi = \Phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{r})$ entwickeln wir in eine Taylorreihe bis zum linearen Glied:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz. \quad (2.25)$$

Wir erhalten dadurch das so genannte **totale Differenzial**³ $d\Phi$ der Ortsfunktion $\Phi(\mathbf{r})$. Dessen Wert können wir formal durch ein Skalarprodukt ausdrücken:

$$d\Phi = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz). \quad (2.26)$$

Die Größe

$$\boxed{\text{grad } \Phi = \mathbf{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}} \quad (2.27)$$

ist ein Vektor und wird **Gradient** der skalaren Ortsfunktion $\Phi(\mathbf{r})$ genannt. Damit können wir für das totale Differenzial (2.26) auch schreiben:

$$d\Phi = \text{grad } \Phi \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.28)$$

Der Betrag des Gradientenvektors ist:

$$|\text{grad } \Phi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2}. \quad (2.29)$$

Der Vektor $\text{grad } \Phi$ steht stets senkrecht auf den Niveau- oder Äquipotenzialflächen $\Phi = \text{const.}$ und zeigt daher in Richtung des *lokal steilsten Anstieges* der Ortsfunktion $\Phi(\mathbf{r})$. Er weist keinesfalls immer – sondern nur an manchen Orten – in Richtung eines lokalen oder globalen Maximums (Bild 2.7).

³ Das totale Differenzial muss um den Term $\frac{\partial \Phi}{\partial t} dt$ ergänzt werden, falls die Funktion $\Phi(\mathbf{r}, t)$ sowohl vom Ort $\mathbf{r}$ als auch von der Zeit t abhängt.

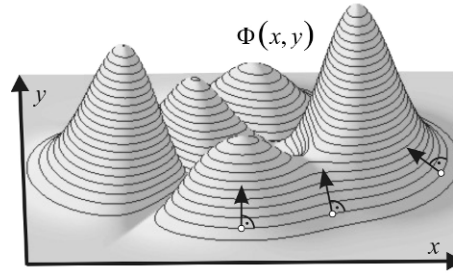


Bild 2.7 Potenzialgebirge $\Phi(x, y)$ mit Höhenlinien und drei Gradientenrichtungen

Die Vektoroperation „Gradient“ hat differenzierenden Charakter auf die rechts – direkt daneben – stehende skalare Ortsfunktion. Dem tragen wir durch Einführung eines vektoriellen **Differenzialoperators**

$$\vec{\nabla} = \nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.30)$$

Rechnung. Die formale Rechengröße ∇ wird nach Hamilton⁴ **Nabla-Operator** genannt. Sie hat nur Sinn als Rechenvorschrift, differenzierend angewandt auf den unmittelbar rechts stehenden Ausdruck. Der Nabla-Operator ist ein Vektor – der Vektorpfeil über dem ∇ wird meist weggelassen. Als Differenzialoperator hat ∇ alleine noch keine physikalische Bedeutung. Erst in Verbindung mit einer zu differenzierenden Funktion – rechts von ihm – entsteht eine sinnvolle physikalische Größe. Angewandt auf eine skalare Ortsfunktion ergibt sich deren Gradient:

$$\nabla \Phi = \text{grad } \Phi = \mathbf{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{e}_i}{h_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (2.31)$$

In anderen als kartesischen Koordinatensystemen hat der Nabla-Operator erwartungsgemäß eine kompliziertere Gestalt; in Tabelle 2.1 sind die wichtigsten drei zusammengestellt [Str07].

Tabelle 2.1 Der ∇ - Operator in verschiedenen Koordinatensystemen mit den **Metrikoeffizienten** h_i

kartesisch	zylindrisch	sphärisch
$\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$	$\mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$	$\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$
$h_1 = h_2 = h_3 = 1$	$h_1 = 1, \quad h_2 = \rho, \quad h_3 = 1$	$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \vartheta$

⁴ Sir William Rowan **Hamilton** (1805-1865): irischer Mathematiker, Physiker und Astronom (Wellentheorie des Lichts, geometrische Optik, analytische Mechanik)

Übung 2.3: Elektrostatisches Potenzialfeld

- Das Potenzial einer ruhenden elektrischen Punktladung q ist [Blu82]:

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon r}. \quad (2.32)$$

Dabei ist $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ der radiale Abstand von der Punktladung, wenn sich die Punktladung im Koordinatenursprung befindet. Bestimmen Sie mit Hilfe der Vorschrift

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi = -\nabla \Phi \quad (2.33)$$

das die Punktladung umgebende elektrostatische Feld.

- Lösung:**

Die Berechnung würde wegen der Kugelsymmetrie zweckmäßig in sphärischen Koordinaten erfolgen, doch wollen wir aus didaktischen Gründen mit kartesischen Koordinaten weiterrechnen:

$$\Phi(r) = \Phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (2.34)$$

Mit den partiellen Ableitungen nach x , y und z

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{-2x}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{x}{r^3} \quad (2.35)$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} = -\frac{y}{r^3} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = -\frac{z}{r^3} \quad (2.36)$$

können wir das elektrische Feld sofort bestimmen. Aus (2.33) wird:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi = -\left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{q}{4\pi\epsilon \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (2.37)$$

und damit folgt:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} (\mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.38)$$

Mit $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ erhalten wir schließlich das bekannte Ergebnis:

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}}. \quad (2.39)$$

Die quadratische Abhängigkeit (2.39) wurde bereits 1785 als **Coulombsches Gesetz** experimentell entdeckt. Als nützliche Beziehung wollen wir uns merken:

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}. \quad \square \quad (2.40)$$

2.2.2 Differenziation von Vektorfeldern

Wir können außer der Gradientenbildung einer skalaren Ortsfunktion noch andere algebraische Operationen mit dem Vektoroperator ∇ ausführen. Die Kombination mit einem rechts stehenden Vektor $\mathbf{A}$ kann nach Art eines Skalarproduktes oder eines Vektorproduktes erfolgen. Untersuchen wir zunächst die Operation $\nabla \cdot \mathbf{A}$, so finden wir die Komponentendarstellung:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z), \quad (2.41)$$

für die wir sofort schreiben können:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad \text{Beispielsweise gilt } \nabla \cdot \mathbf{r} = 3. \quad (2.42)$$

Diese skalare Größe wird Divergenz des Vektors $\mathbf{A}$ genannt [Mo61b]:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}}. \quad (2.43)$$

Die **Divergenz** eines Vektorfeldes an einem Feldpunkt P hat große physikalische Bedeutung. Sie ist ein Maß für die Ergiebigkeit dieses Vektorfeldes und gibt an, wie viel Fluss pro Volumeneinheit in einer infinitesimalen Umgebung des Feldpunktes P entsteht oder verschwindet.

Verschwindet in einem Vektorfeld innerhalb eines Bereiches die Divergenz, so liegen dort weder Quellen noch Senken vor. Das Vektorfeld ist in diesem Bereich quellenfrei, anderenfalls ist es ein Quellenfeld. Bei Quellenfreiheit haben die Feldlinien weder Anfang noch Ende; sie verlaufen dann in sich geschlossen oder sie treten unverändert durch das betrachtete Volumen hindurch. In einem Quellenfeld entspringen dagegen an den Quellen neue Feldlinien, die an den Senken wieder münden.

- Das **stationäre Magnetfeld** eines Gleichstroms I ist ein quellenfreies Vektorfeld; Magnetfeldlinien bilden im Allgemeinen geschlossene Kurven (Bild 2.8).
- Das **elektrostatische Feld** einer ruhenden Punktladung q ist dagegen ein Quellenfeld. Elektrische Feldlinien entspringen definitionsgemäß an positiven Ladungen und enden an negativen (Bild 2.8). Ist die Divergenz an einem gewissen Punkt des Raumes *positiv*, so befindet sich dort eine Quelle – es beginnen Feldlinien. Ist dagegen die Divergenz *negativ*, so ist der betrachtete Punkt eine Senke – es enden dort Feldlinien.

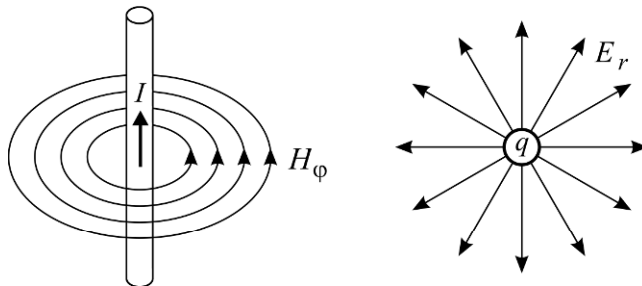


Bild 2.8 Wirbelfeld eines Gleichstroms I und Quellenfeld einer Punktladung q

Übung 2.4: Divergenz in Zylinderkoordinaten

- Ein Gleichstrom I fließe geradlinig in z -Richtung eines zylindrischen Koordinatensystems (Bild 2.8). Das magnetische Feld in seiner Umgebung ist bekanntermaßen durch

$$\mathbf{B}(\rho) = B_\varphi(\rho) \mathbf{e}_\varphi = \mu \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\varphi \quad (2.44)$$

gegeben mit ρ als radialem Abstand von der z -Achse. Berechnen Sie die Divergenz $\operatorname{div} \mathbf{B}$.

- Lösung:**

Den Nabla-Operator in zylindrischen Koordinaten entnehmen wir Tabelle 2.1. Damit wird die Divergenz eines in Zylinderkoordinaten gegebenen Vektorfelds $\mathbf{B}(\rho, \varphi, z)$:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = \left(\mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (B_\rho \mathbf{e}_\rho(\varphi) + B_\varphi \mathbf{e}_\varphi(\varphi) + B_z \mathbf{e}_z). \quad (2.45)$$

Bevor die Skalarprodukte ausgeführt werden können, müssen zuerst die partiellen Ableitungen berechnet werden. Wegen der Ortsabhängigkeit des radialen Einheitsvektors $\mathbf{e}_\rho(\varphi)$ und des azimuthalen Einheitsvektors $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$, die in Bild 2.9 näher erläutert wird, müssen die Differenziationen nach der Produktregel vorgenommen werden, woraus zunächst folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} = & \mathbf{e}_\rho \cdot \left(\frac{\partial B_\rho}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial B_z}{\partial \rho} \mathbf{e}_z \right) + \mathbf{e}_z \cdot \left(\frac{\partial B_\rho}{\partial z} \mathbf{e}_\rho + \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial B_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) + \\ & + \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\varphi \cdot \left(\frac{\partial B_\rho}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\rho + B_\rho \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + B_\varphi \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} \mathbf{e}_z \right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

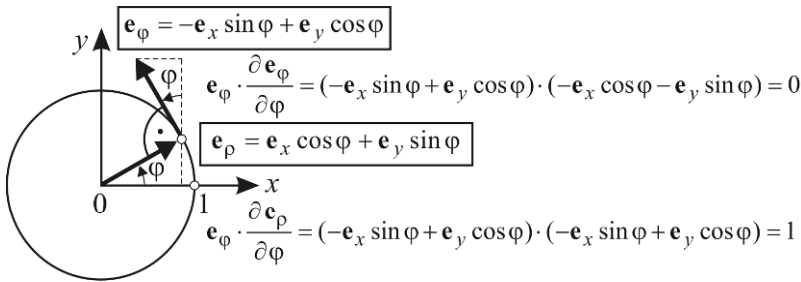


Bild 2.9 Ortsabhängige Einheitsvektoren $\mathbf{e}_\rho(\varphi)$ und $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$ in zylindrischen Koordinaten

Aus (2.46) erhalten wir unter Beachtung der Beziehungen von Bild 2.9

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_\rho}{\partial \rho} + \frac{B_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (2.47)$$

was man mit Hilfe der Metrikoeffizienten aus Tabelle 2.1 noch eleganter schreiben kann:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} B_i \right). \quad (2.48)$$

Da $B_\varphi(\rho)$ aus (2.44) nur von ρ aber *nicht* von φ abhängt, wird hier sofort $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, weswegen die magnetische Flussdichte in der Umgebung eines von Gleichstrom durchflossenen Drahtes quellenfrei ist. B-Linien schließen sich daher im Allgemeinen in sich selbst. $\square$

Für die Divergenz des Gradienten einer skalaren Ortsfunktion erhält man unter Einführung des Nabla-Operators und bei Vertauschung der Reihenfolge der Klammern:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = (\nabla \cdot \nabla) \Phi . \quad (2.49)$$

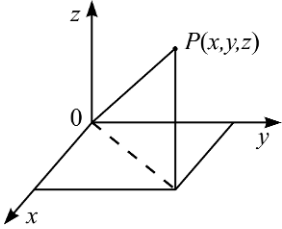
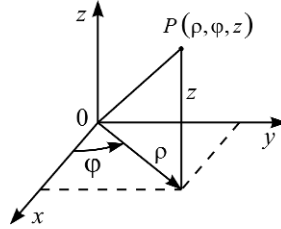
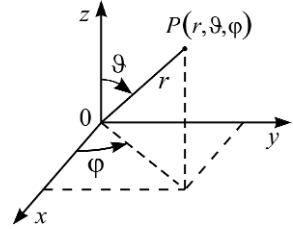
Das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit sich selbst wird als **Laplace-Operator**⁵ bezeichnet und mit einem großen Delta abgekürzt [Schw90]. Der Laplace-Operator Δ ist ein skalarer Differenzialoperator zweiter Ordnung. In kartesischen Koordinaten gilt:

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \quad (2.50)$$

Für andere Koordinatensysteme finden wir den Laplace-Operator in Tabelle 2.2 bzw. mit

$$\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) . \quad (2.51)$$

Tabelle 2.2 Der skalare Δ - Operator in verschiedenen Koordinatensystemen

kartesisch	zylindrisch	sphärisch
		
$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \end{aligned}$

Der Laplace-Operator $\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ wird in dieser Form nur auf *skalare* Ortsfunktionen Φ angewandt, also in folgender Weise:

$$\Delta \Phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi . \quad (2.52)$$

Die ebenfalls nützliche Operation

$$\nabla^2 \mathbf{A} , \quad (2.53)$$

also die Anwendung auf ein *Vektorfeld* $\mathbf{A}$, soll erst nach Einführung des Begriffs „Rotation“ besprochen werden.

⁵ Pierre Simon Marquis de **Laplace** (1749-1827): frz. Mathematiker, Physiker und Astronom (Himmelsmechanik, Differenzialgleichungen, Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Als weitere sinnvolle Verknüpfung des Nabla-Operators mit einem rechts davon stehenden Vektor untersuchen wir nun das Vektorprodukt

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z), \quad (2.54)$$

für das wir in kartesischen Komponenten erhalten:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (2.55)$$

Der Vektor $\nabla \times \mathbf{A}$ hat erwartungsgemäß eine kompliziertere Darstellung als der Skalar $\nabla \cdot \mathbf{A}$. Wie bei Vektorprodukten üblich, kann man sich auch hier das Ergebnis (2.55) in Form einer Determinante merken:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (2.56)$$

Diese vektorielle Größe wird **Rotation** des Vektors $\mathbf{A}$ genannt [Stra03]:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad (2.57)$$

andere Bezeichnungen für die Rotation sind auch „*Rotor*“ oder „*Wirbeldichte*“. In englischsprachiger Literatur ist auch die Notation $\text{rot } \mathbf{A} \equiv \text{curl } \mathbf{A}$ gebräuchlich. In krummlinigen orthogonalen Koordinatensystemen kann (2.55) verallgemeinert werden (siehe Anhang A.8):

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i h_i \left[\frac{\partial (h_k A_k)}{\partial x_j} - \frac{\partial (h_j A_j)}{\partial x_k} \right], \quad (2.58)$$

wobei die Indizes i, j und k zyklisch vertauscht sind, d. h. es gilt: $ijk = 123, 231$ oder 312 .

Die **Rotation** gibt die punktweise Verteilung von Wirbeln in einem Vektorfeld an. Ist die Rotation im gesamten betrachteten Gebiet null, so wird das Feld wirbelfrei genannt – dann muss es sich um ein Quellenfeld handeln.

Übung 2.5: Rotation

- Bestimmen Sie mit Hilfe des Entwicklungssatzes (2.23) für zweifache Vektorprodukte einen einfacheren Ausdruck für das Vektorfeld $\text{rot rot } \mathbf{H}$.

- **Lösung:**

Mit Hilfe des Nabla-Operators schreiben wir:

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}). \quad (2.59)$$

Um den Entwicklungssatz (2.23) anzuwenden, ersetzen wir $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ durch den Operator ∇ und setzen $\mathbf{C} = \mathbf{H}$. Offenbar gilt:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H} (\nabla \cdot \nabla). \quad (2.60)$$

Das Ergebnis muss noch etwas umgeformt werden, denn dem Differenzialoperator $(\nabla \cdot \nabla)$ fehlt auf seiner rechten Seite der zu differenzierende Term.

Bei anderer Schreibweise des Entwicklungssatzes umgehen wir die Problematik. Mit

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \quad (2.61)$$

erhalten wir so das korrekte – einzig sinnvolle – Ergebnis:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{H}. \quad (2.62)$$

Indem wir die Schreibweise mit dem Nabla-Operator schließlich reinterpreten, folgt

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H}. \quad \square \quad (2.63)$$

Die in Übung 2.5 abgeleitete Gleichung (2.63) liefert eine Vorschrift dafür, wie der Laplace-Operator auf einen Vektor anzuwenden ist (siehe auch Anhang A.8):

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A}}. \quad (2.64)$$

Diese Formel verknüpft alle wesentlichen Operationen der Vektoranalysis und hat daher grundlegende Bedeutung für die Feldtheorie. Die nahe liegende Vermutung, dass man $\nabla^2 \mathbf{A}$ berechnen kann, indem man den skalaren Laplace-Operator Δ auf die einzelnen Vektorkomponenten von $\mathbf{A}$ anwendet, gilt nur für kartesische Komponenten – dann wird nämlich:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = \Delta \mathbf{A} = \Delta (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) = \mathbf{e}_x \Delta A_x + \mathbf{e}_y \Delta A_y + \mathbf{e}_z \Delta A_z}, \quad (2.65)$$

weil wir die ortsunabhängigen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ und $\mathbf{e}_z$ nicht differenzieren müssen. In krummlinigen Koordinatensystemen (z. B. mit zylindrischen oder sphärischen Komponenten) ist dagegen Vorsicht geboten! Dort müssen die dann ortsabhängigen Einheitsvektoren (etwa $\mathbf{e}_\varphi(\varphi) = -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi$, siehe Übung 2.4) mit differenziert werden. Da dies umständlich ist, berechnet man den Ausdruck $\nabla^2 \mathbf{A}$ in solchen Fällen am sichersten über die Vorschrift (2.64) und erhält damit für Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten [Mor53, Some98, Leh06]:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{e}_\rho \left(\Delta A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) + \mathbf{e}_z \Delta A_z} \quad (2.66)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} = & \mathbf{e}_r \left(\Delta A_r - \frac{2 A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\vartheta \sin \vartheta) - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \\ & + \mathbf{e}_\vartheta \left(\Delta A_\vartheta - \frac{A_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} - \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \\ & + \mathbf{e}_\varphi \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}} \quad (2.67)$$

2.2.3 Rechnen mit dem Nabla-Operator

Die Verwendung des Nabla-Operators ist von Vorteil, wenn komplizierte vektoranalytische Ausdrücke auszuwerten sind. Dabei ist zu beachten, dass der Nabla-Operator sowohl differenzierend wirkt als auch Vektorcharakter hat. Zur Verdeutlichung betrachten wir ein Beispiel.

Übung 2.6: Nabla-Operator

- Berechnen Sie mit $\Phi(\mathbf{r})$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ den Ausdruck $\text{div}(\Phi \mathbf{A})$.

• **Lösung:**

Mit Hilfe des Nabla-Operators erhalten wir zunächst $\operatorname{div}(\Phi \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\Phi \mathbf{A})$. Nach der Produktregel für Differenziationen, bei der jeweils einer der beiden Faktoren konstant gehalten wird, schreiben wir formal:

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{A}) = \nabla_{\Phi} \cdot (\Phi \mathbf{A}) + \nabla_{\mathbf{A}} \cdot (\Phi \mathbf{A}), \quad (2.68)$$

wobei der Index am Nabla-Operator nach Feynman⁶ anzeigen soll, auf welchen der beiden Faktoren Φ oder $\mathbf{A}$ er differenzierend einwirkt. Die dabei jeweils konstant gehaltene Größe kann *vor* die Differenziation gezogen werden, allerdings unter strenger Beachtung der Regeln der Vektoralgebra. So folgt aus (2.68):

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{A}) = (\nabla_{\Phi} \Phi) \cdot \mathbf{A} + \Phi (\nabla_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}), \quad (2.69)$$

wobei auf zulässige Vektoroperationen und insbesondere auf die sinnvolle „Anordnung“ des Punktes im Skalarprodukt zu achten ist. Der Nabla-Operator kann nämlich auf den Skalar Φ nur in Form des Gradienten einwirken – bei der Differenziation des Vektors $\mathbf{A}$ kann hier nur die Divergenz gemeint sein. Nach Reinterpretation der erhaltenen Größen erhält man:

$$\boxed{\operatorname{div}(\Phi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \Phi + \Phi \operatorname{div} \mathbf{A}}. \quad \square \quad (2.70)$$

Die allgemeine **Vorgehensweise** fassen wir noch einmal zusammen:

Man wendet zunächst die Produktregel für Differenziationen formal an. Dabei wird der Nabla-Operator zunächst nur als Vektor behandelt. Dann sortiert man unter Beachtung der Regeln der Vektoralgebra die erhaltenen Ergebnisse solange um, bis die einzig sinnvolle Verknüpfung unter Beachtung der differenzierenden Eigenschaft des Nabla-Operators gefunden wurde. Schließlich führt man wieder die bekannten Operatoren „rot“, „grad“ und „div“ ein.

Zur Verdeutlichung betrachten wir ein weiteres Beispiel.

Übung 2.7: Nabla-Operator

- Berechnen Sie mit $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ den Ausdruck $\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$.

• **Lösung:**

Mit Hilfe des Nabla-Operators schreiben wir:

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + \nabla_{\mathbf{B}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (2.71)$$

Die beiden Spatprodukte können wir nach (2.21) zyklisch vertauschen:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla_{\mathbf{A}} \times \mathbf{A}) \\ \nabla_{\mathbf{B}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \nabla_{\mathbf{B}}) = -\mathbf{A} \cdot (\nabla_{\mathbf{B}} \times \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (2.72)$$

wobei auf die Reihenfolge der Faktoren und die Nichtkommutativität des Vektorproduktes besonders zu achten ist. Damit folgt schließlich:

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}}. \quad \square \quad (2.73)$$

⁶ Richard Phillips Feynman (1918-1988): amerik. Physiker (Quantenelektrodynamik, Elementarteilchen, Nobelpreisträger für Physik 1965)

Einige wichtige **Rechenregeln** für zusammengesetzte Ausdrücke der Vektoranalysis und weitere nützliche Beziehungen sind in Tabelle 2.3 zusammengestellt.

Tabelle 2.3 Umformung zusammengesetzter Ausdrücke und weitere Beziehungen der Vektoranalysis⁷

$\text{grad}(\Phi + \Psi) = \text{grad } \Phi + \text{grad } \Psi$ $\text{grad}(\Phi \Psi) = \Phi \text{ grad } \Psi + \Psi \text{ grad } \Phi$ $\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A}$	$d\Phi = d\mathbf{r} \cdot \text{grad } \Phi$ $d\mathbf{A} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{A}$
$\text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div } \mathbf{A} + \text{div } \mathbf{B}$ $\text{div}(\Phi \mathbf{A}) = \Phi \text{ div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \text{grad } \Phi$ $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$	$\text{div } \mathbf{e}_\rho = 1/\rho$ $\text{div } \mathbf{e}_\varphi = 0$ $\text{div } \mathbf{e}_r = 2/r$ $\text{div } \mathbf{e}_\vartheta = \cot \vartheta / r$
$\text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot } \mathbf{B}$ $\text{rot}(\Phi \mathbf{A}) = \Phi \text{ rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \text{grad } \Phi$ $\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \text{ div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{ div } \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ $\text{rot}(\Phi_1 \text{ grad } \Phi_2) - \text{rot}(\Phi_2 \text{ grad } \Phi_1) = 2 (\text{grad } \Phi_1) \times (\text{grad } \Phi_2)$	$\text{rot } \mathbf{e}_\rho = 0$ $\text{rot } \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z / \rho$ $\text{rot } \mathbf{e}_r = 0$ $\text{rot } \mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_\varphi / r$
$\Delta \Phi = (\nabla \cdot \nabla) \Phi = \text{div grad } \Phi$ $\Delta(\Phi \Psi) = \text{div grad}(\Phi \Psi) = \Phi \Delta \Psi + \Psi \Delta \Phi + 2 \text{ grad } \Phi \cdot \text{grad } \Psi$ $\nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A}$ $\nabla^2(\Phi \mathbf{A}) = \Phi \nabla^2 \mathbf{A} + \mathbf{A} \Delta \Phi + 2 (\text{grad } \Phi \cdot \nabla) \mathbf{A}$	$\nabla^2 \mathbf{e}_\rho = -\mathbf{e}_\rho / \rho^2$ $\nabla^2 \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_\varphi / \rho^2$ $\nabla^2 \mathbf{e}_r = -2\mathbf{e}_r / r^2$ $\nabla^2 \mathbf{e}_\vartheta = -\frac{\mathbf{e}_\vartheta + \mathbf{e}_r \sin(2\vartheta)}{r^2 \sin^2 \vartheta}$
$\text{rot grad } \Phi = \nabla \times (\nabla \Phi) = 0$ (Quellenfelder sind wirbelfrei!) $\text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ (Wirbelfelder sind quellenfrei!)	

Durch zweimaliges Hintereinanderausführen der Operationen grad, div und rot erhalten wir in Tabelle 2.4 im Prinzip neun mögliche Verknüpfungen als Differenzialoperatoren zweiter Ordnung, von denen allerdings nur fünf einen Sinn ergeben. Die Einschränkungen folgen aus der Tatsache, dass die Operation Gradient nur auf Skalare angewendet werden darf, während Rotation und Divergenz nur für Vektoren definiert sind. Die Anwendung von zwei der fünf sinnvollen Operatoren führt stets zu einem Ergebnis vom Wert null. Man kann nämlich allgemein zeigen, dass der Gradient eines Potenzialfeldes niemals Wirbel aufweist. Ebenso schließen sich die Feldlinien eines Wirbelfeldes stets in sich selbst und dieses Feld ist daher quellenfrei.

Tabelle 2.4 Zulässige Differenzialoperatoren zweiter Ordnung nach [Zin95]

	grad	div	rot
grad		grad div $\mathbf{A}$	
div	div grad $\Phi = \Delta \Phi$		div rot $\mathbf{A} \equiv 0$
rot	rot grad $\Phi \equiv 0$		rot rot $\mathbf{A}$

⁷ Ein Ausdruck der Form $(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ ist wie $\left(A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{B}$ auszuwerten.

2.2.4 Integralsätze der Vektoranalysis

Einige Integralbeziehungen der Vektoranalysis sind für praktische Umformungen oft recht hilfreich und werden hier kurz zusammengestellt.

Linienintegral einer Vektorfunktion

Durch den Ausdruck (2.33)

$$\boxed{\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi = -\nabla \Phi} \quad (2.74)$$

wird jeder skalaren Ortsfunktion $\Phi(\mathbf{r})$, die stetig und differenzierbar sein muss, ein Vektorfeld $\mathbf{E}$ mit den Komponenten

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial \Phi / \partial x \\ \partial \Phi / \partial y \\ \partial \Phi / \partial z \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

zugeordnet. Umgekehrt lässt sich zu einem gegebenen Vektorfeld $\mathbf{E}$ nur dann eine zugehörige Potenzialfunktion bestimmen, wenn die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 \quad (2.76)$$

erfüllt sind. Diese Bedingungen sind dann und nur dann erfüllt, wenn das Vektorfeld $\mathbf{E}$ wirbelfrei ist. Das erkennt man sofort aus der Identität

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\text{rot grad } \Phi = 0. \quad (2.77)$$

In diesem Fall wird $\mathbf{E}$ als konservatives Vektorfeld bezeichnet und es gilt der Zusammenhang:

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \text{grad } \Phi \cdot d\mathbf{s} = \int_C \text{grad } \Phi \cdot d\mathbf{s}}. \quad (2.78)$$

Die Integrationsgrenze $\mathbf{r}_0$ ist ein willkürlicher, aber fester Anfangspunkt. Das Linienintegral längs der Kontur C ist unabhängig von ihrer speziellen Form und wird daher wegunabhängig genannt (Bild 2.10). Es stellt die Umkehrfunktion der Gradientenbildung dar. Bezeichnet C eine in sich selbst geschlossene Kurve, so gilt stets:

$$\oint_C \text{grad } \Phi \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (2.79)$$

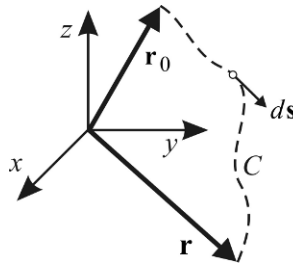


Bild 2.10 Wegunabhängiges Linienintegral entlang der Kontur C in einem konservativen Vektorfeld

Satz von Stokes⁸

Das Umlaufintegral eines Vektors $\mathbf{H}$ über eine geschlossene Kurve C ist gleich dem Oberflächenintegral von $\text{rot } \mathbf{H}$ über eine beliebige von C berandete Fläche A [Wun89]:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{A} . \quad (2.80)$$

Der Flächenvektor $d\mathbf{A}$, der stets in Richtung der lokalen Flächennormalen $\mathbf{n}$ weist, und der Umlaufsinn der Randkurve C , dargestellt durch das Linienelement $d\mathbf{s}$, sind einander im Sinne einer *Rechtsschraube* zugeordnet.

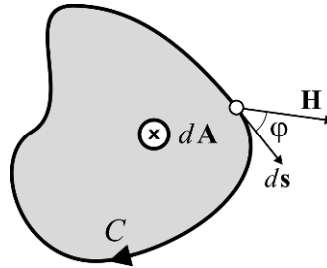


Bild 2.11 Flächenintegral und Linienintegral über den Rand der Fläche im Satz von Stokes

Lässt man die betrachtete Integrationsfläche A infinitesimal klein werden, so erhält man aus dem Stokesschen Satz (2.80) die koordinatenfreie Darstellung der Rotation:

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{H} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}}{A} . \quad (2.81)$$

Damit ist die Rotation die Wirbelstärke (Zirkulation) pro Fläche, die um ein infinitesimales Flächenelement entlang seines Randes auftritt.

Übung 2.8: Satz von Stokes

- Das Durchflutungsgesetz im stationären Strömungsfeld lautet in Integralform:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I , \quad (2.82)$$

wobei I der gesamte durch die Kontur C eingeschlossene elektrische Gleichstrom bedeutet und $\mathbf{H}$ diejenige magnetische Feldstärke ist, die durch I angeregt wird. Schreiben Sie mit Hilfe des Stokesschen Satzes das Durchflutungsgesetz in differenzieller Form.

- Lösung:**

Mit $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{A}$ und dem Gesamtstrom $I = \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$ folgt unmittelbar

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} . \quad (2.83)$$

Mit $\mathbf{J}$ wird dabei die Stromdichte innerhalb der Querschnittsfläche A bezeichnet. □

⁸ Sir George Gabriel **Stokes** (1819-1903): britischer Physiker und Mathematiker (Differenzial- und Integralgleichungen, Hydrodynamik, Optik)

Gaußscher Satz⁹

Der Gaußsche Satz ist eine der wichtigsten Umrechnungsbeziehungen der Vektoranalysis, die es erlaubt, Flächenintegrale in Volumenintegrale umzuwandeln [Wun89]:

$$\boxed{\oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV} . \quad (2.84)$$

Das Hüllintegral des Vektors $\mathbf{D}$ über eine geschlossene Oberfläche A ist gleich dem Volumenintegral von $\operatorname{div} \mathbf{D}$ über das von der Oberfläche eingeschlossene Volumen V . Lässt man in (2.84) die betrachtete Integrationsvolumen V infinitesimal klein werden, so erhält man aus dem Gaußschen Satz die koordinatenfreie Darstellung der Divergenz:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}}{V} . \quad (2.85)$$

Damit ist die Divergenz der Fluss pro Volumen, der aus einem infinitesimalen Volumenelement ausströmt.

Übung 2.9: Gaußscher Satz

- Gegeben sei ein Vektorfeld in kartesischen Koordinaten:

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}_x 4xz - \mathbf{e}_y y^2 + \mathbf{e}_z yz . \quad (2.86)$$

Bestimmen Sie das Hüllintegral von $\mathbf{D}$ über der Oberfläche A des Einheitswürfels, der durch die Koordinaten $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ sowie $0 \leq z \leq 1$ begrenzt wird.

- **Lösung:**

Anstelle des komplizierten Oberflächenintegrals – über die sechs Teilflächen des Würfels – bestimmen wir nach dem Gaußschen Satz besser ein einfacheres Volumenintegral. Dazu berechnen wir zunächst die Divergenz:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x 4xz - \mathbf{e}_y y^2 + \mathbf{e}_z yz) = 4z - 2y + y = 4z - y . \quad (2.87)$$

Das Integral über das Volumen des Einheitswürfels wird damit:

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (4z - y) dz dy dx = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \left(2z^2 - yz \right) \Big|_{z=0}^1 dy dx = \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (2 - y) dy dx = \int_{x=0}^1 \left(2y - y^2/2 \right) \Big|_{y=0}^1 dx = \int_{x=0}^1 3/2 dx = 3/2 . \end{aligned} \quad (2.88)$$

Das gesuchte Oberflächenintegral ist nach (2.84) ebenfalls:

$$\oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = 3/2 . \quad \square \quad (2.89)$$

⁹ Carl Friedrich **Gauß** (1777-1855): dt. Mathematiker, Physiker und Astronom (Zahlentheorie, Ausgleichsrechnung, Differenzialgeometrie, Elektromagnetismus, Mechanik)

2.2.5 Helmholtzsches Theorem

Ein Vektorfeld, das *im ganzen Raum* weder Quellen noch Wirbel aufweist, kann nur das triviale Nullfeld sein. Deshalb muss jedes nichtverschwindende Vektorfeld Quellen- oder Wirbelcharakter aufweisen – oder auch beides. Im Allgemeinen kann ein Vektorfeld $\mathbf{A}$ somit aus der Überlagerung eines Quellen- und eines Wirbelfeldes bestehen:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_Q(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_W(\mathbf{r}). \quad (2.90)$$

• Quellenfelder sind wirbelfrei!

Darum gilt:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}_Q(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.91)$$

• Wirbelfelder sind quellenfrei!

Darum gilt:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_W(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.92)$$

Für das superponierte Gesamtfeld folgt deswegen:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \mathbf{A}_Q(\mathbf{r}) = s(\mathbf{r}) \quad (2.93)$$

und

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}_W(\mathbf{r}) = \mathbf{C}(\mathbf{r}). \quad (2.94)$$

Das **Helmholtzsche Theorem**¹⁰ besagt nun [Leh06]:

- Ein Vektorfeld $\mathbf{A}$ wird vollständig bestimmt (bis auf eine additive Konstante) durch die Angabe seiner **Quellen** $s(\mathbf{r})$ und seiner **Wirbel** $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ im gesamten Raum.

Bei *offenen* Gebieten sollen dabei alle Quellen und Wirbel im Unendlichen verschwinden, während in *räumlich begrenzten* Gebieten die Normalkomponente von $\mathbf{A}$ auf der begrenzenden Oberfläche zusätzlich gegeben sein muss, um Eindeutigkeit zu erzielen.

- Ein Vergleich mit der **Hydrodynamik** macht das Ganze etwas anschaulicher:

In einem Volumen beliebiger Ausdehnung soll sich eine zunächst ruhende Flüssigkeit befinden. Durch Quellen fügt man nun weitere Flüssigkeit hinzu bzw. vermindert den Füllstand mit Hilfe von Senken (negativen Quellen). Außerdem lassen sich leicht Wirbel erzeugen. Das Zusammenwirken von Quellen und Wirbeln legt – gemeinsam mit den an der Oberfläche herrschenden Randbedingungen – das sich einstellende Strömungsfeld eindeutig fest.

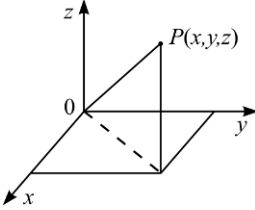
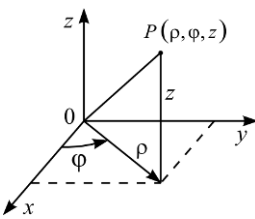
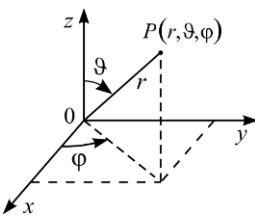
In den Maxwell'schen Gleichungen zur Beschreibung von elektromagnetischen Feldern – mit denen wir uns in Kapitel 3 eingehend beschäftigen werden – führt tatsächlich die Vorgabe von Quellen, Wirbeln und Randbedingungen jeweils zu einer eindeutigen Lösung.

¹⁰ Hermann Ludwig Ferdinand von **Helmholtz** (1821-1894): dt. Physiker und Physiologe (Nervenleitung, Optik, Akustik, Aerodynamik, Hydrodynamik, Thermodynamik, Elektrizitätslehre)

2.3 Koordinatensysteme

In den meisten Anwendungen kommt man mit den drei einfachsten Koordinatensystemen aus. Die geometrischen und vektoranalytischen Grundlagen für kartesische, kreiszylindrische und sphärische Koordinaten werden in den Tabellen 2.5 und 2.6 kurz zusammengefasst. Setzt man in Tabelle 2.5 an Stelle der Einheitsvektoren die jeweiligen Vektorkomponenten ein – also z. B. A_x für $\mathbf{e}_x$ usw. – so erhält man den Zusammenhang zwischen den Vektorkomponenten in den verschiedenen Koordinatensystemen.

Tabelle 2.5 Kartesische¹¹, kreiszylindrische und sphärische Koordinaten [Wol68]
sowie ihre Einheitsvektoren

Rechtssysteme	kartes. Koordinaten $\Leftrightarrow$ Zylinderkoordinaten $\Leftrightarrow$ Kugelkoordinaten
	$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= z = r \cos \vartheta \end{aligned}$ $\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_\rho \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi = \mathbf{e}_r \sin \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_\vartheta \cos \vartheta \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi \\ \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_\rho \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi = \mathbf{e}_r \sin \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_\vartheta \cos \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta \end{aligned}$
 $0 \leq \varphi < 2\pi$	$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= \rho = r \sin \vartheta \\ \arctan \frac{y}{x} &= \varphi = \varphi \\ z &= z = r \cos \vartheta \end{aligned}$ $\begin{aligned} \mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi &= \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_r \sin \vartheta + \mathbf{e}_\vartheta \cos \vartheta \\ -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi &= \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta \end{aligned}$
 $0 \leq \varphi < 2\pi$ $0 \leq \vartheta \leq \pi$	$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= \sqrt{\rho^2 + z^2} = r \\ \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} &= \arctan \frac{\rho}{z} = \vartheta \\ \arctan \frac{y}{x} &= \varphi = \varphi \end{aligned}$ $\begin{aligned} \mathbf{e}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \vartheta &= \mathbf{e}_\rho \sin \vartheta + \mathbf{e}_z \cos \vartheta = \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_x \cos \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \cos \vartheta \sin \varphi - \mathbf{e}_z \sin \vartheta &= \mathbf{e}_\rho \cos \vartheta - \mathbf{e}_z \sin \vartheta = \mathbf{e}_\vartheta \\ -\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi &= \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$

¹¹ René **Descartes** (1596-1650), lat. Renatus Cartesius: frz. Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler (Begründer der neueren Philosophie und der analytischen Geometrie)

Tabelle 2.6 Vektoranalytische Ausdrücke in verschiedenen Koordinatensystemen [Pie77]

	kartes. Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
∇	$\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$	$\mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$	$\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$
grad Φ $\nabla \Phi$	$\mathbf{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$	$\mathbf{e}_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$	$\mathbf{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$
div $\mathbf{A}$ $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) +$ $+\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\vartheta \sin \vartheta) +$ $+\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
rot $\mathbf{A}$ $\nabla \times \mathbf{A}$	$\mathbf{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) +$ $+\mathbf{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) +$ $+\mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$	$\mathbf{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) +$ $+\mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) +$ $+\mathbf{e}_z \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right)$	$\mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right] +$ $+\mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] +$ $+\mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right]$
$\Delta \Phi$	$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} +$ $+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) +$ $+\frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) +$ $+\frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$
$\nabla^2 \mathbf{A}$	siehe Gl. (2.65)	siehe Gl. (2.66)	siehe Gl. (2.67)
$d\mathbf{s}$	$\mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz$	$\mathbf{e}_\rho d\rho + \mathbf{e}_\varphi \rho d\varphi + \mathbf{e}_z dz$	$\mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\vartheta r d\vartheta + \mathbf{e}_\varphi r \sin \vartheta d\varphi$
dV	$dx dy dz$	$\rho d\rho d\varphi dz$	$r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$

2.4 Übungen

2.4.1 Zeigen Sie, dass gilt: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}$.

2.4.2 Lösen Sie folgendes Gleichungssystem nach $\mathbf{y}$ auf:

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{a} = \alpha$$

$$\mathbf{y} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}.$$

Verwenden Sie zur Lösung den Graßmannschen Entwicklungssatz. Es gelte $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0$.

2.4.3 Welchen Wert hat die Divergenz des Vektorfeldes

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x \, 5x^2 \sin \frac{\pi x}{2}$$

an der Stelle $x = 1$?

2.4.4 Welchen Wert hat die Divergenz des Vektorfeldes

$$\mathbf{A} = x^2 \mathbf{e}_x + e^{xy} \mathbf{e}_y + x y z \mathbf{e}_z$$

an der Stelle $\mathbf{r} = (-1, 1, 2)$?

2.4.5 Welchen Wert hat die Rotation des Vektorfeldes

$$\mathbf{A} = x^2 y^2 \mathbf{e}_x + 2 x y z \mathbf{e}_y + z^2 \mathbf{e}_z$$

an der Stelle $\mathbf{r} = (1, -2, 1)$?

2.4.6 Welchen Wert hat die Rotation des Vektorfeldes

$$\mathbf{A} = (y \cos(ax)) \mathbf{e}_x + (y + e^x) \mathbf{e}_z$$

am Koordinatenursprung $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$?

2.4.7 Berechnen Sie den Ausdruck $\text{rot rot } \mathbf{A}$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = 3 x z^2 \mathbf{e}_x - y z \mathbf{e}_y + (x + 2 z) \mathbf{e}_z.$$

Lösungen:

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \alpha \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}$$

$$\text{div } \mathbf{A} = 10$$

$$\text{div } \mathbf{A} = -3 - e^{-1}$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = 4 \mathbf{e}_x$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -6 x \mathbf{e}_x + (6 z - 1) \mathbf{e}_z$$

3 Grundlagen der Elektrodynamik

3.1 Energieerhaltungssatz

3.1.1 Darstellung im Zeitbereich

Wie in allen Teilbereichen der Physik muss auch in der Elektrodynamik der Energieerhaltungssatz als fundamentales Naturprinzip stets erfüllt sein. Jede Theorie elektromagnetischer Felder muss daher mit dem Prinzip der Energieerhaltung verträglich sein. Man kann darum die Maxwell'schen Feldgleichungen – wie wir in diesem Abschnitt zeigen werden – aus dem Energieerhaltungssatz tatsächlich ableiten [Joos89]. Hierzu benutzen wir folgende Grundüberlegungen:

- Die räumliche Energiedichte im elektromagnetischen Feld ist gegeben durch

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}). \quad (3.1)$$

- In ruhenden, linearen und isotropen Medien gelten die Beziehungen $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$.
- Die von einem äußeren elektromagnetischen Feld einwirkende Kraft auf eine sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegend Punktladung ist

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (3.2)$$

Durch den Ladungstransport stellt sich eine Stromdichte $\mathbf{J}$ ein. Das äußere Magnetfeld $\mathbf{B}$ kann an dieser Punktladung keine Arbeit verrichten, da die magnetische Kraft *senkrecht* zur Geschwindigkeit der Ladung gerichtet ist. Die Arbeit, die das äußere elektrische Feld $\mathbf{E}$ an der Punktladung verrichtet, muss daher ausschließlich der gespeicherten elektrischen Energie verloren gegangen sein, d. h.

$$\frac{dw_e}{dt} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad (3.3)$$

- Die Richtung der Energieströmung einer fortschreitenden elektromagnetischen Welle steht senkrecht auf den Vektoren der elektrischen und magnetischen Feldstärke – also senkrecht auf einer Phasenfront – und ist durch den Vektor

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (3.4)$$

gegeben. Der Vektor $\mathbf{S}$ wird Poyntingscher¹ Vektor genannt – er beschreibt den Leistungstransport der Welle pro Flächeneinheit und hat die Einheit W/m^2 . Natürlich transportiert eine elektromagnetische Welle auch Impuls und ihre räumliche Impulsdichte in Ns/m^3 ist

$$\mathbf{p}_V = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \mu \varepsilon \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{S}/c^2. \quad (3.5)$$

Nach dem **Poyntingschen Satz** (3.6) ist nun die zeitliche Abnahme der in einem Volumen V enthaltenen elektromagnetischen Energie gleich der Summe der im Volumen pro Zeiteinheit verrichteten Arbeit und der aus dem Volumen durch seine Oberfläche A abgestrahlten Leistung:

¹ John Henry **Poynting** (1852 - 1914): engl. Physiker (Gravitation und Elektrodynamik – Energiestrom, Strahlungsdruck)

$$\boxed{-\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (w_e + w_m) dV = \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV + \oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A}} . \quad (3.6)$$

Der Poyntingsche Satz garantiert die **Energieerhaltung** in der Elektrodynamik. Der Poyntingsche Vektor $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ bezieht sich dabei auf die Oberfläche des betrachteten Volumenelements. Er gibt die Energie pro Zeiteinheit – also die Leistung – an, die pro Flächeneinheit in Richtung von $\mathbf{S}$ aus dem Volumen ausströmt. Man spricht daher bei $\mathbf{S}$ auch von der Energiestromdichte. Bei positiver Normalkomponente ($S_n > 0$) erfolgt eine Abnahme der im Volumen V gespeicherten elektromagnetischen Energie durch Strahlung nach außen (Bild 3.1).

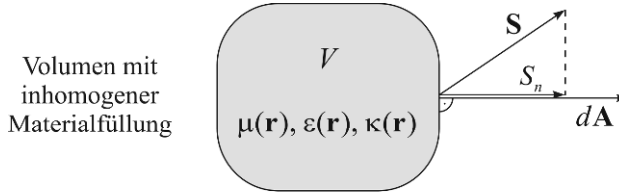


Bild 3.1 Poyntingscher Vektor $\mathbf{S}$ und seine Normalkomponente S_n an der Oberfläche eines materialgefüllten Volumengebietes mit Permeabilität μ , Permittivität ϵ und elektrischer Leitfähigkeit κ

Aus dem Poyntingschen Satz (3.6) erhält man durch Einsetzen der elektromagnetischen Gesamtenergiedichte (3.1) die Beziehung [Joos89]:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV = \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV + \oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} . \quad (3.7)$$

Das Oberflächenintegral für die Strahlungsleistung können wir mit dem Gaußschen Satz (2.84) in ein Volumenintegral umformen:

$$\oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \iiint_V (\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}) dV . \quad (3.8)$$

Man kann nun im Poyntingschen Satz die Volumenintegration und die zeitliche Ableitung vertauschen, wodurch man mit Hilfe der Produktregel erhält:

$$-\frac{1}{2} \iiint_V \left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] dV = \iiint_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}) dV . \quad (3.9)$$

Mit $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ folgt für zeitinvariante Materialkonstanten nach Ausklammern gleichartiger Terme:

$$\iiint_V \left[\mathbf{E} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} - \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) + \mathbf{H} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} \right) \right] dV = 0 . \quad (3.10)$$

- Wenn das Integral für jedes beliebige Volumen V verschwinden soll, dann muss bereits der Integrand verschwinden.
- Aus der Erfahrungstatsache, dass elektromagnetische Felder linear superponiert werden dürfen, folgert man, dass die Feldgleichungen linear sein müssen.

Unter diesen beiden Voraussetzungen gibt es nur eine einzige nichttriviale Möglichkeit, den Integranden in (3.10) verschwinden zu lassen. Es muss nämlich gelten:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} - \text{rot } \mathbf{H} = 0} \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} = 0} . \quad (3.11)$$

Damit haben wir die **Maxwellschen Feldgleichungen**² für zeitinvariante, lineare Medien – welche man auch als LTI-Systeme (**linear time-invariant**) bezeichnet – aus dem Energieerhaltungssatz unter Hinzunahme sehr allgemeiner Annahmen hergeleitet. Wir betonen ausdrücklich, dass die Maxwellschen Gln. (3.11) ungeachtet ihrer Herleitung auch für zeitveränderliche bzw. nichtlineare Medien exakte Gültigkeit besitzen [Leh06]. In diesem Kapitel werden wir noch einige Folgerungen aus diesem gekoppelten Differenzialgleichungssystem ableiten, um danach für vielfältige praktische Fragestellungen nach anwendungsbezogenen Lösungen zu suchen.

3.1.2 Darstellung im Frequenzbereich

Bei harmonischer Zeitabhängigkeit der Felder ($e^{j\omega t}$) benutzen wir die komplexe Phasenschreibweise und erhalten analog zu (3.4) den komplexen Poyntingschen Vektor:

$$\boxed{\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*} . \quad (3.12)$$

Hierin ist $\underline{\mathbf{H}}^*$ der konjugiert komplexe Wert von $\underline{\mathbf{H}}$. Der Faktor $1/2$ rührt daher, dass $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ Amplituden und keine Effektivwerte sind. Für den zeitlichen Mittelwert der je Flächeneinheit transportierten Wirkleistung erhält man dann durch Bildung des Realteils:

$$\mathbf{S}_R = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* \} . \quad (3.13)$$

Diese Definition entspricht der in der Netzwerkanalyse benutzten komplexen Leistung $\underline{U} \underline{I}^*$, deren Realteil die Wirkleistung, also den zeitlichen Mittelwert $\text{Re} \{ \underline{U} \underline{I}^* \}$ liefert. Der **komplexe Poyntingsche Satz** für harmonische Zeitabhängigkeit folgt in Analogie zur Darstellung im Reellen:

$$j\omega \iiint_V (\underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^* - \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^*) dV = \iiint_V \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* dV + \oint_A (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) \cdot d\mathbf{A} . \quad (3.14)$$

Definiert man analog zu (3.1) die elektrischen und magnetischen Energiedichten für Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit wie folgt

$$\underline{w}_e = \frac{1}{4} \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^* \quad \text{und} \quad \underline{w}_m = \frac{1}{4} \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^* , \quad (3.15)$$

so lässt sich der komplexe Poyntingsche Satz auch in der Form

$$\boxed{2j\omega \iiint_V (\underline{w}_e - \underline{w}_m) dV = \frac{1}{2} \iiint_V \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* dV + \oint_A \underline{\mathbf{S}} \cdot d\mathbf{A}} \quad (3.16)$$

angeben. Der Realteil dieser Gleichung beschreibt die Energieerhaltung für die zeitgemittelten Felder, während der Imaginärteil die Blindleistung mit ihrem sich ändernden Fluss verknüpft. Man vergleiche (3.16) mit dem reellen Poyntingschen Satz (3.6) für Zeitfunktionen.

² James Clerk **Maxwell** (1831-1879); brit. Physiker (Begründer der Elektrodynamik durch Vereinheitlichung des elektromagnetischen Feldes: „Treatise on electricity and magnetism“ 1873; außerdem Arbeiten zur kinetischen Gastheorie und zur Farbenlehre)

3.2 Maxwellsche Gleichungen

3.2.1 Grundgleichungen

Die Vektorfelder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ sind die fundamentalen Größen der Elektrodynamik, da sie direkt die messbare Kraftwirkung auf eine freie Ladung q bestimmen. Mit $\mathbf{v}$ als Geschwindigkeit der elektrischen Punktladung ergibt sich nämlich das **Lorentzsche Kraftgesetz**:

$$\boxed{\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})} \quad (3.17)$$

Zur Beschreibung der elektrischen und magnetischen Polarisation in Materie führt man gewöhnlich zwei rechnerische Hilfsfelder $\mathbf{D}$ und $\mathbf{H}$ ein, die in ruhenden, linearen und isotropen Medien mit den fundamentalen Feldern durch die **Materialgleichungen**

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}} \quad \text{und} \quad \boxed{\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}} \quad (3.18)$$

verknüpft sind. Die Verallgemeinerung von (3.18) auf *bewegte* Medien erfolgt in Übung 3.6, während der *anisotrope* Fall in Abschnitt 3.5 behandelt wird. Es setzen sich *Permittivität* ϵ und *Permeabilität* μ aus dem jeweiligen Vakuumwert und einem relativen Faktor zusammen, d. h. es gilt $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ bzw. $\mu = \mu_0 \mu_r$. Die relativen Zahlen $\epsilon_r(\omega)$ und $\mu_r(\omega)$ können bei breitbandigen Signalen eine spürbare Frequenzabhängigkeit aufweisen. Für die Feldkonstanten des Vakuums gilt:

$$\epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm} \quad \text{und} \quad \mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am} \quad (3.19)$$

Alle *makroskopischen* elektromagnetischen Vorgänge können durch die vier Vektorfelder $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ und $\mathbf{H}$, die durch die Maxwellschen Gleichungen miteinander verknüpft sind, vollständig beschrieben werden. Eine wichtige Eigenschaft elektromagnetischer Felder *im Vakuum* ist die Tatsache, dass die beiden Feldvektoren $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ senkrecht aufeinander stehen und darum $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ wird. In *anisotroper* Materie (siehe Abschnitt 3.5) gilt diese Orthogonalität im Allgemeinen nicht mehr.

Die Maxwellschen Gleichungen beschreiben den Zusammenhang und die Wechselwirkung zwischen elektrischen und magnetischen **Feldern, Ladungen und Strömen**.

Sie bilden ein System gekoppelter partieller Differenzialgleichungen, das vom Ort $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ und der Zeit t abhängt. In Verbindung mit notwendigen Rand- und Anfangsbedingungen kann stets eine eindeutige Lösung gefunden werden. Die **Maxwellschen Gleichungen** wurden im vorherigen Abschnitt mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes begründet. Sie sollen hier nochmals angegeben werden:

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}} \quad \text{und} \quad \boxed{\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} \quad (3.20)$$

Die erste Gleichung wird als erweitertes **Durchflutungsgesetz**³ bezeichnet und die zweite als **Induktionsgesetz**⁴. Das vektorielle Gleichungspaar (3.20) bildet ein gekoppeltes partielles

³ André Marie **Ampère** (1775-1836): frz. Mathematiker und Physiker (entwickelte 1822 nach Anregung durch die Experimente von Oersted seine Theorie zur magnetischen Wirkung bewegter Ladungen)

⁴ Michael **Faraday** (1791-1867): engl. Physiker und Chemiker (entdeckte 1831 das Gesetz der Induktion, einer der Wegbereiter des Feldbegriffes – Feldlinien und Nahwirkungstheorie)

Differenzialgleichungssystem von erster Ordnung. Geht man zu einer Darstellung in Komponenten über, so erhält man sechs gekoppelte skalare Differenzialgleichungen. Zusammen mit den Materialgleichungen (3.18) hat man damit ein gekoppeltes System von vier Vektorgleichungen, d. h. von zwölf skalaren Gleichungen, für ebensoviel Unbekannte zu lösen. Die Stromdichte $\mathbf{J}$ in der ersten Maxwellschen Gleichung wird in A/m^2 gemessen und kann sich aus drei physikalisch unterschiedlichen Anteilen zusammensetzen:

- eingeprägte Quellströme $\mathbf{J}_E$ als Ursache oder Quelle elektromagnetischer Felder,
- bewegte Elektronen in Körpern der elektrischen Leitfähigkeit κ , die dem **Ohmschen Gesetz** $\mathbf{J}_L = \kappa \mathbf{E}$ gehorchen und
- konvektive Strömungen $\mathbf{J}_K = \rho \mathbf{v}$ freier Ladungen in einer Raumladungswolke (z. B. beim Elektronenstrahl). Daher gilt:

$$\boxed{\mathbf{J} = \mathbf{J}_E + \mathbf{J}_L + \mathbf{J}_K} . \quad (3.21)$$

Für die physikalische Anschauung ist es nützlich, neben der differenziellen Schreibweise (3.20) auch die Integraldarstellung der Maxwellschen Gleichungen zu betrachten. Den Übergang wollen wir in Übung 3.1 durchführen.

Übung 3.1: Maxwellsche Gleichungen

- Transformieren Sie die Maxwellschen Gleichungen von der differenziellen in die integrale Schreibweise, indem Sie den Satz von Stokes sinnvoll einsetzen.
- **Lösung:**

Der Satz von Stokes für ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{F}$ lautet nach (2.80):

$$\iint_A \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} . \quad (3.22)$$

Bilden wir nun das Flächenintegral der Maxwellschen Gleichungen (3.20)

$$\iint_A \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{A} = \iint_A \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{A} \quad \text{und} \quad \iint_A \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} , \quad (3.23)$$

so können die linken Gleichungsseiten mit Hilfe des Stokesschen Satzes in einfachere Linienintegrale entlang der Berandung C der Fläche A umgeformt werden:

$$\boxed{\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} + \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\begin{aligned} u_m &= \frac{d\Psi}{dt} + I \\ u &= - \frac{d\Phi}{dt} . \end{aligned}} \quad (3.24)$$

Dieses miteinander verkoppelte Gleichungssystem bildet die **Maxwellschen Gleichungen in Integralform**. Die Zirkulation der $\mathbf{H}$ - und $\mathbf{E}$ -Felder längs der Berandung C einer Fläche A (also die magnetische Spannung u_m bzw. die elektrische Spannung u) ist mit der zeitlichen Änderung des durch diese Fläche hindurch tretenden elektrischen Flusses Ψ bzw. magnetischen Flusses Φ verknüpft (siehe (3.86)). Die Zirkulation des $\mathbf{H}$ -Feldes hängt zusätzlich noch vom eingeschlossenen elektrischen Strom I ab. $\square$

3.2.2 Einteilung der elektromagnetischen Felder

Bei vielen elektromagnetischen Problemen ist es nicht erforderlich, die vollständigen Maxwell'schen Gleichungen zu lösen. Sie können mit voller Strenge oder mit hinreichender Genauigkeit durch vereinfachte Gleichungen ersetzt werden. Die Theorie elektromagnetischer Felder kann man – wie in Tabelle 3.1 – in fünf klassische Spezialgebiete unterteilen. Wir werden uns überwiegend mit schnell veränderlichen, nichtstationären Feldern beschäftigen. Einen wesentlichen Schwerpunkt bildet die Untersuchung von Phänomenen der Wellenausbreitung.

Tabelle 3.1 Teilgebiete des Elektromagnetismus und ihre Grundgleichungen mit $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ und $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$

Quellenfelder → Skalarpotenzial		Wirbelfelder → Vektorpotenzial		
Elektrostatik	stationäre Gleichströme	Magnetostatik	quasistationär $ \partial \mathbf{D} / \partial t \ll \mathbf{J} = \kappa \mathbf{E} $	allgemeine Wellenausbreitung
$\text{rot } \mathbf{E} = 0$ $\text{div } \mathbf{D} = \rho$	$\text{rot } \mathbf{E} = 0$ $\text{div } \mathbf{J} = 0$ $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$	$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ $\text{div } \mathbf{B} = 0$	$\text{rot } \mathbf{H} = \kappa \mathbf{E}$ $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\text{div } \mathbf{D} = 0$ $\text{div } \mathbf{B} = 0$	$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$ $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ $\text{div } \mathbf{B} = 0$
$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$ $\Delta \Phi = -\rho / \epsilon$	$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$ $\Delta \Phi = 0$	$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$ $\text{div } \mathbf{A} = 0$	$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \text{ div } \mathbf{A} = 0$ $\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \kappa \partial \mathbf{A} / \partial t = 0$ $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t$	zur Lösung siehe Abschnitt 8.2

3.2.3 Prinzip von der Ladungserhaltung

Die Ursache aller elektromagnetischen Erscheinungen sind ruhende oder bewegte elektrische Ladungen. Im Gegensatz zur elektrischen Ladung q konnte bisher noch keine entsprechende magnetische Ladung q_m gefunden werden.

- Ruhende elektrische Ladungen sind die Ursache von Quellenfeldern. Diese werden durch das Coulombsche Gesetz der Elektrostatik beschrieben, das in den Maxwell'schen Gleichungen bereits implizit enthalten ist.
- Bewegte elektrische Ladungen sind die Ursache von Wirbelfeldern.

Neben dem Energieerhaltungssatz (3.6) gibt es als weiteres fundamentales Naturprinzip den Ladungserhaltungssatz. Für seine Herleitung betrachten wir ein beliebiges Volumen V , das wie in Bild 3.2 von der Oberfläche A umschlossen sei. Innerhalb des Volumens V sollen sich elektrische Ladungen mit der Raumladungsdichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ befinden mit $[\rho] = \text{C/m}^3$. Die gesamte in V enthaltene zeitabhängige Ladungsmenge $Q(t)$ errechnet sich somit aus:

$$\iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = Q(t). \quad (3.25)$$

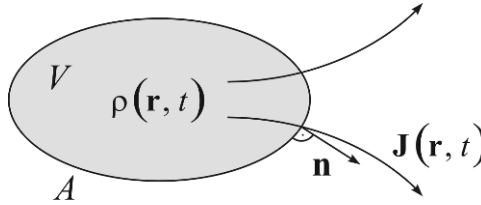


Bild 3.2 Zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung (Satz von der Erhaltung der Ladung)

Ist $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ der Vektor der Stromdichte, dessen Richtung definitionsgemäß die Bewegungsrichtung der *positiven* Ladungsträger ist, dann stellt das Hüllintegral

$$\oiint_A \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} = \oiint_A \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dA = \oiint_A J_n(\mathbf{r}, t) dA = I(t) \quad (3.26)$$

den Gesamtstrom $I(t)$ durch die Oberfläche des Volumens dar. Ein *Ausströmen* von Ladungen muss nach dem **Satz von der Erhaltung der Ladung** mit einer zeitlichen *Abnahme* der eingeschlossenen Ladungsmenge verbunden sein, denn die Gesamtmenge elektrischer Ladungen in einem abgeschlossenen System ist konstant. Es gilt somit:

$$\boxed{\frac{dQ(t)}{dt} + I(t) = 0} \quad \begin{array}{l} I > 0 \text{ und } dQ/dt < 0, \text{ falls positive Ladungen ausströmen} \\ I < 0 \text{ und } dQ/dt > 0, \text{ falls negative Ladungen ausströmen} \end{array} \quad (3.27)$$

oder in integraler Schreibweise nach Einsetzen von (3.25) und (3.26):

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dV + \oiint_A \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (3.28)$$

Mit dem Gaußschen Satz (2.84) folgt:

$$\oiint_A \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) dV \quad (3.29)$$

und damit wird (3.28) zu:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \right) dV = 0. \quad (3.30)$$

Diese Relation gilt für beliebige Volumina V , was nur bei

$$\boxed{\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0} \quad (3.31)$$

erfüllt sein kann. Dieser fundamentale Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderung der Raumladungsdichte und den Quellen der Stromdichte drückt die Ladungserhaltung in differenzieller lokaler Form aus und wird als **Kontinuitätsgleichung** bezeichnet [Schi75].

- Die Kontinuitätsgleichung (3.31) als Ausdruck des Ladungserhaltungssatzes bildet zusammen mit den ersten beiden Maxwellschen Gleichungen (3.20), den Materialgleichungen (3.18) und dem Lorentzschen Kraftgesetz (3.17) das physikalisch-mathematische Gerüst zur Berechnung aller makroskopischen elektromagnetischen Phänomene.

3.2.4 Quellen der Vektorfelder

Aus den Maxwellschen Gleichungen wollen wir in Übung 3.2 unter Zuhilfenahme der Kontinuitätsgleichung zwei weitere Beziehungen ableiten, die für das physikalische Verständnis sehr anschaulich sind.

Übung 3.2: Quellen der Felder

- Leiten Sie aus den Maxwellschen Gleichungen (3.20) die Beziehung $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ her.
- **Lösung:**

Wir bilden die Divergenz der ersten Maxwellschen Gleichung:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} . \quad (3.32)$$

Wegen der Quellenfreiheit von Wirbelfeldern (Tabelle 2.3) folgt sofort:

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 . \quad (3.33)$$

Mit der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ können wir aber auch schreiben:

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 , \quad (3.34)$$

d. h. es folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{D} - \rho) = 0 . \quad (3.35)$$

Da diese Beziehung zu *allen* Zeiten gelten soll, folgt sofort die Behauptung:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho} . \quad \square \quad (3.36)$$

Das Ergebnis dieser Übungsaufgabe kann noch weiter umgeformt werden. Bilden wir nämlich das Volumenintegral von (3.36)

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{D} \, dV = \iiint_V \rho \, dV , \quad (3.37)$$

so erhalten wir mit dem Gaußschen Satz eine (3.36) entsprechende integrale Formulierung:

$$\boxed{\oint_A \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \rho \, dV = Q} , \quad (3.38)$$

die als **Gaußsches Gesetz** bezeichnet wird. Die Summe der in einem Volumen V durch seine Oberfläche A eingeschlossenen elektrischen Ladungen ist somit durch das Hüllintegral der elektrischen Flussdichte $\mathbf{D}$ gegeben. Das Gaußsche Gesetz ist für die einfache Berechnung elektrostatischer Felder sehr nützlich. Aus dem Gaußschen Gesetz kann man z. B. sehr leicht das kugelsymmetrische Coulombfeld um eine ruhende Punktladung ableiten:

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}_r \frac{Q}{4 \pi r^2} . \quad (3.39)$$

Aufgrund der Nichtexistenz magnetischer Elementarladungen – so genannter Monopole – folgt völlig analog:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0} . \quad (3.40)$$

Diese Gleichungen drücken die **Quellenfreiheit des Magnetfeldes** aus. Die so gefundenen „Divergenzgleichungen“ $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ bzw. $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ werden als dritte und vierte Maxwellsche Gleichung bezeichnet. Man beachte, dass aus der Quellenfreiheit des $\mathbf{B}$ -Feldes im Allgemeinen *nicht* die Quellenfreiheit des $\mathbf{H}$ -Feldes folgt, wie Übung 3.3 zeigen wird.

Übung 3.3: Feldliniendivergenz

- Berechnen Sie den Ausdruck

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \operatorname{div} (\mathbf{B}/\mu) . \quad (3.41)$$

- **Lösung:**

Mit Hilfe der vektoranalytischen Identität $\operatorname{div} (\Phi \mathbf{A}) = \Phi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \Phi$ folgt:

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) = \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{\mu} . \quad (3.42)$$

Wegen $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ und $\operatorname{grad} \mu^{-1} = -\mu^{-2} \operatorname{grad} \mu$ erhält man daraus:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{H} = -\frac{\mathbf{B}}{\mu^2} \cdot \operatorname{grad} \mu = -\frac{1}{\mu} \mathbf{H} \cdot \operatorname{grad} \mu} . \quad (3.43)$$

Die Divergenz von $\mathbf{H}$ ist also dann ungleich null, wenn $\mu = \mu_0 \mu_r$ ortsabhängig ist, d. h. wenn gilt: $\mu_r = \mu_r(\mathbf{r})$. Das ist z. B. am Luftspalt in einem magnetischen Kreis der Fall. Im Luftspalt stellt sich nämlich ein viel stärkeres $\mathbf{H}$ -Feld als im Eisen ein. Im Feldbild stellt man sich diese höhere Feldstärke durch eine vergrößerte Anzahl von Feldlinien vor, die an der Grenzschicht Eisen-Luft entstehen. Mit anderen Worten muss es also Feldquellen für $\mathbf{H}$ -Linien geben. Deswegen spricht man bei $\operatorname{div} \mathbf{H}$ von einer **Feldliniendivergenz**. $\square$

Während die Größen $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ und $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ unmittelbar Aussagen über die kontinuierlich im Raume verteilten elektrischen Ladungen und über das Fehlen magnetischer Ladungen machen, gibt es Feldliniendivergenzen $\operatorname{div} \mathbf{E}$ und $\operatorname{div} \mathbf{H}$, die beide von null verschieden sein können, aber keine Beziehung zu „wahren Ladungen“ haben. Ohne Beweis sei hier noch angegeben:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon} . \quad (3.44)$$

Für Probleme der Elektrostatik folgt hieraus mit $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi$ sofort die so genannte **Poisson-Gleichung**⁵ für inhomogene Dielektrika [Mo61b]:

$$\boxed{\Delta \Phi + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \varepsilon \cdot \operatorname{grad} \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}} , \quad (3.45)$$

die sich in homogenen, quellenfreien Gebieten auf die **Laplace-Gleichung** $\Delta \Phi = 0$ reduziert.

⁵ Siméon Denis **Poisson** (1781-1840): frz. Mathematiker und Physiker (Potenzialtheorie, Elastizitätstheorie, Wellenlehre, Akustik, Thermodynamik, Wahrscheinlichkeitsrechnung)

3.3 Wellengleichung

Aus den Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}\quad (3.46)$$

lassen sich weitere Gleichungen herleiten, in denen jeder der Vektoren $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ alleine auftritt. Mit den Materialgleichungen für ruhende, lineare und isotrope Medien

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.47)$$

folgt zunächst aus der ersten Maxwellschen Gleichung

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{J}, \quad (3.48)$$

wobei wir homogene Medien voraussetzen wollen, d. h. $\operatorname{grad} \varepsilon = 0$ und $\operatorname{grad} \mu = 0$. Bildet man nun in der zweiten Maxwellschen Gleichung die Rotation, d. h.

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad (3.49)$$

so kann man den soeben für $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ gefundenen Ausdruck (3.48) dort einsetzen:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \quad (3.50)$$

Wenn wir annehmen, dass die Stromdichte $\mathbf{J} = \mathbf{J}_L = \kappa \mathbf{E}$ nur von Leitungselektronen gebildet wird, so erhalten wir mit der Beziehung $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$ das Zwischenergebnis:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.51)$$

Bei Quellenfreiheit ($\rho = 0$) muss in homogenen Medien mit $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ der elektrische Feldstärkevektor also folgende homogene Differenzialgleichung erfüllen:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0}. \quad (3.52)$$

Für das $\mathbf{B}$ -Feld gilt analog [Weis83]:

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{B} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0}. \quad (3.53)$$

Diese beiden Gleichungen werden auch **Telegrafengleichungen** genannt, da sie u. a. in der Theorie der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs Drähten eine Rolle spielen. Liegt ein verlustfreies Medium vor, d. h. ein nicht leitender Stoff mit $\kappa = 0$, so können (3.52) und (3.53) weiter vereinfacht werden:

$$\boxed{\left(\nabla^2 - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} = 0} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\left(\nabla^2 - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{B} = 0} . \quad (3.54)$$

Diese so genannten **Wellengleichungen** sind partielle Differenzialgleichungen von zweiter Ordnung mit jeweils drei Feldkomponenten. Sie beschreiben elektromagnetische Wellen, die sich z. B. im freien Raum mit Lichtgeschwindigkeit $c = c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ ausbreiten. Da hier nun die beiden $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ -Felder *entkoppelt* vorkommen, lässt sich eine Lösung – im Allgemeinen durch Bernoullischen⁶ Produktansatz und Separation – wesentlich leichter als mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen finden. Der vierdimensionale Laplace-Operator

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad \square^2 \mathbf{E} = 0 , \quad (3.55)$$

der die zweiten Orts- und Zeitableitungen enthält, ist charakteristisch für jede Wellenausbreitung und wird **d'Alembert-Operator**⁷ genannt. Auch im Sonderfall eines leitfähigen stark dämpfenden Mediums kann die Telegrafengleichung (3.52) in guter Näherung vereinfacht werden. Dann können wir die Verschiebungsstromdichte $\partial \mathbf{D} / \partial t = \varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$ gegenüber der viel größeren Leitungsstromdichte $\mathbf{J}_L = \kappa \mathbf{E}$ vernachlässigen und erhalten (siehe Abschnitt 4.2)

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0} , \quad (3.56)$$

die so genannte **Wärmeleitungs-** oder **Diffusionsgleichung**, die bei der Behandlung der Stromverdrängung und Dämpfung in metallischen Leitern eine wichtige Rolle spielt [Mo61b].

3.4 Helmholtz-Gleichung

Wenn, wie wir annehmen wollen, die zu untersuchenden Vorgänge linear sind, so kann man alle Feldlösungen aufgrund des Helmholtzschen Superpositionsprinzips (1853) durch Fourier-Reihen⁸ oder Fourier-Integrale darstellen. Im Prinzip ist es somit ausreichend, sich ausschließlich mit zeitharmonischen Feldern zu befassen. Wenn alle Feldgrößen wie $\cos(\omega t)$ von der Zeit abhängen, d. h. in komplexer Schreibweise proportional zu $e^{j\omega t}$ sind, sodass $\partial/\partial t \equiv j\omega$ gesetzt werden kann, dann lauten die **Maxwellschen Gleichungen** (3.46) im Frequenzbereich:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{rot } \underline{\mathbf{H}} &= j\omega \underline{\mathbf{D}} + \underline{\mathbf{J}} \\ \text{rot } \underline{\mathbf{E}} &= -j\omega \underline{\mathbf{B}} . \end{aligned}} \quad (3.57)$$

Die ortsabhängigen Felder $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{B}}$ usw. werden als komplexe Amplituden oder Phasoren bezeichnet, die in Anlehnung an die komplexe Wechselstromrechnung aus Amplitude und Nullphasenwinkel der zugehörigen reellen Schwingung gebildet werden. Ihr komplexer Charakter

⁶ Johann **Bernoulli** (1667-1748): schweizerischer Mathematiker (Variationsrechnung, Differenzialgleichungen, Hydrodynamik)

⁷ Jean le Rond **d'Alembert** (1717-1783): frz. Physiker und Aufklärungsphilosoph (Akustik, Optik, Himmelsmechanik, Differenzialgleichungen und Integralrechnung)

⁸ Jean-Baptiste Joseph Baron de **Fourier** (1768-1830): frz. Mathematiker und Physiker (Fourier-Reihen, Wärmeleitung, Statistik)

wird im Allgemeinen durch Unterstreichen zum Ausdruck gebracht. Mit $\mathbf{r}$ als Ortsvektor zum betrachteten Raumpunkt erhält man die entsprechenden reellen Größen im Zeitbereich aus

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} \right\} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}. \quad (3.58)$$

Bei periodischer Anregung mit der Grundfrequenz $\omega_1 = 2\pi/T$ verwendet man Fourier-Reihen, während aperiodische Zeitsignale durch ihr kontinuierliches Spektrum beschrieben werden:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.59)$$

Der komplexe Vektor $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$, unter dem wir – je nach Bedarf – einen Phasor oder eine Fourier-Transformierte verstehen wollen, hat im Allgemeinen drei Feldkomponenten. Jeder dieser drei Raumkomponenten wird ein Zeiger in der komplexen Ebene zugeordnet. Im Folgenden soll überwiegend nur noch die komplexe Schreibweise benutzt werden. So wollen wir anstelle der Telegrafengleichung

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (3.60)$$

ihr Äquivalent im Frequenzbereich betrachten:

$$\boxed{\nabla^2 \underline{\mathbf{E}} + \omega^2 \mu \varepsilon \underline{\mathbf{E}} - j\omega \mu \kappa \underline{\mathbf{E}} = 0}. \quad (3.61)$$

Häufig führt man wegen

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{E}} + \omega^2 \mu \varepsilon \left(1 + \frac{\kappa}{j\omega \varepsilon} \right) \underline{\mathbf{E}} = 0 \quad (3.62)$$

eine komplexe Permittivität $\underline{\varepsilon}$ und den dielektrischen Verlustfaktor $\tan \delta_\varepsilon$ ein (Anhang D) mit

$$\boxed{\underline{\varepsilon} = \varepsilon \left(1 + \frac{\kappa}{j\omega \varepsilon} \right) = \varepsilon (1 - j \tan \delta_\varepsilon)}. \quad (3.63)$$

Damit ist eine kompaktere Notation möglich:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{E}} + \omega^2 \mu \underline{\varepsilon} \underline{\mathbf{E}} = 0. \quad (3.64)$$

In einem verlustfreien Nichtleiter mit $\kappa = 0$ vereinfacht sich diese Beziehung zur so genannten homogenen **Helmholtz-Gleichung**:

$$\boxed{(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon) \underline{\mathbf{E}} = 0} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{(\nabla^2 + k^2) \underline{\mathbf{E}} = 0}. \quad (3.65)$$

Die Größe

$$\boxed{k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{\omega}{c}} \quad (3.66)$$

wird als Wellenzahl bezeichnet und gerne als bequeme Abkürzung verwendet. Die Wellenzahl k ist durch die Frequenz ω der Strahlung und durch die Materialeigenschaften μ und ε des Raumes festgelegt. Die Helmholtz-Gleichung (3.65), die in der Elektrodynamik eine zentrale Bedeutung besitzt, kann auch direkt aus den komplexen Maxwell'schen Gleichungen durch gegenseitiges Einsetzen gewonnen werden. Im Folgenden werden wir uns noch häufig mit Lösungen der homogenen Helmholtz-Gleichung beschäftigen.

3.5 Wellenausbreitung in anisotropen Medien

Wird in das elektromagnetische Feld des Vakuums ein im Allgemeinen verlustbehaftetes Medium mit den frequenzabhängigen Eigenschaften Permeabilität $\underline{\mu}(\omega)$ und Permittivität $\underline{\varepsilon}(\omega)$ eingeführt, so treten Polarisisationseffekte auf, die mit den Materialgleichungen $\underline{\mathbf{D}} = \underline{\varepsilon} \underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mu} \underline{\mathbf{H}}$ beschrieben werden können. In anisotropen Medien hängen die Materialparameter jedoch von der Richtung der Wellenausbreitung und von der Ausrichtung der Feldvektoren ab. In diesem Fall müssen für die Vektorkomponenten Tensorgleichungen verwendet werden [LaLi90], weswegen Feldstärken und zugehörige Flussdichten nicht mehr parallel sind:

$$\boxed{\underline{D}_i = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \underline{E}_j} \quad \text{und} \quad \boxed{\underline{B}_i = \sum_{j=1}^3 \mu_{ij} \underline{H}_j} . \quad (3.67)$$

Der Index $i = 1, 2, 3$ steht für die kartesischen Vektorkomponenten in x-, y- oder z-Richtung. Bei symmetrischen Materialtensoren ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) hat man ein reziprokes Medium – als Beispiel mag die Wellenausbreitung in einem Kristall dienen (mit skalarem μ), wo man den reellen ε -Tensor durch eine Hauptachsentransformation auf Diagonalgestalt bringen kann [Born85]:

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \varepsilon_I = \varepsilon_{II} = \varepsilon_{III} & \text{isotrop} \\ \varepsilon_I = \varepsilon_{II} \neq \varepsilon_{III} & \text{uniaxial} \\ \varepsilon \neq \varepsilon_{II} \neq \varepsilon_{III} & \text{biaxial} . \end{cases} \quad (3.68)$$

Bei absorbierenden Kristallen muss neben ε_{ij} zusätzlich noch ein Tensor der elektrischen Leitfähigkeit κ_{ij} betrachtet werden – die Hauptachsen beider Tensoren müssen nicht übereinstimmen. Ein nichtreziprokes Medium ist dagegen durch einen hermiteschen Tensor $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*$ gekennzeichnet. Gyrotrope Medien sind ein Spezialfall nichtreziproker Medien, bei denen die Matrix des Permittivitäts- bzw. Permeabilitätstensors folgende Gestalt aufweist [Pol49]:

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (\mu_{ij}) = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix} , \quad (3.69)$$

falls die Welle sich längs der dritten Koordinatenachse ausbreitet und eine Vormagnetisierung $\underline{\mathbf{B}}_0 = B_0 \underline{\mathbf{e}}_3$ mit $B_0 \gg |\underline{B}_3|$ in Richtung der Wellenausbreitung vorliegt. Einen ε -Tensor der Form (3.69) findet man z. B. in einem Plasma, wie es in der Ionosphäre im Magnetfeld der Erde vorkommt – während ein μ -Tensor nach (3.69) in vormagnetisierten Ferriten auftritt [Cha89, Käs91, Poz05]. Für die Wellenausbreitung im Satellitenfunk spielt der Fall des ionosphärischen Plasmas eine besondere Rolle; die im Plasma gültigen Feldgleichungen lauten:

$$\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mu} \underline{\mathbf{H}} \quad \text{sowie} \quad \text{div}(\underline{\mu} \underline{\mathbf{H}}) = 0 \quad (3.70)$$

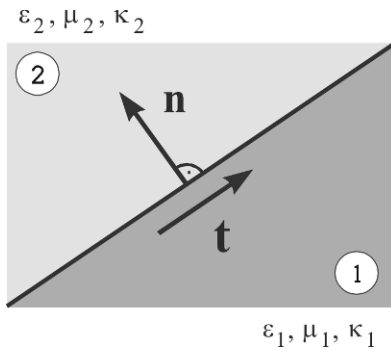
$$\text{rot } \underline{\mathbf{H}} = j\omega \left[\underline{\mathbf{e}}_1 (\varepsilon_{11} \underline{E}_1 + \varepsilon_{12} \underline{E}_2) + \underline{\mathbf{e}}_2 (\varepsilon_{21} \underline{E}_1 + \varepsilon_{22} \underline{E}_2) + \underline{\mathbf{e}}_3 \varepsilon_{33} \underline{E}_3 \right] \quad (3.71)$$

$$\text{div}[(\varepsilon_{ij}) \underline{\mathbf{E}}] = \varepsilon_{11} \frac{\partial \underline{E}_1}{\partial x_1} + \varepsilon_{12} \frac{\partial \underline{E}_2}{\partial x_1} + \varepsilon_{21} \frac{\partial \underline{E}_1}{\partial x_2} + \varepsilon_{22} \frac{\partial \underline{E}_2}{\partial x_2} + \varepsilon_{33} \frac{\partial \underline{E}_3}{\partial x_3} = 0 . \quad (3.72)$$

Aus diesen Gleichungen können interessante Effekte wie z. B. Doppelbrechung und Faraday-Rotation (Drehung der Polarisationssebene linearer Polarisierung) abgeleitet werden [Pie77].

3.6 Rand- und Stetigkeitsbedingungen

An der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Permittivitäten ϵ_1 und ϵ_2 , den Permeabilitäten μ_1 und μ_2 und den Leitfähigkeiten κ_1 und κ_2 müssen die Feldvektoren gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllen (Bild 3.3). Dabei ist $\mathbf{n}$ der Normaleneinheitsvektor auf der Trennfläche und soll vom Medium 1 in Richtung Medium 2 zeigen. Die Bedingungen der Stetigkeit bzw. des Sprungs der Felder an Trennflächen können mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen hergeleitet werden. Wir wollen hier nur die Ergebnisse zusammenstellen [Bal89].



Einheitsvektoren:

$$|\mathbf{n}| = |\mathbf{t}| = 1 \quad \text{und} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0$$

normale und tangentiale Komponenten:

$$\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{E}} = \underline{E}_n$$

$$\mathbf{t} \cdot \underline{\mathbf{E}} = \underline{E}_t$$

Bild 3.3 Trennfläche zwischen zwei verschiedenen Medien mit Normalen- und Tangentenrichtung

- Zunächst beschränken wir uns auf den Fall, dass innerhalb der infinitesimal dünnen Grenzschicht keine flächenhaft verteilten Ströme fließen. Dann sind die Stetigkeitsbedingungen an der Trennfläche für alle vier Vektorfelder in Tabelle 3.2 zusammengestellt.

Tabelle 3.2 Ohne Flächenströme sind tangentiale Feldstärken und normale Flussdichten stetig.

	Elektrische Feldstärken	Magnetische Feldstärken	Elektrische Flussdichten	Magnetische Flussdichten
Tangentialkomponenten	$\underline{E}_{t,2} = \underline{E}_{t,1}$	$\underline{H}_{t,2} = \underline{H}_{t,1}$	$\epsilon_1 \underline{D}_{t,2} = \epsilon_2 \underline{D}_{t,1}$	$\mu_1 \underline{B}_{t,2} = \mu_2 \underline{B}_{t,1}$
Normalkomponenten	$\epsilon_2 \underline{E}_{n,2} = \epsilon_1 \underline{E}_{n,1}$	$\mu_2 \underline{H}_{n,2} = \mu_1 \underline{H}_{n,1}$	$\underline{D}_{n,2} = \underline{D}_{n,1}$	$\underline{B}_{n,2} = \underline{B}_{n,1}$

- Für die Anwendungen interessiert auch besonders der Spezialfall, dass eines der beiden Medien – sagen wir Medium 1 – ein idealer elektrischer Leiter sei, d. h. es gelte $\kappa_1 \rightarrow \infty$. Ein solches Medium ist vollkommen feldfrei. Die Randbedingungen an der Oberfläche eines elektrisch idealen Leiters finden wir in Tabelle 3.3.

Tabelle 3.3 Randbedingungen an der Oberfläche eines elektrisch idealen Leiters ($\kappa_1 \rightarrow \infty$)

	Elektrische Feldstärken	Magnetische Feldstärken	Elektrische Flussdichten	Magnetische Flussdichten
Medium 1	$\underline{E}_{t,1} = 0$	$\underline{H}_{t,1} = 0$	$\underline{D}_{n,1} = 0$	$\underline{B}_{n,1} = 0$
Medium 2	$\underline{E}_{t,2} = 0$	$\mathbf{n} \times \underline{\mathbf{H}}_{t,2} = \underline{\mathbf{J}}_F$	$\underline{D}_{n,2} = \underline{\rho}_F$	$\underline{B}_{n,2} = 0$

Dabei ist $\underline{\mathbf{J}}_F$ eine in der Grenzfläche induzierte elektrische Flächenstromdichte, die in A/m gemessen wird und $\underline{\rho}_F$ ist eine in C/m² gemessene induzierte elektrische Flächenladungsdichte. An der Oberfläche eines idealen elektrischen Leiters stehen also elektrische Feldlinien senkrecht, während magnetische Feldlinien parallel verlaufen müssen, sodass auf einer metallischen Wand stets $\underline{\mathbf{E}}_2 \cdot \underline{\mathbf{B}}_2 = 0$ gilt. Diese Tatsache kann mit Hilfe der lokalen Flächennormalen $\underline{\mathbf{n}}$ wie folgt ausgedrückt werden:

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{E}}_2 = 0 \\ \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{B}}_2 = 0 \end{array}} \quad (3.73)$$

Die Maxwell'schen Gleichungen definieren zusammen mit den Randbedingungen (3.73) ein so genanntes **Randwertproblem**. Die Bedingungen auf elektrisch ideal leitenden Rändern lauten:

$$\text{Dirichlet-Randbedingung}^9 \quad \underline{E}_{t,2} = 0 \quad (3.74)$$

$$\text{Neumann-Randbedingung}^{10} \quad \underline{B}_{n,2} = 0 \rightarrow \frac{\partial \underline{B}_{t,2}}{\partial n} = 0. \quad (3.75)$$

- Ferner interessiert uns noch der Spezialfall, bei dem Medium 1 ein idealer magnetischer Leiter mit $\mu_1 \rightarrow \infty$ sei. Auch ein solches Medium ist vollkommen feldfrei. Die Randbedingungen an der Oberfläche eines solchen Leiters finden wir in Tabelle 3.4.

Tabelle 3.4 Randbedingungen an der Oberfläche eines magnetisch idealen Leiters ($\mu_1 \rightarrow \infty$)

	Elektrische Feldstärken	Magnetische Feldstärken	Elektrische Flussdichten	Magnetische Flussdichten
Medium 1	$\underline{E}_{t,1} = 0$	$\underline{H}_{t,1} = 0$	$\underline{D}_{n,1} = 0$	$\underline{B}_{n,1} = 0$
Medium 2	$\underline{\mathbf{n}} \times \underline{\mathbf{E}}_{t,2} = -\underline{\mathbf{M}}_F$	$\underline{H}_{t,2} = 0$	$\underline{D}_{n,2} = 0$	$\underline{B}_{n,2} = -\underline{\rho}_{M,F}$

Ein magnetisch idealer Leiter ist genauso fiktiv wie eine magnetische Flächenstromdichte $\underline{\mathbf{M}}_F$ oder eine magnetische Flächenladungsdichte $\underline{\rho}_{M,F}$. Trotz fehlender physikalischer Realität können diese Hilfsgrößen jedoch manche Berechnungen wesentlich erleichtern.

- Falls beide Medien weder ideal elektrisch noch ideal magnetisch leiten, sich aber in der Trennfläche trotzdem elektrische oder magnetische Ladungen befinden, sind die Feldstärken und Flussdichten unstetig. Der jeweilige Sprungwert ist von den vorhandenen Flächenstromdichten und Flächenladungsdichten abhängig [Isk92]:

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\mathbf{n}} \times (\underline{\mathbf{H}}_2 - \underline{\mathbf{H}}_1) = \underline{\mathbf{J}}_F \\ \underline{\mathbf{n}} \times (\underline{\mathbf{E}}_1 - \underline{\mathbf{E}}_2) = \underline{\mathbf{M}}_F \\ \underline{\mathbf{n}} \cdot (\underline{\mathbf{D}}_2 - \underline{\mathbf{D}}_1) = \underline{\rho}_F \\ \underline{\mathbf{n}} \cdot (\underline{\mathbf{B}}_1 - \underline{\mathbf{B}}_2) = \underline{\rho}_{M,F} \end{array}} \quad (3.76)$$

⁹ Johann Peter Gustav **Lejeune-Dirichlet** (1805-1859): dt. Mathematiker frz. Abstammung (Zahlentheorie, Reihentheorie, Variationsrechnung, Randwertprobleme, Potenzialtheorie und Integralrechnung)

¹⁰ Franz Ernst **Neumann** (1798-1895): dt. Physiker und Mineraloge (mathematische Physik, Optik, Elektrodynamik, Kristallphysik)

3.7 Relativitätsprinzip

Bisher haben wir mit großer Selbstverständlichkeit zwischen elektrischen und magnetischen Feldern unterschieden. Beide Felder sind aber nur zwei Erscheinungsformen eines einzigen Naturphänomens. Am besten erkennen wir die Problematik anhand folgenden Beispiels, bei dem wir uns – wie meist im Rest dieses Kapitels – auf Felder im Vakuum beschränken wollen.

Übung 3.4: Felder um eine ruhende Punktladung

- Eine elektrische Punktladung q befinde sich relativ zu einem Beobachter in Ruhe. Geben Sie das elektrostatische Coulombfeld in der Umgebung der Ladung an (Bild 3.4).

- **Lösung:**

Wie allgemein bekannt, stellt sich ein kugelsymmetrisches elektrisches Feld (2.39) in der Umgebung der Punktladung ein. Es zeigt in radiale Richtung und hat – falls die Punktladung sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet – die Darstellung in Kugelkoordinaten:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r. \quad (3.77)$$

Selbstverständlich gilt dann auch $\mathbf{B} = 0$.

□

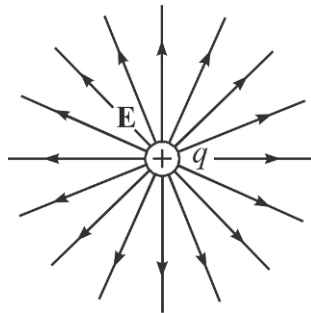


Bild 3.4 Kugelsymmetrisches Coulombfeld um eine ruhende elektrische Punktladung

Sobald allerdings Punktladung und Beobachter sich relativ zueinander mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegen, ändern sich die statischen Verhältnisse, wie das nächste Beispiel zeigen soll.

Übung 3.5: Felder um eine bewegte Punktladung

- Eine Punktladung q soll sich mit gleichförmiger, nichtrelativistischer Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, d. h. mit $\beta = v/c_0 \ll 1$, an einem ruhenden Beobachter P vorbeibewegen. Welche Felder würde dieser Beobachter jetzt messen können (Bild 3.5)?

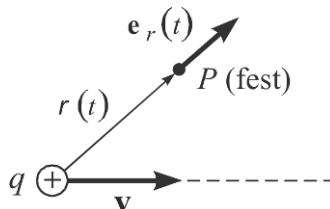


Bild 3.5 Langsam an einem Beobachter P vorbeibewegte elektrische Punktladung q

• **Lösung:**

Die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}$ ist annähernd die gleiche wie im Falle $\mathbf{v} = 0$. Aufgrund der Bewegung der Punktladung wird der Beobachter nun zusätzlich ein *schwaches* Magnetfeld messen können. Mit $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c_0$ wird – wie wir in Übung 3.7 noch exakt herleiten werden –

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v}}{c_0^2} \times \mathbf{E} = \frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}}{c_0}}. \quad (3.78)$$

Wie bei allen Vakuumfeldern gilt auch hier die grundlegende Beziehung $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. $\square$

Das Beispiel einer ruhenden oder bewegten Punktladung zeigt, dass das elektrische und das magnetische Feld zu einer Einheit verschmelzen, dem elektromagnetischen Feld. Die Zerlegung in elektrische und magnetische Komponenten hängt vom Bewegungszustand des Beobachters ab. Ein Feld, das für einen ruhenden Beobachter rein elektrisch erscheint, kann für einen bewegten Beobachter einen zusätzlichen magnetischen Anteil enthalten.

- Die Messung von elektrischen und magnetischen Feldern hängt von der Relativbewegung zwischen Beobachter und Messobjekt ab.
- Die Werte des $\mathbf{E}$ - und des $\mathbf{B}$ -Feldes können daher je nach verwendetem Bezugssystem unterschiedlich ausfallen.
- Bei „*langsamer*“ Ladungsbewegung mit $\beta = v/c_0 \ll 1$ ist das magnetische Feld viel schwächer als das elektrische.

Für die „*langsame*“ Bewegung der Leitungselektronen in stromdurchflossenen Drähten können wir das Ergebnis aus Übung 3.5 ebenfalls verwenden. Es müsste sich daher in der Umgebung einer gleichförmigen Elektronenströmung eigentlich ein elektrisches und ein magnetisches Feld messen lassen. Jedoch ist erfahrungsgemäß außerhalb des Drahtes nur noch der *magnetische* Feldanteil feststellbar. Der eigentlich viel stärkere *elektrische* Feldanteil kompensiert sich nämlich durch die nicht strömenden positiven Ladungsträger (Gitteratome) der Drähte. Der Leiter ist im Ganzen natürlich elektrisch neutral.

3.7.1 Lorentz-Transformation

Das Einsteinsche¹¹ Postulat von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit c_0 , d. h. ihre Unabhängigkeit von der Bewegung der Quelle, gibt Anlass zu bemerkenswerten Beziehungen zwischen den Raum- und Zeitkoordinaten verschiedener Inertialsysteme, die wir zunächst behandeln werden.

- Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, das sich relativ zum Fixsternhimmel drehungsfrei und ohne translatorische Beschleunigung bewegt. Diese Definition genügt solange, als der Einfluss der Gravitation auf die elektromagnetischen Vorgänge vernachlässigt werden kann.

Im Folgenden wollen wir zwei Inertialsysteme S und S' betrachten, deren kartesische Achsen wie in Bild 3.6 ausgerichtet sind. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass die Koordinatenursprünge von S und S' zur Zeit $t = t' = 0$ zusammenfallen.

¹¹ Albert **Einstein** (1879-1955): dt.-schweiz.-amerik. Physiker (Begründer der Speziellen und Allgemeinen Relativitätstheorie – 1905 bzw. 1915; Nobelpreis f. Physik 1921 zum äußeren Photoeffekt)

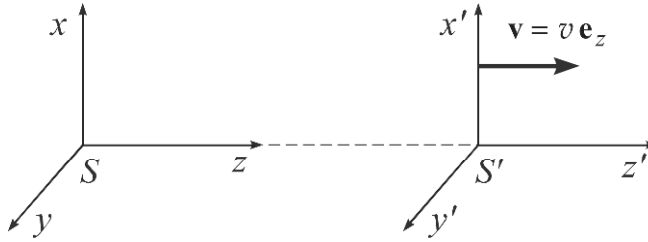


Bild 3.6 Zur Erläuterung der Lorentz-Transformation bei Relativbewegungen

Es bewege sich das gestrichelte System S' mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$ relativ zum System S . Aufgrund der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist der Zusammenhang zwischen den Raum- und Zeitkoordinaten der beiden Inertialsysteme durch die **Lorentz-Transformation** [Lau21, Pau81] gegeben (Tabelle 3.5).

Tabelle 3.5 Lorentz-Transformation der Raumzeit mit $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ und $\beta = v/c_0$

Bewegtes System S'		Ruhsystem S	
$x' = x$	$\mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}$	$x = x'$	$\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r}'_{\perp}$
$y' = y$		$y = y'$	
$z' = \gamma(z - vt)$	$\mathbf{r}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t)$	$z = \gamma(z' + vt')$	$\mathbf{r}_{\parallel} = \gamma(\mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{v}t')$
$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c_0}z\right) = \gamma\left(t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c_0^2}\right)$		$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c_0}z'\right) = \gamma\left(t' + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'}{c_0^2}\right)$	

Die Zeichen $\parallel$ und $\perp$ bedeuten parallel bzw. senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$. Nach Tabelle 3.5 bleiben also die zur Bewegungsrichtung senkrechten Koordinaten unverändert, während die parallele Koordinate und die Zeit transformiert werden. Die von der Relativbewegung v abhängende Größe

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \quad (3.79)$$

überstreicht mit $0 \leq v \leq c_0$ den Wertebereich $1 \leq \gamma \leq \infty$. Die klassisch gültige **Galilei-Transformation**¹² folgt aus Tabelle 3.5 für $v \ll c_0$, d. h. für $\gamma \rightarrow 1$. Im Grenzfall kleiner Relativgeschwindigkeiten gilt dann vereinfacht:

$$z' = z - vt \quad \text{und} \quad t' = t. \quad (3.80)$$

Das Ergebnis zweier aufeinander folgender Lorentz-Transformationen der Raumzeit ist im Allgemeinen von der Reihenfolge abhängig und einer einzigen Lorentz-Transformation mit anschließender räumlicher Drehung äquivalent [Grei92]. Eine Ausnahme bildet der Fall, dass beide Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ in die gleiche oder entgegengesetzte Richtung zeigen, d. h. $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \pm v_1 v_2$. Dann sind die beiden aufeinander folgenden Lorentz-Transformationen äquivalent zu einer einzigen Lorentz-Transformation mit der Geschwindigkeit

¹² Galileo **Galilei** (1564-1642): ital. Mathematiker, Physiker und Astronom (Mechanik, Fernrohr, Planetenbeobachtungen, heliozentrisches Weltbild)

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{1 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 / c_0^2}}. \quad (3.81)$$

Diese Beziehung wird als Additionstheorem für zueinander parallele Geschwindigkeiten bezeichnet. Auch bei den denkbar größten Geschwindigkeiten, nämlich $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = c_0^2$, bleibt die Summengeschwindigkeit mit $v = c_0$ beschränkt und überschreitet niemals die Lichtgeschwindigkeit.

Neben der Raumzeit (Tabelle 3.5) hängen auch die von einem Beobachter messbaren elektromagnetischen Feldgrößen von seiner Relativbewegung zur Strahlungsquelle ab [Fey91]. So gilt für die Transformation der in den Systemen S und S' messbaren elektrischen und magnetischen Felder ebenfalls die Lorentz-Transformation (Tabelle 3.6).

Tabelle 3.6 Lorentz-Transformation der Feldgrößen mit $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ und $\beta = v/c_0$

Elektrische Felder	Magnetische Felder
$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}'_{\parallel} = \mathbf{D}_{\parallel}$	$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad \text{und} \quad \mathbf{H}'_{\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel}$
$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp})$ $\mathbf{D}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{D}_{\perp} + \frac{1}{c_0^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\perp} \right)$	$\mathbf{H}'_{\perp} = \gamma (\mathbf{H}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}_{\perp})$ $\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c_0^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp} \right)$

Die Zeichen $\parallel$ und $\perp$ bedeuten wieder parallel bzw. senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$. Im gestrichenen System müssen die Orts- und Zeitvariablen (x', y', z', t') und im ungestrichenen der Satz (x, y, z, t) verwendet werden. Für *kleine* Werte $\beta = v/c_0 \ll 1$, d. h. für $\gamma \rightarrow 1$, gehen diese Gleichungen wegen $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\parallel} = 0$ und $\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\parallel} = 0$ über in:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\perp} + \mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\perp} + \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B} - \frac{1}{c_0^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (3.82)$$

Zwar sind die Werte der elektromagnetischen Feldgrößen vom Bezugssystem abhängig, aber die *Form* der Maxwellschen Gleichungen ist in allen Inertialsystemen gleich (**Relativitätsprinzip, Invarianz** der Maxwellschen Gleichungen). So kann die zweite Maxwellsche Gleichung im ruhenden bzw. im bewegten System wie folgt geschrieben werden:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{bzw.} \quad \oint_{C'} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}' = - \iint_{A'} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} \cdot d\mathbf{A}'. \quad (3.83)$$

Für kleine Relativgeschwindigkeiten benutzt man mit $\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ zuweilen die „gemischte“ Darstellung

$$\oint_C (\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}, \quad (3.84)$$

die man in einen zeit- und in einen bewegungsabhängigen Term aufspalten kann [Kli03]:

$$\boxed{\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s} = - \iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}}. \quad (3.85)$$

Das ist das auf Maxwell und Hertz¹³ zurückgehende **Induktionsgesetz für bewegte Körper**, das für kleine Geschwindigkeiten mit $\beta = v/c_0 \ll 1$ näherungsweise gilt. Gewöhnlich schreibt man die rechte Gleichungsseite von (3.85) als totales Differenzial:

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (3.86)$$

Die in einer Leiterschleife mit der Berandung C induzierte Spannung ergibt sich somit näherungsweise aus der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses durch die von der Kontur C berandete Fläche A . Es wird $\mathbf{E}'$ im *bewegten* System gemessen, während die Linienintegration im *ruhenden* System durchgeführt werden muss. Das Linienintegral auf der linken Seite von (3.86) ist daher weder die Induktionsspannung u' im bewegten noch u im ruhenden System. Weil man bei kleinen Relativgeschwindigkeiten $\beta = v/c_0 \ll 1$ aber die weiteren Näherungen $ds \approx ds'$ sowie $C \approx C'$ machen kann, ist die in einer bewegten Leiterschleife durch einen mitbewegten Beobachter messbare Induktionsspannung näherungsweise durch obige Beziehung berechenbar. Eine korrekte Bestimmung der Induktionsspannung, gemessen im beliebig schnell bewegten System, gelingt hingegen problemlos und völlig exakt mit Hilfe von

$$u' = \oint_{C'} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}' = -\iint_{A'} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} \cdot d\mathbf{A}' \quad (3.87)$$

unter Beachtung der Lorentz-Transformation $\mathbf{B}'$ als Funktion von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$. Den Übergang vom gestrichenen System S' auf das ungestrichene S ermöglicht die **inverse Lorentz-Transformation**. Sie folgt durch Umkehrung der Lorentz-Transformation (Tabelle 3.6) unter Vertauschung der gestrichenen und ungestrichenen Größen und mit der Substitution $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$.

Tabelle 3.7 Inverse Lorentz-Transformation der Feldgrößen mit $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ und $\beta = v/c_0$

Elektrische Felder	Magnetische Felder
$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}_{\parallel} = \mathbf{D}'_{\parallel}$	$\mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel} \quad \text{und} \quad \mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{H}'_{\parallel}$
$\mathbf{E}_{\perp} = \gamma (\mathbf{E}_{\perp}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}')$ $\mathbf{D}_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{D}_{\perp}' - \frac{1}{c_0^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\perp}' \right)$	$\mathbf{H}_{\perp} = \gamma (\mathbf{H}_{\perp}' + \mathbf{v} \times \mathbf{D}_{\perp}')$ $\mathbf{B}_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{B}_{\perp}' + \frac{1}{c_0^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}' \right)$

Diese Transformationsgleichungen zeigen, dass $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ nicht unabhängig voneinander existieren. Ein Feld, das in einem System rein elektrostatisch oder rein magnetostatisch ist, erscheint im anderen System als eine Mischung aus beiden. Die elektrischen und magnetischen Felder sind so eng miteinander verknüpft, dass man nicht von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ getrennt, sondern besser vom **elektromagnetischen** Feld als Ganzem sprechen sollte. Das magnetische Feld ist eine notwendige Konsequenz der Lorentz-Transformation des Coulombfeldes einer Punktladung. In diesem Sinne ist das Magnetfeld ein relativistischer Effekt. Bisher haben wir nur gleichförmig bewegte Bezugssysteme betrachtet – bei **beschleunigtem** Ladungstransport mit $\mathbf{v} \neq \text{const.}$ treten weitere Effekte auf, die wir erst im Abschnitt 3.8 untersuchen werden.

¹³ Heinrich Rudolph **Hertz** (1857-1894): dt. Physiker (Wegbereiter der drahtlosen Nachrichtenübertragung, Nachweis elektromagnetischer Wellen, Reflexion, Brechung, Polarisation, Elastizitätstheorie)

Übung 3.6: Materialgleichungen in bewegten Medien

- Falls sich eine Strahlungsquelle (Antenne) mit konstanter Geschwindigkeit relativ zu ihrer materiellen Umgebung bewegt, liegt kein ruhendes Medium mehr vor. Im Gegensatz zum Vakuum, in dem wegen des Relativitätsprinzips kein ausgezeichnetes Bezugssystem existiert, können in einem materiellen Medium die Materialeigenschaften Permittivität, Permeabilität und elektrische Leitfähigkeit nur in einem Bezugssystem, in dem die Materie ruht, sinnvoll definiert werden. Die beiden Materialgleichungen (3.18) und das Ohmsche Gesetz

$$\mathbf{D}' = \varepsilon' \mathbf{E}' \quad \text{sowie} \quad \mathbf{H}' = \frac{1}{\mu'} \mathbf{B}' \quad \text{und} \quad \mathbf{J}' = \kappa' \mathbf{E}' \quad (3.88)$$

gelten in dieser Form daher nur im Ruhssystem S' des bewegten Mediums. Transformieren Sie (3.88) mit Hilfe von Tabelle 3.6 in das Bezugssystem S der Antenne, relativ zu dem sich das System S' des Mediums mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt.

- Lösung:**

Mit den Beziehungen der Tabelle 3.6 erhalten wir aus $\mathbf{D}' = \varepsilon' \mathbf{E}'$ sowie aus $\mathbf{H}' = \mathbf{B}'/\mu'$:

$$\boxed{\mathbf{D}_{\parallel} = \varepsilon' \mathbf{E}_{\parallel}} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}_{\perp} + \frac{1}{c_0^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\perp} = \varepsilon' (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}) \quad \text{sowie} \quad (3.89)$$

$$\boxed{\mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}/\mu'} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c_0^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp} = \mu' (\mathbf{H}_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}_{\perp}). \quad (3.90)$$

Durch gegenseitiges Einsetzen, Auflösen nach $\mathbf{D}_{\perp}$ und $\mathbf{H}_{\perp}$ und weiteren Umformungen [Sau73, Som77, Jac02] erhalten wir den Zusammenhang für die senkrechten Komponenten:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{D}_{\perp} &= \varepsilon' \frac{\gamma^2}{n^2} \left[(n^2 - \beta^2) \mathbf{E}_{\perp} + (n^2 - 1) \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp} \right] \\ \mathbf{H}_{\perp} &= \frac{\gamma^2}{\mu'} \left[(1 - n^2 \beta^2) \mathbf{B}_{\perp} + (n^2 - 1) \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}}{c_0^2} \right]. \end{aligned}} \quad (3.91)$$

Dabei wurde mit $n = c_0/c = c_0 \sqrt{\mu' \varepsilon'}$ der Brechungsindex des Mediums eingeführt. Sowohl für $n = 1$ als auch bei $\mathbf{v} = 0$ verschwinden die Zusatzterme in (3.91). Man beachte, dass bereits in isotropen Medien die Vektoren $\mathbf{D}$ und $\mathbf{E}$ sowie $\mathbf{H}$ und $\mathbf{B}$ nicht mehr parallel sind.

Nach [Som77] haben Stromdichte und Ladungsdichte ($\mathbf{J}, c_0 \rho$) das gleiche Transformationsverhalten wie die Raumzeit $(\mathbf{r}, c_0 t)$. Analog zu Tabelle 3.5 folgert man daher:

$$\mathbf{J}'_{\perp} = \mathbf{J}_{\perp} \quad \text{und} \quad \mathbf{J}'_{\parallel} = \gamma (\mathbf{J}_{\parallel} - \mathbf{v} \rho) \quad \text{sowie} \quad \rho' = \gamma \left(\rho - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{J}}{c_0^2} \right). \quad (3.92)$$

Während die gesamte Ladungsmenge lorentzinvariant ist, hängen Stromdichte und Raumladungsdichte vom Bezugssystem ab. Falls im Ruhssystem des bewegten Leiters keine Konvektionsströme auftreten ($\rho' = 0$), gilt $\mathbf{J}' = \kappa' \mathbf{E}'$ und aus (3.92) folgt mit Tabelle 3.6 das **Ohmsche Gesetz für bewegte Leiter** im ruhenden Laborsystem S [Sau73, Som77, Jac02]:

$$\boxed{\mathbf{J} = \mathbf{J}_L + \mathbf{v} \rho = \kappa' \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})} \quad \text{mit} \quad \boxed{\mathbf{v} \rho = \beta^2 \mathbf{J}_{\parallel} = \kappa' \gamma \beta^2 \mathbf{E}_{\parallel}}. \quad (3.93)$$

Die Aufspaltung der Gesamtstromdichte in Leitungs- und Konvektionsstromdichte hängt vom Standpunkt des Beobachters ab. Im System S trägt der bewegte Leiter eine Ladung. $\square$

3.7.2 Feld einer gleichförmig bewegten Ladung

In Übung 3.7 wollen wir die Lorentz-Transformation der elektromagnetischen Felder benutzen, um die Felder in der Umgebung einer sich gleichförmig bewegenden Punktladung exakt zu bestimmen.

Übung 3.7: Relativistische Punktladung

- Eine elektrische Punktladung q soll sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ an einem Beobachter P vorbeibewegen (Bild 3.7). Das kugelsymmetrische Coulombfeld im Ruhssystem der Ladung sei bekannt. Bestimmen Sie durch Lorentz-Transformation dieses Ruhfeldes die in P messbaren Feldstärken.

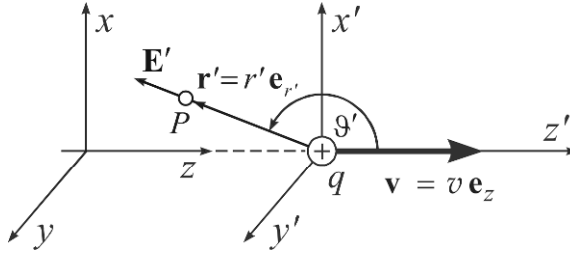


Bild 3.7 Gleichförmig an einem Beobachter P vorbeibewegte elektrische Punktladung q

• Lösung:

Im Ruhssystem der Punktladung, dem gestrichenen System, ergibt sich analog zu (3.77) das elektrostatische Coulombfeld

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \mathbf{e}_{r'}, \quad (3.94)$$

während das Magnetfeld null ist, d. h. $\mathbf{B}' = 0$. Die Kugelkoordinaten kann man wie folgt durch kartesische Koordinaten ausdrücken (Tabelle 2.5):

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_{r'} = \frac{\mathbf{r}'}{r'} = \frac{x'}{r'} \mathbf{e}_{x'} + \frac{y'}{r'} \mathbf{e}_{y'} + \frac{z'}{r'} \mathbf{e}_{z'}. \quad (3.95)$$

Daher gilt im Ruhssystem der Punktladung:

$$\boxed{\mathbf{E}' = \frac{q (x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'} + z' \mathbf{e}_{z'})}{4\pi\epsilon_0 (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}}. \quad (3.96)$$

Durch Lorentz-Transformation der gestrichenen Koordinaten (Tabelle 3.5)

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \gamma(z - vt) \quad (3.97)$$

erhält man die gestrichenen Feldkomponenten, ausgedrückt durch die Koordinaten des ungestrichenen Systems:

$$\mathbf{E}'_{\perp} = E_{x'} \mathbf{e}_{x'} + E_{y'} \mathbf{e}_{y'} = \frac{q (x \mathbf{e}_{x'} + y \mathbf{e}_{y'})}{4\pi\epsilon_0 [x^2 + y^2 + \gamma^2 (z - vt)^2]^{3/2}} \quad (3.98)$$

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = E_{z'} \mathbf{e}_{z'} = \frac{q \gamma (z - vt) \mathbf{e}_{z'}}{4\pi\epsilon_0 [x^2 + y^2 + \gamma^2 (z - vt)^2]^{3/2}}. \quad (3.99)$$

Nach Anwendung der inversen Lorentz-Transformation (Tabelle 3.7) auf das Feld $\mathbf{E}'$ unter Beachtung von $\mathbf{B}' = 0$ erhalten wir schließlich mit $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \mathbf{e}_z = \mathbf{v}/c_0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_\parallel &= \gamma \mathbf{E}'_\perp + \mathbf{E}'_\parallel = \frac{q \gamma (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + (z - vt) \mathbf{e}_z)}{4 \pi \epsilon_0 [x^2 + y^2 + \gamma^2 (z - vt)^2]^{3/2}} \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel &= \frac{\gamma}{c_0^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}'_\perp = \frac{1}{c_0^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_\perp = \frac{\boldsymbol{\beta}}{c_0} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E} = \frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}}{c_0}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Mit Hilfe der Umformung $\mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y = \mathbf{e}_\rho \rho \cos \varphi + \mathbf{e}_\varphi \rho \sin \varphi = \mathbf{e}_\rho \rho$ kann man leicht zeigen, dass $\mathbf{B} = B_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ gilt. Die magnetischen Feldlinien umfassen daher den Weg der sich gleichförmig fortbewegenden Punktladung in konzentrischen Kreisen. Für den Zeitpunkt $t = t' = 0$, wenn also beide Koordinatenursprünge übereinstimmen, hat das resultierende E-Feld nur radiale Komponenten:

$$\mathbf{E}(t=0) = \frac{q \gamma (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z)}{4 \pi \epsilon_0 (x^2 + y^2 + \gamma^2 z^2)^{3/2}} = \frac{q \gamma r \mathbf{e}_r}{4 \pi \epsilon_0 (x^2 + y^2 + \gamma^2 z^2)^{3/2}} = E_r \mathbf{e}_r. \quad (3.101)$$

Eine einfache Umformung mit $\gamma^2 = (1 - \beta^2)^{-1}$ und $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ergibt:

$$E_r = \frac{q \gamma r}{4 \pi \epsilon_0 \gamma^3 [(1 - \beta^2)(x^2 + y^2) + z^2]^{3/2}} = \frac{q r}{4 \pi \epsilon_0 \gamma^2 [r^2 - \beta^2(x^2 + y^2)]^{3/2}}. \quad (3.102)$$

Mit Hilfe der Identität $x^2 + y^2 = \rho^2 = r^2 \sin^2 \vartheta$ kann man auch schreiben:

$$E_r = \frac{q r}{4 \pi \epsilon_0 \gamma^2 (r^2 - \beta^2 r^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}} \quad \text{mit} \quad (3.103)$$

$$B_\varphi = \frac{\beta}{c_0} E_r \sin \vartheta = \beta \mu_0 \frac{E_r}{Z_0} \sin \vartheta \quad (3.104)$$

Im Grenzfall $\beta = v/c_0 \ll 1$ erhalten wir wieder die bekannte statische Lösung $E_r = q/(4 \pi \epsilon_0 r^2)$. Ist aber β^2 nicht vernachlässigbar klein, so erweist sich das Feld bei gleichen Abständen r von der Ladung in Richtung senkrecht zur Bewegung stärker als in Richtung der Bewegung. Mit zunehmender Geschwindigkeit wird das ursprünglich kugelsymmetrische Feld einer ruhenden Punktladung also immer stärker um $\vartheta = 90^\circ$ konzentriert, während bei $\vartheta = 0^\circ$ das kleinste Feld auftritt:

$$E_{r,\max} = E_r(\vartheta = 90^\circ) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.105)$$

$$E_{r,\min} = E_r(\vartheta = 0^\circ) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} (1 - \beta^2). \quad (3.106)$$

Somit gilt:
$$\frac{E_{r,\min}}{E_{r,\max}} = (1 - \beta^2)^{3/2} = \frac{1}{\gamma^3}. \quad (3.107)$$

Das Feld einer gleichförmig bewegten Ladung kann man sich aus dem Feld der ruhenden Ladung durch Lorentz-Kontraktion entstanden denken (siehe Bild 3.8).

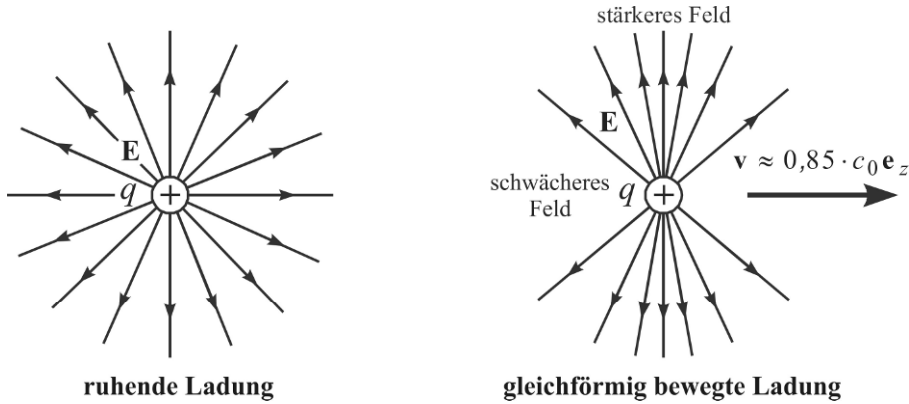


Bild 3.8 Lorentz-Kontraktion des Ruhfeldes einer gleichförmig bewegten elektrischen Punktladung

Die Bewegung der Ladung bewirkt eine Verzerrung des elektrischen Feldes, die als relativistischen Effekt ein magnetisches Feld B_ϕ hervorruft. Die Stärke der Feldverzerrung über dem Winkel ϑ in Abhängigkeit von der normierten Geschwindigkeit $\beta = v/c_0$ als Parameter ist Bild 3.9 zu entnehmen.

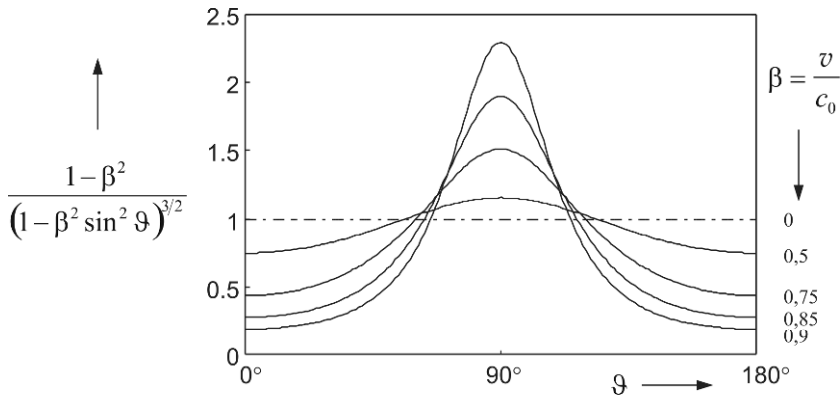


Bild 3.9 Relativistische Verzerrung des elektrischen Feldes einer gleichförmig bewegten Punktladung über dem Beobachterwinkel ϑ in Abhängigkeit von der normierten Geschwindigkeit β

Eine sich gleichförmig fortbewegende Punktladung ist daher mit einem zeitabhängigen Feld verknüpft. Der Beobachter am Ort P sieht, entsprechend der Geschwindigkeit der Ladung, einen mehr oder weniger langen Feldimpuls. □

3.8 Strahlung beschleunigter Elektronen

Nach dem Sonderfall der gleichförmig geradlinigen Bewegung wollen wir nun den allgemeinen Fall der beschleunigten Bewegung von Ladungsträgern untersuchen. Dazu betrachten wir in Bild 3.10 eine Punktladung q , die sich längs einer glatten Bahn $\mathbf{r}_q(t)$ mit der Momentangeschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = \partial \mathbf{r}_q / \partial t$ bewege. An einem Punkt $P(\mathbf{r}, t)$, der sich relativ zum Koordinatenursprung in Ruhe befinde, sollen die elektromagnetischen Felder bestimmt werden.

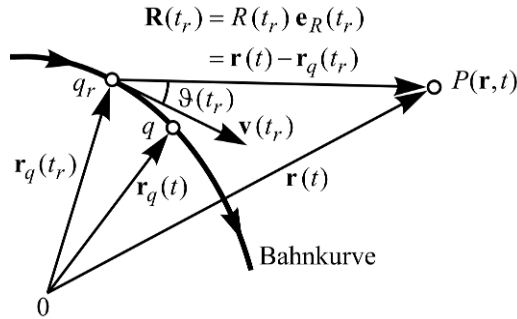


Bild 3.10 Bahnkurve $\mathbf{r}_q(t)$ einer beschleunigten Punktladung q im Vakuum

Wenn sich die Punktladung zum Zeitpunkt t_r am Ort $\mathbf{r}_q(t_r)$ befindet, sendet sie eine elektromagnetische Welle aus. Aufgrund der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ erreicht diese Welle den ortsfesten Beobachter P erst zu einer späteren Zeit $t = t_r + R(t_r)/c_0$. Die Ladung hat sich indessen auf ihrer Bahn ein Stück weiter bewegt und befindet sich bereits am Ort $\mathbf{r}_q(t)$. Mit anderen Worten: die Felder gehen am Ort P zum Zeitpunkt t aus der Ladungsverteilung zur **retardierten Zeit** t_r hervor – es gilt:

$$t_r = t - R(t_r)/c_0. \quad (3.108)$$

Mit den Bezeichnungen aus Bild 3.10 führen wir zunächst folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}(t_r) &= \mathbf{v}(t_r)/c_0, & \dot{\boldsymbol{\beta}}(t_r) &= \partial \boldsymbol{\beta}(t_r)/\partial t_r, & \gamma(t_r) &= 1/\sqrt{1-\beta^2(t_r)}, \\ \mathbf{R}(t_r) &= R(t_r) \mathbf{e}_R(t_r) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_q(t_r) & \text{und} & & \kappa(t_r) &= \partial t/\partial t_r = 1 - \mathbf{e}_R(t_r) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_r). \end{aligned} \quad (3.109)$$

Dabei ist $\mathbf{e}_R(t_r)$ der zur retardierten Zeit vom Teilchen zum Aufpunkt weisende Einheitsvektor und es gilt $\beta(t_r) = v(t_r)/c_0$. Die Felder in der Umgebung der Punktladung setzen sich additiv aus geschwindigkeits- und beschleunigungsabhängigen Termen zusammen [Hen07, Bra97]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{e}_R - \boldsymbol{\beta}}{\gamma^2 R^2 \kappa^3} + \frac{1}{R c_0 \kappa^3} \mathbf{e}_R \times [(\mathbf{e}_R - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right\}_{t_r} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_R(t_r) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)/c_0. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Der Index t_r an der geschweiften Klammer soll betonen, dass alle Größen $\boldsymbol{\beta}$, $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, γ , R , $\mathbf{e}_R$ und κ zur retardierten Zeit $t_r = t - R(t_r)/c_0$ auszuwerten sind, was wir im Folgenden stets voraussetzen wollen. Die Vektoren der Vakuumfelder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ stehen immer senkrecht aufeinander.

- Die **Geschwindigkeitsfelder** sind nur von der Teilchengeschwindigkeit $\mathbf{v} \propto \boldsymbol{\beta}$ abhängig und werden wie $1/R^2$ kleiner. Dieser **Nahfeldbeitrag** ist bei $\boldsymbol{\beta} = \text{const.}$ (mit $\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$) wegen

$$\begin{aligned} R(t_r) (\mathbf{e}_R(t_r) - \boldsymbol{\beta}) &= R(t) \mathbf{e}_R(t) \quad \text{und} \\ R(t_r) \kappa(t_r) &= R(t_r) (1 - \mathbf{e}_R(t_r) \cdot \boldsymbol{\beta}) = R(t_r) (1 - \beta \cos \vartheta(t_r)) = R(t) \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta(t)} \end{aligned} \quad (3.111)$$

identisch zum Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung – siehe (3.103) in Übung 3.7. Den ausführlichen Beweis von (3.111) findet man z. B. in [LaLi97, Jac02, Fli94].

- Dagegen werden die **Beschleunigungsfelder** zusätzlich von der Teilchenbeschleunigung $\dot{\mathbf{v}} \propto \dot{\boldsymbol{\beta}}$ bestimmt und fallen wie $1/R$ ab. Dieser im **Fernfeld** dominierende Beitrag wird als Strahlungsfeld bezeichnet. Seine Feldkomponenten stehen $\perp$ auf $\mathbf{e}_R$ und sind transversal.

Im Fernfeld können wir die Geschwindigkeitsfelder also vernachlässigen und bei langsam bewegten Ladungen ($\beta \ll 1$) kann dort (3.110) noch vereinfacht werden. Wir erhalten so eine Beziehung für die Ausstrahlung von Kugelwellen, die wir in Abschnitt 8.3 untersuchen werden:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c_0} \frac{1}{R} \mathbf{e}_R \times (\mathbf{e}_R \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \quad \text{und} \quad c_0 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_R \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)} \quad (3.112).$$

3.8.1 Strahlungsleistung

In großer Entfernung von der Ladung können wir die Energie $dE(t)$, die in der Zeit dt durch das Flächenelement $R^2(t_r) d\Omega(t_r) = R^2(t_r) \sin\vartheta(t_r) d\vartheta(t_r) d\varphi(t_r)$ hindurch tritt, mit Hilfe des Poyntingvektors der Beschleunigungsfelder $\mathbf{S}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E(t)}{dt d\Omega(t_r)} &= \frac{dP(t)}{d\Omega(t_r)} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{e}_R(t_r) \cdot (\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r}, t)) R^2(t_r) = \\ &= \frac{1}{\mu_0 c_0} \mathbf{e}_R(t_r) \cdot [\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t) \times (\mathbf{e}_R(t_r) \times \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t))] R^2(t_r) = \frac{1}{\mu_0 c_0} |\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t)|^2 R^2(t_r). \end{aligned} \quad (3.113)$$

Die von der Ladung zur Zeit t_r abgestrahlte Leistung $P(t_r)$ erhalten wir aber erst durch eine Transformation der Zeiteinheit dt des Beobachters auf die Zeiteinheit dt_r der Ladung:

$$\frac{dE(t_r)}{dt_r} = \frac{dE(t)}{dt} \frac{\partial t}{\partial t_r} = \frac{dE(t)}{dt} \kappa(t_r) \Rightarrow P(t_r) = P(t) (1 - \mathbf{e}_R(t_r) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_r)). \quad (3.114)$$

Es gilt $P(t) > P(t_r)$, falls sich die Ladung auf den Beobachter zu bewegt. Dieser Effekt ähnelt dem Doppler-Effekt, bei dem die Empfangsfrequenz nach (5.72) um den Faktor $1/(\gamma\kappa)$ höher wird. So folgt mit $\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ nach (3.110) die Winkelverteilung der Strahlungsleistung:

$$\boxed{\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_{t_r} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c_0} \frac{1}{\kappa^5} \left| \mathbf{e}_R \times [(\mathbf{e}_R - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right|^2}, \quad (3.115)$$

wobei jetzt alle Größen einheitlich im System der retardierten Zeit t_r zu messen sind. Die Winkelintegration von (3.115) liefert nach [Jac02] die gesamte Strahlungsleistung:

$$\boxed{P(t_r) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c_0} \gamma^6 \left[\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \right]}. \quad (3.116)$$

Dies ist die 1898 von Liénard¹⁴ gefundene relativistische Erweiterung der älteren Larmor-schen¹⁵ **Formel** für die Strahlungsleistung langsam bewegter Ladungen im Falle $\beta \ll 1$:

$$P(t_r) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c_0} \dot{\boldsymbol{\beta}}^2. \quad (3.117)$$

Aus (3.115) und (3.116) folgen wichtige Spezialfälle. Wenn linear sich bewegende Elektronen z. B. durch ein Metall abgebremst werden, entsteht Röntgenstrahlung, während bei kreisförmiger Bewegung von Elektronen in Speicherringen Synchrotronstrahlung erzeugt wird.

¹⁴ Alfred Marie **Liénard** (1869-1958): frz. Physiker (Elektrodynamik, beschleunigte Ladungen)

¹⁵ Sir Joseph **Larmor** (1857-1942): brit. Physiker und Mathematiker (Larmor-Präzession der Elektronen, Elektrodynamik, Thermodynamik, Relativitätstheorie und Astronomie)

3.8.2 Linear beschleunigte Punktladung

Wählt man die z-Achse in Bewegungsrichtung, dann folgt aus (3.115) mit $\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$:

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_{t_r} = \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c_0} \frac{1}{\kappa^5} \left| \mathbf{e}_R \times (\mathbf{e}_R \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right|^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c_0} \frac{1}{\kappa^5} \left| \mathbf{e}_R (\mathbf{e}_R \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}} \right|^2. \quad (3.118)$$

Die Strahlungsleistung, die in einen bestimmten Raumwinkelbereich abgegeben wird, ist also proportional zum Quadrat der transversalen Beschleunigung, die senkrecht auf der Sichtachse des Beobachters zur retardierten Teilchenposition steht. Mit $\kappa = 1 - \beta \cos \vartheta$ folgt aus (3.118):

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_{t_r} = \frac{q^2 \beta^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c_0} \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^5}. \quad (3.119)$$

Da die Beschleunigung quadratisch in (3.119) eingeht, spielt ihr Vorzeichen offenbar keine Rolle – eine Abbremsung der Ladung würde daher zum selben Effekt führen, was man tatsächlich beim Auftreffen von Kathodenstrahlen (Elektronen) auf einen metallischen Anodenblock beobachtet. Diese so genannte **Bremsstrahlung** hat ein kontinuierliches Spektrum und bildet einen Anteil der Röntgenstrahlung, der andere stammt von den angeregten Atomen der Anode. Die räumliche Verteilung der Strahlungsleistung (3.119) wird durch das Quadrat der so genannten **Richtcharakteristik** C beschrieben, auf die wir in Kapitel 7 noch näher eingehen werden:

$$\boxed{C^2(\vartheta, \beta) = \frac{1}{N(\beta)} \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^5}} \quad \text{mit dem Normierungsfaktor } N(\beta). \quad (3.120)$$

Bei kleinen Geschwindigkeiten ($\beta \ll 1$) liegt das Maximum der Abstrahlung bei $\vartheta_m = \pi/2$, also quer zur Bewegungsrichtung. Nach [Lang96] gilt für Richtung und Stärke des Maximums:

$$\vartheta_m = \arccos \frac{\sqrt{1+15\beta^2}-1}{3\beta} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \frac{1}{2\gamma} \quad \text{und} \quad N(\beta) = \frac{54}{\beta^2} \frac{\sqrt{1+15\beta^2}-1-3\beta^2}{\left(4-\sqrt{1+15\beta^2}\right)^5} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} 2,62 \gamma^8. \quad (3.121)$$

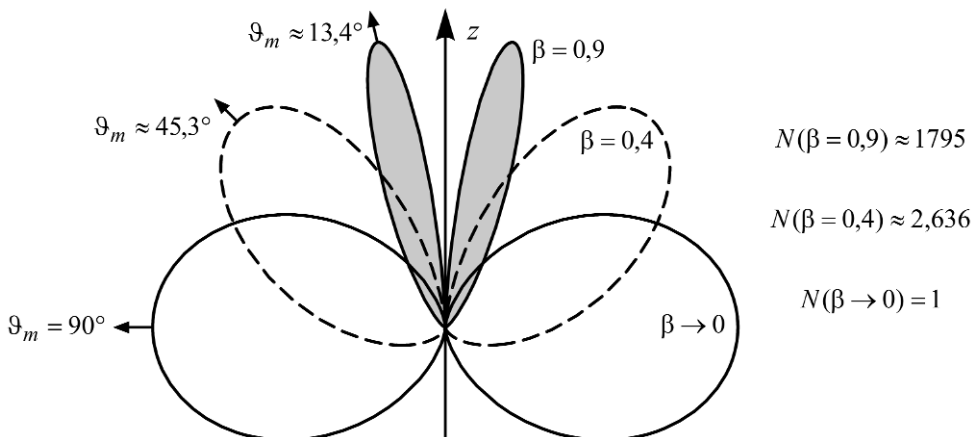


Bild 3.11 Winkelabhängigkeit der Strahlungsleistung einer linear beschleunigten Punktladung (3.120)

Nach Bild 3.11 strahlt die Ladung innerhalb eines mit zunehmender Geschwindigkeit immer enger werdenden Kegels um die z-Achse. Alle Diagramme sind auf ihr Maximum normiert.

3.8.3 Kreisförmig beschleunigte Punktladung

Geladene Teilchen, die in einem kreisförmigen Beschleuniger (Synchrotron) umlaufen, geben breitbandige Synchrotronstrahlung ab und erleiden dadurch Strahlungsverluste. Durch Vergrößern des Bahnradius a werden die Verluste geringer – im Grenzfall $a \rightarrow \infty$ erhält man wieder den Linearbeschleuniger. Zur Beschreibung der Kreisbewegung benutzen wir ein kartesisches Koordinatensystem mit der Punktladung im Ursprung, das sich auf der Kreisbahn mitbewegt. Wir legen wieder die z -Achse in die momentane Bewegungsrichtung der Ladung ($\mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$), während die x -Achse in die Richtung der Beschleunigung weist ($\dot{\mathbf{v}} = \dot{v} \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x v^2/a$), also zum Kreismittelpunkt. Die Kreisbahn liegt in der x - z -Ebene. Die üblichen Polarwinkel zeigen die momentane Richtung zum Beobachter an und zwar weist ϑ aus der Kreisebene heraus und φ ist wieder der Winkel zwischen $\mathbf{e}_R$ und der z -Achse (Bild 3.12). Mit diesen Vereinbarungen folgt aus (3.115) die Winkelverteilung der abgestrahlten Leistung [Pan69, Hea95, Hen07]:

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_{t_r} = \frac{q^2 \dot{\beta}^2}{16 \pi^2 \epsilon_0 c_0} \frac{1}{(1 - \beta \cos \vartheta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \vartheta)^2} \right]. \quad (3.122)$$

Mit (3.122) erhalten wir die (normierte) räumliche Verteilung der Strahlungsleistung aus

$$C^2(\vartheta, \varphi, \beta) = \frac{(1 - \beta \cos \vartheta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}{(1 - \beta)^{-3} (1 - \beta \cos \vartheta)^5}, \quad (3.123)$$

die in Bild 3.12 für drei verschiedene Bahngeschwindigkeiten dargestellt ist.

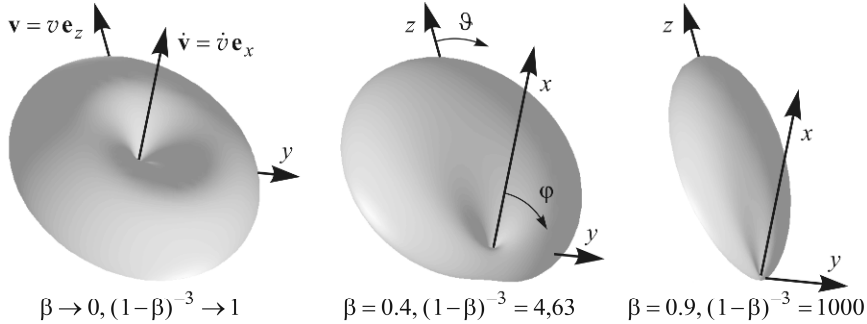


Bild 3.12 Winkelabhängigkeit der Strahlungsleistung einer zirkular beschleunigten Punktladung (3.123)

Aus (3.123) erhalten wir den Schnitt in der Kreisbahnebene, wenn wir $\varphi = 0$ setzen:

$$C^2(\vartheta, \varphi = 0, \beta) = \frac{(\beta - \cos \vartheta)^2}{(1 - \beta)^{-3} (1 - \beta \cos \vartheta)^5}. \quad (3.124)$$

Die Breite der Keule können wir aus der Lage der Nullstelle $\vartheta_0 = \arccos \beta$ ermitteln. Wegen des Normierungsfaktors $(1 - \beta)^{-3}$ hat die Strahlung in Vorwärtsrichtung ($\vartheta = 0$) den Wert $C = 1$. Der Beitrag in Rückwärtsrichtung ($\vartheta = \pi$) kann für $\beta \rightarrow 1$ praktisch vernachlässigt werden:

$$C^2(\vartheta = \pi, \varphi = 0, \beta) = \frac{(1 - \beta)^3}{(1 + \beta)^3} \rightarrow \frac{(1 - \beta)^3}{8} \rightarrow 0. \quad (3.125)$$

Die Vorwärtsstrahlung wird nach (3.122) für $\beta \rightarrow 1$ wie $8\gamma^6$ größer, wobei die Keulenbreite $2\vartheta_0$ stark abnimmt. Daher wird die Synchrotronstrahlung eines hochrelativistischen Teilchens ($\beta \rightarrow 1$) von einem Beobachter in der x - z -Ebene – außerhalb der Kreisbahn – als intensiver, sehr kurzer Impuls wahrgenommen, was zu einem sehr breitbandigen Spektrum führt.

3.9 Übungen

- 3.9.1** In der komplexen Materialgleichung $\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ tritt eine frequenzabhängige Permittivität $\varepsilon(\omega)$ auf. Zeigen Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation (3.59), dass die zugehörigen Zeitfunktionen durch ein Faltungsintegral verknüpft sind:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(t) * \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau.$$

Nur bei schmalbandiger Anregung können wir die Frequenzabhängigkeit von $\varepsilon(\omega)$ vernachlässigen. Dann lässt sich $\varepsilon(t)$ über eine Diracsche Deltafunktion ausdrücken

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \varepsilon e^{j\omega t} d\omega = \varepsilon \delta(t),$$

wodurch die Materialgleichung die einfachere Form $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ annimmt.

- 3.9.2** Im Vakuum soll der magnetische Feldstärkephasor $\underline{\mathbf{H}}(z, \omega) = \underline{H}_0 \mathbf{e}_y e^{-j\omega z/c_0}$ vorliegen. Zeigen Sie mit Hilfe der Maxwell'schen Gleichungen, dass daraus folgt

$$\underline{\mathbf{E}}(z, \omega) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \underline{H}_0 \mathbf{e}_x e^{-j\omega z/c_0} \quad \text{mit} \quad c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}.$$

- 3.9.3** Zeigen Sie mit Hilfe des komplexen Poyntingschen Satzes (3.16), dass in einem geschlossenen verlustlosen Hohlraumresonator die zeitlichen Mittelwerte der elektrischen und der magnetischen Feldenergie übereinstimmen.

- 3.9.4** Betrachten Sie die ebene stromfreie Trennfläche zwischen zwei homogenen permeablen Halbräumen mit $\mu_1 = 100\mu_0$ und $\mu_2 = \mu_0$. Die Trennfläche falle bei $z = 0$ mit der x-y-Ebene zusammen. Bestimmen Sie für $B_{x,1}(z = 0_-) = 10^{-3} \text{ T}$ die Felder $B_{x,2}(z = 0_+)$ sowie $H_{x,1}(z = 0_-)$ und $H_{x,2}(z = 0_+)$.

Lösungen:

- 3.9.3** Im komplexen Poyntingschen Satz

$$2j\omega \iiint_V (\underline{w}_e - \underline{w}_m) dV = \frac{1}{2} \iiint_V \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* dV + \oint_A \underline{\mathbf{S}} \cdot d\mathbf{A}$$

verschwindet das erste Integral auf der rechten Gleichungsseite, weil es – nach Voraussetzung – keine Ohmschen Verluste gibt. Das zweite Integral verschwindet ebenfalls, da ein geschlossener Hohlraum keine Strahlungsverluste aufweist. Damit gilt

$$2j\omega \iiint_V (\underline{w}_e - \underline{w}_m) dV = 0 \quad \text{bzw.} \quad \iiint_V \underline{w}_e dV = \iiint_V \underline{w}_m dV.$$

- 3.9.4** $B_{x,2}(z = 0_+) = 10^{-5} \text{ T}$ und $H_{x,1}(z = 0_-) = H_{x,2}(z = 0_+) = B_{x,1}(z = 0_-)/\mu_1 = 7,96 \text{ A/m}$

4 Ebene Wellen

Durch die beschleunigte Bewegung von Ladungsträgern können elektromagnetische Wellen erzeugt werden, die sich von ihren Quellen ablösen und sich im Raum mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Die Felder einer solchen Welle sind einerseits mathematische Hilfsgrößen zur Beschreibung der Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen, andererseits transportieren sie Energie und Impuls und haben dadurch eine eigenständige physikalische Realität.

4.1 Ebene Wellen im Dielektrikum

4.1.1 Lösung der Helmholtz-Gleichung

Es soll der einfachste Fall der Wellenausbreitung in einem unbegrenzten und quellenfreien ruhenden Medium untersucht werden, dessen Materialeigenschaften von Ort und Richtung unabhängig sind – das Medium sei also homogen und isotrop. Für eingeschwungene harmonische Zeitabhängigkeit $e^{j\omega t}$ können wir in kartesischen Koordinaten die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem leitfähigen Dielektrikum nach (3.61) durch die **homogene vektorielle Helmholtz-Gleichung**

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \varepsilon - j \omega \mu \kappa \right) \underline{\mathbf{E}} = 0 \quad (4.1)$$

beschreiben. Mit dem komplexen Vektor $\underline{\mathbf{E}} = \underline{E}_x \mathbf{e}_x + \underline{E}_y \mathbf{e}_y + \underline{E}_z \mathbf{e}_z$ muss also jede der drei kartesischen Komponenten eine homogene skalare Helmholtz-Gleichung erfüllen; z. B. gilt für $\underline{E}_x$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{E}_x = 0}, \quad (4.2)$$

wobei wir mit (3.63) die bequeme Abkürzung

$$\boxed{\underline{\gamma}^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon + j \omega \mu \kappa = -\omega^2 \mu \underline{\varepsilon}} \quad (4.3)$$

eingeführt haben. Bevor wir in Kapitel 6 am Beispiel des Rechteckhohlleiters die allgemeinste Lösung von (4.2) suchen, wollen wir zunächst einen einfacheren Spezialfall betrachten.

Die einfachsten und fundamentalsten elektromagnetischen Wellen sind **transversale ebene Wellen**, die sich geradlinig ausbreiten und in Ebenen quer zu ihrer Ausbreitungsrichtung keine Feldabhängigkeit aufweisen, also homogen sind.

Nehmen wir o. B. d. A. an, dass sich die gesuchte Welle längs der z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems ausbreitet, so drücken wir ihre Homogenität im Querschnitt mathematisch wie folgt aus:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0. \quad (4.4)$$

Damit vereinfacht sich die zu lösende Differenzialgleichung (4.2) beträchtlich:

$$\frac{d^2 \underline{E}_x}{dz^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{E}_x = 0. \quad (4.5)$$

Diese gewöhnliche Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die bekannte Lösung:

$$\underline{E}_x(z) = \underline{E}_{x,h} e^{-\underline{\gamma}z} + \underline{E}_{x,r} e^{\underline{\gamma}z}. \quad (4.6)$$

Durch Wahl der beiden komplexen Konstanten $\underline{E}_{x,h} = \hat{E}_{x,h} e^{j\varphi_h}$ und $\underline{E}_{x,r} = \hat{E}_{x,r} e^{j\varphi_r}$ muss diese Lösung noch an eventuell vorhandene Randbedingungen angepasst werden. Das noch fehlende Magnetfeld erhalten wir nach (3.57) direkt aus der zweiten Maxwellschen Gleichung:

$$\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mathbf{B}}. \quad (4.7)$$

Mit Hilfe von Tabelle 2.6 kann die Rotation berechnet werden und wir finden zunächst:

$$\underline{B}_y = \frac{1}{-j\omega} \frac{d\underline{E}_x}{dz}, \quad (4.8)$$

womit wir schließlich nach Einsetzen von (4.6) und Differenziation erhalten:

$$\underline{B}_y(z) = \frac{\underline{\gamma}}{j\omega} \left(\underline{E}_{x,h} e^{-\underline{\gamma}z} - \underline{E}_{x,r} e^{\underline{\gamma}z} \right) = \underline{B}_{y,h} e^{-\underline{\gamma}z} + \underline{B}_{y,r} e^{\underline{\gamma}z}. \quad (4.9)$$

Wegen $\underline{\mathbf{B}} = \mu \underline{\mathbf{H}}$ können wir auch schreiben:

$$\underline{H}_y(z) = \frac{\underline{\gamma}}{j\omega\mu} \left(\underline{E}_{x,h} e^{-\underline{\gamma}z} - \underline{E}_{x,r} e^{\underline{\gamma}z} \right) = \underline{H}_{y,h} e^{-\underline{\gamma}z} + \underline{H}_{y,r} e^{\underline{\gamma}z}. \quad (4.10)$$

Aus der positiven Wurzel von (4.3) erhalten wir die komplexe Größe

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon + j\omega \mu \kappa}, \quad (4.11)$$

die als **Ausbreitungs-** oder **Fortpflanzungskonstante** bezeichnet wird. In der komplexen Zahlenebene wird ihr ein Zeiger im I. Quadranten zugeordnet. Die Dämpfungskonstante $\alpha \geq 0$ gibt die Amplitudenabnahme je Länge in Ausbreitungsrichtung und die Phasenkonstante $\beta = 2\pi/\lambda > 0$ die Phasenänderung in Ausbreitungsrichtung der Welle an. Die Freiraumwellenlänge wird wie üblich mit λ bezeichnet.

Aus dem Verhältnis der komplexen Amplituden der elektrischen und magnetischen Quersfeldstärken (4.6) und (4.10) jeweils der hinlaufenden bzw. rücklaufenden Welle folgt mit $\underline{\varepsilon}$ nach (3.63) die **Feldwellenimpedanz**, die im verlustfreien Fall gleich $Z_F = Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ wird:

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{E}_{x,h}}{\underline{H}_{y,h}} = -\frac{\underline{E}_{x,r}}{\underline{H}_{y,r}} = \frac{j\omega\mu}{\underline{\gamma}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa + j\omega\varepsilon}} = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1 - j\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (4.12)$$

Die Gleichungen (4.6) und (4.10) für $\underline{E}_x(z)$ und $\underline{H}_y(z)$ beschreiben die Überlagerung einer in positiver z-Richtung fortschreitenden elektromagnetischen Welle (Index „h“ für hinlaufende

Welle) mit einer sich in negativer z-Richtung ausbreitenden Welle (Index „r“ für rücklaufende oder reflektierte Welle). Die Richtung der Wellenausbreitung

$$„h“ \propto e^{-\underline{\gamma} z} = e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} : \quad \text{positive z-Richtung bzw.} \quad (4.13)$$

$$„r“ \propto e^{\underline{\gamma} z} = e^{\alpha z} e^{j\beta z} : \quad \text{negative z-Richtung} \quad (4.14)$$

bestimmt man aus der Forderung, dass die Welle in passiver Materie, d. h. für $\alpha \geq 0$, aus energetischen Gründen jeweils nur abklingen kann. Im Zeitbereich folgt die Darstellung z. B. der elektrischen Feldstärke direkt aus (4.6) mit (4.11):

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= \operatorname{Re} \left\{ \underline{E}_x(z) e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \underline{E}_{x,h} e^{-\underline{\gamma} z} e^{j\omega t} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \underline{E}_{x,r} e^{\underline{\gamma} z} e^{j\omega t} \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \hat{E}_{x,h} e^{j\varphi_h} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \hat{E}_{x,r} e^{j\varphi_r} e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\omega t} \right\} = \\ &= \hat{E}_{x,h} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_h) + \hat{E}_{x,r} e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \varphi_r). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Übung 4.1: Ausbreitungskonstante

- Zerlegen Sie die Ausbreitungskonstante

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon + j\omega \mu \kappa} \quad (4.16)$$

in ihren Real- und Imaginärteil.

- **Lösung:**

Man quadriert die Beziehung (4.16) und erhält [Edm84]:

$$\alpha^2 + 2j\alpha\beta - \beta^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon + j\omega \mu \kappa. \quad (4.17)$$

Die komplexe Gl. (4.17) kann in Form zweier reeller Gln. geschrieben werden:

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon \quad (4.18)$$

$$2\alpha\beta = \omega \mu \kappa. \quad (4.19)$$

Wir lösen (4.19) nach α auf:

$$\alpha = \frac{\omega \mu \kappa}{2\beta} \quad (4.20)$$

und setzen das Ergebnis in (4.18) ein. Dadurch folgt eine quadratische Gleichung für β^2 :

$$\beta^4 - \omega^2 \mu \varepsilon \beta^2 - \frac{(\omega \mu \kappa)^2}{4} = 0, \quad (4.21)$$

deren Lösung wir mit $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$ direkt angeben können:

$$\beta = \frac{k}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \varepsilon^2}}} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (4.22)$$

Aus (4.18) folgt $\alpha = \sqrt{\beta^2 - k^2}$ und damit wird die noch fehlende Dämpfungskonstante

$$\alpha = \frac{k}{\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \epsilon^2}}} \quad (4.23)$$

In einem Medium mit schwachen Verlusten, d. h. bei $\kappa/(\omega\epsilon) = \tan \delta_\epsilon \ll 1$, kann man durch Entwickeln der Wurzeln in Taylor-Reihen folgende Näherungen erhalten:

$$\alpha \approx \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 - \frac{\kappa^2}{8 \omega^2 \epsilon^2} \right) = \frac{k}{2} \tan \delta_\epsilon \left(1 - \frac{\tan^2 \delta_\epsilon}{8} \right) \quad \text{und} \quad \beta \approx k \left(1 + \frac{\tan^2 \delta_\epsilon}{8} \right). \quad (4.24)$$

Die Dämpfung ist also in erster Näherung proportional zur Leitfähigkeit des Mediums. $\square$

Bei einer Welle mit den Feldkomponenten $(\underline{E}_x, \underline{H}_y)$ und Ausbreitung in $\pm z$ -Richtung stehen elektrische und magnetische Feldstärkevektoren senkrecht aufeinander und ihrerseits senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Es gibt also nur transversale Feldkomponenten. Eine solche Welle wird transversale elektromagnetische Welle oder **TEM-Welle** genannt. Die Flächen konstanter Phase, die als Wellen- oder Phasenfronten bezeichnet werden, bilden Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Eine ebene Welle erfüllt im theoretischen Sinn den gesamten unbegrenzten Raum und ist daher in der Praxis nicht realisierbar, da sie eine unendlich große Energiemenge transportieren würde. Reale elektromagnetische Wellen im freien Raum und längs der Erdoberfläche haben dagegen sphärische Phasenfronten mit (im Fernfeld) vernachlässigbarer Krümmung. Darum kann man eine globale Kugelwelle lokal durch eine TEM-Welle annähern.

Die Orientierung der Feldstärken bei einer verlustfreien, ebenen Welle mit $\alpha = 0$, die sich in die positive z -Richtung bewegt, zeigt Bild 4.1. Wir betrachten dort die räumliche Verteilung der Felder zum willkürlich gewählten Zeitpunkt $\omega t = \pi/2$. Nach (4.15) ergibt sich bei einer Startphase von $\varphi_h = 0$ folgendes Momentanbild der räumlichen Abhängigkeit:

$$E_x(z) = \hat{E}_x \cos(\omega t - \beta z) \Big|_{\omega t = \pi/2} = \hat{E}_x \sin(\beta z). \quad (4.25)$$

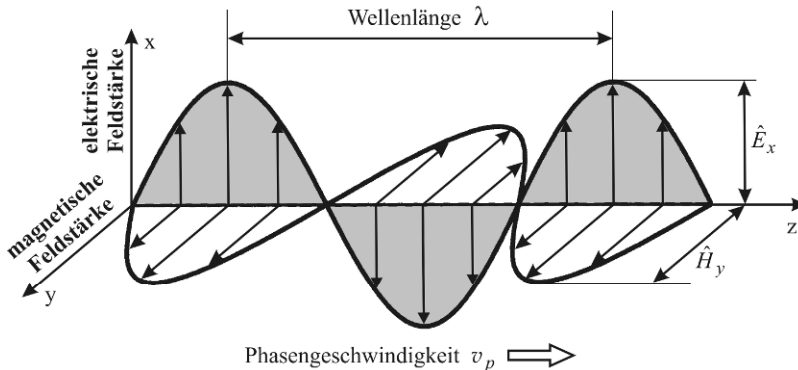


Bild 4.1 Ortsdarstellung der Felder einer TEM-Welle zu einem festen Zeitpunkt. Bei Variation der Zeit bewegen sich Bäuche und Knoten mit der Phasengeschwindigkeit v_p nach rechts.

- Den Abstand zweier benachbarter Ebenen gleicher Schwingungsphase bezeichnet man als Wellenlänge λ .
- Das Bild der Feldverteilung verschiebt sich mit der Phasengeschwindigkeit v_p nach rechts. In Übung 4.2 werden wir die Phasengeschwindigkeit einer ebenen Welle berechnen.

4.1.2 Geschwindigkeitsdefinitionen

Wenn die Phasenkonstante $\beta(\omega)$ wie in (4.22) nichtlinear von der Frequenz ω abhängt, dann spricht man von einem dispersiven Medium. Bei Vorliegen von **Dispersion** wird die Geschwindigkeit der Wellenausbreitung frequenzabhängig, was bei der Übertragung breitbandiger Signale zu linearen Verzerrungen führt. In einem idealen Medium ohne Dispersion, d. h. im Vakuum mit $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \omega/c_0$, werden alle im folgenden definierten Geschwindigkeiten gleich der **Vakuumlichtgeschwindigkeit** $c_0 = 2,99792458 \cdot 10^8$ m/s.

Zunächst wollen wir uns mit dem Begriff der Phasengeschwindigkeit beschäftigen. Wir setzen dazu eine monochromatische Welle von unendlicher Dauer und Ausdehnung voraus. Die Phasengeschwindigkeit beschreibt dann die Geschwindigkeit, mit der sich ein Zustand konstanter Phase im Raum ausbreitet. Eine solche Welle ist nur angenähert realisierbar und im Sinne der Informationstheorie eigentlich wertlos, da ihr der unvorhersehbare, statistische Charakter einer Nachricht fehlt.

Übung 4.2: Phasengeschwindigkeit

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich bei einer TEM-Welle ein Zustand gleicher Phase, d. h. eine Phasenfront, im Raume ausbreitet.

- **Lösung:**

Die Geschwindigkeit, mit der sich ein bestimmter Phasenzustand ausbreitet, erhält man aus folgendem Gedankenexperiment. Während sich für einen *ruhenden* Beobachter „Knoten“ und „Bäuche“ mit Phasengeschwindigkeit an ihm vorbei bewegen, bleibt für einen *mitbewegten* Beobachter, der gleichsam auf einem Wellenberg mitreitet, die Phase konstant. Nach (4.15) stellen wir also die Forderung:

$$\Phi(t, z) = \omega t \mp \beta z + \varphi_0 = \text{const.} \quad (4.26)$$

(4.26) kann als totales Differenzial geschrieben werden:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = 0. \quad (4.27)$$

Nach Bilden der Ableitungen erhalten wir zunächst $\omega dt \mp \beta dz = 0$, woraus sofort die gesuchte **Phasengeschwindigkeit** folgt:

$$\boxed{v_p = \frac{dz}{dt} = \pm \frac{\omega}{\beta(\omega)} = \pm \lambda f} \quad (4.28)$$

Das positive Vorzeichen gehört dabei zu einer Welle, die in die positive z-Richtung läuft, während das negative Vorzeichen die Phasengeschwindigkeit einer Welle in negativer z-Richtung beschreibt. Nach (4.22) gilt:

$$\beta(\omega) = \omega \sqrt{\mu \epsilon / 2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \epsilon^2}}} \quad (4.29)$$

und damit ist in leitfähigen Medien die Phasengeschwindigkeit von der Frequenz abhängig:

$$v_p(\omega) = \frac{\omega}{\beta(\omega)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \epsilon^2}}}} \leq c. \quad (4.30)$$

Damit ist bei TEM-Wellen v_p stets kleiner oder gleich der Lichtgeschwindigkeit und erreicht für hohe Frequenzen den Grenzwert

$$v_F = \lim_{\omega \rightarrow \infty} v_p(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} 1/\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)} = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = c_0, \quad (4.31)$$

weil bei genügend schneller Änderung der Felder ($\omega \rightarrow \infty$), die Polarisationsprozesse in materiellen Körpern diesen Änderungen aufgrund der Trägheit der Ladungsträger nicht mehr folgen können (Relaxation). Nach plötzlichem Einschalten eines Generators wird sich die erste Wellenfront als Diskontinuität mit der für $\omega \rightarrow \infty$ gültigen Phasengeschwindigkeit ausbreiten. Darum wird diese Geschwindigkeit auch **Frontgeschwindigkeit** v_F genannt. Die Front eines Signals pflanzt sich stets mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 fort, da für unendliche Frequenzen alle Einflüsse des Mediums auf die Wellenausbreitung vernachlässigbar sind. $\square$

Für einen monochromatischen Wellenzug fester gegebener Frequenz – also ein zeitlich unendlich andauerndes Sinussignal – ist nur die Phasengeschwindigkeit von Bedeutung. In der Praxis sendet aber keine Quelle monochromatisch, sondern mehr oder weniger scharfe Frequenzbündel. Es überlagern sich hier also Wellen von verschiedener – aber benachbarter – Frequenz zu einer so genannten Wellengruppe. Ein solches Wellenpaket breitet sich nicht mit der Phasengeschwindigkeit v_p , sondern vielmehr mit der Gruppengeschwindigkeit v_g aus. Als Beispiel soll nach *Stokes* (siehe [Som92]) die Summe zweier Wellen gleicher Amplitude, aber von etwas verschiedener Frequenz betrachtet werden. Die Frequenzdifferenz $\Delta\omega$ hat dann auch eine Änderung der Phasenkonstanten um $\Delta\beta$ zur Folge. Die zu untersuchende **Wellengruppe** lautet:

$$f(z, t) = A \cos[\omega t - \beta z] + A \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (\beta + \Delta\beta)z]. \quad (4.32)$$

Diese Summe können wir leicht umformen:

$$f(z, t) = 2A \cos\left[\frac{\Delta\omega t - \Delta\beta z}{2}\right] \cos\left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(\beta + \frac{\Delta\beta}{2}\right)z\right]. \quad (4.33)$$

- Für kleine Frequenzänderungen $|\Delta\omega| \ll \omega$ oszilliert das Summensignal in $f(z, t)$ nahezu mit der Frequenz ω .
- Der hochfrequente Schwingungsanteil $\cos[(\omega + \Delta\omega/2)t - (\beta + \Delta\beta/2)z]$ wird durch den langsam oszillierenden Faktor $\cos[(\Delta\omega t - \Delta\beta z)/2]$ in der Amplitude verändert.
- Es kommt zu periodischen Interferenzen mit Verstärkung und Auslöschung.
- Das somit entstehende Signal (4.33) hat den Charakter einer Schwebung. In Bild 4.2 wurde ein Verhältnis $\omega/\Delta\omega = 6$ angenommen. Durch Interferenz formen sich einzelne Impulse oder Gruppen deutlich heraus.

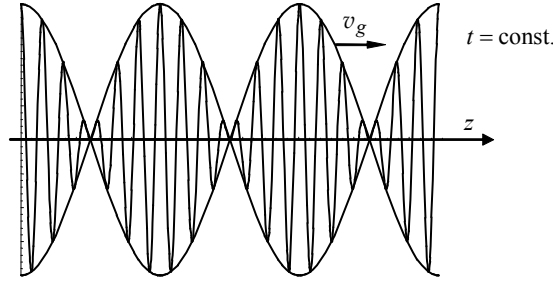


Bild 4.2 Schwebung (4.33) durch Überlagerung zweier Schwingungen (entspricht Einseitenband-Amplitudenmodulation mit Modulationsgrad $m = 2$). Die Einhüllende des Wellenzugs bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit v_g .

Im Grenzfall $\Delta\omega \rightarrow 0$ ist die **Phasengeschwindigkeit** des zusammengesetzten Signals

$$v_p = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\omega + \Delta\omega/2}{\beta + \Delta\beta/2} = \frac{\omega}{\beta} \approx c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{2\omega\epsilon} \right)^2 + \frac{7}{8} \left(\frac{\kappa}{2\omega\epsilon} \right)^4 \right] \leq c, \quad (4.34)$$

während sich die Einhüllende mit der **Gruppengeschwindigkeit** ausbreitet:

$$v_g = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{d\omega}{d\beta} \approx c \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{2\omega\epsilon} \right)^2 - \frac{13}{8} \left(\frac{\kappa}{2\omega\epsilon} \right)^4 \right] \geq c. \quad (4.35)$$

Einem Wellenzug endlicher Länge, d. h. einem Information tragenden Signal, wird durch die Fourier-Transformation ein kontinuierliches Spektrum zugeordnet, das sich im Allgemeinen aus einer Superposition aller Frequenzen $-\infty < \omega < \infty$ zusammensetzt. In einem dispersiven Medium bewegt sich jede dieser Harmonischen mit der ihr eigenen Phasengeschwindigkeit. Für den Impuls als Ganzes verliert daher der Begriff der Phasengeschwindigkeit seine Bedeutung und wird bei schmalbandigen Signalen durch die Gruppengeschwindigkeit ersetzt, die man sich anschaulich als Schwerpunktgeschwindigkeit des Wellenzuges vorstellen kann und bei geringer Dispersion mit der Geschwindigkeit der Einhüllenden übereinstimmt (Bild 4.2). Während der Ausbreitung verbreitert sich allerdings der Impuls und fließt allmählich auseinander. Bei starker Dispersion unterliegt die ursprünglich lokalisierte Wellengruppe daher einer baldigen Verschmierung, sodass dann auch die Gruppengeschwindigkeit ihren Sinn verliert. Nach (4.34) und (4.35) gilt folgender Zusammenhang zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit:

$$v_g = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{d(\omega/v_p)}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{v_p - \omega \frac{dv_p}{d\omega}}{v_p^2}} = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p} \frac{dv_p}{d\omega}}. \quad (4.36)$$

Wenn die Phasengeschwindigkeit linear von der Frequenz abhängt ($v_p \propto \omega$), muss nach (4.36) die Gruppengeschwindigkeit den Wert unendlich annehmen. Bei überproportionalem Anstieg von v_p mit der Frequenz wird sogar $v_g < 0$. Neben (4.36), wo v_g als Funktion von ω und v_p dargestellt wurde, ist zuweilen auch folgende Darstellung von Nutzen:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{d}{d\beta} (\beta v_p) = v_p + \beta \frac{dv_p}{d\beta}. \quad (4.37)$$

Übung 4.3: Gruppengeschwindigkeit

- Untersuchen Sie nach (4.35) die Gruppengeschwindigkeit, mit der sich die Einhüllende einer Schwebung im Raume ausbreitet.

- **Lösung:**

Mit $1/v_g = d\beta/d\omega$ und $\beta(\omega)$ nach (4.29) machen wir folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{d}{d\omega} \left\{ \frac{\omega}{c\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \epsilon^2}}} \right\}. \quad (4.38)$$

Wir differenzieren (4.38) und multiplizieren das Ergebnis mit $2c^2/v_p$ nach (4.30):

$$\frac{2c^2}{v_g v_p} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \epsilon^2}} - \frac{\kappa^2}{2\omega^2 \epsilon^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \epsilon^2}}}. \quad (4.39)$$

Gewöhnlich gilt (außer bei Metallen) $\kappa/(\omega\epsilon) \ll 1$ und wir können die Wurzelausdrücke aus (4.39) in Taylor-Reihen entwickeln. Da sich die linearen Terme wegheben, müssen wir die Entwicklung bis zum quadratischen Term durchführen und erhalten:

$$\frac{2c^2}{v_g v_p} \approx 2 + \frac{1}{8} \left(\frac{\kappa^2}{\omega^2 \epsilon^2} \right)^2, \quad (4.40)$$

woraus sofort die so genannte **Bornis-Beziehung** für schwach dispersive Medien folgt:

$$\boxed{v_g v_p \approx \frac{c^2}{1 + \left(\frac{\kappa}{2\omega\epsilon} \right)^4} \approx c^2 \left[1 - \left(\frac{\kappa}{2\omega\epsilon} \right)^4 \right]} \quad (4.41)$$

Im verlustfreien Fall – ohne Dispersion – wird $v_g v_p = c^2$ und es gilt $v_g = v_p = c$. $\square$

Bemerkungen zur Dispersion bei TEM-Wellen:

- In dispersionsfreien Medien sind Gruppen- und Phasengeschwindigkeit identisch.
- Keine Dispersion liegt z. B. im verlustlosen Isolator oder im Vakuum vor.
- Nur im dispersionsfreien Fall kann eine isolierte Wellengruppe ohne Formänderung fort-schreiten. Im allgemeinen Fall fließt sie auseinander (siehe Bild 6.5).
- Breitet sich eine TEM-Welle in einem Medium mit Verlusten aus ($\kappa > 0$), dann gilt:

$$v_p < c < v_g. \quad (4.42)$$

- Wenn eine merkliche Absorption eintritt, kann der Begriff der Gruppengeschwindigkeit überhaupt nicht eingeführt werden, weil sich in einem absorbierenden Medium die Wellen-pakete nicht formgetreu ausbreiten, sondern einer schnellen „Verschmierung“ unterliegen.

Neben Phasen-, Gruppen- und Frontgeschwindigkeit wollen wir schließlich noch die **Energiegeschwindigkeit** v_E einführen [Str07, Col91]. Sie gibt die Geschwindigkeit eines Energiepakets $E = h f = \hbar \omega$ mit harmonischer Zeitabhängigkeit der Frequenz ω als Quotient aus dem reellen Poyntingschen Vektor $\mathbf{S}_R$ der Wirkleistungsdichte in W/m^2 und der räumlichen Gesamtenergiedichte $w = w_e + w_m$ in Ws/m^3 an und ist stets verträglich mit den Forderungen der speziellen Relativitätstheorie. Mit Hilfe von (3.13) und (3.15) finden wir:

$$\mathbf{v}_E(\omega) = \frac{\mathbf{S}_R}{w} = -\frac{\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \}}{\frac{\varepsilon}{4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{\mu}{4} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*}. \quad (4.43)$$

Man kann allgemein zeigen, dass für alle Frequenzkomponenten stets $v_E(\omega) \leq c$ gilt. Kein Signal, d. h. keine Energie und keine Information, kann daher schneller als mit Lichtgeschwindigkeit übertragen werden. Mit $c = 1/\sqrt{\mu \varepsilon}$ und $Z_F = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ können wir den Quotienten in (4.43) noch umformen:

$$\mathbf{v}_E(\omega) = c \frac{2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times Z_F \mathbf{H}^* \}}{|\mathbf{E}|^2 + Z_F^2 |\mathbf{H}|^2}. \quad (4.44)$$

Bei einer ebenen Welle im verlustfreien Isolator gilt stets $|\mathbf{E}| = Z_F |\mathbf{H}|$, weswegen hier die Energiegeschwindigkeit dem Betrage nach gleich der Lichtgeschwindigkeit wird, d. h. $v_E = c$.

Schlussbemerkung:

In dispersiven Medien ist die Geschwindigkeit jeder Wellenausbreitung abhängig von der Frequenz. Man kann – wie in Tabelle 4.1 – drei verschiedene Spezialfälle unterscheiden.

Tabelle 4.1 Einteilung dispersiver Medien und ihre Wellengeschwindigkeiten

keine Dispersion	$v_E = v_g = v_p = c$	TEM-Welle im Freiraumvakuum
anomale Dispersion	$v_E = v_p < c < v_g$	TEM-Welle in Medium mit Verlusten
normale Dispersion	$v_E = v_g < c < v_p$	Hohlleiterwellen – siehe Kapitel 6

Die Übertragung von Informationen ist stets an den Transport einer messbaren Energiemenge gebunden. Ein in seiner Empfindlichkeit gesteigerter Empfänger kann ein ankommendes Signal daher zeitlich früher detektieren, jedoch nicht bevor die allererste Wellenfront eingetroffen ist. Die Frontgeschwindigkeit v_F eines jeden Signals ist nach (4.31) immer gleich der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 . Zur Überbrückung einer räumlichen Distanz Δx ist daher mindestens eine Zeit $\Delta t = \Delta x/c_0$ nötig. Phasengeschwindigkeit v_p und Gruppengeschwindigkeit v_g , können durchaus größere Werte als die Vakuumlichtgeschwindigkeit annehmen oder sogar negativ werden (siehe Bild 9.7). In diesen Fällen verlieren diese Geschwindigkeitsdefinitionen ihren Sinn und verleiten zu falschen Schlussfolgerungen, denn niemals erscheint die Wirkung vor der Ursache (**Kausalität**). Einzig die Energiegeschwindigkeit v_E , die man auch als Signalgeschwindigkeit bezeichnet, wird niemals superluminal (schneller als das Licht). Scheinbare Verletzungen der Kausalität erweisen sich regelmäßig als Missinterpretationen aufgrund unzulässiger Auslegung des Geschwindigkeitsbegriffs [Reb99]. Weitere Informationen findet man in [Kar99, Kar00, Kar05].

4.2 Ebene Wellen im Leiter

Wir betrachten nun den Fall, dass sich eine ebene Welle in einem gut leitfähigen Medium ausbreitet; dann gilt im Allgemeinen $\kappa \gg \omega \varepsilon$. Bei Kupfer ist beispielsweise

$$\frac{\kappa}{\omega \varepsilon} \approx \frac{58 \cdot 10^6 \text{ S/m}}{2 \pi f 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}} \approx \frac{1,04 \cdot 10^9}{f/\text{GHz}} \gg 1, \quad (4.45)$$

was bei üblichen Frequenzen im Mikrowellenbereich weitaus größer als eins ist. Die Formel (4.11) für die Ausbreitungskonstante $\underline{\gamma}$ vereinfacht sich dann wie folgt:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon + j\omega \mu \kappa} = \sqrt{j\omega \mu \kappa \left(1 + j \frac{\omega \varepsilon}{\kappa}\right)} \approx \sqrt{j\omega \mu \kappa}. \quad (4.46)$$

Mit $\sqrt{j} = e^{j\pi/4} = (1+j)/\sqrt{2}$ werden also Dämpfungs- und Phasenkonstante identisch:

$$\boxed{\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu \kappa}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \kappa}}. \quad (4.47)$$

Dieses Ergebnis hätte man auch aus der direkten Lösung der komplexen Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung mit $\underline{\gamma}^2 = j\omega \mu \kappa$ erhalten können (siehe (3.56)):

$$\boxed{\nabla^2 \underline{E} - j\omega \mu \kappa \underline{E} = 0}. \quad (4.48)$$

Für eine in die positive z-Richtung laufende Welle finden wir daher folgende Felddarstellung:

$$\boxed{\underline{E}_x(z) = \underline{E}_{x,h} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = \underline{E}_{x,h} e^{-z\sqrt{\pi f \mu \kappa}} e^{-jz\sqrt{\pi f \mu \kappa}}}. \quad (4.49)$$

Der Abstand $z = \delta$, nach dem in einem gut leitenden Medium die Feldstärke einer ebenen Welle auf einen Wert von $1/e \approx 0,368$ abgefallen ist, wird als **Eindringtiefe** definiert. Aus $e^{-\alpha \delta} = e^{-1}$ ergibt sich δ als Kehrwert von α :

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \kappa}}}. \quad (4.50)$$

Wir haben es also mit einer stark gedämpften Wellenausbreitung zu tun. Bei den meisten Metallen wird dieser starke Dämpfungseffekt bereits bei sehr niedrigen Frequenzen beobachtet. Hochfrequente Wellen können also durch metallische Platten abgeschirmt werden. Die Schirmwirkung eines Bleches ist dem Dämpfungsfaktor α direkt proportional, d. h. umso besser, je größer die elektrische Leitfähigkeit κ und die Permeabilität μ des Abschirmmaterials sind. In einer Plattentiefe δ liegt nur noch eine Leistungsdichte von $e^{-2\alpha\delta} = 1/e^2 \approx 0,135$ vor. Mit den Feldkomponenten verknüpfte Leitungsstromdichten $\underline{J}_L = \kappa \underline{E}$ fließen daher überwiegend innerhalb einer oberflächennahen Schicht (**Skineffekt**) und nehmen mit zunehmender Tiefe exponentiell ab. Das Innere eines Hochfrequenzleiters ist somit nahezu feld- und stromfrei. Dieser Effekt wurde bereits 1900 durch Mie¹ vorhergesagt.

¹ Gustav Adolf Feodor Wilhelm Ludwig **Mie** (1868-1957): dt. Physiker (Atomtheorie, Elektromagnetismus, Allgemeine Relativitätstheorie, Mie-Streuung an einer homogenen Kugel)

Die Eindringtiefe δ wird auch als **äquivalente Leitschichtdicke** bezeichnet. Wegen

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha z} dz = \frac{e^{-\alpha z}}{-\alpha} \Big|_{z=0}^{\infty} = \frac{1}{\alpha} = \delta \quad (4.51)$$

betrachten wir nämlich anstelle des wahren Stromverlaufs, der mit zunehmender Materialtiefe exponentiell abnimmt, eine äquivalente leitende Schicht der Tiefe δ , innerhalb derer ein konstanter Strombelag unterstellt wird (Bild 4.3). Außerhalb dieser dünnen Oberflächenschicht sollen in unserem Modell keine Ströme mehr fließen. Für die meisten Berechnungen ist dieses einfache Rechteckmodell ausreichend genau; es entspricht etwa der Vorgehensweise in der Nachrichtentechnik, bei der man ein reales Tiefpassfilter durch einen äquivalenten idealen Tiefpass mit rechteckiger Übertragungsfunktion und Grenzfrequenz am 3dB-Punkt ersetzt.

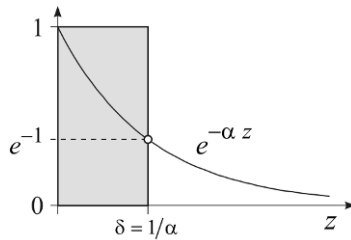


Bild 4.3 Flächengleiche rechteckige Schicht der Tiefe δ als Modell für die exponentielle Stromabnahme

Die **Stromverdrängung**, d. h. die unvollständige Ausnutzung des leitenden Querschnitts einer metallischen Leitung, bedingt eine Widerstandszunahme mit steigender Frequenz f . Wir berechnen dazu den Verlustwiderstand R einer Doppelleitung aus zwei rechteckigen parallelen Sammelschienen der Länge l und der Höhe h , die als Hin- bzw. Rückleitung eines Wechselstroms dienen. Wie in Bild 4.4 breitet sich zwischen den Schienen eine TEM-Welle aus, deren Feld in das Metall eindringt und zu einer einseitigen Stromverdrängung führt. Die Schienenbreite b soll dabei groß gegenüber der Eindringtiefe $b \gg \delta$ sein, sodass die Außenseiten der Schienen praktisch feldfrei sind.

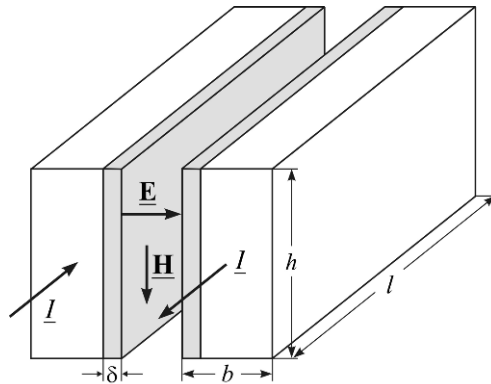


Bild 4.4 Doppelleitung aus zwei metallischen Sammelschienen mit äquivalenter Leitschichtdicke δ

Der Gleichstromwiderstand R_0 einer Schiene ist bekanntermaßen:

$$R_0 = \frac{l}{\kappa b h} \quad (4.52)$$

Zur Berechnung des Hochfrequenzwiderstands des metallischen Leiters – im Falle starker Stromverdrängung ($\kappa \gg \omega \varepsilon$) – betrachten wir nach (4.12) zunächst die Feldwellenimpedanz:

$$\underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j \omega \mu}{\kappa + j \omega \varepsilon}} \approx \sqrt{\frac{j \omega \mu}{\kappa}} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \kappa}} = \frac{1 + j}{\kappa \delta}, \quad (4.53)$$

die hier auch als Wandimpedanz bezeichnet wird. Den Hochfrequenzwiderstand R einer Schiene erhalten wir dann mit Hilfe des Realteils der Feldwellenimpedanz und ihre innere Induktivität L_i folgt aus dem Imaginärteil:

$$R = \frac{l}{h} \operatorname{Re}\{\underline{Z}_F\} = \frac{l}{h} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \kappa}} = \frac{l}{\kappa \delta h} \quad (4.54)$$

$$\omega L_i = \frac{l}{h} \operatorname{Im}\{\underline{Z}_F\} = \frac{l}{h} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \kappa}} = \frac{l}{\kappa \delta h}. \quad (4.55)$$

(4.54) entsteht aus (4.52), indem man die Substitution $b \leftrightarrow \delta$ vornimmt. Also folgt:

$$R = \omega L_i = \frac{b}{\delta} R_0 = \frac{l}{h} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \kappa}}. \quad (4.56)$$

Aufgrund der Stromverdrängung steigt der Leitungswiderstand R mit der Frequenz an, während die innere Induktivität L_i bei höheren Frequenzen kleiner wird. Es gelten die Zusammenhänge $R \propto \sqrt{f}$ und $L_i \propto 1/\sqrt{f}$. Die Serienschaltung *beider* Schienen (Hin- und Rückleitung) ergibt dann einen Wert von $2R$ bzw. $2L_i$. Bei zylindrischen Leiterstücken mit Radius a , die in Richtung ihrer Längsachse z einen sinusförmigen Wechselstrom der Frequenz f führen, beobachtet man ebenfalls den Effekt der Stromverdrängung. Während bei Gleichstrom und bei niedrigen Frequenzen ($ka \ll 1$) der Strom (nahezu) gleichmäßig über dem gesamten Leiterquerschnitt verteilt ist – unabhängig von der Form des Leiterquerschnitts – erfolgt die Stromleitung bei hinreichend hohen Frequenzen im Wesentlichen nur in einer dünnen Schicht unter der Oberfläche. Bei hohen Frequenzen ($ka \gg 1$) nimmt der Betrag der Stromdichte $J_z(\rho)$ mit wachsender Tiefe $a - \rho$ nach einer Exponentialfunktion ab. Die Stromdichteverteilung über dem Leiterquerschnitt mit Durchmesser $D = 2a$ ist in Bild 4.5 für beide Grenzfälle dargestellt.

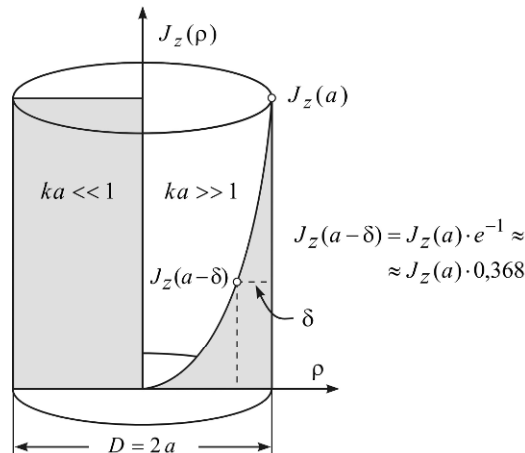


Bild 4.5 Leitender zylindrischer Draht ohne (links) bzw. mit starker Stromverdrängung (rechts)

Für einen kreiszylindrischen Kupferleiter mit Radius $a \gg \delta$ fließt der Strom praktisch nur in einer ringförmigen Schicht auf dem Zylindermantel. Es gilt dann angenähert:

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\frac{l}{\kappa \pi (a^2 - (a - \delta)^2)}}{\frac{l}{\kappa \pi a^2}} = \frac{a^2}{a^2 - (a - \delta)^2} = \frac{a^2}{2a\delta - \delta^2} \approx \frac{a}{2\delta} = \frac{a}{2} \sqrt{\pi f \mu \kappa} . \quad (4.57)$$

Übung 4.4: Skineffekt

- Für einen kreiszylindrischen Kupferleiter, dessen Radius a sehr groß gegenüber der stromführenden Schicht $a \gg \delta$ am Umfang sein soll (Fall starker symmetrischer Stromverdrängung), soll das Verhältnis R/R_0 des Wechsel- und Gleichstromwiderstandes berechnet werden. Die Zahlenwerte betragen $a = 4 \text{ mm}$, $\kappa = 58 \cdot 10^6 \text{ S/m}$, $f = 1 \text{ MHz}$ und $\mu = \mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$.
- **Lösung:**

Die Eindringtiefe wird nach (4.50):

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \kappa}} = \frac{1 \text{ m}}{\sqrt{\pi \cdot 10^6 \cdot 4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 58 \cdot 10^6}} \approx 0,066 \text{ mm} . \quad (4.58)$$

Daraus folgt mit (4.57) sofort der Anstieg des Hochfrequenzwiderstands:

$$\frac{R}{R_0} \approx \frac{a}{2\delta} = \frac{4 \text{ mm}}{2 \cdot 0,066 \text{ mm}} \approx 30 . \quad \square \quad (4.59)$$

In der Hochfrequenztechnik stellt man wegen des Skineffekts Leitungen nicht aus massivem Kupferdraht sondern aus Litzendraht her. Bei HF-Litze wird der Leiter aus einem Bündel dünner gegeneinander isolierter Kupferdrähte gebildet, die man miteinander verdreht (Bild 4.6).

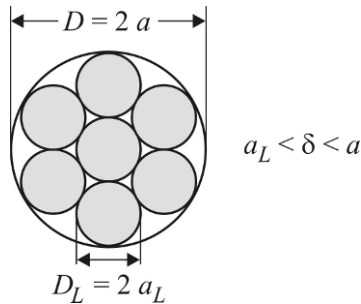


Bild 4.6 Gegenseitig isolierte dünne Litzendrähte, zu einem dickeren Strang gebündelt

In einem solchen Strang macht sich der Skineffekt erst bei sehr viel höheren Frequenzen bemerkbar als bei einem massiven Einzeldraht gleichen Gesamtquerschnitts, falls der Radius der dünnen Litzendrähte kleiner als die Eindringtiefe ist:

$$a_L < \delta < a . \quad (4.60)$$

In diesem Fall kann dann von vollständiger Querschnittsausnutzung in der Litze ausgegangen werden und es liegt nun keine Stromverdrängung mehr vor.

Für einige technisch wichtige Leitermaterialien, bei denen – mit Ausnahme von Eisen – $\mu = \mu_0$ gilt, finden wir ihre elektrische Leitfähigkeiten κ (bei Zimmertemperatur) in Tabelle 4.2.

Tabelle 4.2 Elektrische Leitfähigkeit κ einiger gebräuchlicher metallischer Leitermaterialien bei 20° C

siehe Anhang D	Lötzinn (Sn/Pb)	Platin (Pt)	Eisen (Fe)	Messing (Cu/Zn)	Zink (Zn)	Alu (Al)	Gold (Au)	Kupfer (Cu)	Silber (Ag)
$\frac{\kappa}{10^6 \text{ S/m}}$	7	10	10	15	17	36	44	58	63

Die Eindringtiefe δ kann mit Hilfe von Tabelle 4.2 in Abhängigkeit von der Frequenz errechnet werden. Für Kupfer bei $f = 50 \text{ MHz}$ gilt z. B.:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \kappa}} = \frac{1 \text{ m}}{\sqrt{\pi \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot 4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 58 \cdot 10^6}} \approx 9,3 \mu\text{m}. \quad (4.61)$$

Ein Kupferblech der Dicke 0,1 mm – das sind nach (4.61) etwa 10,7 Eindringtiefen – würde dann eine elektrische Feldstärke $\underline{E}_0$ bei $f = 50 \text{ MHz}$ bereits auf den Betrag

$$|\underline{E}_0| e^{-\alpha z} = |\underline{E}_0| e^{-z/\delta} = |\underline{E}_0| e^{-0,1/0,0093} \approx 2,25 \cdot 10^{-5} |\underline{E}_0| \quad (4.62)$$

dämpfen, d. h. um etwa $20 \lg(1/(2,25 \cdot 10^{-5})) \approx 93 \text{ dB}$. In Bild 4.7 ist abschließend die **Dämpfung** eines gut leitenden Metallschirms als Funktion seiner Dicke z , ausgedrückt in Vielfachen der Eindringtiefe δ , dargestellt. Wir lesen dort z. B. eine Schirmdämpfung von bereits 60 dB ab, falls die Blechdicke nur etwa 6,9 Eindringtiefen beträgt.

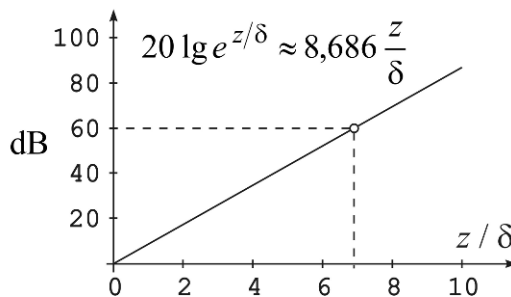


Bild 4.7 Schirmdämpfung eines Metallblechs als Funktion seiner auf die Eindringtiefe normierten Dicke

In der Praxis kann man davon ausgehen, dass die tatsächliche Abschirmwirkung eines Metallblechs sogar noch höher als nach Bild 4.7 ausfallen wird. Wenn eine Welle nämlich auf ein solches Blech einfällt, wird sie sich in einen reflektierten und einen transmittierten Anteil aufspalten. Der durchgelassene Wellenanteil, dem natürlich die bereits reflektierte Energie schon fehlt, wird dann analog zu (4.62) im Metall exponentiell gedämpft und an der hinteren Wand des Blechs abermals teilweise reflektiert, sodass der am Ende tatsächlich durchgelassene Anteil der einfallenden Welle durch nunmehr zwei Reflexionen gegenüber unserer einfachen Betrachtung reduziert ist.

Die Behandlung von Reflexion und Transmission an ebenen Trennflächen werden wir noch ausführlich in Kapitel 5 behandeln. Das Dreischichtenproblem betrachten wir speziell in Abschnitt 5.5.

4.3 Ebene Wellen im Supraleiter

Das Phänomen der Supraleitung (engl.: *superconductivity*) wurde bereits 1911 von Kamerlingh Onnes² bei Leitfähigkeitsmessungen nahe des absoluten Nullpunktes entdeckt. Unterhalb einer Sprungtemperatur von ca. $T_C = 4,2$ K konnte er das Verschwinden des Gleichstromwiderstandes von Quecksilber (**Hg**) experimentell feststellen (Bild 4.8). Entsprechende Beobachtungen gelangen ihm auch bei Blei und bei Zinn [Buck90, Hin88].

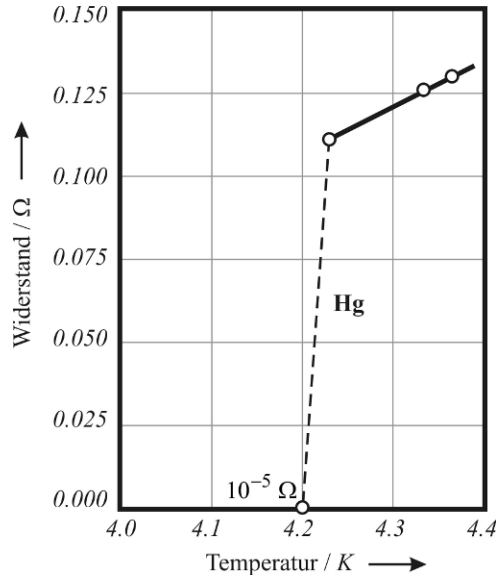


Bild 4.8 Gleichstromwiderstand von Quecksilber (historische Sprungkurve 1911) als Funktion von T

Die phänomenologische Theorie der Supraleitung (1935) der Gebrüder London³ wurde 1950 von Ginsburg⁴ und Landau⁵ weiterentwickelt. Ein besseres Verständnis der Supraleitung konnte erst 1957 durch Bardeen⁶, Cooper⁷ und Schrieffer⁸ auf der Basis der Quantenmechanik entwickelt werden (BCS-Theorie). Durch Wechselwirkung der Elektronen mit den Gitterschwingungen schließen sich jeweils zwei Elektronen entgegengesetzten Spins zu energetisch günstigeren Cooper-Paaren zusammen. Ein solches Paar kann sich reibungsfrei (also widerstandslos)

² Heike **Kamerlingh Onnes** (1853-1926): niederld. Physiker (Gasverflüssigung von Wasserstoff und Helium, elektrische Leitfähigkeit bei tiefen Temperaturen, Supraleitung, Nobelpreis f. Physik 1913)

³ Fritz Wolfgang **London** (1900-1954) und Heinz **London** (1907-1970): dt.-amerik. Physiker (Quantenmechanik, Supraleitung, Suprafluidität von flüssigem Helium)

⁴ Witalij Lasarewitsch **Ginsburg** (1916-2009): sowjet. Physiker (Supraleitung, Elementarteilchen, Kristalloptik, Ferroelektrizität, Ionosphären- und Astrophysik, Nobelpreis f. Physik 2003)

⁵ Lew Dawidowitsch **Landau** (1908-1968): sowjet. Physiker (Magnetismus, kosmische Strahlung, Plasmaphysik, Supraleitung, Suprafluidität von flüssigem Helium, Quantenmechanik, Elementarteilchen, Kernphysik, Raketentechnik, Nobelpreis f. Physik 1962)

⁶ John **Bardeen** (1908-1991): amerik. Physiker (Geophysik, Quantenmechanik, Transistor, Supraleitung, Nobelpreise f. Physik 1956 und 1972)

⁷ Leon N. **Cooper** (*1930): amerik. Physiker (Supraleitung, Nobelpreis f. Physik 1972)

⁸ John Robert **Schrieffer** (*1931): amerik. Physiker (Supraleitung, Nobelpreis f. Physik 1972)

im Kristallgitter bewegen. Es wird durch Anziehungskräfte stabilisiert, die nur unterhalb der Sprungtemperatur groß genug sind, um die weiterhin vorhandenen Coulombschen Abstoßungskräfte zu überwinden. Bis heute sind etwa vierzig **Metalle** bekannt, die sich im supraleitenden Zustand befinden können. Außerdem kennt man einige hundert supraleitende Verbindungen und Legierungen; bei den Verbindungen ist häufig keine der Komponenten supraleitend. Über Jahrzehnte gelang es nicht, Materialien mit Sprungtemperaturen oberhalb von $T_C = 23 \text{ K}$ zu finden. Erst 1986 haben Bednorz⁹ und Müller¹⁰ mit **Keramikoxid-Werkstoffen** neue Hochtemperatur-Supraleiter erschlossen. Eine gut untersuchte Substanz ist z. B. $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ mit $T_C \approx 93 \text{ K}$. Durch Supraleitung bei Temperaturen oberhalb der Siedetemperatur des flüssigen Stickstoffs $T = 77 \text{ K}$ kann ein größerer technischer Anwendungsbereich erschlossen werden, z. B. supraleitende Magnete, Energiekabel, Schalt- und Speicherelemente sowie Miniaturantennen. Die Verbindung HgBaCaCuO hat sogar eine Sprungtemperatur von $T_C = 135 \text{ K}$.

4.3.1 Londonsche Gleichungen

Für viele technische Anwendungen liefert die einfache Londonsche Theorie der Supraleitung bereits ausreichende Genauigkeit. Ihre Grundüberlegungen wollen wir im Folgenden zusammenstellen. Man beachte, dass es sich hierbei um eine phänomenologische Betrachtungsweise handelt, die einen atomistischen Quanteneffekt mit makroskopischen Mitteln zu beschreiben versucht. Die Vorhersagen der Londonschen Theorie können daher nur qualitativen Charakter haben. Als Grundlage der Londonschen Theorie geht man weiterhin von der Gültigkeit der Maxwell'schen Gleichungen aus, d. h. mit $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ und $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Als weitere Grundgleichung wird auch weiterhin die Kontinuitätsgleichung angesehen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J} = 0. \quad (4.64)$$

Das Neue ist nun, dass die Volumenstromdichte $\mathbf{J}$ und die Raumladungsdichte ρ in einen *normalleitenden* Anteil (n) und einen *supraleitenden* Anteil (s) zerlegt werden. Im so genannten **Zwei-Flüssigkeiten-Modell** gilt nämlich:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s \quad \text{bzw.} \quad \rho = \rho_n + \rho_s \quad (4.65)$$

mit $\mathbf{J}_n = \rho_n \mathbf{v}_n$ und $\mathbf{J}_s = \rho_s \mathbf{v}_s$. Der normalleitende Anteil ist bekanntermaßen:

$$\mathbf{J}_n = \kappa_n \mathbf{E}, \quad (4.66)$$

wobei wir unter $\mathbf{J}_n$ die normalleitende Leitungsstromdichte verstehen wollen und keine eingepprägten oder konvektiven Ströme fließen sollen. Dass wir auch unterhalb der Sprungtemperatur T_C einen ohmschen Stromanteil $\mathbf{J}_n$ brauchen, geht aus dem Verhalten der Supraleitung in

⁹ Johannes Georg **Bednorz** (*1950): dt. Physiker und Werkstoffkundler (Hochtemperatur-Supraleitung, Nobelpreis f. Physik 1987)

¹⁰ Karl Alex **Müller** (*1927): schweiz. Physiker (Hochtemperatur-Supraleitung, Nobelpreis f. Physik 1987)

hochfrequenten Feldern hervor. Es scheint nämlich so, dass dort nur ein gewisser Teil der Elektronen als Suprastrom $\mathbf{J}_s$ einen reibungsfreien Kurzschluss bewirkt, während der Rest sich aber normal verhält, d. h. Verluste aufweist (siehe Übung 4.5). Der Suprastrom, dargestellt durch seine Volumenstromdichte $\mathbf{J}_s$, fließt dagegen *reibungslos*. In einem solchermaßen verlustlosen Leiter müssen die Elektronen daher gleichförmig beschleunigt werden, wenn ein elektrisches Feld $\mathbf{E}$ anliegt. Im Gegensatz zum Normalstrom, bei dem nach (4.66) die Stromdichte dem elektrischen Feld proportional ist ($\mathbf{J}_n \propto \mathbf{E}$), muss beim Suprastrom wegen des Kraftgesetzes $\mathbf{F}_s = m_s \partial \mathbf{v}_s / \partial t = q_s \mathbf{E}$ und $\mathbf{J}_s = \rho_s \mathbf{v}_s$ die zeitliche Änderung der Stromdichte dem elektrischen Feld proportional sein, d. h.

$$\partial \mathbf{J}_s / \partial t \propto \mathbf{E} . \quad (4.67)$$

Mit einer – noch experimentell zu bestimmenden – temperaturabhängigen Materialkonstanten $\Lambda(T)$ als Proportionalitätsfaktor setzen wir nach London an:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Lambda \mathbf{J}_s) = \mathbf{E} . \quad (4.68)$$

Dies ist die **erste Londonsche Gleichung**. Der Londonsche Materialkoeffizient $\Lambda(T)$ ist sehr empfindlich gegenüber Temperaturänderungen und kann räumlich und zeitlich stark schwanken. Deshalb ist Λ in die Differenziation einbezogen. Die zweite Londonsche Gleichung folgt direkt aus der ersten, wenn man diese in die zweite Maxwellsche Gleichung (4.63) einsetzt:

$$\text{rot } \mathbf{E} = \text{rot } \frac{\partial}{\partial t} (\Lambda \mathbf{J}_s) = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (4.69)$$

Damit ist die **zweite Londonsche Gleichung**:

$$\text{rot} (\Lambda \mathbf{J}_s) = - \mathbf{B} . \quad (4.70)$$

Die Londonschen Gleichungen (4.68) und (4.70) stellen einen Zusammenhang zwischen der neuen Suprastromdichte $\mathbf{J}_s$ und den elektromagnetischen Feldgrößen her. Dabei wurde eine später noch zu bestimmende neue Materialkonstante Λ eingeführt.

4.3.2 Telegraf- und Helmholtz-Gleichung

Bilden wir die Rotation der ersten Maxwellschen Gleichung (4.63), so erhalten wir mit $\mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s = \kappa_n \mathbf{E} + \mathbf{J}_s$ die Beziehung:

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{rot } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \text{rot} (\kappa_n \mathbf{E}) + \text{rot } \mathbf{J}_s . \quad (4.71)$$

Im *ruhenden, linearen, isotropen* und *homogenen* Supraleiter ergibt sich daraus:

$$\text{grad div } \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B} = \left(\mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \mu \kappa_n \right) \text{rot } \mathbf{E} + \mu \text{rot } \mathbf{J}_s . \quad (4.72)$$

Wegen der Quellenfreiheit der magnetischen Flussdichte ($\text{div } \mathbf{B} = 0$) und der zweiten Londonschen Gleichung $\text{rot } \mathbf{J}_s = - \mathbf{B} / \Lambda$ erhalten wir mit $\text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$ schließlich:

$$- \nabla^2 \mathbf{B} = - \left(\mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \mu \kappa_n \right) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\mu}{\Lambda} \mathbf{B} . \quad (4.73)$$

Das ist die auf den Supraleiter verallgemeinerte **Telegrafengleichung**:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{B}} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{B}}}{\partial t^2} - \mu \kappa_n \frac{\partial \underline{\mathbf{B}}}{\partial t} - \frac{\mu}{\Lambda} \underline{\mathbf{B}} = 0. \quad (4.74)$$

Für das elektrische Feld gilt eine formal identische Beziehung:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{E}} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} - \mu \kappa_n \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial t} - \frac{\mu}{\Lambda} \underline{\mathbf{E}} = 0. \quad (4.75)$$

Nur der letzte Summand $-\mu \underline{\mathbf{E}}/\Lambda$ unterscheidet diese Gleichung von der gewöhnlichen Telegrafengleichung (3.52) im Normalleiter. Für harmonische Zeitabhängigkeit $e^{j\omega t}$ gilt im Frequenzbereich – analog zu (3.61) – die verallgemeinerte vektorielle **Helmholtz-Gleichung**:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{B}} + \omega^2 \mu \varepsilon \underline{\mathbf{B}} - j\omega \mu \kappa_n \underline{\mathbf{B}} - \frac{\mu}{\Lambda} \underline{\mathbf{B}} = 0. \quad (4.76)$$

Mit $\kappa_s = 1/(\omega \Lambda)$ führen wir die elektrische Supraleitfähigkeit ein, womit sich (4.76) wie

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{B}} - j\omega \mu (j\omega \varepsilon + \kappa_n - j\kappa_s) \underline{\mathbf{B}} = 0 \quad (4.77)$$

schreiben lässt. Die komplexe Amplitude der Gesamtstromdichte ist dann:

$$\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{J}}_n + \underline{\mathbf{J}}_s = \underline{\kappa} \underline{\mathbf{E}} = (\kappa_n - j\kappa_s) \underline{\mathbf{E}} = \left(\kappa_n - \frac{j}{\omega \Lambda} \right) \underline{\mathbf{E}}. \quad (4.78)$$

In guten Leitern ist üblicherweise $\omega \varepsilon \ll \kappa_n$. Bei nicht allzu hohen Frequenzen wird außerdem $\kappa_n \ll \kappa_s = 1/(\omega \Lambda)$. So genügt es, bei Supraleitern *unterhalb* ihrer Sprungtemperatur anstelle von (4.76) eine vereinfachte Beziehung zu untersuchen:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{B}} - \frac{\mu}{\Lambda} \underline{\mathbf{B}} = 0 \quad \text{gültig für } \omega \varepsilon \ll \kappa_n \ll \kappa_s = 1/(\omega \Lambda). \quad (4.79)$$

Bei Gleichstrom ($\omega = 0$) gilt diese Gleichung sogar exakt. Wir suchen als Lösung von (4.79) eine homogene, ebene Welle, die sich im Supraleiter in die positive z -Richtung eines kartesischen Koordinatensystems ausbreitet, d. h. es soll analog zu (4.5) gelten:

$$\frac{d^2 \underline{B}_y}{dz^2} - \frac{\mu}{\Lambda} \underline{B}_y = 0. \quad (4.80)$$

Die bekannte Lösung dieser Differenzialgleichung ist:

$$\underline{B}_y(z) = \underline{B}_0 e^{-z\sqrt{\mu/\Lambda}}, \quad (4.81)$$

also ein exponentiell gedämpftes magnetisches Feld. Die **Londonsche Eindringtiefe** $z = \delta_L$ des Supraleiters, nach der das Feld auf $1/e$ abgeklungen ist, ergibt sich damit zu:

$$\delta_L(T) = \sqrt{\frac{\Lambda(T)}{\mu}}. \quad (4.82)$$

Die Eindringtiefe $\delta_L(T)$ ist in der Tat stark temperaturabhängig. Man stellt experimentell folgenden Zusammenhang fest:

$$\delta_L(T) = \begin{cases} \frac{\delta_L(0)}{\sqrt{1-(T/T_C)^4}} & \text{bei } T \leq T_C \\ \infty & \text{bei } T \geq T_C \end{cases} \quad (4.83)$$

Bild 4.9 zeigt schematisch die Temperaturabhängigkeit (4.83) der Eindringtiefe $\delta_L(T)$ unterhalb der Sprungtemperatur T_C .

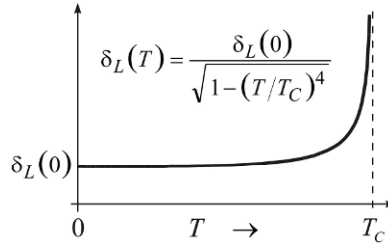


Bild 4.9 Londonsche Eindringtiefe unterhalb der Sprungtemperatur T_C

Mit $\delta_L(0)$ wird die Eindringtiefe in unmittelbarer Nähe des absoluten Nullpunktes bezeichnet. In Tabelle 4.3 sind für einige Supraleiter die Werte der **Londonschen Eindringtiefe** $\delta_L(0)$ zusammen mit den jeweiligen **Sprungtemperaturen** angegeben [Saw95].

Tabelle 4.3 Sprungtemperatur und Londonsche Eindringtiefe einiger Supraleiter

Material	Aluminium (Al)	Indium (In)	Zinn (Sn)	Blei (Pb)	Niob (Nb)	Y Ba ₂ Cu ₃ O ₇
T_C /K	1,19	3,40	3,72	7,18	9,46	93
$\delta_L(0)$ /nm	50	64	51	39	47	140

Die Londonschen Eindringtiefen bei klassischen Supraleitern bewegen sich also in der Größenordnung von etwa 50 nm. Bei keramischen Hochtemperatur-Supraleitern werden höhere Werte erreicht. Da Verunreinigungen in der Gitterstruktur praktisch kaum zu vermeiden sind, können im realen Versuchsaufbau die theoretischen Werte von $\delta_L(0)$ um einen Faktor von zwei bis fünf überschritten werden. Eine konservative Abschätzung wäre daher $\delta(0) \approx 5\delta_L(0)$.

- Wegen der sehr kleinen Eindringtiefen fließen im Supraleiter keine makroskopischen Volumenströme, sondern nur Oberflächenströme innerhalb einer extrem dünnen Schicht.
- Die starke Feldverdrängung tritt im Gegensatz zu Normalleitern, bei denen erst bei höheren Frequenzen das Feld aus dem Leiter hinausgedrängt wird, bereits bei Gleichstrom ein.
- In seinem Inneren ist ein Supraleiter – unterhalb seiner Sprungtemperatur – stets feldfrei. Dieser Effekt wurde bereits 1933 von Meißner¹¹ und Ochsenfeld¹² experimentell entdeckt. Dazu ist es unerheblich, ob der Supraleiter erst nachträglich in ein äußeres Magnetfeld verbracht wird oder ob ein Normalleiter im selben Magnetfeld durch Abkühlung supraleitend gemacht wird. Der Feldzustand eines Supraleiters hängt also nicht von seiner Vorgeschichte ab. Es wird stets das Magnetfeld aus ihm heraus gedrängt; als Folge dieser Feldverdrängung kann man z. B. eine supraleitende Kugel in einem konstanten Magnetfeld schweben lassen.

¹¹ Fritz Walther **Meißner** (1882-1974): dt. Physiker (Tiefemperaturphysik, Meißner-Ochsenfeld-Effekt)

¹² Robert **Ochsenfeld** (1901-1993): dt. Physiker (Tiefemperaturphysik, Meißner-Ochsenfeld-Effekt)

- Die Sprungtemperatur T_C eines Supraleiters hängt vom Magnetfeld in seiner Umgebung ab. Bei höheren Feldstärken wird nämlich der Eintritt in den supraleitenden Zustand in Richtung niedrigerer Temperaturen verschoben, T_C wird dann kleiner.
- Falls in (4.78) nicht mehr $\kappa_n \ll \kappa_s$ vorausgesetzt werden kann, tritt bei hochfrequenter Wechselanregung neben dem Suprastrom zunehmend der normalleitende Stromanteil in Erscheinung. Dann können auch im Supraleiter ohmsche Verluste auftreten.

Übung 4.5: Wechselstromverluste bei Supraleitern

- Wir wollen untersuchen, ab welcher Frequenz die Wechselstromverluste im Supraleiter nicht mehr vernachlässigt werden dürfen. Berechnen Sie dazu die Frequenz, bei der Leitungsstrom und Suprastrom von gleicher Größenordnung sind.

- **Lösung:**

Beide Stromanteile sind nach (4.78) betragsgleich, wenn $\kappa_n = \kappa_s$ gilt, also für:

$$\omega = \frac{1}{\kappa_n \Lambda}. \quad (4.84)$$

Wir können mit (4.82) die Materialkonstante Λ durch die Eindringtiefe ausdrücken:

$$\Lambda(T) = \mu \delta_L^2(T), \quad (4.85)$$

d. h. die gesuchte Frequenz wird:

$$\omega(T) = \frac{1}{\kappa_n \mu \delta_L^2(T)}. \quad (4.86)$$

Mit (4.83) folgt daraus das Ergebnis:

$$\boxed{\omega(T) = \frac{1 - (T/T_C)^4}{\kappa_n \mu \delta_L^2(0)}}. \quad (4.87)$$

Beispiel:

Wir entnehmen Tabelle 4.3 die Daten von reinem Blei (Pb): $T_C = 7,18 \text{ K}$ und $\delta_L(0) = 39 \cdot 10^{-9} \text{ m}$. Bei üblichen Verunreinigungen wollen wir als Sicherheitsreserve von einem fünffach höheren Wert ausgehen, also setzen wir $\delta(0) = 5 \delta_L(0) = 195 \cdot 10^{-9} \text{ m}$. Die elektrische Leitfähigkeit von Blei bei Zimmertemperatur beträgt $4,8 \cdot 10^6 \text{ S/m}$. Die Leitfähigkeit steigt mit Abkühlung der Probe. Nehmen wir an, das Blei werde mit flüssigem Helium auf $T = 4,2 \text{ K} < T_C$ gekühlt, so können wir nach [Pie77] etwa den hundertfachen Wert von $\kappa_n = 480 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ annehmen. Mit $\mu = \mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$ erhalten wir:

$$\omega(T) = 2 \pi f(T) = \frac{1 - (4,2/7,18)^4}{480 \cdot 10^6 \cdot 4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 195^2 \cdot 10^{-18}} \text{ Hz}, \quad (4.88)$$

woraus sich der Grenzwert $f = 6,1 \text{ GHz}$ ergibt. Man kann also bei Blei als Supraleiter für $f < 1 \text{ GHz}$ die Verluste vernachlässigen, während für $f > 10 \text{ GHz}$ die Verluste dagegen eine erhebliche Rolle spielen werden. $\square$

Die Londonsche Theorie ist eine einfache phänomenologische Theorie. Mit ihr lassen sich viele Erscheinungen an Supraleitern qualitativ richtig beschreiben. Die Londonschen Gleichungen

haben aber nicht einen solchen Status wie etwa die Maxwell'schen Gleichungen, die man als exakt annimmt. In den Londonschen Gleichungen ist die Verschiebung des Eintritts der Supraleitfähigkeit zu tieferen Temperaturen durch das magnetische Feld nicht enthalten. Je größer das magnetische Feld wird, um so kleiner wird T_C . Ein Supraleiter kann demnach durch Erhöhen des magnetischen Feldes wieder normalleitend werden. Dieser Effekt tritt auch durch das magnetische Feld des eigenen Suprastromes auf. Bei der Mehrzahl der Supraleiter, die nur aus einem Element bestehen, liegt die **kritische Feldstärke** bei $H_C \approx 80 T_C \text{ A/(cm K)}$. Mit der Londonschen Theorie lassen sich nicht immer *quantitativ* genügend genaue Ergebnisse erreichen. Ein Beispiel dafür ist die Berechnung der Stromwärmeverluste in Supraleitern. Die Londonsche Theorie ist immer dann weniger zuverlässig, wenn *starke* Magnetfelder oder sehr *dünne* supraleitende Schichten vorliegen.

4.4 Leistungstransport

Bisher haben wir ebene Wellen betrachtet, die sich längs der z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems ausbreiteten. Für eine in die positive z-Richtung laufende Welle gilt nach (4.6) nämlich die Darstellung:

$$\underline{E}_x(z) = \underline{E}_0 e^{-\underline{\gamma} z} \quad (4.89)$$

mit der komplexen Ausbreitungskonstanten:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon + j\omega \mu \kappa} \quad (4.90)$$

Wir definieren nun einen komplexen **Wellenzahlvektor** [Che90]:

$$\underline{k} = k \underline{e}_k = -j \underline{\gamma} \underline{e}_k = (\beta - j\alpha) \underline{e}_k \quad (4.91)$$

Der Einheitsvektor $\underline{e}_k$ soll dabei in Richtung der Wellenausbreitung zeigen. Eine Aufspaltung in kartesische Komponenten führt auf:

$$\underline{k} = \underline{e}_x k_x + \underline{e}_y k_y + \underline{e}_z k_z, \quad (4.92)$$

woraus sofort folgt:

$$\underline{k} \cdot \underline{k} = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = -\underline{\gamma}^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - j\omega \mu \kappa \quad (4.93)$$

Mit dem kartesischen Ortsvektor $\mathbf{r} = \underline{e}_x x + \underline{e}_y y + \underline{e}_z z$ führt nun der verallgemeinerte Ansatz

$$\boxed{\underline{E}(\mathbf{r}) = \underline{E}_0 e^{-j \underline{k} \cdot \mathbf{r}}} \quad (4.94)$$

im Sonderfall $\underline{e}_k = \underline{e}_z$ wieder auf das bekannte Ergebnis [Grei91]:

$$\underline{E}(\mathbf{r}) = \underline{E}_0 e^{-j(-j \underline{\gamma} \underline{e}_z) \cdot (\underline{e}_x x + \underline{e}_y y + \underline{e}_z z)} = \underline{E}_0 e^{-\underline{\gamma} z} \quad (4.95)$$

Dieser neue Ansatz (4.94) stellt offenbar eine Verallgemeinerung von (4.89) für *beliebige* Ausbreitungsrichtung $\underline{e}_k$ dar. Aus der zweiten Maxwell'schen Gleichung können wir mit $\underline{E}$ nach (4.94) auch eine Darstellung für das Magnetfeld erhalten (siehe Übung 4.6):

$$\underline{B} = \frac{-1}{j\omega} \text{rot } \underline{E} = \frac{-1}{j\omega} \text{rot} \left(\underline{E}_0 e^{-j \underline{k} \cdot \mathbf{r}} \right) \quad (4.96)$$

Übung 4.6: Komponenten einer homogenen ebenen Welle

- Berechnen Sie den Ausdruck

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{-1}{j\omega} \operatorname{rot}(\underline{\mathbf{E}}_0 e^{-j \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}}). \quad (4.97)$$

- **Lösung:**

Mit Hilfe einer uns bereits bekannten Beziehung der Vektoranalysis (siehe Tabelle 2.3) $\operatorname{rot}(\Phi \underline{\mathbf{A}}) = \Phi \operatorname{rot} \underline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{A}} \times \operatorname{grad} \Phi$ können wir den Ausdruck (4.97) umformen:

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{-1}{j\omega} \left[e^{-j \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}}_0 - \underline{\mathbf{E}}_0 \times \operatorname{grad} e^{-j \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}} \right] \quad (4.98)$$

Den Gradienten in (4.98) berechnen wir mit Hilfe des Nabla-Operators

$$\begin{aligned} \nabla e^{-j \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}} &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) e^{-j (\underline{k}_x x + \underline{k}_y y + \underline{k}_z z)} = \\ &= -j (\mathbf{e}_x \underline{k}_x + \mathbf{e}_y \underline{k}_y + \mathbf{e}_z \underline{k}_z) e^{-j \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}} = -j \underline{\mathbf{k}} e^{-j \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Wegen $\operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}}_0 = 0$ erhalten wir schließlich

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{-1}{j\omega} \left[-\underline{\mathbf{E}}_0 \times (-j \underline{\mathbf{k}}) e^{-j \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}} \right] = \frac{1}{\omega} \underline{\mathbf{k}} \times \underline{\mathbf{E}}_0 e^{-j \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{r}}}, \quad (4.100)$$

d. h. mit (4.94) gilt

$$\boxed{\underline{\mathbf{B}} = \frac{\underline{\mathbf{k}} \times \underline{\mathbf{E}}}{\omega}}. \quad \square \quad (4.101)$$

Bei einer ebenen Welle bilden also $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{B}}$ und $\underline{\mathbf{k}} = \underline{k} \mathbf{e}_k$ ein *orthogonales* Dreiein. In verlustfreien Medien gilt nach (4.91) $\underline{\mathbf{k}} = \beta \mathbf{e}_k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \mathbf{e}_k$, d. h. aus (4.101) folgt der Zusammenhang:

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{\omega \sqrt{\mu \varepsilon}}{\omega} \mathbf{e}_k \times \underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{c} \mathbf{e}_k \times \underline{\mathbf{E}}, \quad (4.102)$$

den wir mit dem reellen Feldwellenwiderstand $Z_F = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ folgendermaßen schreiben können:

$$\boxed{Z_F \underline{\mathbf{H}} = \mathbf{e}_k \times \underline{\mathbf{E}}}. \quad (4.103)$$

Beide Feldvektoren stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und schwingen phasengleich. Mit Hilfe des Entwicklungssatzes $\underline{\mathbf{A}} \times (\underline{\mathbf{B}} \times \underline{\mathbf{C}}) = \underline{\mathbf{B}} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{C}}) - \underline{\mathbf{C}} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}})$ folgt weiter:

$$\mathbf{e}_k \times Z_F \underline{\mathbf{H}} = \mathbf{e}_k \times (\mathbf{e}_k \times \underline{\mathbf{E}}) = \mathbf{e}_k (\mathbf{e}_k \cdot \underline{\mathbf{E}}) - \underline{\mathbf{E}} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k) = -\underline{\mathbf{E}}, \quad (4.104)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\mathbf{E}} = -\mathbf{e}_k \times Z_F \underline{\mathbf{H}}}. \quad (4.105)$$

Damit wird die Leistungsdichte der ebenen Welle reell – in verlustfreien Medien wird daher ausschließlich *Wirkleistung* in Richtung von $\mathbf{e}_k$ transportiert, aber keine *Blindleistung*:

$$\boxed{\mathbf{S} = S \mathbf{e}_k = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* = \mathbf{e}_k \frac{Z_F |\underline{\mathbf{H}}|^2}{2} = \mathbf{e}_k \frac{|\underline{\mathbf{E}}|^2}{2 Z_F} = \mathbf{e}_k \frac{|\underline{\mathbf{E}}| |\underline{\mathbf{H}}|}{2}}. \quad (4.106)$$

4.5 Übungen

- 4.5.1** In einem homogenen, nichtleitenden Medium mit $\mu_r = 1$ und $k = (4/3) \text{ m}^{-1}$ breitet sich eine TEM-Welle mit folgenden komplexen Amplituden aus:

$$\underline{\mathbf{E}} = 30 \pi \frac{\text{V}}{\text{m}} e^{-j k y} \mathbf{e}_z \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}} = 1,0 \frac{\text{A}}{\text{m}} e^{-j k y} \mathbf{e}_x.$$

Wie lauten die reellen Zeitfunktionen $\mathbf{E}(y, t)$ und $\mathbf{H}(y, t)$? In welche Richtung breitet sich die TEM-Welle aus? Welches ε_r hat das Medium und welchen Wert hat die Kreisfrequenz ω ? Welche Wirkleistung P wird im zeitlichen Mittel senkrecht durch einen Querschnitt von 1 m^2 transportiert?

- 4.5.2** In einem schwach leitfähigen Dielektrikum ($\varepsilon_r = 4$) mit anomaler Dispersion und $\kappa/(2\omega\varepsilon) = 0,1$ breite sich eine TEM-Welle mit einer Phasengeschwindigkeit von $v_p = 1,491 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ aus. Wie groß ist dann die Gruppengeschwindigkeit v_g ?
- 4.5.3** Eine TEM-Welle breite sich in Meerwasser mit den Materialkonstanten $\varepsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$ und $\kappa = 5 \text{ S/m}$ aus. Es sei $f = 25 \text{ kHz}$. Nach welcher Distanz d_1 ist die TEM-Welle um 20 dB gedämpft? Nun gelte $f = 25 \text{ MHz}$. Nach welcher Distanz d_2 ist jetzt die TEM-Welle um 20 dB gedämpft?
- 4.5.4** Gegeben ist ein gerader, zylindrischer, massiver Kupferdraht mit kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser $D = 200 \mu\text{m}$, Länge l). Wie groß ist der Gleichstromwiderstandsbelag $R'_0 = R_0/l$ des Leiters? Um wie viel steigt der HF-Widerstand bei den Frequenzen $f = 100 \text{ MHz}$ und $f = 10 \text{ GHz}$ im Vergleich zum Gleichstromwiderstand an?
- 4.5.5** Bestimmen Sie Phasen- und Gruppengeschwindigkeit in einem guten Leiter ($\kappa \gg \omega\varepsilon$).
- 4.5.6** Das Sonnenlicht, das am Äquator senkrecht auf die Erdoberfläche auftrifft, bewirkt dort im zeitlichen Mittel eine Strahlungsdichte von $S = 1,368 \text{ kW/m}^2$. Diese Größe wird als Solarkonstante bezeichnet. Wie groß sind hierbei die Effektivwerte der elektrischen und der magnetischen Feldstärke?
Der mittlere Abstand zwischen Sonne und Erde beträgt $r = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$. Welche Gesamtleistung wird daher von der Sonne im Bereich des sichtbaren Lichts abgestrahlt? Gehen Sie von einem kugelsymmetrischen Strahlungsfeld aus.

Lösungen:

4.5.1 $\mathbf{E}(y, t) = 30 \pi \frac{\text{V}}{\text{m}} \cos\left(\omega t - \frac{4}{3} \frac{y}{\text{m}}\right) \mathbf{e}_z$ und $\mathbf{H}(y, t) = 1,0 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cos\left(\omega t - \frac{4}{3} \frac{y}{\text{m}}\right) \mathbf{e}_x$

Ausbreitung in positive y-Richtung mit $\varepsilon_r = 16$, $\omega = 10^8 \text{ s}^{-1}$ und $P = 47,1 \text{ W}$

4.5.2 Aus $v_g v_p / c^2 \approx 1 - (\kappa/(2\omega\varepsilon))^4$ folgt mit $c^2 = c_0^2/\varepsilon_r$ der Wert $v_g = 1,507 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

4.5.3 $d_1 = 3,278 \text{ m}$ und $d_2 = 0,105 \text{ m}$

4.5.4 $R_{HF}/R_0 = 7,5$ und $R_{HF}/R_0 = 75$

4.5.5 Mit (4.47) folgt $v_p = \omega/\beta = c \sqrt{2\omega\varepsilon/\kappa} \ll c$ und es wird $v_g = d\omega/d\beta = 2 v_p \ll c$.

4.5.6 $E = 717,9 \text{ V/m}$, $H = 1,906 \text{ A/m}$ und $P = 3,868 \cdot 10^{23} \text{ kW}$

5 Ausbreitungseffekte

In Kapitel 4 haben wir uns mit der Ausbreitung ebener elektromagnetischer Wellen in homogenen, unendlich ausgedehnten Gebieten befasst. Das idealisierte Modell des freien Raumes ist eine gute Näherung der realen Ausbreitungssituation, wie sie bei Systemen der Funktechnik tatsächlich vorliegt. Für technische Anwendungen ist es nämlich ausreichend, den Raum als abschnittsweise homogen zu betrachten. Vorhandene Materialgrenzen müssen dann durch die Erfüllung der Stetigkeit der Felder berücksichtigt werden. Da im Allgemeinen die Reflexion und die Transmission an Grenzflächen von der jeweiligen Polarisation der einfallenden Welle abhängen, wollen wir zunächst den Polarisationsbegriff genauer untersuchen.

5.1 Polarisation

Neben Frequenz, Phase und Amplitude ist die Polarisation die vierte Kenngröße einer elektromagnetischen Welle. Sie wird bestimmt von der Orientierung des elektrischen Feldvektors in einem gegebenen Raumpunkt während einer Schwingungsperiode. Momentaufnahmen verschiedener Polarisationszustände in einem $3\lambda_0$ großen Bereich auf der z -Achse zeigt Bild 5.1.

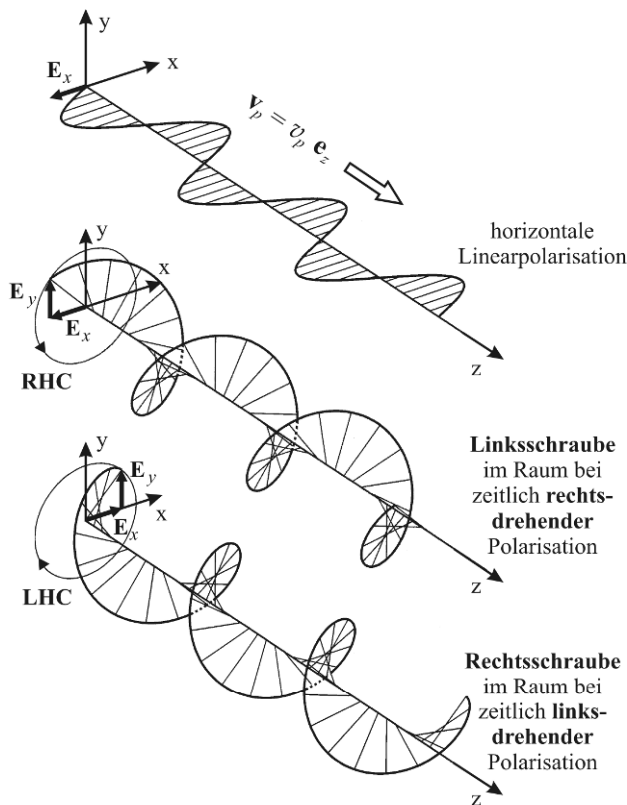


Bild 5.1 Momentaufnahmen der räumlichen Lage des E-Vektors bei Linear- und Zirkularpolarisation für eine TEM-Welle, die sich jeweils in die positive z -Richtung ausbreitet

- Die Polarisation ist **linear**, wenn der Endpunkt des elektrischen Feldvektors sich bei fortschreitender Zeit auf einer Geraden bewegt. Liegt diese Gerade parallel zur Erdoberfläche, spricht man von horizontaler Polarisation; steht sie senkrecht darauf, von vertikaler Polarisation.
- Eine **elliptisch** polarisierte Welle setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, deren **E**-Vektoren verschiedene Richtungen im Raum haben und eine Phasenverschiebung gegeneinander besitzen. Elliptisch polarisierte Wellen transportieren Drehimpuls: $-\hbar \leq L \leq \hbar$.
- Sind die Amplituden beider **E**-Vektoren gleich, stehen sie senkrecht aufeinander und beträgt ihr Phasenunterschied $\pm \pi/2$, so geht die Ellipse in einen Kreis über. Dann spricht man von **zirkularer** Polarisation. Wir setzen uns nun als Beobachter an einen festen Ort im Raum und betrachten die zeitliche Änderung der Richtung des **E**-Vektors – also seine Drehung mit der Zeit. Bilden Drehsinn und Fortpflanzungsrichtung ein Rechtssystem, so spricht man von **rechtsdrehender** Polarisation (RHC – right hand circular), im anderen Falle von **linksdrehender** Polarisation (LHC – left hand circular).
- Mit wachsender Zeit verschieben sich die räumlichen Verteilungen aus Bild 5.1 mit ihrer Phasengeschwindigkeit v_p in die positive z -Richtung. Man beachte die Zuordnung einer räumlichen Linksschraube zu zeitlich rechtsdrehender Polarisation.

Wir wollen zur Herleitung grundlegender polarimetrischer Eigenschaften nach [Kra88] eine elliptisch polarisierte ebene Welle betrachten, die sich aus zwei gleichfrequenten linear polarisierten TEM-Wellen derselben Ausbreitungsrichtung zusammensetzt. Addiert man nämlich zu einer in x -Richtung linear polarisierten ebenen Welle

$$E_x(z, t) = E_1 \cos(\omega t - \beta z) \quad (5.1)$$

eine um δ phasenverschobene, orthogonale zweite

$$E_y(z, t) = E_2 \cos(\omega t - \beta z + \delta), \quad (5.2)$$

so erhält man die allgemeinste ebene Welle

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{e}_x E_x(z, t) + \mathbf{e}_y E_y(z, t), \quad (5.3)$$

die sich in die positive z -Richtung ausbreitet. An einem festen Ort – z. B. in der Ebene $z = 0$ – folgt aus (5.3), wenn wir (5.1) und (5.2) dort einsetzen:

$$\mathbf{E}(z = 0, t) = \mathbf{E}(t) = \mathbf{e}_x E_1 \cos(\omega t) + \mathbf{e}_y E_2 \cos(\omega t + \delta) \quad (5.4)$$

oder separat geschrieben (jetzt immer für $z = 0$):

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos \omega t \\ E_y &= E_2 \cos(\omega t + \delta). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Mit dem Additionstheorem $\cos(\omega t + \delta) = \cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta$ und $\cos \omega t = E_x/E_1$, was aus (5.5) folgt, sowie $\sin \omega t = \pm \sqrt{1 - (E_x/E_1)^2}$ folgt wieder aus (5.5):

$$\frac{E_y}{E_2} = \frac{E_x}{E_1} \cos \delta \mp \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2} \sin \delta. \quad (5.6)$$

Nach Freistellen des Wurzelausdrucks in (5.6) und anschließendem Quadrieren erhalten wir:

$$\left(\frac{E_y}{E_2} - \frac{E_x}{E_1} \cos \delta \right)^2 = \left(1 - \left(\frac{E_x}{E_1} \right)^2 \right) \sin^2 \delta. \quad (5.7)$$

Durch weitere Umformung

$$\frac{E_y^2}{E_2^2} - 2 \frac{E_y}{E_2} \frac{E_x}{E_1} \cos \delta + \frac{E_x^2}{E_1^2} \cos^2 \delta = \sin^2 \delta - \frac{E_x^2}{E_1^2} \sin^2 \delta \quad (5.8)$$

wird [Mot86, Det03]:

$$\frac{E_x^2}{E_1^2 \sin^2 \delta} - 2 \frac{E_x E_y \cos \delta}{E_1 E_2 \sin^2 \delta} + \frac{E_y^2}{E_2^2 \sin^2 \delta} = 1. \quad (5.9)$$

Dies ist die allgemeine Gleichung einer Ursprungsellipse:

$$\boxed{a E_x^2 + b E_x E_y + c E_y^2 = 1}, \quad (5.10)$$

wenn wir als bequeme Abkürzungen setzen:

$$a = \frac{1}{E_1^2 \sin^2 \delta}, \quad b = -\frac{2 \cos \delta}{E_1 E_2 \sin^2 \delta} \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{E_2^2 \sin^2 \delta}. \quad (5.11)$$

In gedrehten (u, v) -Koordinaten kann (5.10) auf Hauptachsenform transformiert werden:

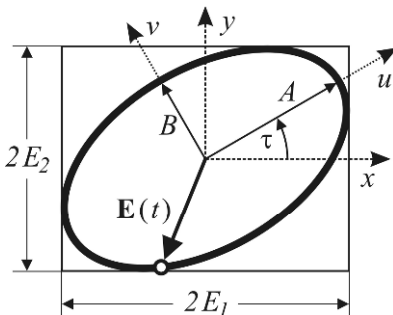
$$\boxed{\frac{E_u^2}{A^2} + \frac{E_v^2}{B^2} = 1}. \quad (5.12)$$

Die halben Hauptachsen A und B mit $A \geq B$ erhält man aus [Born93]:

$$\boxed{\begin{aligned} 2A^2 &= E_1^2 + E_2^2 + \sqrt{(E_1^2 - E_2^2)^2 + (2 E_1 E_2 \cos \delta)^2} \\ 2B^2 &= E_1^2 + E_2^2 - \sqrt{(E_1^2 - E_2^2)^2 + (2 E_1 E_2 \cos \delta)^2} \end{aligned}}. \quad (5.13)$$

Die u - und v -Achsen sind im Allgemeinen nicht mit den x - und y -Achsen deckungsgleich (Bild 5.2). Den Kippwinkel τ findet man aus:

$$\boxed{\tan 2\tau = \frac{2 E_1 E_2 \cos \delta}{E_1^2 - E_2^2}}. \quad (5.14)$$



Achsenverhältnis (axial ratio): $AR = \frac{A}{B}$

(mit $1 \leq AR < \infty$)

lineare Exzentrizität: $e = \sqrt{A^2 - B^2}$

numerische Exzentrizität: $\varepsilon = \frac{e}{A} = \sqrt{1 - AR^{-2}}$

Bild 5.2 Polarisationsellipse in der Ebene $z = 0$ mit dem Kippwinkel τ und den Halbachsen A und B

Der Endpunkt des E-Vektors $\mathbf{E}(t)$ nach (5.4) bewegt sich bei $z = 0$ mit fortschreitender Zeit im Allgemeinen auf der in Bild 5.2 gezeigten Polarisationsellipse. Neben der allgemein elliptischen Polarisation sind je nach Phasenverschiebung δ die Sonderfälle aus Tabelle 5.1 denkbar.

Tabelle 5.1 Spezialfälle allgemeiner elliptischer Polarisation nach Bild 5.2 – für δ siehe (5.5)

Elliptische Polarisation ohne Kippwinkel		Zirkulare Polarisation		Lineare Polarisation	
$\delta = \pm \pi/2$		$\delta = \pm \pi/2$ und $E_1 = E_2$		$\delta = 0$ oder $\delta = \pi$	
$A = E_1$	$AR = \frac{E_1}{E_2}$	$A = B = E_1 = E_2$	$AR = 1$	$A = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$	$AR \rightarrow \infty$
$B = E_2$				$B = 0$	
$\tau = 0$		τ beliebig		$\tan 2\tau = \pm \frac{2 E_1 E_2}{E_1^2 - E_2^2}$	

Zeitlich rechtsdrehende Zirkularpolarisation (RHC) – bei Blick in die Ausbreitungsrichtung der Welle – erhalten wir mit $E_1 = E_2$ für $\delta = -\pi/2$, während für $\delta = \pi/2$ sich linksdrehende Zirkularpolarisation (LHC) einstellt. Die Polarisation des E-Vektors kann in Sonderfällen von der des H-Vektors verschieden sein, z. B. in magnetisierten Plasmen oder Ferriten. Den Polarisationszustand einer ebenen Welle stellt man anschaulich mit Hilfe der **Poincaré-Kugel**¹ wie in Bild 5.3 dar. An den Polen finden wir Zirkularpolarisation und längs des Äquators wird Linearpolarisation dargestellt. Dazwischen befinden sich Polarisationsellipsen gegensätzlicher Drehrichtung mit verschiedenen Achsenverhältnissen und Kippwinkeln.

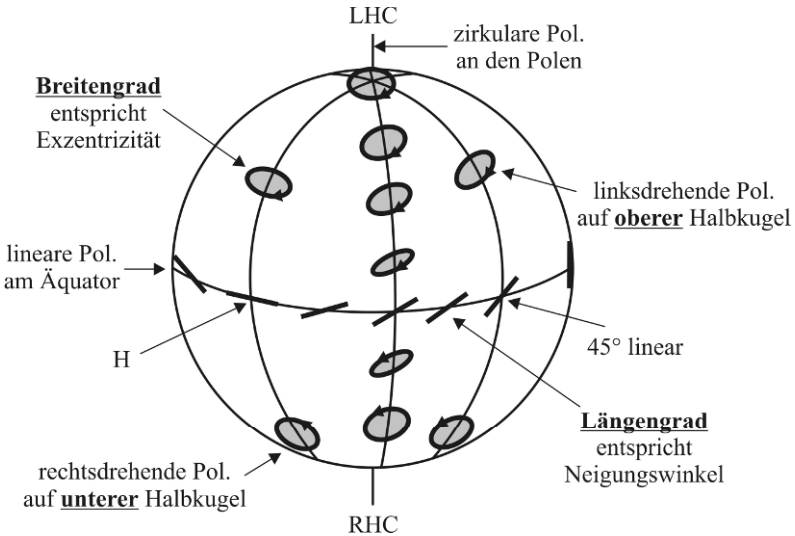


Bild 5.3 Poincaré-Kugel mit verschiedenen Polarisationsellipsen nach [LoLe88]. Zueinander orthogonale Polarisationen werden auf der Kugel durch diametral gegenüber liegende Punkte repräsentiert.

¹ Jules Henri **Poincaré** (1854-1912): frz. Mathematiker, Physiker, Astronom und Philosoph (Funktions- theorie, Differenzialgleichungen, Elektrodynamik und Himmelsmechanik)

Zum Abschluss betrachten wir noch kleine Störungen der Zirkularpolarisation. So folgt mit

$$E_1^2 = (1 + \xi) E_0^2, \quad E_2^2 = (1 - \xi) E_0^2 \quad \text{und} \quad \delta = \pm \pi/2 - \psi \quad (5.15)$$

aus (5.13) das quadratische Achsenverhältnis:

$$AR^2 = \frac{A^2}{B^2} = \frac{1 + \sqrt{\xi^2 + (1 - \xi^2) \sin^2 \psi}}{1 - \sqrt{\xi^2 + (1 - \xi^2) \sin^2 \psi}} \geq 1, \quad (5.16)$$

was man für $|\xi| \ll 1$ und $|\psi| \ll 1$ mit $\sin \psi \approx \psi$ in *niedrigster* Ordnung wie

$$AR^2 \approx \frac{1 + \sqrt{\xi^2 + \psi^2}}{1 - \sqrt{\xi^2 + \psi^2}} \approx 1 + 2 \sqrt{\xi^2 + \psi^2} \quad (5.17)$$

schreiben kann. Beispielsweise erhält man aus (5.17) für verschwindenden Phasenfehler $\psi = 0$ bzw. für verschwindenden Amplitudenfehler $\xi = 0$ folgende Werte [Rus70]:

$$AR^2 \Big|_{\psi=0} \approx 1 + 2|\xi| \quad \text{bzw.} \quad AR^2 \Big|_{\xi=0} \approx 1 + 2|\psi|. \quad (5.18)$$

Für $\psi = 0$ wird der Leistungsunterschied der beiden orthogonalen Kanäle nach (5.15) zunächst $|E_1^2 - E_2^2| = 2|\xi| E_0^2$. Er kann nach (5.18) also näherungsweise aus der Abweichung des quadratischen Achsenverhältnisses von eins ermittelt werden:

$$|E_1^2 - E_2^2| \approx (AR^2 - 1) E_0^2. \quad (5.19)$$

5.2 Senkrechter Einfall auf eine ebene Trennfläche

Trifft eine ebene elektromagnetische Welle senkrecht auf eine ebene Trennfläche, so spaltet sie sich im Allgemeinen in einen reflektierten und einen transmittierten Anteil auf (Bild 5.4).

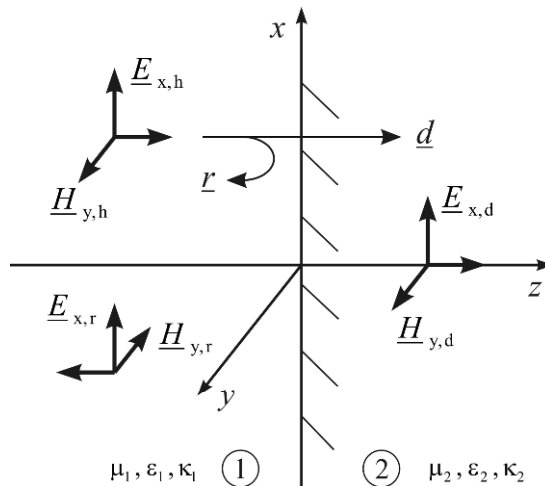


Bild 5.4 Senkrechter Einfall einer vertikal polarisierten TEM-Welle auf eine ebene Trennfläche

5.2.1 Reflexions- und Durchlassfaktoren

Im **Medium 1** erhält man durch Überlagerung der hin- und rücklaufenden Welle folgenden Feldansatz:

$$\underline{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{e}_x \left(\underline{E}_{x,h} e^{-\gamma_1 z} + \underline{E}_{x,r} e^{\gamma_1 z} \right). \quad (5.20)$$

Die in den Exponenten auftretende Ausbreitungskonstante ist nach (4.11) bekanntermaßen:

$$\gamma_1 = \alpha_1 + j\beta_1 = \sqrt{-\omega^2 \mu_1 \varepsilon_1}, \quad (5.21)$$

wobei zur Abkürzung die komplexe Permittivität $\varepsilon_1 = \varepsilon_1 + \kappa_1/(j\omega)$ verwendet wurde. Die Feldkomponenten einer ebenen Welle stehen nach (4.12) im Verhältnis der Feldwellenimpedanz, d. h. im vorliegenden Fall gilt:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{E}_{x,h}}{\underline{H}_{y,h}} = -\frac{\underline{E}_{x,r}}{\underline{H}_{y,r}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}. \quad (5.22)$$

Mit (5.20) und (5.22) erhalten wir aus (4.10) die magnetische Feldstärke im Raumteil 1:

$$\underline{\mathbf{H}}_1 = \mathbf{e}_y \left(\underline{H}_{y,h} e^{-\gamma_1 z} + \underline{H}_{y,r} e^{\gamma_1 z} \right) = \frac{\mathbf{e}_y}{\underline{Z}_1} \left(\underline{E}_{x,h} e^{-\gamma_1 z} - \underline{E}_{x,r} e^{\gamma_1 z} \right). \quad (5.23)$$

Im **Medium 2** mit der Impedanz $\underline{Z}_2 = \underline{E}_{x,d}/\underline{H}_{y,d}$ gilt analog für die durchgehende Welle:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_2 &= \mathbf{e}_x \underline{E}_{x,d} e^{-\gamma_2 z} \\ \underline{\mathbf{H}}_2 &= \mathbf{e}_y \underline{H}_{y,d} e^{-\gamma_2 z} = \mathbf{e}_y \frac{\underline{E}_{x,d}}{\underline{Z}_2} e^{-\gamma_2 z}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Man führt nun zweckmäßig die komplexen **Reflexions-** und **Durchlassfaktoren** $\underline{r}$ und $\underline{d}$ ein:

$$\underline{r} = \frac{\underline{E}_{x,r}}{\underline{E}_{x,h}} \quad \text{und} \quad \underline{d} = \frac{\underline{E}_{x,d}}{\underline{E}_{x,h}}. \quad (5.25)$$

Ihre *Beträge* geben an, welcher Bruchteil der einfallenden elektrischen Feldstärke reflektiert bzw. transmittiert wird. Ihre *Phasenwinkel* geben eine eventuelle Phasenänderung an der Trennfläche wieder. Mit der Abkürzung $\underline{E}_0 = \underline{E}_{x,h}$ lautet somit der vollständige **Feldansatz**:

Tabelle 5.2 Feldansatz für Reflexionsproblem aus Bild 5.4 mit den Unbekannten $\underline{r}$ und $\underline{d}$

$\underline{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{e}_x \underline{E}_0 \left(e^{-\gamma_1 z} + \underline{r} e^{\gamma_1 z} \right)$	$\underline{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{e}_x \underline{E}_0 \underline{d} e^{-\gamma_2 z}$
$\underline{\mathbf{H}}_1 = \mathbf{e}_y \frac{\underline{E}_0}{\underline{Z}_1} \left(e^{-\gamma_1 z} - \underline{r} e^{\gamma_1 z} \right)$	$\underline{\mathbf{H}}_2 = \mathbf{e}_y \frac{\underline{E}_0}{\underline{Z}_2} \underline{d} e^{-\gamma_2 z}$

Die Fortpflanzungskonstanten γ_1 und γ_2 sowie die Feldwellenimpedanzen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ wurden in Kapitel 4 bereits definiert – siehe (4.11) und (4.12) – sie hängen von der Frequenz und

den Materialeigenschaften des jeweiligen Mediums ab. Durch Erfüllen der **Stetigkeit** der Tangentialkomponenten der Felder an der Trennfläche bei $z = 0$, also nach Tabelle 3.2

$$\underline{E}_1 \cdot \underline{e}_x \Big|_{z=0} = \underline{E}_2 \cdot \underline{e}_x \Big|_{z=0} \quad \text{und} \quad \underline{H}_1 \cdot \underline{e}_y \Big|_{z=0} = \underline{H}_2 \cdot \underline{e}_y \Big|_{z=0}, \quad (5.26)$$

ermitteln wir in Übung 5.1 die noch unbekannten Reflexions- und Durchlassfaktoren $\underline{r}$ und $\underline{d}$.

Übung 5.1: Stetigkeit bei senkrechtem Einfall

- Bestimmen Sie den Reflexions- und Durchlassfaktor bei senkrechtem Einfall einer homogenen, ebenen Welle auf eine unendlich ausgedehnte, ebene Grenzschicht bei $z = 0$.

• Lösung:

Die *tangentialen* Feldkomponenten $\underline{E}_x$ und $\underline{H}_y$ an Grenzflächen müssen stetig von einem in den anderen Raumteil übergehen. Damit fordern wir in der Ebene $z = 0$:

$$\begin{aligned} \underline{E}_x &\Rightarrow \underline{E}_0 \left(e^{-\gamma_1 z} + \underline{r} e^{\gamma_1 z} \right) \Big|_{z=0} = \underline{E}_0 \underline{d} e^{-\gamma_2 z} \Big|_{z=0} \\ \underline{H}_y &\Rightarrow \frac{\underline{E}_0}{\underline{Z}_1} \left(e^{-\gamma_1 z} - \underline{r} e^{\gamma_1 z} \right) \Big|_{z=0} = \frac{\underline{E}_0}{\underline{Z}_2} \underline{d} e^{-\gamma_2 z} \Big|_{z=0}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

d. h. es ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem für zwei Unbekannte:

$$1 + \underline{r} = \underline{d} \quad \text{und} \quad 1 - \underline{r} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \underline{d}, \quad (5.28)$$

dessen Lösung sich sofort angeben lässt:

$$\underline{r} = \frac{\underline{E}_{x,r}}{\underline{E}_{x,h}} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} \quad \text{und} \quad \underline{d} = \frac{\underline{E}_{x,d}}{\underline{E}_{x,h}} = \frac{2 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}. \quad (5.29)$$

Bei *identischen* Medien mit $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$ gilt natürlich $\underline{r} = 0$ und $\underline{d} = 1$. □

In passiver Materie ist wegen des Energiesatzes der Betrag des Reflexionsfaktors auf Werte kleiner gleich eins beschränkt. In Bild 5.5 liegen alle Punkte mit $|\underline{r}| \leq 1$ innerhalb des Einheitskreises. Wegen $\underline{d} = 1 + \underline{r}$ kann der Durchlassfaktor größer als eins werden. In verlustfreien Medien ist dies z. B. bei $\underline{Z}_2 > \underline{Z}_1$ der Fall – dann wird nämlich $\underline{r} > 0$ und $\underline{d} > 1$. Für $\mu_1 = \mu_2$ müsste dazu $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ gelten – wir hätten dann den Fall der Reflexion am dünneren Medium.

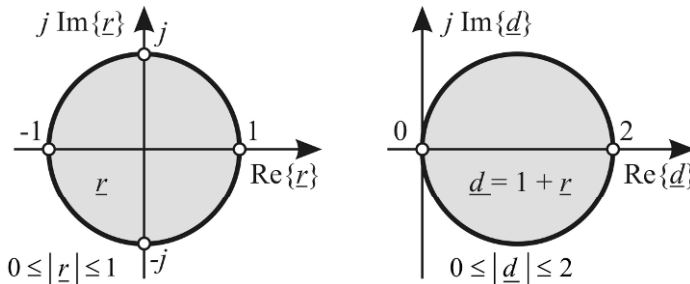


Bild 5.5 Zulässige Bereiche für Reflexions- und Durchlassfaktor in der komplexen Zahlenebene

Nach (5.29) verschwindet bei senkrechtem Einfall die Reflexion für $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$ und die Welle dringt vollständig in das zweite Medium ein. Neben dem trivialen Fall identischer Medien – also eigentlich nicht vorhandener Trennfläche – kann der Reflexionsfaktor aber auch bei verschiedenen Medien durchaus null werden. Es muss dazu nur die Bedingung

$$\underline{Z}_1 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_1}{\kappa_1 + j\omega\varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\kappa_2 + j\omega\varepsilon_2}} = \underline{Z}_2 \quad (5.30)$$

erfüllt werden. Nach Quadrieren und Multiplikation mit beiden Nennern folgt aus (5.30):

$$j\omega\mu_1(\kappa_2 + j\omega\varepsilon_2) = j\omega\mu_2(\kappa_1 + j\omega\varepsilon_1). \quad (5.31)$$

Aus dieser komplexen Gleichung können zwei reelle Bedingungen abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \mu_1 \kappa_2 &= \mu_2 \kappa_1 \\ \mu_1 \varepsilon_2 &= \mu_2 \varepsilon_1, \end{aligned} \quad (5.32)$$

die man noch übersichtlicher schreiben kann [Kra91]:

$$\boxed{\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}. \quad (5.33)$$

Bei senkrechtem Einfall auf eine ebene Trennfläche verschwindet also die Reflexion – und wir erhalten Totaltransmission – wenn alle drei Materialparameter wie in (5.33) im selben Verhältnis zueinander stehen. Im verlustfreien Fall ($\kappa_1 = \kappa_2 = 0$) mit Vakuum (oder Luft) als Medium 1, d.h. $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ und $\mu_1 = \mu_0$, muss zum Verschwinden der Reflexion nach (5.33) für Medium 2 gelten: $\mu_0/\mu_2 = \varepsilon_0/\varepsilon_2$. Das zweite Medium – ein so genanntes **Metamaterial** [Sal07] – muss also sowohl permeabel als auch dielektrisch sein. Mit $\mu_2 = \mu_r \mu_0$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0$ folgt dann:

$$\boxed{\mu_r(\omega) = \varepsilon_r(\omega)}. \quad (5.34)$$

Näherungsweise ließe sich die Bedingung (5.34) durch ein künstliches inhomogenes Medium realisieren – z. B. als dielektrische Platte mit eingeschlossenen Ferritzyklindern, deren gegenseitiger Abstand klein zur Wellenlänge sein müsste (Bild 5.6). Aber auch ein solches Objekt würde bei schrägen Einfallswinkeln wieder eine **Radarsichtbarkeit** aufweisen.

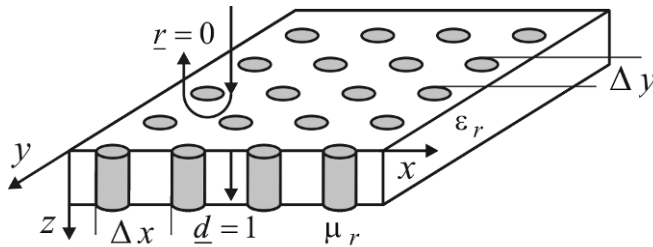


Bild 5.6 Künstliches permeables und dielektrisches Medium mit $\Delta x, \Delta y \ll \lambda_2$

Im Allgemeinen ist ein für Radarstrahlen „unsichtbares“ Medium nur sehr schwer vorstellbar, insbesondere weil die Werte der Materialparameter (5.34) bei breitbandiger Anregung eine spürbare Frequenzabhängigkeit aufweisen können. Außerdem würde selbst der ideale „schwarze Körper“, der alle Wellen reflexionsfrei aufnimmt, sich immerhin noch durch seine Schwärze vom Hintergrund abheben und wäre ebenfalls nicht gänzlich unsichtbar.

5.2.2 Stehende Wellen

Im Medium 1 kann nach Tabelle 5.2 die Überlagerung aus hin- und rücklaufender Welle

$$\underline{E}_1 = \mathbf{e}_x \underline{E}_0 \left[e^{-\underline{\gamma}_1 z} + \underline{r} e^{\underline{\gamma}_1 z} \right] \quad (5.35)$$

noch anders geschrieben werden. Es gilt nämlich:

$$\underline{E}_1 = \mathbf{e}_x \underline{E}_0 \left[(1 + \underline{r}) e^{-\underline{\gamma}_1 z} + \underline{r} \left(e^{\underline{\gamma}_1 z} - e^{-\underline{\gamma}_1 z} \right) \right], \quad (5.36)$$

was man auch mit (5.28) wie folgt darstellen kann:

$$\underline{E}_1 = \mathbf{e}_x \underline{E}_0 \left[\underline{d} e^{-\underline{\gamma}_1 z} + 2 \underline{r} \sinh(\underline{\gamma}_1 z) \right]. \quad (5.37)$$

Ist das Medium 1 verlustfrei, d. h. ein nicht leitender Isolator mit $\kappa_1 = 0$, dann gilt:

$$\underline{E}_1 = \mathbf{e}_x \underline{E}_0 \left[\underline{d} e^{-j\beta_1 z} + 2 j \underline{r} \sin(\beta_1 z) \right]. \quad (5.38)$$

Das Feld im Medium 1 besteht somit aus zwei Anteilen. Neben einer **Wanderwelle** der Amplitude $\underline{d} \underline{E}_0$, die vollständig in das Medium 2 eindringt, tritt noch eine **stehende Welle** mit der Amplitude $2 j \underline{r} \underline{E}_0$ auf, die zum Erfüllen der Stetigkeitsbedingung in der Trennfläche notwendig ist. Wenn das Medium 2 ein elektrisch idealer Leiter mit $\kappa_2 \rightarrow \infty$ ist, dann wird:

$$\underline{Z}_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2 - j\kappa_2/\omega}} \rightarrow 0 \quad (5.39)$$

und nach (5.29) folgt $\underline{r} = -1$ sowie $\underline{d} = 0$. Die einfallende Welle wird also total reflektiert. Aus (5.38) ergibt sich dann folgende Felddarstellung:

$$\underline{E}_1 = -\mathbf{e}_x 2 j \underline{E}_0 \sin(\beta_1 z). \quad (5.40)$$

Der Wanderwellenanteil verschwindet somit vollständig und die verbleibende stehende Welle weist Knoten der elektrischen Feldstärke auf, wenn die Nullstellenbedingung $\beta_1 z_n = -n\pi$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ erfüllt ist. Mit der Phasenkonstanten $\beta_1 = 2\pi/\lambda_1$ erhält man daraus folgende bei negativen Werten von z liegende Knotenorte (Bild 5.7):

$$z_n = -n \lambda_1 / 2. \quad (5.41)$$

Aus der Darstellung der stehenden Welle im **Zeitbereich**

$$\mathbf{E}_1(z, t) = \text{Re} \left\{ \underline{E}_1(z) e^{j\omega t} \right\} = -2 \mathbf{e}_x \sin(\beta_1 z) \text{Re} \left\{ j \underline{E}_0 e^{j\omega t} \right\} \quad (5.42)$$

folgt mit $\underline{E}_0 = E_0 e^{j\varphi_0}$ das Ergebnis:

$$\mathbf{E}_1(z, t) = 2 \mathbf{e}_x E_0 \sin(\beta_1 z) \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (5.43)$$

Die Nullstellen der elektrischen Feldstärke sind daher ortsfeste Knoten. Ihre Lage z_n hängt, wie man in (5.43) sieht, nicht von der Zeit t ab. Das unterscheidet die hier vorliegende stehende

Welle von einer Wanderwelle, die ihre Knoten jeweils mit sich fortbewegt. Der Begriff der „stehenden Welle“ ist etwas unglücklich gewählt. Da sich eine Welle stets mit ihrer Phasengeschwindigkeit v_p ausbreitet und nicht „steht“, spricht man besser von einer **Schwingung**. Zwischen zwei Knoten liegt jeweils ein Extremum – zu manchen Zeitpunkten kann dort nach (5.43) die Feldstärke den Wert $\pm 2E_0$ annehmen. Die Verhältnisse bei Totalreflexion an einer elektrisch ideal leitenden Wand mit $\kappa_2 \rightarrow \infty$ sind in Bild 5.7 für $\omega t + \varphi_0 = \pi/2$ dargestellt.

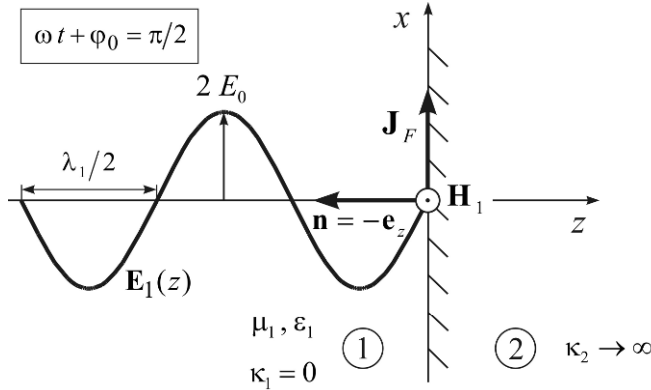


Bild 5.7 E-Feld einer stehenden Welle mit ortsfesten Knoten vor einem metallischen Halbraum

Das **Magnetfeld im Raumteil 1** erhält man aus der zweiten Maxwell'schen Gleichung:

$$\text{rot } \mathbf{E}_1(z, t) = -\mu_1 \frac{\partial \mathbf{H}_1(z, t)}{\partial t}. \quad (5.44)$$

Bei Totalreflexion einer in x -Richtung linear polarisierten ebenen Welle gilt mit Tabelle 2.6:

$$\mathbf{H}_1(z, t) = -\frac{\mathbf{e}_y}{\mu_1} \int \frac{\partial (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{E}_1(z, t))}{\partial z} dt = -\mathbf{e}_y \frac{2E_0}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial z} \sin(\beta_1 z) \int \sin(\omega t + \varphi_0) dt. \quad (5.45)$$

Nach unschwieriger Umformung mit $\beta_1 = \omega/c_1$ und $Z_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$ folgt sofort:

$$\mathbf{H}_1(z, t) = \mathbf{e}_y \frac{2E_0}{Z_1} \cos(\beta_1 z) \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (5.46)$$

Innerhalb der Trennfläche bei $z = 0$ gelten die links- und rechtsseitigen Grenzwerte:

$$\mathbf{H}_1(z = 0_-) = \mathbf{e}_y \frac{2E_0}{Z_1} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{und} \quad \mathbf{H}_2(z = 0_+) = 0. \quad (5.47)$$

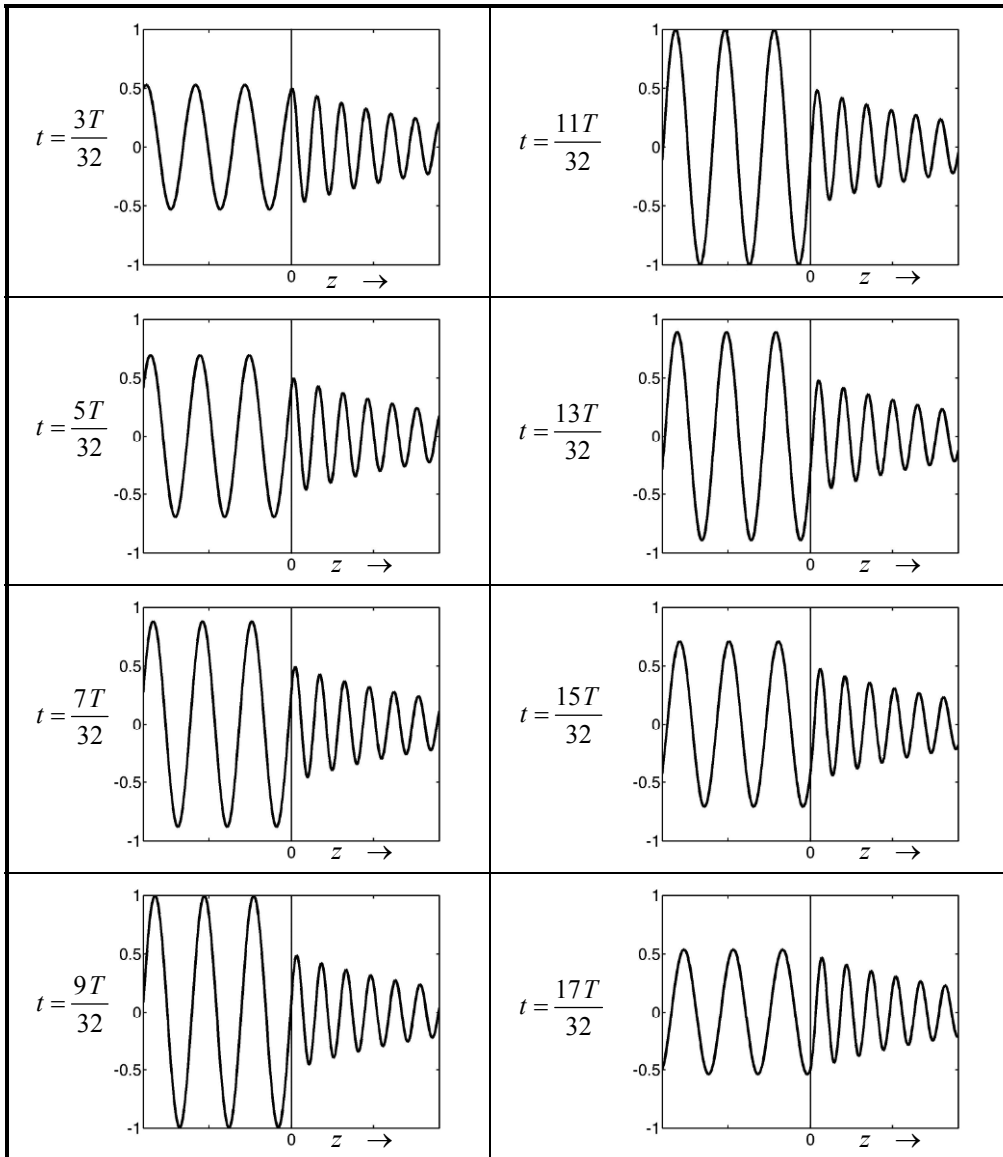
Das Magnetfeld macht an der elektrisch ideal leitenden Wand also einen **Sprung**. Diese Unstetigkeit wird, wie wir wegen der **Randbedingung** $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_F$ bereits wissen (Tabelle 3.3), durch eine elektrische Oberflächenstromdichte $\mathbf{J}_F$ mit dem Wert

$$\mathbf{J}_F = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1(z = 0_-) = -\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y \frac{2E_0}{Z_1} \cos(\omega t + \varphi_0) = \mathbf{e}_x \frac{2E_0}{Z_1} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (5.48)$$

und der Einheit $[\mathbf{J}_F] = \text{A/m}$ ausgeglichen.

Wir betrachten nun speziell den Übergang von Luft (Medium 1) auf ein verlustbehaftetes Dielektrikum (Medium 2), was durch $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$ und $\kappa_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ S/m gekennzeichnet sei. In Tabelle 5.3 ist die zeitliche Entwicklung der räumlichen Verteilung der elektrischen Feldstärken $E_1(z, t)$ und $E_2(z, t)$ auf der z -Achse in einem Bereich $-3\lambda_0 \leq z \leq 3\lambda_0$ wiedergegeben. Wir überblicken eine halbe zeitliche Periode T und erkennen im Raumteil 1 (links) ein deutliches Pulsieren der Maximalwerte – hervorgerufen durch den Stehwellenanteil, der von einer Wanderwelle überlagert wird. Die Wanderwelle dringt in das Medium 2 (rechts) ein, halbiert dort wegen $\lambda_2 = \lambda_0 \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_2}$ ihre Wellenlänge und wird exponentiell gedämpft. Man beachte den Übergang in der Trennfläche bei $z = 0$, wo die Wellenzüge stetig und knickfrei passieren.

Tabelle 5.3 Wellensequenz der elektrischen Feldstärke im Abstand $\Delta t = T/16$ für $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ und $\kappa_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ S/m mit $\varphi_0 = 0$. Nach (5.29) gilt $\underline{z} \approx -1/3 + j/100$ und $\underline{d} \approx 2/3 + j/100$.



5.2.3 Leistungstransport

Wir betrachten schließlich den zeitgemittelten Wirkleistungstransport durch die Trennfläche hindurch. Er kann nach (3.13) mit Hilfe des Realteils des komplexen Poyntingschen Vektors

$$\underline{S}_R = \text{Re} \{ \underline{S} \} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{E} \times \underline{H}^* \} \quad (5.49)$$

berechnet werden. Wir wollen im Folgenden verlustfreie Medien voraussetzen. Dann werden die Feldwellenimpedanzen reell, d. h. $\underline{Z}_{1,2} = Z_{1,2}$ (und damit auch der Reflexions- und Durchlassfaktor, d. h. $\underline{r} = r$ und $\underline{d} = d$). Die Ausbreitungskonstanten werden dagegen imaginär, d. h. $\underline{\gamma}_{1,2} = j\beta_{1,2}$. Mit Tabelle 5.2 gilt im Raumteil 1 des dielektrischen Grenzflächenproblems also:

$$\underline{S}_1 = \frac{1}{2} \underline{E}_1 \times \underline{H}_1^* = (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) \frac{\underline{E}_0 \underline{E}_0^*}{2Z_1} \left(e^{-j\beta_1 z} + r e^{j\beta_1 z} \right) \left(e^{j\beta_1 z} - r e^{-j\beta_1 z} \right) \quad (5.50)$$

und entsprechend im Raumteil 2:

$$\underline{S}_2 = \frac{1}{2} \underline{E}_2 \times \underline{H}_2^* = (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) \frac{\underline{E}_0 \underline{E}_0^*}{2Z_2} d e^{-j\beta_2 z} d e^{j\beta_2 z} \quad (5.51)$$

Nach Ausmultiplizieren folgt aus (5.50) und (5.51):

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &= \mathbf{e}_z \frac{|\underline{E}_0|^2}{2Z_1} \left[1 - r e^{-2j\beta_1 z} + r e^{2j\beta_1 z} - r^2 \right] = \mathbf{e}_z \frac{|\underline{E}_0|^2}{2Z_1} \left[1 - r^2 + 2jr \sin(2\beta_1 z) \right] \\ \underline{S}_2 &= \mathbf{e}_z \frac{|\underline{E}_0|^2}{2Z_2} d^2. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Da die zur Trennschicht tangentialen Felder der beteiligten ebenen Wellen stetig sind, muss auch die zur Trennschicht normale Wirkleistungsdichte eine stetige Größe sein. Damit erhalten wir aus der Forderung

$$\text{Re} \{ \underline{S}_1 \} \cdot \mathbf{e}_z \Big|_{z=0} = \text{Re} \{ \underline{S}_2 \} \cdot \mathbf{e}_z \Big|_{z=0} \quad (5.53)$$

den Zusammenhang

$$\frac{|\underline{E}_0|^2}{2Z_1} (1 - r^2) = \frac{|\underline{E}_0|^2}{2Z_2} d^2, \quad (5.54)$$

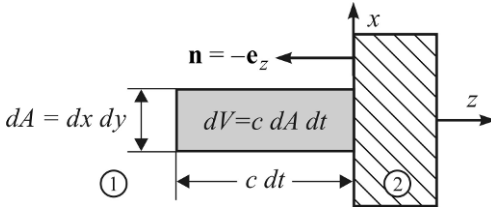
den wir als $S_{R,h} - S_{R,r} = S_{R,d}$ interpretieren können, oder anders ausgedrückt [Schw98]:

$$\boxed{1 - r^2 = \frac{Z_1}{Z_2} d^2}, \quad (5.55)$$

was wir mit Hilfe von (5.28) leicht verifizieren können. Diejenige Leistung, die nicht reflektiert wird, dringt in das Medium 2 ein. Der Energiesatz bleibt auch bei Werten $d > 1$ erfüllt, weil sich die relative Energie im Medium 2 – im Vergleich zu jener der einfallenden Welle – nicht durch d^2 sondern durch $d^2 Z_1/Z_2$ bestimmt, was niemals größer als eins werden kann. An der Trennfläche findet also – wie auch beim Transformator – eine Impedanzwandlung statt.

5.2.4 Strahlungsdruck

Trifft eine elektromagnetische Welle auf einen materiellen Körper, so übt sie eine Kraft auf ihn aus. Wir wollen im Zeitbereich den senkrechten Einfall auf eine ebene Trennfläche diskutieren. Die Kraft auf das Medium 2 kann mit $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ aus der zeitlichen Impulsänderung berechnet werden. Den **Impuls** der einfallenden Welle erhalten wir aus dem Produkt der räumlichen Impulsdichte $\mathbf{p}_V$ aus (3.5) – gemessen in Ns/m^3 –



$$\mathbf{p}_V = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \mu \varepsilon \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{S}/c^2 \quad (5.56)$$

mit dem infinitesimalen Volumenelement $dV = c dA dt$, in dem sich alle Wellenfronten befinden, die während der Zeit dt das Flächenelement dA erreichen werden (Bild 5.8).

Bild 5.8 Zylindrisches Impulsvolumen der senkrecht auf eine ebene Wand einfallenden Welle ($\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_z$)

Wenn die Ebene wie ein schwarzer Körper alle Energie W absorbiert und daher die Welle nicht reflektiert wird, dann wirkt innerhalb der Zeitspanne dt ein gesamter Impuls

$$d\mathbf{p} = \mathbf{p}_V dV = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} dV = \frac{1}{c} \mathbf{S} dA dt = \frac{W}{c} \mathbf{e}_z. \quad (5.57)$$

Die ausgeübte Kraft wird dann $\mathbf{F} = F \mathbf{e}_z = d\mathbf{p}/dt = (\mathbf{S}/c) dA$. Der **Strahlungsdruck** ergibt sich schließlich mit $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$ als Normalkomponente der Kraft pro Flächenelement:

$$p_s(t) = -\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}(t)}{dA} = -\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}(t)}{c} = \frac{E(t)H(t)}{c} = \varepsilon E^2(t) = \mu H^2(t) \geq 0. \quad (5.58)$$

Der Strahlungsdruck ist demnach identisch zur räumlichen Gesamtenergiedichte (3.1):

$$p_s(t) = w(t) = w_e(t) + w_m(t) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2(t) + \mu H^2(t) \right). \quad (5.59)$$

Bei harmonischer Anregung $E(t) = E_0 \cos \omega t$ folgt im zeitlichen Mittel $\langle p_s \rangle = \varepsilon E_0^2/2 = \langle S \rangle/c$. Im Falle einer ideal reflektierenden Wand wird der Strahlungsdruck doppelt so groß, während bei schrägem Einfall unter einem Winkel θ relativ zur Flächennormalen sowohl bei $dV = c dA dt \cos \theta$ als auch beim Skalarprodukt in (5.58) je ein Richtungskosinus berücksichtigt werden muss, was zu folgender Verallgemeinerung führt:

$$\langle p_s \rangle = \left(1 + |\underline{r}|^2 \right) \frac{\varepsilon}{2} E_0^2 \cos^2 \theta = \left(1 + |\underline{r}|^2 \right) \frac{\langle S \rangle}{c} \cos^2 \theta. \quad (5.60)$$

Das Sonnenlicht, das am Äquator senkrecht ($\theta = 0$) auf die Erdoberfläche auftrifft, bewirkt dort im zeitlichen Mittel eine Strahlungsdichte von $\langle S \rangle = 1,368 \text{ kW}/\text{m}^2$ (Solarkonstante). Setzt man vollkommene Absorption ($\underline{r} = 0$) voraus, so wird der Strahlungsdruck am Äquator: $\langle p_s \rangle = \langle S \rangle/c_0 = 4,56 \cdot 10^{-6} \text{ N}/\text{m}^2$ – ein Wert, der sehr viel kleiner ist als der atmosphärische Luftdruck von etwa $1013 \text{ hPa} \approx 10^5 \text{ N}/\text{m}^2$. In der Astronomie führt der Strahlungsdruck aber durchaus zu bedeutenden Effekten. Er bewirkt im Inneren von Sternen eine stabilisierende Gegenkraft zur Gravitation, verursacht bei Kometen einen immer von der Sonne weg gerichteten Plasmaschweif und beeinflusst die Bewegung von Raumsonden im Sonnensystem [Hec89].

Multipliziert man die Solarkonstante $\langle S \rangle$ mit der Zeiteinheit 1 s und der Projektionsfläche der ganzen Erdkugel, so erhält man die Energiemenge $E = 1,744 \cdot 10^{17} \text{ Js}$. Innerhalb einer Sekunde wird die Erde wegen $E = mc^2$ also von Photonen der Gesamtmasse $m = 1,94 \text{ kg}$ getroffen!

5.3 Radarreflexion an bewegten Objekten

Radar ist ein Kunstwort aus dem englischen „**radio detection and ranging**“. Es bezeichnet im Allgemeinen solche Verfahren der Funkmesstechnik, die elektromagnetische Wellen ausstrahlen, Reflexionen von irgendwelchen Körpern oder Stoffverteilungen empfangen und aus diesen Reflexionen auf die Lage und Beschaffenheit der Ziele schließen.

Anwendung findet die Radartechnik in der Kontrolle und Sicherung des Flug-, Wasser- und Landverkehrs, in der Meteorologie zur Überwachung und Prognose des Wetters, in der Raumfahrt und Astronomie sowie auch für viele militärische Zwecke. Wir wollen im Folgenden ein monostatisches Primärradar betrachten, bei dem sich Sender (S) und Empfänger (E) am gleichen Ort befinden und das Echo eines (ortungsmäßig) passiven Zieles (Z) ausgewertet wird.

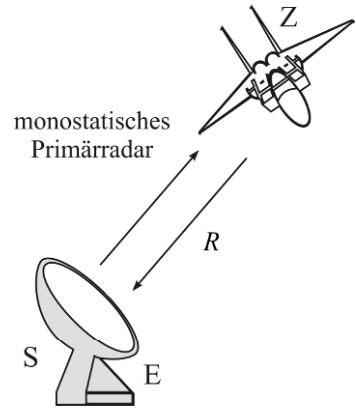


Bild 5.9 Radarreflexion am Ziel (Z)

5.3.1 Gleichförmig bewegter ebener Metallspiegel

Als einfaches Modell für ein metallisches Zielobjekt wollen wir eine unendlich ausgedehnte ebene Platte mit idealer elektrischer Leitfähigkeit betrachten. Die Platte bewege sich im Vakuum gleichförmig mit $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$ von der am Erdboden ruhenden Radarstation weg (Bild 5.10). Die Zielentfernung $R(t) = R_0 + vt$ sei ausreichend groß, sodass wir an der Platte eine senkrecht einfallende TEM-Welle mit Ausbreitungsrichtung $\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_z$ annehmen dürfen.

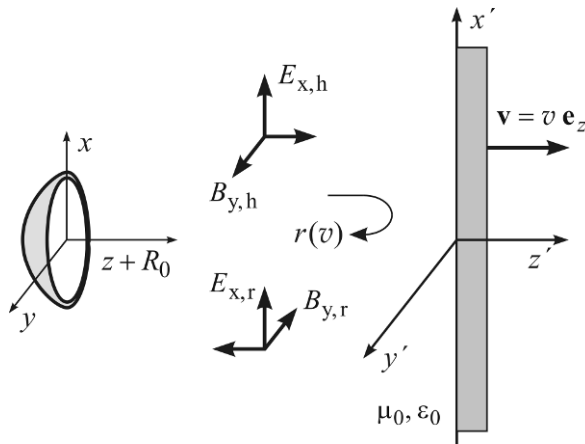


Bild 5.10 Gleichförmig bewegte Metallplatte – ruhend im System S' der gestrichenen Koordinaten

Im Ruhesystem S' der reflektierenden Platte gilt das gewöhnliche Reflexionsgesetz mit $r' = -1$. Bezogen auf das System S des Radars ergibt sich ein geschwindigkeitsabhängiger Reflexionsfaktor $r(v)$, der sich auf die messbare Amplitude des Radarechos auswirkt. Für seine Herleitung müssen wir untersuchen, wie sich die Feldstärken einer elektromagnetischen Welle beim Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen ändern. Dazu steht uns die **Lorentz-Transformation** der Relativitätstheorie in Form der Tabellen 3.6 und 3.7 zur Verfügung.

Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ sollen die Koordinatenursprünge von S und S' zusammenfallen. Im ungestrichenen System des ruhenden Radars hat die einfallende Welle die Feldkomponenten:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_h(z, t) &= E_{x,h}(z, t) \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x E_0 \cos(\omega t - \beta z) \\ \mathbf{B}_h(z, t) &= B_{y,h}(z, t) \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \frac{E_0}{c_0} \cos(\omega t - \beta z) \end{aligned} \quad (5.61)$$

die beide senkrecht zur Bewegungsrichtung $\mathbf{e}_z$ des gestrichenen Systems orientiert sind. Im Folgenden betrachten wir zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ den Ort $z = z' = 0$, also die unmittelbare Oberfläche der reflektierenden Platte. Dann wird dort aus (5.61):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp &= \mathbf{e}_x E_0 \\ \mathbf{B}_\perp &= \mathbf{e}_y \frac{E_0}{c_0}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Mit Hilfe von Tabelle 3.6 können diese Querkomponenten in das gestrichene Koordinatensystem der bewegten Platte transformiert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_\perp &= \gamma (\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_\perp) = \gamma E_0 \left(\mathbf{e}_{x'} + \frac{v}{c_0} \mathbf{e}_{z'} \times \mathbf{e}_{y'} \right) = \gamma E_0 \mathbf{e}_{x'} (1 - \beta) \\ \mathbf{B}'_\perp &= \gamma \left(\mathbf{B}_\perp - \frac{1}{c_0^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_\perp \right) = \gamma \frac{E_0}{c_0} \left(\mathbf{e}_{y'} - \frac{v}{c_0} \mathbf{e}_{z'} \times \mathbf{e}_{x'} \right) = \gamma \frac{E_0}{c_0} \mathbf{e}_{y'} (1 - \beta). \end{aligned} \quad (5.63)$$

Dabei wurden – wie üblich – die Abkürzungen $\beta = v/c_0$ und $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ eingeführt. Das elektrische Feld aus (5.63) wird mit dem Reflexionsfaktor $r' = -1$ an der Platte reflektiert, während das magnetische Feld eine Reflexion mit $-r' = 1$ erfährt. Die reflektierten Felder können jetzt mit Hilfe von Tabelle 3.7 in das ungestrichene System des ruhenden Radars zurück transformiert werden:

$$\begin{aligned} r \mathbf{E}_\perp &= \gamma (r' \mathbf{E}'_\perp - (-r') \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_\perp) = r' \gamma^2 E_0 \left(\mathbf{e}_x (1 - \beta) + \frac{v}{c_0} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y (1 - \beta) \right) = \\ &= r' \gamma^2 E_0 \mathbf{e}_x (1 - \beta)^2 = r' E_0 \mathbf{e}_x \frac{(1 - \beta)^2}{1 - \beta^2} = r' E_0 \mathbf{e}_x \frac{1 - \beta}{1 + \beta}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Aus (5.64) kann im Vergleich mit (5.62) der gesuchte **Reflexionsfaktor** abgelesen werden:

$$\boxed{r(\beta) = r' \frac{1 - \beta}{1 + \beta}}. \quad (5.65)$$

Für $r' = -1$ folgt bei kleinen Relativgeschwindigkeiten

$$r(\beta) = -\frac{(1 - \beta)}{(1 + \beta)} \approx -1 + 2\beta. \quad (5.66)$$

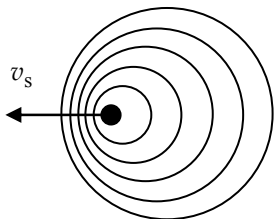
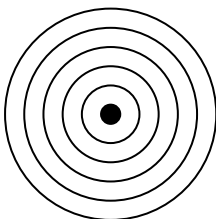
Bei sich entfernendem Spiegel ($\beta > 0$) wird die Reflexion schwächer, um für $\beta = v/c_0 = 1$ gänzlich zu verschwinden, da die mit c_0 hinterher laufende Welle das Zielobjekt nie mehr erreichen kann. Andererseits wird bei Annäherung des Spiegels ($\beta < 0$) die reflektierte Welle sogar stärker als die einfallende sein. Die Ursache dieser „zusätzlichen“ elektromagnetischen Energie ist in der kinetischen Energie des Reflektors zu sehen. Das bewegte Zielobjekt ist nämlich in der Lage, sowohl Energie als auch Impuls mit der Welle auszutauschen.

5.3.2 Doppler-Effekt und Aberration

Bei gleichförmiger Bewegung zwischen einem Sender und einem Empfänger elektromagnetischer Wellen wird der Doppler²-Effekt beobachtet [Gill65]. Bei Annäherung erhöht sich die Empfangsfrequenz, während sie bei größer werdendem Abstand sinkt. Im Vakuum ist nur die gegenseitige Relativbewegung mit der Geschwindigkeit v von Belang. In einem materiellen Medium gibt es – anders als im Vakuum – immer ein ausgezeichnetes Bezugssystem, nämlich dasjenige, in dem das Medium ruht. Durch das Medium kommt es zu Mitführungseffekten und es macht daher einen Unterschied, ob sich nun der Sender mit v_s oder der Empfänger mit v_e relativ zum Medium bewegt.

Zunächst betrachten wir den einfacheren Fall der Ausbreitung von Schallwellen, für den wir in Tabelle 5.4 die Doppler-Formeln der **Akustik** herleiten, wobei wir hier unter $c = 342$ m/s die Schallgeschwindigkeit in Luft verstehen wollen und mit f_s die Frequenz im Ruhesystem der Quelle bezeichnen. Bewegt sich ein Sender mit der Geschwindigkeit v_s relativ zum umgebenden Medium, dann drängen sich die Wellenfronten vor ihm zusammen, während sie sich hinter ihm auflockern. Bei ruhender Quelle hingegen liegen die Phasenfronten äquidistant im Abstand λ_s und ein sich mit v_e entfernender Beobachter nimmt pro Zeit weniger Nulldurchgänge als der Sender wahr. Zur bequemen Abkürzung verwenden wir $\beta_s = v_s/c$ und $\beta_e = v_e/c$.

Tabelle 5.4 Akustischer Doppler-Effekt bei Bewegung von Sender bzw. Empfänger

Sender entfernt sich	Empfänger entfernt sich
 $\lambda_e = \frac{c}{f_e} = \lambda_>$ $\lambda_< = \frac{c - v_s}{f_s} \quad \text{und} \quad \lambda_> = \frac{c + v_s}{f_s}$ $f_e = \frac{f_s}{1 + v_s/c} = \frac{f_s}{1 + \beta_s}$	 $f_s = \frac{c}{\lambda_s} \quad \text{und} \quad f_e = \frac{c - v_e}{\lambda_s}$ $f_e = f_s (1 - v_e/c) = f_s (1 - \beta_e)$

Bei Schallwellen kann man also entscheiden, ob sich entweder die Quelle oder der Beobachter mit der Relativgeschwindigkeit v bewegt. Der Unterschied ist von zweiter Ordnung in $\beta = v/c$:

$$\frac{1}{1 + \beta} - (1 - \beta) \approx \beta^2. \quad (5.67)$$

Die Beziehungen der Tabelle 5.4 wurden für sich entfernende Sender und Empfänger hergeleitet. Soll mit den dortigen Gleichungen eine Annäherung beschrieben werden, muss man nur die Vorzeichen aller Geschwindigkeiten umdrehen, bzw. für β_s und β_e negative Werte zulassen.

² Christian Johann **Doppler** (1803-1853): österreich. Physiker und Mathematiker (Akustik, Optik, Elektrizitätslehre, Astronomie, analytische Geometrie)

Der Doppler-Effekt in der **Elektrodynamik** kann wieder mit Hilfe der Lorentz-Transformation relativ zueinander bewegter Bezugssysteme behandelt werden (siehe Kapitel 3.7). Wir wollen hier nur die Ergebnisse zusammenstellen. Im Vakuum gibt es kein ausgezeichnetes Bezugssystem mehr und wir finden mit $\beta = v/c_0$ anstelle der Ergebnisse in Tabelle 5.4 (siehe [Sau73]):

$$f_e = f_s \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = f_s \left(1 - \beta + \frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^3}{2} + \frac{3\beta^4}{8} - \dots \right) \quad (\text{im Vakuum}), \quad (5.68)$$

da wir nicht entscheiden können, ob sich die Quelle oder der Beobachter bewegt (Relativitätsprinzip). Die Entwicklung der Wurzel in (5.68) zeigt die Übereinstimmung des akustischen und des relativistischen Doppler-Effekts bis zum linearen Term in β (vgl. Tabelle 5.4). In (5.68) treten quadratische und höhere Terme hinzu, die von dem größeren linearen Effekt überlagert werden. Auch in der **Elektrodynamik** muss in einem materiellen Medium mit dem **Brechungsindex** $n = c_0/c = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} > 1$ – wie schon in der Akustik – unterschieden werden, wer von beiden (Quelle oder Beobachter) sich relativ zum Medium bewegt. Die Quelle befinde sich in einem Medium mit $n > 1$ und sende in ihrem Ruhssystem eine Kugelwelle der Frequenz f_s aus.

Fall A: Bewegt sich ein Beobachter mit der konstanten Geschwindigkeit v_e radial von der im Medium ruhenden Quelle weg, dann nimmt er mit $\beta_e = v_e/c_0$ und $\gamma_e = (1-\beta_e^2)^{-1/2}$ eine reduzierte Frequenz war:

$$f_e = \gamma_e f_s (1 - n \beta_e) \quad (\text{in Materie}). \quad (5.69)$$

Fall B: Nun wollen wir nicht den Beobachter sondern die Quelle als bewegt ansehen, dann ändern sich die Verhältnisse. Bei Beobachtung des Lichts einer radial bewegten Quelle nimmt der im Medium ruhende Beobachter dann mit $\beta_s = v_s/c_0$ und $\gamma_s = (1-\beta_s^2)^{-1/2}$ folgende ebenfalls reduzierte Frequenz war:

$$f_e = \frac{f_s}{\gamma_s (1 + n \beta_s)} \quad (\text{in Materie}). \quad (5.70)$$

Der Unterschied beider Szenarien ist wie bei (5.67) ebenfalls von zweiter Ordnung in $\beta = v/c_0$

$$\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+n\beta} - \frac{1-n\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) (n\beta)^2 \quad (5.71)$$

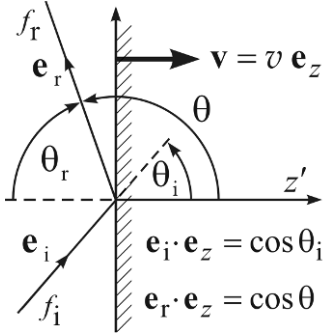
und verschwindet im Vakuum für $n=1$. Der Faktor $1-1/n^2$ wird **Fresnelscher³ Mitführungskoeffizient** genannt [Born69]. Für Licht im Vakuum gibt es kein wellentragendes Medium mehr und es spielt daher keine Rolle, ob sich die Quelle oder der Beobachter bewegt. Nach dem Relativitätsprinzip wird dann der Beobachter wie in (5.68) in beiden Fällen die Frequenz

$$f_e = \frac{f_s}{\gamma(1+\beta)} = \gamma f_s (1-\beta) = f_s \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (5.72)$$

messen. Mit Hilfe dieser Grundüberlegungen wollen wir nun den **Doppler-Effekt in der Radartechnik** untersuchen. Dazu betrachten wir in Übung 5.2 den schrägen Einfall einer TEM-Welle auf eine unendlich ausgedehnte, ebene, metallische Platte (vgl. $\perp$ Einfall in Bild 5.10).

³ Augustin Jean **Fresnel** (1788-1827): frz. Physiker und Ingenieur (Begründer der Wellentheorie des Lichtes, Arbeiten zu Beugung, Interferenz, Polarisation, Doppelbrechung und Aberration)

Übung 5.2: Doppler-Effekt und Aberration in der Radartechnik



Eine TEM-Radarwelle mit der Frequenz f_i falle im Vakuum schräg unter dem Winkel θ_i auf eine unendlich ausgedehnte, ebene, metallische Platte bei $z' = 0$ ein. Die Platte – ruhend im System S' – bewege sich gleichförmig mit $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$ von dem im System S ruhenden Radar weg (Bild 5.11). Bestimmen Sie den Winkel θ_r , unter dem die Welle reflektiert wird sowie deren Frequenz f_r .

Bild 5.11 Ebene metallische Platte – ruhend im System S' – als gleichförmig mit $\beta = v/c_0$ bewegtes Radarziel

• Lösung:

Die Sendefrequenz f_i wird im System S' der mit $\beta = v/c_0$ bewegten Platte wegen (5.69) – unter Einführung eines Richtungskosinus – als veränderte Frequenz wahrgenommen:

$$f' = \gamma f_i (1 - \beta \cos \theta_i). \quad (5.73)$$

Als Folge der **Aberration** [Pau81] scheint die Radarwelle im Ruhesystem S' des Ziels aus einer anderen Richtung θ'_i einzufallen. An der Platte gilt das normale **Reflexionsgesetz**

$$\theta' = \pi - \theta'_i \text{ (Reflexionsgesetz) mit } \tan \frac{\theta'_i}{2} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tan \frac{\theta_i}{2} \text{ (Aberrationsgesetz), } (5.74)$$

woraus wir die Richtung der rücklaufenden Welle – ausgedrückt im System S – erhalten:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tan \frac{\theta'}{2} \quad \text{bzw. mit } \theta_r = \pi - \theta \text{ folgt } \boxed{\tan \frac{\theta_r}{2} = \frac{1+\beta}{1-\beta} \tan \frac{\theta_i}{2}}. \quad (5.75)$$

Nachdem sich eben noch das Ziel als bewegter Empfänger verhalten hat, agiert es nun als bewegter Sender. Am Radar ist nach (5.70) daher folgende Frequenz messbar:

$$f_r = \frac{f'}{\gamma(1 + \beta \cos \theta_r)} \quad \text{bzw. mit (5.73): } f_r = f_i \frac{1 - \beta \cos \theta_i}{1 + \beta \cos \theta_r}. \quad (5.76)$$

Nach einigen trigonometrischen Umformungen folgt $\boxed{\cos \theta_r = \frac{\cos \theta_i - 2\beta + \beta^2 \cos \theta_i}{1 - 2\beta \cos \theta_i + \beta^2}}$ und

$$\boxed{f_r(\theta_i) = \gamma^2 f_i (1 - 2\beta \cos \theta_i + \beta^2)} \quad (\text{siehe auch [Sau73]}). \quad (5.77)$$

Bei $\theta_i = 0$ folgt der **longitudinale** und bei $\theta_i = \pi/2$ der **transversale Doppler-Effekt**:

$$\boxed{f_r(0) = f_i \frac{1-\beta}{1+\beta} \approx f_i (1-2\beta)} \quad \text{und} \quad \boxed{f_r(\pi/2) = f_i \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \approx f_i (1+2\beta^2)}. \quad (5.78)$$

In (5.78) finden wir Näherungen bei kleinen Zielgeschwindigkeiten $\beta \ll 1$. Für ein Flugobjekt mit $v = 1000 \text{ km/h}$ gilt $\beta = 9,266 \cdot 10^{-7}$ und wir erhalten bei $f_i = 10 \text{ GHz}$ die longitudinale Dopplerfrequenz $f_d = f_r - f_i \approx -2\beta f_i = -18,53 \text{ kHz}$. Der transversale Doppler-Effekt hingegen geht auf die **Zeitdilatation** zurück [Sröd05] und ist wesentlich kleiner. Er wird meist vom longitudinalen maskiert und hat in der Akustik **kein** Analogon [Lang96]. $\square$

5.4 Schiefer Einfall auf eine ebene Trennfläche

5.4.1 Brechungsgesetz

Das grundsätzliche Verhalten bei Reflexion und Brechung einer ebenen Welle bei schrägem Einfall auf eine ebene unendlich ausgedehnte Trennfläche bei $z = 0$ ist in Bild 5.12 dargestellt. Die Halbräume 1 und 2 seien verlustfrei ($\kappa_{1,2} = 0$) und werden durch ihre Permittivität und Permeabilität ausreichend charakterisiert. Für den Fall leitfähiger Medien mit Verlusten sei auf die Literatur verwiesen [Bal89].

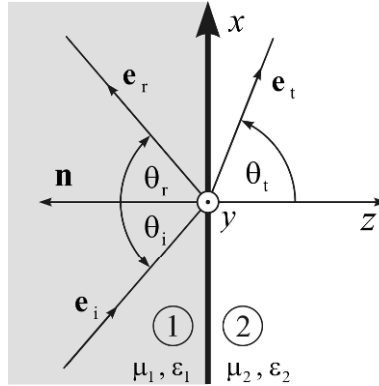


Bild 5.12 Schräger Einfall einer TEM-Welle auf eine ebene unendlich ausgedehnte Trennfläche

Als Einfallsebene wird diejenige Ebene bezeichnet, die durch die Einfallsrichtung $\mathbf{e}_i$ und die Flächennormale $\mathbf{n}$ der Grenzfläche aufgespannt wird. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass die Einfallsebene mit der x - z -Ebene eines zur Trennfläche konformen, kartesischen Koordinatensystems übereinstimmt. Der Einfallsvektor $\mathbf{e}_i$ ist dann durch den gegebenen Einfallswinkel θ_i vollständig bestimmt:

$$\boxed{\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_x \sin \theta_i + \mathbf{e}_z \cos \theta_i} \quad (5.79)$$

Die Richtungen der reflektierten und gebrochenen Welle werden durch $\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_t$ definiert. Zunächst wollen wir den Reflexionswinkel θ_r und den Brechungswinkel θ_t herleiten und dann auch die Stärke der reflektierten und der gebrochenen Welle bestimmen. Als bequeme Abkürzungen benutzen wir die reellen Feldwellenwiderstände

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \quad \text{und} \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \quad (5.80)$$

sowie die Ausbreitungsgeschwindigkeiten

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}} \quad (5.81)$$

Zur Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen in der Ebene $z = 0$ ist neben einer gebrochenen im Allgemeinen auch eine reflektierte Welle notwendig. Der vollständige Feldansatz beiderseits der Trennfläche ist in Tabelle 5.5 zusammengestellt. Die Darstellung der E-Felder orientiert sich an (4.94), womit auch die H-Felder nach (4.103) festgelegt sind. Der Ansatz berücksichtigt wegen eines möglichen Doppler-Effektes verschiedene Zeitfunktionen $e^{j\omega_1 t}$, $e^{j\omega_r t}$ und $e^{j\omega_t t}$.

Tabelle 5.5 Ansatz dreier TEM-Wellen unterschiedlicher Strahlrichtung für das Feldproblem aus Bild 5.12

Medium 1		Medium 2
einfallende Welle	reflektierte Welle	gebrochene Welle
$\underline{\mathbf{E}}_i = \underline{\mathbf{E}}_{i0} e^{j(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})}$	$\underline{\mathbf{E}}_r = \underline{\mathbf{E}}_{r0} e^{j(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})}$	$\underline{\mathbf{E}}_t = \underline{\mathbf{E}}_{t0} e^{j(\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})}$
$\underline{\mathbf{H}}_i = \frac{\mathbf{e}_i \times \underline{\mathbf{E}}_{i0}}{Z_1} e^{j(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})}$	$\underline{\mathbf{H}}_r = \frac{\mathbf{e}_r \times \underline{\mathbf{E}}_{r0}}{Z_1} e^{j(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})}$	$\underline{\mathbf{H}}_t = \frac{\mathbf{e}_t \times \underline{\mathbf{E}}_{t0}}{Z_2} e^{j(\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})}$

Die Kreisfrequenzen der drei Teilwellen lassen wir in völliger Allgemeinheit noch unterschiedlich zu und die reellen Wellenzahlvektoren

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_i &= k_i \mathbf{e}_i = \omega_i \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} (\mathbf{e}_x \sin \theta_i + \mathbf{e}_z \cos \theta_i) \\
 \mathbf{k}_r &= k_r \mathbf{e}_r = \omega_r \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \mathbf{e}_r \\
 \mathbf{k}_t &= k_t \mathbf{e}_t = \omega_t \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} \mathbf{e}_t
 \end{aligned} \tag{5.82}$$

weisen in die jeweilige Ausbreitungsrichtung der einfallenden (incident), reflektierten (reflected) und gebrochenen Welle (transmitted). Der Ortsvektor $\mathbf{r}$ hat wie üblich die kartesische Komponentendarstellung $\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$. Durch die Gleichung $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$ kann z. B. die Ebene $z = 0$ bequem beschrieben werden. Die Stetigkeitsforderungen für die elektrischen und magnetischen Feldkomponenten (siehe Tabelle 3.2) werden wie folgt angesetzt:

$$\begin{aligned}
 \text{tangenciales E-Feld} &\Rightarrow \mathbf{n} \times (\underline{\mathbf{E}}_i + \underline{\mathbf{E}}_r) \Big|_{z=0} = \mathbf{n} \times \underline{\mathbf{E}}_t \Big|_{z=0} \\
 \text{tangenciales H-Feld} &\Rightarrow \mathbf{n} \times (\underline{\mathbf{H}}_i + \underline{\mathbf{H}}_r) \Big|_{z=0} = \mathbf{n} \times \underline{\mathbf{H}}_t \Big|_{z=0} \\
 \text{normales D-Feld} &\Rightarrow \varepsilon_1 \mathbf{n} \cdot (\underline{\mathbf{E}}_i + \underline{\mathbf{E}}_r) \Big|_{z=0} = \varepsilon_2 \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{E}}_t \Big|_{z=0} \\
 \text{normales B-Feld} &\Rightarrow \mu_1 \mathbf{n} \cdot (\underline{\mathbf{H}}_i + \underline{\mathbf{H}}_r) \Big|_{z=0} = \mu_2 \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{H}}_t \Big|_{z=0} .
 \end{aligned} \tag{5.83}$$

Wie wir bald sehen werden, sind diese vier Gleichungen nicht linear unabhängig voneinander. Nach Einsetzen der Feldstärken aus Tabelle 5.5 in (5.83) erhält man (immer für $z = 0$):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} \times \left(\underline{\mathbf{E}}_{i0} e^{j(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} + \underline{\mathbf{E}}_{r0} e^{j(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \right) &= \mathbf{n} \times \underline{\mathbf{E}}_{t0} e^{j(\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})} \\
 \mathbf{n} \times \left(\frac{\mathbf{e}_i \times \underline{\mathbf{E}}_{i0}}{Z_1} e^{j(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} + \frac{\mathbf{e}_r \times \underline{\mathbf{E}}_{r0}}{Z_1} e^{j(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \right) &= \mathbf{n} \times \left(\frac{\mathbf{e}_t \times \underline{\mathbf{E}}_{t0}}{Z_2} e^{j(\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})} \right) \\
 \varepsilon_1 \mathbf{n} \cdot \left(\underline{\mathbf{E}}_{i0} e^{j(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} + \underline{\mathbf{E}}_{r0} e^{j(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \right) &= \varepsilon_2 \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{E}}_{t0} e^{j(\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})} \\
 \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_i \times \underline{\mathbf{E}}_{i0}}{c_1} e^{j(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} + \frac{\mathbf{e}_r \times \underline{\mathbf{E}}_{r0}}{c_1} e^{j(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \right) &= \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_t \times \underline{\mathbf{E}}_{t0}}{c_2} e^{j(\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})} \right) .
 \end{aligned} \tag{5.84}$$

Nachdem der Ansatz in Tabelle 5.5 einen möglichen Doppler-Effekt durchaus noch berücksichtigt, wollen wir uns im Folgenden auf eine ruhende Trennfläche beschränken. Damit (5.84) zu jeder Zeit und an allen Punkten der Trennfläche erfüllt werden kann, muss die zeitliche und räumliche Änderung sämtlicher Teilfelder bei $z=0$ jeweils die gleiche sein. Dies bedeutet, dass die Phasenfaktoren aller drei Wellen bei $z=0$ miteinander übereinstimmen müssen:

$$\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} \Big|_{z=0} = \omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} \Big|_{z=0} = \omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} \Big|_{z=0}. \quad (5.85)$$

Die Bedingung der gleichen zeitlichen Abhängigkeit kann nur bei

$$\boxed{\omega_i = \omega_r = \omega_t \equiv \omega} \quad (5.86)$$

erfüllt werden. Es findet daher bei Reflexion und Brechung an einer ruhenden Trennfläche keine Frequenzänderung statt. Der Bequemlichkeit halber definieren wir nun die reellen Wellenzahlen

$$k_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \quad \text{und} \quad k_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}. \quad (5.87)$$

Mit (5.86) und (5.87) kann die Phasenbedingung (5.85) umgeschrieben werden:

$$k_1 \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r} \Big|_{z=0} = k_1 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r} \Big|_{z=0} = k_2 \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{r} \Big|_{z=0}. \quad (5.88)$$

Es müssen zur **Erfüllung der Stetigkeit** in der Trennfläche also folgende drei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} &= 0 \\ (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{r} &= 0 \\ \left(\mathbf{e}_i - \frac{k_2}{k_1} \mathbf{e}_t \right) \cdot \mathbf{r} &= 0. \end{aligned}} \quad (5.89)$$

Bei beliebigem $\mathbf{r} (z=0) = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y$ sind diese drei Gleichungen nur dann zu erfüllen, wenn

$$\mathbf{n} \parallel (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_r) \parallel \left(\mathbf{e}_i - \frac{k_2}{k_1} \mathbf{e}_t \right) \quad (5.90)$$

ist. Die Ausbreitungsrichtungen $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_t$ liegen daher stets in ein- und derselben Ebene. Diese Ebene wird **Einfallebene** genannt und durch die Einfallsrichtung $\mathbf{e}_i$ und die Flächennormale $\mathbf{n}$ der Grenzfläche aufgespannt. Damit können wir alle drei Einheitsvektoren, die koplanar in der x-z-Ebene liegen, wie folgt darstellen:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= \mathbf{e}_x \sin \theta_i + \mathbf{e}_z \cos \theta_i \\ \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_x \sin \theta_r - \mathbf{e}_z \cos \theta_r \\ \mathbf{e}_t &= \mathbf{e}_x \sin \theta_t + \mathbf{e}_z \cos \theta_t. \end{aligned}} \quad (5.91)$$

Aus der Bedingung $(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{r} = 0$ folgt deswegen:

$$\left[\mathbf{e}_x (\sin \theta_i - \sin \theta_r) + \mathbf{e}_z (\cos \theta_i + \cos \theta_r) \right] \cdot (\mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y) = 0, \quad (5.92)$$

d. h. es wird:

$$\boxed{\sin \theta_i = \sin \theta_r} . \quad (5.93)$$

Aus $(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_t k_2/k_1) \cdot \mathbf{r} = 0$ folgt außerdem:

$$\left[\mathbf{e}_x \left(\sin \theta_i - \frac{k_2}{k_1} \sin \theta_t \right) + \mathbf{e}_z \left(\cos \theta_i - \frac{k_2}{k_1} \cos \theta_t \right) \right] \cdot (\mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y) = 0 , \quad (5.94)$$

d. h. es muss gelten:

$$\boxed{\sin \theta_i = \frac{k_2}{k_1} \sin \theta_t} . \quad (5.95)$$

Die linear unabhängigen Bedingungen (5.93) und (5.95) zur Bestimmung des Reflexions- und des Transmissionswinkels fassen wir wie folgt zusammen.

- Der Einfallswinkel ist gleich dem Reflexionswinkel:

$$\boxed{\theta_i = \theta_r = \theta_1} . \quad (5.96)$$

- Der Brechungswinkel $\theta_t = \theta_2$ folgt aus dem **Snelliusschen Brechungsgesetz**⁴:

$$\boxed{\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{n_1}{n_2}} . \quad (5.97)$$

Häufig führt man durch die Maxwellsche Beziehung den so genannten Brechungsindex

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{\sqrt{\mu \varepsilon}}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} \quad (5.98)$$

ein, der bei natürlichen Materialien stets ≥ 1 ist⁵. Im optisch dichteren Medium (mit größerem Brechungsindex n) sind Lichtgeschwindigkeit, Wellenlänge und Brechungswinkel kleiner. Das Brechungsgesetz (5.97) kann dann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\boxed{n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2} . \quad (5.99)$$

Falls Medium 2 mit $n_2 > n_1$ das optisch dichtere ist, wird der Strahl „zum Lot hin“ gebrochen. Im einem optisch dünneren Medium 2 mit $n_2 < n_1$ erfolgt dagegen Brechung „vom Lot weg“, womit es hier einen Grenzwinkel $\theta_1 = \theta_c < \pi/2$ geben muss, bei dem **Totalreflexion** mit $\theta_2 = \pi/2$ eintritt. Nach (5.99) erhalten wir für diesen Grenzwinkel:

$$\theta_c = \arcsin(n_2/n_1) . \quad (5.100)$$

Wir erinnern noch einmal daran, dass alle drei Wellen bei ruhender Trennfläche die gleiche Frequenz aufweisen.

⁴ Willebrord **Snell van Rojen**, genannt **Snellius** (1580-1626): niederld. Mathematiker u. Physiker (Geodäsie, Gesetz der Strahlenbrechung)

⁵ Bei künstlichen Metamaterialien und photonischen Kristallen ist auch $n < 0$ möglich [Pen04].

5.4.2 Fresnelsche Formeln

Neben den Strahlrichtungen interessieren wir uns ganz wesentlich auch für die Feldstärken der reflektierten und gebrochenen Teilwellen, die – wie schon beim senkrechten Einfall – durch Reflexions- und Transmissionsfaktoren beschrieben werden können. Aufgrund der **allgemeinen Stetigkeitsbedingungen** (5.85)

$$\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} \Big|_{z=0} = \omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} \Big|_{z=0} = \omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} \Big|_{z=0} \quad (5.101)$$

und $\omega_i = \omega_r = \omega_t \equiv \omega$ kann (5.84) mit $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$ weiter vereinfacht werden:

$$\underline{\mathbf{E}}_{\text{tang}} \Rightarrow \mathbf{e}_z \times (\underline{\mathbf{E}}_{i0} + \underline{\mathbf{E}}_{r0} - \underline{\mathbf{E}}_{t0}) = 0 \quad (5.102)$$

$$\underline{\mathbf{H}}_{\text{tang}} \Rightarrow \mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{e}_i \times \underline{\mathbf{E}}_{i0}}{Z_1} + \frac{\mathbf{e}_r \times \underline{\mathbf{E}}_{r0}}{Z_1} - \frac{\mathbf{e}_t \times \underline{\mathbf{E}}_{t0}}{Z_2} \right) = 0 \quad (5.103)$$

$$\underline{\mathbf{D}}_{\text{norm}} \Rightarrow \mathbf{e}_z \cdot [\varepsilon_1 (\underline{\mathbf{E}}_{i0} + \underline{\mathbf{E}}_{r0}) - \varepsilon_2 \underline{\mathbf{E}}_{t0}] = 0 \quad (5.104)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_{\text{norm}} \Rightarrow \mathbf{e}_z \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_i \times \underline{\mathbf{E}}_{i0}}{c_1} + \frac{\mathbf{e}_r \times \underline{\mathbf{E}}_{r0}}{c_1} - \frac{\mathbf{e}_t \times \underline{\mathbf{E}}_{t0}}{c_2} \right) = 0. \quad (5.105)$$

Aus diesen **speziellen Stetigkeitsbedingungen** wollen wir die komplexen Amplituden $\underline{\mathbf{E}}_{r0}$ und $\underline{\mathbf{E}}_{t0}$ der reflektierten und gebrochenen Welle bestimmen. Zunächst wollen wir (5.103) mit Hilfe des Graßmannschen Entwicklungssatzes $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ umformen:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{e}_i (\mathbf{e}_z \cdot \underline{\mathbf{E}}_{i0}) - \underline{\mathbf{E}}_{i0} (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_i)}{Z_1} + \frac{\mathbf{e}_r (\mathbf{e}_z \cdot \underline{\mathbf{E}}_{r0}) - \underline{\mathbf{E}}_{r0} (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r)}{Z_1} - \\ & - \frac{\mathbf{e}_t (\mathbf{e}_z \cdot \underline{\mathbf{E}}_{t0}) - \underline{\mathbf{E}}_{t0} (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_t)}{Z_2} = 0. \end{aligned} \quad (5.106)$$

Mit den Skalarprodukten

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_i &= \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{e}_x \sin \theta_1 + \mathbf{e}_z \cos \theta_1) = \cos \theta_1 \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{e}_x \sin \theta_1 - \mathbf{e}_z \cos \theta_1) = -\cos \theta_1 \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_t &= \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{e}_x \sin \theta_2 + \mathbf{e}_z \cos \theta_2) = \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (5.107)$$

erhalten wir aus (5.106):

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{e}_i (\mathbf{e}_z \cdot \underline{\mathbf{E}}_{i0}) - \underline{\mathbf{E}}_{i0} \cos \theta_1}{Z_1} + \frac{\mathbf{e}_r (\mathbf{e}_z \cdot \underline{\mathbf{E}}_{r0}) + \underline{\mathbf{E}}_{r0} \cos \theta_1}{Z_1} - \\ & - \frac{\mathbf{e}_t (\mathbf{e}_z \cdot \underline{\mathbf{E}}_{t0}) - \underline{\mathbf{E}}_{t0} \cos \theta_2}{Z_2} = 0. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Es ist nun zweckmäßig, wie in Tabelle 5.6 zwei verschiedene Fälle zu betrachten, denn bei einer beliebig polarisierten einfallenden ebenen Welle kann der E-Vektor in je einen linear polarisierten Anteil **senkrecht** und **parallel** zur Einfallsebene zerlegt werden.

Tabelle 5.6 Schiefer Einfall auf eine ebene Trennfläche mit E-Vektor $\perp$ bzw. $\parallel$ zur Einfallsebene

s – Fall E-Vektor <u>senkrecht</u> und H-Vektor <u>parallel</u>	p – Fall E-Vektor <u>parallel</u> und H-Vektor <u>senkrecht</u>
$\underline{E}_i = E_i \mathbf{e}_y$	$Z_1 \underline{H}_i = E_i \mathbf{e}_y$
$Z_1 \underline{H}_i = E_i (-\mathbf{e}_x \cos \theta_1 + \mathbf{e}_z \sin \theta_1)$	$\underline{E}_i = E_i (\mathbf{e}_x \cos \theta_1 - \mathbf{e}_z \sin \theta_1)$
$\underline{E}_i \parallel \underline{E}_r \parallel \underline{E}_t$	$\underline{H}_i \parallel \underline{H}_r \parallel \underline{H}_t$

Die Richtung des elektrischen Feldvektors der reflektierten Welle wurde so gewählt, dass die Reflexion an einer metallischen, elektrisch ideal leitenden Wand mit $Z_2 \rightarrow 0$ jeweils die Reflexionsfaktoren $r_s = r_p = -1$ ergibt. Die Richtung des elektrischen Feldvektors der transmitierten Welle wurde so gewählt, dass für verschwindende Trennschicht mit $Z_2 = Z_1$ sich jeweils die Transmissionsfaktoren $d_s = d_p = 1$ ergeben. Nach Festlegen der E-Vektoren ergibt sich die Richtung der H-Vektoren zwingend aus der Richtung der Wellenausbreitung (Rechte-Hand-Regel). Zunächst wollen wir den **s – Fall** betrachten. Nach Tabelle 5.6 gilt:

$$\underline{E}_{i0} = E_{i0} \mathbf{e}_y, \quad \underline{E}_{r0} = E_{r0} \mathbf{e}_y \quad \text{und} \quad \underline{E}_{t0} = E_{t0} \mathbf{e}_y, \quad (5.109)$$

und wir erhalten aus (5.102) – der Stetigkeitsforderung für $\underline{E}_{\text{tang}}$ –

$$\underline{E}_{i0} + \underline{E}_{r0} - \underline{E}_{t0} = 0. \quad (5.110)$$

Als zweite Beziehung erhalten wir aus (5.108) – der Stetigkeitsforderung für $\underline{H}_{\text{tang}}$ –

$$\frac{-E_{i0} \cos \theta_1}{Z_1} + \frac{E_{r0} \cos \theta_1}{Z_1} + \frac{E_{t0} \cos \theta_2}{Z_2} = 0. \quad (5.111)$$

Da bei s-Polarisation stets $\underline{D}_{\text{norm}} \equiv 0$ gilt, ist (5.104) automatisch erfüllt, während (5.105) für $\underline{B}_{\text{norm}}$ wieder auf das bereits bekannte Snelliussche Brechungsgesetz führt, wie man durch Umsortieren der Spatprodukte zeigen kann. Die komplexen Amplituden von reflektierter und gebrochener Welle relativ zur einfallenden drückt man gewöhnlich durch den Reflexions- und Transmissionsfaktor

$$\boxed{r_s = \frac{\underline{E}_{r0}}{\underline{E}_{i0}}} \quad \text{und} \quad \boxed{d_s = \frac{\underline{E}_{t0}}{\underline{E}_{i0}}} \quad (5.112)$$

aus, womit wir die Stetigkeitsbedingungen (5.110) und (5.111) auch so formulieren können:

$$1 + r_s - d_s = 0 \quad \text{und} \quad -1 + r_s + d_s \frac{Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1} = 0. \quad (5.113)$$

Aus (5.113) erhalten wir nach kurzer Zwischenrechnung die **Fresnelschen Formeln bei senkrechter Polarisation:**

$$\boxed{r_s = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2}} \quad \text{und} \quad \boxed{d_s = 1 + r_s = \frac{2 Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2}}. \quad (5.114)$$

Im Falle $\theta_1 = \theta_2 = 0$, also bei senkrechtem Einfall, ergeben sich hieraus wieder die bereits bekannten Zusammenhänge (5.29). Nun betrachten wir den **p – Fall**. Nach Tabelle 5.6 gilt:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{i0} &= \underline{E}_{i0} (\mathbf{e}_x \cos \theta_1 - \mathbf{e}_z \sin \theta_1) \\ \underline{E}_{r0} &= \underline{E}_{r0} (\mathbf{e}_x \cos \theta_1 + \mathbf{e}_z \sin \theta_1) \\ \underline{E}_{t0} &= \underline{E}_{t0} (\mathbf{e}_x \cos \theta_2 - \mathbf{e}_z \sin \theta_2) \end{aligned} \quad (5.115)$$

und wir erhalten aus (5.102) – der Stetigkeitsforderung für $\underline{E}_{\text{tang}}$ –

$$\underline{E}_{i0} \cos \theta_1 + \underline{E}_{r0} \cos \theta_1 - \underline{E}_{t0} \cos \theta_2 = 0. \quad (5.116)$$

Als zweite Beziehung erhalten wir aus (5.104) – der Stetigkeitsforderung für $\underline{D}_{\text{norm}}$ –

$$\varepsilon_1 (-\underline{E}_{i0} \sin \theta_1 + \underline{E}_{r0} \sin \theta_1) + \varepsilon_2 \underline{E}_{t0} \sin \theta_2 = 0. \quad (5.117)$$

Da bei p-Polarisation stets $\underline{B}_{\text{norm}} \equiv 0$ gilt, ist (5.105) automatisch erfüllt, während (5.103) für $\underline{H}_{\text{tang}}$ abermals auf die Beziehung (5.117) führt. Die komplexen Amplituden von reflektierter und gebrochener Welle relativ zur einfallenden drückt man auch im p-Fall durch den Reflexions- und Transmissionsfaktor

$$\boxed{r_p = \frac{\underline{E}_{r0}}{\underline{E}_{i0}}} \quad \text{und} \quad \boxed{d_p = \frac{\underline{E}_{t0}}{\underline{E}_{i0}}} \quad (5.118)$$

aus, womit die Stetigkeitsbedingungen (5.116) und (5.117) nun lauten:

$$1 + r_p - d_p \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} = 0 \quad \text{und} \quad -1 + r_p + d_p \frac{\varepsilon_2 \sin \theta_2}{\varepsilon_1 \sin \theta_1} = 0. \quad (5.119)$$

Aus (5.119) erhalten wir nach kurzer Zwischenrechnung, in der das Brechungsgesetz (5.97) verwendet wird, die **Fresnelschen Formeln bei paralleler Polarisation**, die sich bei senkrechtem Einfall ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) wieder auf (5.29) reduzieren:

$$\boxed{r_p = \frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_1 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1}} \quad \text{und} \quad \boxed{d_p = \frac{Z_2}{Z_1} (1 - r_p) = \frac{2 Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1}}. \quad (5.120)$$

Den allgemeinen Fall einer **elliptisch polarisierten** ebenen Welle kann man durch Superposition beider Spezialfälle erhalten. Einen vorgegebenen E-Vektor $\underline{E}_{i0}$ der unter einem Winkel θ_1 einfallenden Welle spaltet man nämlich in einen Anteil *senkrecht* und *parallel* zur Einfallsebene auf, die durch die x-z-Ebene bestimmt sei. Somit gilt:

$$\underline{E}_{i0} = \underline{E}_s \mathbf{e}_y + \underline{E}_p (\mathbf{e}_x \cos \theta_1 - \mathbf{e}_z \sin \theta_1) \quad (5.121)$$

Die komplexen Amplituden des s- und p-Anteils erhält man nach Tabelle 5.6 aus:

$$\begin{aligned} \underline{E}_s &= \mathbf{e}_y \cdot \underline{E}_{i0} \\ \underline{E}_p &= (\mathbf{e}_x \cos \theta_1 - \mathbf{e}_z \sin \theta_1) \cdot \underline{E}_{i0} \end{aligned} \quad (5.122)$$

Für die reflektierte und transmittierte Welle kann dann unter Verwendung der bereits bekannten Reflexions- und Transmissionsfaktoren geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{r0} &= r_s \underline{E}_s \mathbf{e}_y + r_p \underline{E}_p (\mathbf{e}_x \cos \theta_1 + \mathbf{e}_z \sin \theta_1) \\ \underline{E}_{t0} &= d_s \underline{E}_s \mathbf{e}_y + d_p \underline{E}_p (\mathbf{e}_x \cos \theta_2 - \mathbf{e}_z \sin \theta_2) \end{aligned} \quad (5.123)$$

Übung 5.3: Reflexionsfaktor bei schiefem Einfall

- Auf die ebene Trennfläche zwischen zwei Halbräumen mit den Materialkonstanten $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ und $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ bzw. $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ fällt wie in Bild 5.13 eine ebene homogene Welle (TEM-Welle) unter dem Winkel $\theta_1 = \pi/6 \hat{=} 30^\circ$ ein. Die einfallende Welle sei *linear* und *senkrecht* zur Einfallsebene polarisiert (*s-Fall*). Wegen $\mu_2 \varepsilon_2 > \mu_1 \varepsilon_1$ erfolgt die Strahlbrechung zum Lot hin. Die Messung des Reflexionsfaktors r_s kann zur Bestimmung der unbekannten Permittivität ε_2 benutzt werden. Nehmen Sie an, es sei ein Reflexionsfaktor von $r_s = -1/2$ gemessen worden. Wie groß muss darum ε_r gewesen sein?

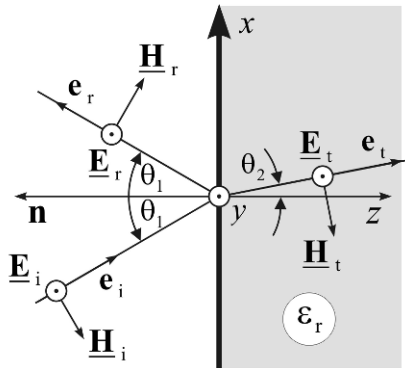


Bild 5.13 Anordnung zur Messung der Permittivität ε_2 einer ebenen Materialprobe

• Lösung:

Aus der allgemeinen Darstellung (5.114) des Reflexionsfaktors im s-Fall

$$r_s = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} \quad (5.124)$$

folgt nach Einsetzen der reellen Feldwellenwiderstände (5.80)

$$r_s = \frac{\frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \cos \theta_1 - Z_0 \cos \theta_2}{\frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \cos \theta_1 + Z_0 \cos \theta_2} = \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{\epsilon_r} \cos \theta_2}{\cos \theta_1 + \sqrt{\epsilon_r} \cos \theta_2}. \quad (5.125)$$

Aus (5.125) muss noch der unbekannte Brechungswinkel $0 \leq \theta_2 \leq \pi/2$, der auf einen *positiven* Kosinus führt, mit Hilfe des Brechungsgesetzes (5.97) eliminiert werden:

$$\cos \theta_2 = +\sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{\epsilon_r}} > 0, \quad (5.126)$$

womit wir schließlich anstelle (5.125) schreiben können:

$$r_s = \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + \sqrt{\epsilon_r - \sin^2 \theta_1}}. \quad (5.127)$$

Diese Gleichung kann ohne Schwierigkeiten nach ϵ_r aufgelöst werden:

$$\boxed{\epsilon_r = \sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 \frac{(1 - r_s)^2}{(1 + r_s)^2}}. \quad (5.128)$$

Bei einem gemessenen Reflexionsfaktor von $r_s = -1/2$ unter einem Einfallswinkel von $\theta_1 = \pi/6$ erhalten wir schließlich den gesuchten Materialparameter:

$$\epsilon_r = \sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} \frac{(1 + 0,5)^2}{(1 - 0,5)^2} = 7. \quad (5.129)$$

Aus (5.126) kann man natürlich noch den Brechungswinkel $\theta_2 \approx 10,9^\circ$ ermitteln. Den Transmissionsfaktor erhält man aus (5.114) als $d_s = 1 + r_s = 1/2$. Man beachte, dass eine formale Berechnung nach der nur für den p-Fall gültigen Beziehung (5.120), also etwa $(1 - r_s) Z_2 / Z_1 \approx 0,567$ keineswegs zum richtigen Ergebnis führt! $\square$

5.4.3 Totaltransmission

Die Reflexionsfaktoren (5.114) und (5.120)

$$r_s = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_1 - \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \cos \theta_1 + \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}} \quad (5.130)$$

$$r_p = \frac{Z_2 \cos \theta_2 - Z_1 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_1}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \cos \theta_1}$$

hängen bei gegebenen Materialeigenschaften nur vom Einfallswinkel θ_1 ab, denn der Brechungswinkel θ_2 kann mit Hilfe des Snelliusschen Brechungsgesetzes (5.97) eliminiert werden, d. h. für $(\mu_2 \varepsilon_2)^{1/2} \sin \theta_2 = (\mu_1 \varepsilon_1)^{1/2} \sin \theta_1$ erhalten wir mit $d_s = 1 + r_s$:

$$r_s = \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\mu_2 \varepsilon_1} - \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\mu_2 \varepsilon_1} - \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \sin^2 \theta_1}} \quad (5.131)$$

und mit $d_p = (1 - r_p) \sqrt{(\mu_2 \varepsilon_1)/(\mu_1 \varepsilon_2)}$:

$$r_p = \frac{-\cos \theta_1 + \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} \sin^2 \theta_1}} \quad (5.132)$$

Da beide Zähler in (5.131) und (5.132) eine Differenz enthalten, wollen wir nun die Frage stellen, ob es vielleicht einen Einfallswinkel $\theta_1 = \theta_B$ gibt, für den trotz vorhandener Trennfläche die Reflexion verschwindet? Dass dies tatsächlich möglich ist, werden wir in Übung 5.4 beweisen. Im Falle verschwindender Reflexion wird nur eine transmittierte Welle angeregt. Die gesamte Energie dringt somit in den zweiten Raumteil ein, weswegen man auch von **Totaltransmission** spricht.

Übung 5.4: Verschwinden der Reflexion bei schiefem Einfall

- Auf die ebene Trennfläche zwischen zwei Halbräumen mit den Materialkonstanten $\mu_1, \mu_2, \varepsilon_1$ und ε_2 fällt wie in Bild 5.14 eine ebene homogene Welle (TEM-Welle) unter einem Winkel θ_1 ein.

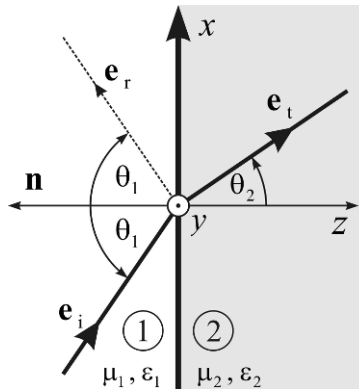


Bild 5.14 Totaltransmission bei schiefem Einfall mit $r_s = 0$ bzw. $r_p = 0$

Unter welchen Winkeln $\theta_1 = \theta_B^s$ und $\theta_1 = \theta_B^p$ muss die ebene Welle einfallen, damit die Reflexionsfaktoren r_s oder r_p zu null werden?

• **Lösung:**

Aus der allgemeinen Darstellung der Reflexionsfaktoren (5.131) und (5.132) findet man folgende Nullstellenbedingungen:

$$r_s = 0 \Leftrightarrow \cos \theta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\mu_2 \varepsilon_1} - \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \sin^2 \theta_1} \quad (5.133)$$

$$r_p = 0 \Leftrightarrow \cos \theta_1 = \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} \sin^2 \theta_1},$$

aus denen man die gesuchten Einfallswinkel bestimmen kann:

$$1 - \sin^2 \theta_B^s = \frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\mu_2 \varepsilon_1} - \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \sin^2 \theta_B^s \quad (5.134)$$

$$1 - \sin^2 \theta_B^p = \frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} \sin^2 \theta_B^p.$$

Nach kurzer Zusammenfassung erhalten wir:

$$\sin \theta_B^s = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}} \leq 1 \quad \text{und} \quad \sin \theta_B^p = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}} \leq 1. \quad \square \quad (5.135)$$

Aus (5.135) folgen nur dann physikalisch sinnvolle – also reelle – Einfallswinkel, wenn die Radikanden kleiner oder gleich eins sind. Außerdem muss zum Verschwinden der Reflexion im s-Fall $\mu_1 \neq \mu_2$ und im p-Fall $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ gelten, da sonst die Nenner null werden. Diese einschränkenden Forderungen untersuchen wir näher in Tabelle 5.7.

Tabelle 5.7 Notwendige Bedingungen zum Verschwinden der Reflexion bei schiefem Einfall

s – Fall ($r_s = 0 \rightarrow d_s = 1$)	p – Fall ($r_p = 0 \rightarrow d_p = \sqrt{(\mu_2 \varepsilon_1)/(\mu_1 \varepsilon_2)}$)
$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \leq \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1}$ $\Downarrow$ $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \leq \frac{\mu_1}{\mu_2} \Rightarrow \boxed{\mu_1 \varepsilon_1 \geq \mu_2 \varepsilon_2}$	$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \leq \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ $\Downarrow$ $\frac{\mu_2}{\mu_1} \geq \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \Rightarrow \boxed{\mu_1 \varepsilon_1 \leq \mu_2 \varepsilon_2}$
Zum Verschwinden der Reflexion im s-Fall muss <u>Medium 1 das optisch dichtere</u> sein und es muss gleichzeitig gelten: $\boxed{\mu_1 \neq \mu_2}.$	Zum Verschwinden der Reflexion im p-Fall muss <u>Medium 2 das optisch dichtere</u> sein und es muss gleichzeitig gelten: $\boxed{\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2}.$

Das gemeinsame Verschwinden der Reflexionsfaktoren sowohl des s-Anteils als auch des p-Anteils einer beliebig polarisierten, schräg einfallenden, ebenen Welle ist nach Tabelle 5.7 nicht möglich, da kein Medium sowohl das dichtere und gleichzeitig auch das dünnere sein kann. Im s-Fall kann die Reflexion außerdem nur bei permeablen Medien und im p-Fall nur bei dielektrischen Medien verschwinden. In den allermeisten praktischen Anwendungsfällen gilt $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. Dann ist nach (5.135) der Einfallswinkel, unter dem im **p-Falle** die Reflexion verschwindet, durch folgende äquivalente Beziehungen gegeben:

$$\boxed{\sin \theta_B^p = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \quad \Leftrightarrow \quad \tan \theta_B^p = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}, \quad (5.136)$$

aus denen wegen $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ sofort $\pi/4 < \theta_B^p < \pi/2$ folgt. Der Einfallswinkel $\theta_1 = \theta_B^p$ wird **Brewsterscher⁶ Polarisationswinkel** genannt. Fällt also eine elliptisch polarisierte ebene Welle unter dem Brewster-Winkel

$$\boxed{\theta_B^p = \arctan \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}} \quad (5.137)$$

auf die ebene Trennfläche zweier dielektrischer Medien ein, dann ist die reflektierte Welle linear s-polarisiert, da der p-Anteil vollständig in das Medium 2 eindringt. Der E-Vektor der reflektierten Welle steht daher senkrecht auf der Einfallsebene. Dieses Verhalten kann man sich zunutze machen, um linear polarisiertes Licht zu erzeugen. Mit

$$\tan \theta_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (5.138)$$

und dem Snelliusschen Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad (5.139)$$

erhält man sofort:

$$\frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2}. \quad (5.140)$$

Bei Einfall unter dem Brewster-Winkel gilt somit die wichtige Beziehung:

$$\cos \theta_1 = \sin \theta_2, \quad (5.141)$$

die man wegen $\{\theta_1, \theta_2\} \in [0, \pi/2]$ auch wie $\cos(-\theta_1) = \sin \theta_2$ oder

$$\sin(\pi/2 - \theta_1) = \sin \theta_2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\theta_1 + \theta_2 = \pi/2} \quad (5.142)$$

schreiben kann.

⁶ Sir David **Brewster** (1781-1868): schottischer Physiker (Reflexion, Absorption und Polarisation des Lichtes. Er entdeckte 1815 das nach ihm benannte Reflexionsgesetz über die vollständige Polarisation von Licht, das an Glasflächen reflektiert wird.)

Der reflektierte und der gebrochene Strahl stehen nach (5.142) also senkrecht aufeinander. Dieser Sachverhalt wird anhand von Bild 5.15 verdeutlicht.

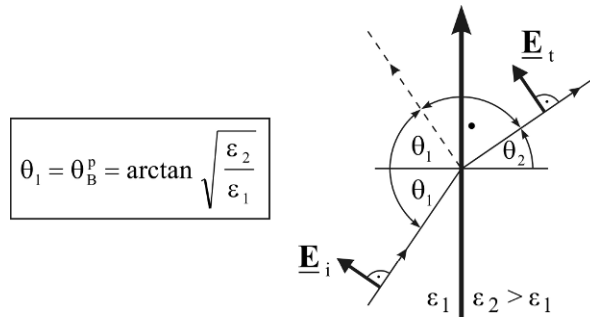


Bild 5.15 Totaltransmission im p-Fall mit $r_p = 0$ für $\theta_1 > \pi/4$ mit $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$

Wir wollen noch eine physikalisch anschauliche Erklärung des Brewsterschen Gesetzes geben. Die einfallende Welle regt im (optisch dichteren!) zweiten Medium eine gebrochene Welle an. Die dort vorhandenen freien Elektronen werden in Richtung des E-Vektors der gebrochenen Welle beschleunigt. Linear harmonisch oszillierende Elektronen senden aber Dipolstrahlung aus (siehe Bild 7.4 und auch Kapitel 9). Diese Strahlung ist in der Ebene senkrecht zur Schwingungsrichtung maximal und weist in Schwingungsrichtung Nullstellen auf. Jedes Elektron verhält sich also wie ein infinitesimal kleiner Hertzscher Dipolstrahler mit einer Achter-Charakteristik wie in Bild 5.16.

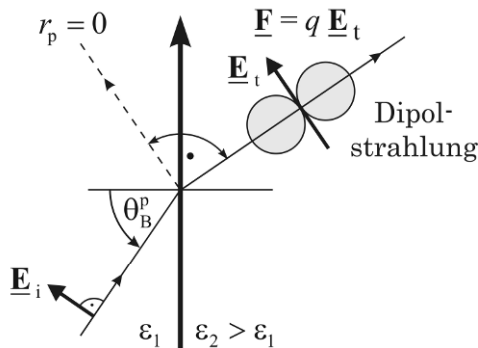


Bild 5.16 Dipolstrahlung der Elektronen im Medium 2 liefert keine Energie für die reflektierte Welle

Wenn der E-Vektor im zweiten Medium gerade in Richtung der reflektierten Welle zeigt, kann daher die aus allen Elektronen interferierende Dipolstrahlung dorthin nicht abstrahlen. Der reflektierte Strahl erhält somit keine Energie für die Schwingung in der Einfallsebene und es muss $r_p = 0$ werden.

- Während eine einfallende, elliptisch polarisierte, ebene Welle durch Reflexion linear polarisiert werden kann, kann dieser Effekt durch Brechung nicht erreicht werden, unter welchem Winkel die Welle auch einfällt.
- Bei senkrechtem Einfall auf eine ebene Trennfläche wird die Reflexion für $Z_1 \neq Z_2$ nie null, außer man hat drei Medien hintereinander. Für $Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}$ und einer Dicke der mittleren Schicht von $l = \lambda_2/4$ erhält man dann eine schmalbandige Wellenwiderstandsanpassung und ein Verschwinden der Reflexion an der Mittenfrequenz (Abschnitt 5.5).

Übung 5.5: Brewstersches Gesetz

- Untersuchen Sie für $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0$ mit $\varepsilon_r = 2,56$ (Polystyrol) die Abhängigkeit der Reflexionsfaktoren r_s und r_p vom Einfallswinkel θ_1 .

- **Lösung:**

Für die gegebenen Materialparameter erhalten wir aus (5.131) und (5.132) die Reflexionsfaktoren im s- bzw. im p-Fall:

$$r_s = \frac{\cos \theta_1 - \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \theta_1}}{\cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \theta_1}} \quad \text{und} \quad r_p = \frac{-\varepsilon_r \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \theta_1}}{\varepsilon_r \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \theta_1}}. \quad (5.143)$$

In Bild 5.17 sind für $\varepsilon_r = 2,56$ beide Reflexionsfaktoren dargestellt.

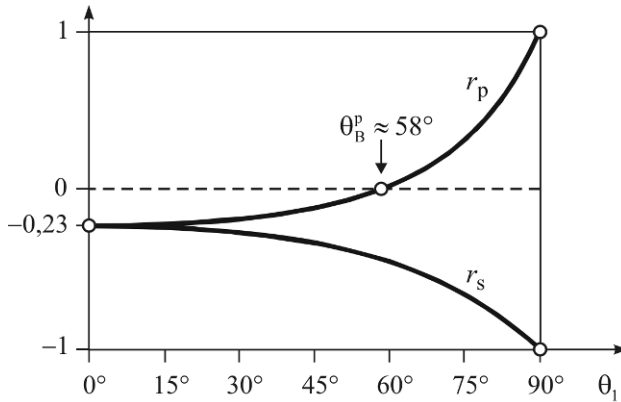


Bild 5.17 Reflexionsfaktoren (5.143) für unterschiedliche Polarisation bei schiefem Einfall auf eine ebene Trennfläche zwischen Luft und Polystyrol in Abhängigkeit vom Einfallswinkel θ_1

Man erkennt, dass im Falle paralleler Polarisation des E-Vektors bei einem Einfallswinkel

$$\theta_1 = \theta_B^p = \arctan \sqrt{\varepsilon_r} \approx 58^\circ \quad (5.144)$$

die Reflexion verschwindet und vollständige Transmission mit $d_p = 1/\sqrt{\varepsilon_r} = 0,625$ eintritt. Bei senkrechter Polarisation hingegen, wird der Betrag des Reflexionsfaktors $|r_s|$ monoton größer. Bei senkrechtem Einfall mit $\theta_1 = 0^\circ$ verhalten sich beide Polarisationen gleich und es gilt nach (5.143) oder auch (5.29):

$$r_s = r_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_r}}{1 + \sqrt{\varepsilon_r}} \approx -0,23. \quad (5.145)$$

Bei streifendem Einfall mit $\theta_1 = 90^\circ$ gilt $r_s = -1$ und $r_p = 1$. Die Werte der Reflexionsfaktoren liegen also in den Bereichen

$$-1 \leq r_s \leq -0,23 \quad \text{und} \quad -0,23 \leq r_p \leq 1. \quad (5.146)$$

Im s-Fall ist daher r_s stets negativ, während es bei r_p am Brewster-Winkel einen Vorzeichenwechsel gibt. Für $\theta_1 > \theta_B^p$ wird r_p positiv und es gibt im p-Fall keinen Phasensprung mehr bei der Reflexion. $\square$

5.4.4 Totalreflexion

In diesem Abschnitt wollen wir eine technisch wichtige Folgerung aus dem Snelliusschen Brechungsgesetz ziehen. Dazu betrachten wir Bild 5.18.

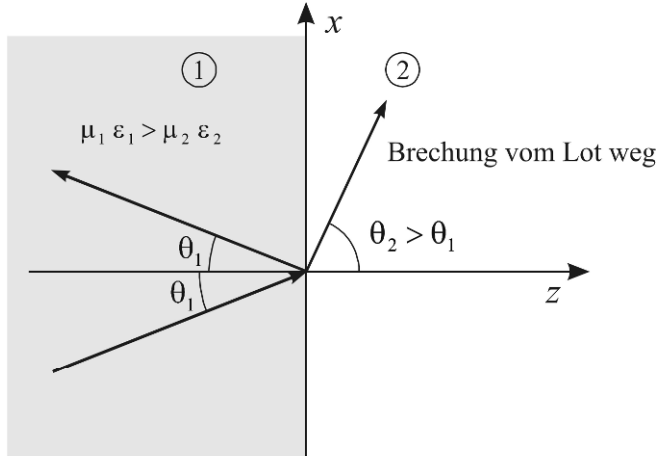


Bild 5.18 Schiefer Einfall auf ein optisch dünneres Medium

Fällt eine ebene Welle aus einem optisch dichteren Medium auf ein optisch dünneres Medium ein ($\mu_1 \varepsilon_1 > \mu_2 \varepsilon_2$), so wird im Allgemeinen eine reflektierte Welle angeregt und im Medium 2 erfolgt „Brechung vom Lot weg“. Ab einem gewissen Einfallswinkel tritt deshalb das Phänomen der **Totalreflexion** auf. Nach dem Brechungsgesetz wird hier schon bei einem Einfallswinkel $\theta_1 < \pi/2$ der Brechungswinkel $\theta_2 = \pi/2$ erreicht. Der Winkel θ_1 , bei dem dies eintritt, wird **kritischer Winkel** θ_c genannt. Seinen Wert erhalten wir aus dem Brechungsgesetz:

$$\sin \theta_c = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_1}} < 1. \quad (5.147)$$

Für größere Einfallswinkel $\theta_1 > \theta_c$ gilt für den zugehörigen Brechungswinkel:

$$\sin \underline{\theta}_2 = \frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}} \sin \theta_1 = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_c} > 1. \quad (5.148)$$

Aus dieser Beziehung kann offensichtlich kein reeller Brechungswinkel $\underline{\theta}_2$ mehr bestimmt werden. Obwohl $\sin \underline{\theta}_2$ eine weiterhin reelle Größe ist, wird $\cos \underline{\theta}_2$ nämlich imaginär, weil $\sin \underline{\theta}_2 > 1$ gilt, d. h. es gilt:

$$\cos \underline{\theta}_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \underline{\theta}_2} = \pm j \sqrt{\sin^2 \underline{\theta}_2 - 1} = \pm j \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \theta_1 - 1}. \quad (5.149)$$

Der Wellenzahlvektor der gebrochenen Welle lautet allgemein nach (5.91):

$$\underline{\mathbf{k}}_t = k_2 \underline{\mathbf{e}}_t = k_2 (\underline{\mathbf{e}}_x \sin \underline{\theta}_2 + \underline{\mathbf{e}}_z \cos \underline{\theta}_2). \quad (5.150)$$

Bei Beachtung von (5.148) und (5.149) gilt speziell bei Totalreflexion:

$$\underline{\mathbf{k}}_t = k_2 \left(\mathbf{e}_x \frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}} \sin \theta_1 \pm j \mathbf{e}_z \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \theta_1 - 1} \right). \quad (5.151)$$

Nach Tabelle 5.5 hat die gebrochene Welle die Darstellung

$$\underline{\mathbf{E}}_t = \underline{\mathbf{E}}_{t0} e^{j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_t \cdot \mathbf{r})}, \quad (5.152)$$

aus der wir mit

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{k}}_t \cdot \mathbf{r} &= k_2 \left(\mathbf{e}_x \frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}} \sin \theta_1 \pm j \mathbf{e}_z \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \theta_1 - 1} \right) \cdot (\mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z) = \\ &= k_2 \left(x \frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}} \sin \theta_1 \pm j z \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \theta_1 - 1} \right) \end{aligned} \quad (5.153)$$

und bei Wahl des *negativen* Vorzeichens (Dämpfung !) sofort erhalten:

$$\underline{\mathbf{E}}_t = \underline{\mathbf{E}}_{t0} e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 x} e^{j\omega t}. \quad (5.154)$$

Die Dämpfungs- und die Phasenkonstante der gebrochenen Welle sind (mit $\theta_1 > \theta_c$):

$$\begin{aligned} \beta_2 &= k_2 \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_c} = k_1 \sin \theta_1 \\ \alpha_2 &= k_2 \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_1}{\sin^2 \theta_c} - 1} = k_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_c}. \end{aligned} \quad (5.155)$$

Es gelten die Zusammenhänge $\alpha_2 = (\beta_2^2 - k_2^2)^{1/2}$ und $k_2 < \beta_2 < k_1$ sowie $\alpha_2 < k_1$. Im Medium 2 gibt es auch bei Totalreflexion eine gebrochene Welle, die sich wegen des Ausbreitungsterms $\exp(-j\beta_2 x)$ *parallel* zur Trennfläche ausbreitet. Die Flächen konstanter Phase stehen daher senkrecht auf der Trennfläche (Bild 5.19). Innerhalb einer Phasenfront klingen die Felder exponentiell wie $\exp(-\alpha_2 z)$ ab. Die Flächen konstanter Amplitude der gebrochenen Welle sind somit parallel zur Trennfläche (Bild 5.19).

Eine Grenzschichtwelle, die quer zu ihrer Ausbreitungsrichtung gedämpft wird, bezeichnet man als **inhomogene ebene Welle**. Die Dämpfung vollzieht sich innerhalb eines Bereiches von nur wenigen Wellenlängen. An keiner Stelle im Medium 2 wird elektromagnetische Energie vernichtet (wie etwa durch Stromwärmeverluste in leitfähigen Medien). Solche Felder nennt man **evaneszente Felder**. Sie treten immer dann auf, wenn dem Feld räumliche Variationen aufgezungen werden, die größer sind, als es die Freiraumwellenlänge erlaubt. Nach (5.155) hat die Grenzschichtwelle mit

$$v_p = \frac{\omega}{\beta_2} = c_2 \frac{\sin \theta_c}{\sin \theta_1} = \frac{c_1}{\sin \theta_1} \quad (5.156)$$

eine Phasengeschwindigkeit, für die gilt: $c_1 < v_p < c_2$.

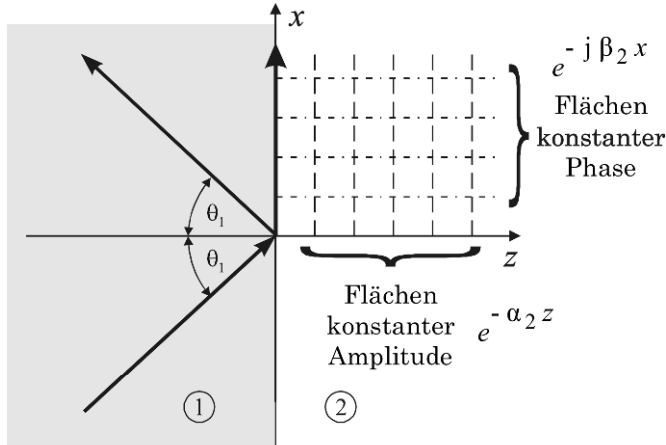


Bild 5.19 Inhomogene Grenzschichtwelle bei Totalreflexion für $\theta_1 > \theta_c$

Bei Totalreflexion kann die gebrochene Welle keine Wirkleistung in das Medium 2 transportieren – der Reflexionsfaktor hat dann einen Betrag von eins. Dass dies tatsächlich so ist, wollen wir noch kurz beweisen. Direkt am Grenzwinkel der Totalreflexion $\theta_1 = \theta_c$ ist der Brechungswinkel $\theta_2 = \pi/2$, d. h. mit $\cos \theta_2 = 0$ werden die Reflexionsfaktoren (5.114) und (5.120)

$$r_s = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} = 1 \quad \text{und} \quad r_p = -\frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} = -1. \quad (5.157)$$

Für $\theta_1 > \theta_c$ gilt nach (5.149) – aus energetischen Gründen mit dem negativen Vorzeichen –

$$\cos \theta_2 = -j \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2} \sin^2 \theta_1 - 1} = -j \chi \quad \text{mit} \quad \chi > 0. \quad (5.158)$$

Damit erhalten wir aus (5.157):

$$r_s = \frac{Z_2 \cos \theta_1 + j Z_1 \chi}{Z_2 \cos \theta_1 - j Z_1 \chi} = e^{2j\psi_s} \quad \text{mit} \quad \psi_s = \arctan \frac{Z_1 \chi}{Z_2 \cos \theta_1} \quad (5.159)$$

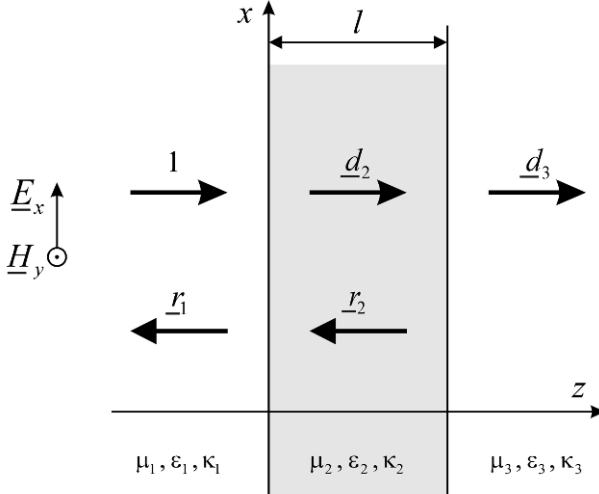
und

$$r_p = -\frac{Z_1 \cos \theta_1 + j Z_2 \chi}{Z_1 \cos \theta_1 - j Z_2 \chi} = -e^{2j\psi_p} \quad \text{mit} \quad \psi_p = \arctan \frac{Z_2 \chi}{Z_1 \cos \theta_1}. \quad (5.160)$$

Bei **Totalreflexion** gilt somit bei allen Winkeln $\theta_1 \geq \theta_c$ der Zusammenhang $|r_s| = |r_p| = 1$, d. h. es wird – im stationären Zustand – tatsächlich keine Wirkleistung durch die Trennfläche transportiert. Technisch ausgenutzt wird der Effekt der Totalreflexion bei **Lichtwellenleitern**. In Glasfaserverbindungen pflanzt sich ein Lichtstrahl unter fortgesetzter Totalreflexion vom Sender zum Empfänger fort. Dabei wird er von einer Grenzschichtwelle begleitet, die sich entlang der zylindrischen Oberfläche der Faser ausbreitet. Falls das Medium 2 Verluste aufweisen würde – was wir wegen $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ bisher ausgeschlossen hatten – dann könnte eine vollkommene Totalreflexion überhaupt nicht mehr stattfinden. Für den Reflexionsfaktor würde dann $|r| < 1$ gelten und somit könnte auch Wirkleistung die Trennfläche passieren.

5.5 Ebenes Drei- und Vierschichtenproblem

Wir wollen noch einmal zum senkrechten Einfall auf eine ebene Trennfläche zurückkehren und erweitern unser ursprüngliches Problem (Bild 5.4) um ein drittes Medium (Bild 5.20).



Im Folgenden lassen wir eine vertikal polarisierte TEM-Welle senkrecht auf eine planparallele Schicht der Dicke l einfallen und fragen sowohl nach dem Eingangsreflexionsfaktor r_1 als auch nach dem Durchlassfaktor d_3 . Dabei dürfen alle drei Medien, die wir mit $i = 1, 2, 3$ bezeichnen, verlustbehaftet und verschieden sein. Ihre elektromagnetischen Eigenschaften seien wie üblich durch ihre komplexen Feldwellenimpedanzen $\underline{Z}_i$ gegeben.

Bild 5.20 Senkrechter Einfall einer TEM-Welle auf eine planparallele Schicht der Dicke l

Es wird sich für die Notation als zweckmäßig erweisen, wenn wir stattdessen die inversen Größen – nämlich die Feldwellenadmittanzen – einführen:

$$\underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i} = \sqrt{\frac{\kappa_i + j \omega \varepsilon_i}{j \omega \mu_i}} \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.161)$$

Analog zu Tabelle 5.2 machen wir in jedem der drei Raumteile einen Feldansatz:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_1 &= \mathbf{e}_x E_0 \left(e^{-\gamma_1 z} + r_1 e^{\gamma_1 z} \right) & \text{und} & \quad \underline{\mathbf{H}}_1 = \mathbf{e}_y \frac{E_0}{\underline{Z}_1} \left(e^{-\gamma_1 z} - r_1 e^{\gamma_1 z} \right) \\ \underline{\mathbf{E}}_2 &= \mathbf{e}_x E_0 \left(d_2 e^{-\gamma_2 z} + r_2 e^{\gamma_2 z} \right) & \text{und} & \quad \underline{\mathbf{H}}_2 = \mathbf{e}_y \frac{E_0}{\underline{Z}_2} \left(d_2 e^{-\gamma_2 z} - r_2 e^{\gamma_2 z} \right) \\ \underline{\mathbf{E}}_3 &= \mathbf{e}_x E_0 d_3 e^{-\gamma_3 (z-l)} & \text{und} & \quad \underline{\mathbf{H}}_3 = \mathbf{e}_y \frac{E_0}{\underline{Z}_3} d_3 e^{-\gamma_3 (z-l)}. \end{aligned} \quad (5.162)$$

Die an den Trennflächen bei $z = 0$ und $z = l$ tangentialen elektrischen und magnetischen Feldkomponenten müssen stetig ineinander übergehen. Dadurch erhalten wir vier Gleichungen für die vier Unbekannten r_1, d_2, r_2 und d_3 . Man beachte, dass im Raumteil 2 zwischen vorderer und hinterer Trennfläche zeitlich aufeinander folgende **Mehrfachreflexionen** auftreten – tatsächlich unendlich viele – die auch unendlich viele Beiträge zu r_1 und d_3 hervorbringen. Man könnte diese Mehrfachreflexionen als einzelne Terme einer konvergenten Reihe anschreiben, wenn man an der zeitlichen Entwicklung des Einschwingvorgangs interessiert wäre. Im harmonisch eingeschwungenen Zustand sei mit r_1, d_2, r_2 und d_3 die Summe aller superponierter Mehrfachreflexionen gemeint, d. h. unsere vier Unbekannten stellen bereits einen geschlossenen Ausdruck für die erwähnten Reihendarstellungen dar. Aus dem erwähnten (4×4) -Glei-

chungssystem, das wir nicht explizit angeben wollen, folgt nach unschwieriger Zwischenrechnung der Reflexionsfaktor $\underline{r}_1$ im Medium 1 und der Durchlassfaktor $\underline{d}_3$ im Medium 3:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{r}_1 &= \frac{(\underline{Y}_1 - \underline{Y}_2)(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)e^{\underline{\gamma}_2 l} + (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)(\underline{Y}_2 - \underline{Y}_3)e^{-\underline{\gamma}_2 l}}{(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)e^{\underline{\gamma}_2 l} + (\underline{Y}_1 - \underline{Y}_2)(\underline{Y}_2 - \underline{Y}_3)e^{-\underline{\gamma}_2 l}} \\ \underline{d}_3 &= \frac{4 \underline{Y}_1 \underline{Y}_2}{(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)e^{\underline{\gamma}_2 l} + (\underline{Y}_1 - \underline{Y}_2)(\underline{Y}_2 - \underline{Y}_3)e^{-\underline{\gamma}_2 l}}. \end{aligned}} \quad (5.163)$$

Im Sonderfall einer verschwindenden Schicht erhalten wir aus (5.163) mit $l \rightarrow 0$:

$$\underline{r}_1 = \frac{\underline{Y}_1 - \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3} = \frac{\underline{Z}_3 - \underline{Z}_1}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1} \quad \text{und} \quad \underline{d}_3 = \frac{2 \underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3} = \frac{2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1}, \quad (5.164)$$

was vollkommen mit den Ergebnissen (5.29) des Zweischichtenproblems übereinstimmt, wenn man in (5.164) nur die Substitution $3 \rightarrow 2$ vornimmt.

Im Folgenden wollen wir uns zunächst auf verlustlose Medien beschränken. Nach (5.164) kann bei *senkrechtem* Einfall auf eine Trennfläche zwischen zwei Medien mit verschiedenem Feldwellenwiderstand die Reflexion nie null werden. Bei drei Medien erhalten wir ein völlig anderes Verhalten. Nach (5.163) stellt sich nämlich für $\underline{Y}_2 = \sqrt{\underline{Y}_1 \underline{Y}_3}$ und einer Dicke der mittleren Schicht von $l = \lambda_2/4$ (also $\underline{\gamma}_2 l = j \beta_2 l = j \pi/2$) eine schmalbandige Wellenwiderstandsanpassung und ein Verschwinden der Reflexion an der Mittenfrequenz ein. Es wird dann

$$\underline{r}_1 = 0 \quad \text{und} \quad \underline{d}_3 = e^{-j \pi/2} \sqrt{\frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_3}} = -j \sqrt{\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}}. \quad (5.165)$$

Praktische Beispiele für solche $\lambda/4$ -Transformatoren gibt es bei elektrischen Leitungen und auch in der Optik, wo Linsen mit $\lambda/4$ dicken Schichten vergütet werden, um die Reflexion zu mindern. Es muss dazu nur der Brechungsindex dieser Schicht das geometrische Mittel der Brechungsindizes in und vor der Linse sein. Die Bandbreite, innerhalb derer der Eingangsreflexionsfaktor ein zulässiges Maß nicht überschreitet, ist begrenzt und hängt vom der Größe des Transformationsverhältnisses $\underline{Z}_3/\underline{Z}_1$ ab. Bei höheren Anforderungen muss eventuell eine Kettenschaltung aus mehreren $\lambda/4$ -Transformatoren eingesetzt werden [Zin95].

Der ebenfalls wichtige $\lambda/2$ -Transformator wird angewandt, wenn man – z. B. für $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_3$ – vorhandene Wellenwiderstandsverhältnisse nicht stören will. Auf diesem Prinzip beruhen die so genannten Radome, welche als Wetterschutz oder windschnittige Verkleidung Antennen umgeben. Wenn ihre Wand nicht absorbiert und gerade eine halbe Wellenlänge dick ist, sind sie mit $\underline{d}_3 = e^{-j \pi} = -1$ für die Antennenstrahlung vollkommen transparent – natürlich nur solange die Welle auch wirklich senkrecht einfällt und keine sehr breitbandige Anregung vorliegt. Außerhalb der Mittenfrequenz wird nämlich der Betrag des Reflexionsfaktors $|\underline{r}_1(f)|$ wieder spürbar größer. Beim verlustlosen Dreischichtenproblem (Luft $\Leftrightarrow$ Glas mit $\varepsilon_r \Leftrightarrow$ Luft) und $\underline{\gamma}_2 = j \beta_2$ finden wir mit (5.163) einen periodischen Verlauf des Reflexionskoeffizienten:

$$R_1 = |\underline{r}_1|^2 = \frac{(\varepsilon_r - 1)^2}{(\varepsilon_r + 1)^2 + 4 \varepsilon_r \cot^2(\beta_2 l)} \quad \text{mit} \quad R_1 = 0 \quad \text{für} \quad \beta_2 l = 2 \pi l / \lambda = k_0 l \sqrt{\varepsilon_r} = n \pi. \quad (5.166)$$

Mit Hilfe von (5.163) können wir auch die Durchgangsdämpfung von **Gehäuseblechen** bei senkrechtem Einfall einer TEM-Welle berechnen. In (4.62) hatten wir – unter Vernachlässigung der Reflexionen – für ein Kupferblech der Dicke $l = 0,1$ mm bei $f = 50$ MHz alleine aufgrund der Wirkung des Skineffekts eine Schirmdämpfung von 93 dB errechnet. Für eine genauere Behandlung des Problems setzen wir jetzt $Y_1 = Y_3 = Y_0$ und erhalten aus (5.163):

$$\underline{d}_3 = \frac{4 \underline{Y}_0 \underline{Y}_2}{(\underline{Y}_0 + \underline{Y}_2)^2 e^{\underline{\gamma}_2 l} - (\underline{Y}_0 - \underline{Y}_2)^2 e^{-\underline{\gamma}_2 l}}. \quad (5.167)$$

Aus den angegebenen Zahlenwerten folgt mit $\kappa = 58 \cdot 10^6$ S/m zunächst

$$\underline{Y}_2 = \sqrt{\frac{\kappa + j \omega \varepsilon_0}{j \omega \mu_0}} \approx 271(1 - j) \Omega^{-1} \quad (5.168)$$

$$\underline{\gamma}_2 = \sqrt{-\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 + j \omega \mu_0 \kappa} \approx 1,07 \cdot 10^5 (1 + j) \text{ m}^{-1}, \quad (5.169)$$

woraus wir mit (5.167) schließlich den Durchlassfaktor $\underline{d}_3 \approx (-5,51 + j 2,94) \cdot 10^{-10}$ ermitteln. Da die Medien 1 und 3 identisch sind, können wir die Schirmdämpfung einfach wie

$$-20 \lg |\underline{d}_3| \text{ dB} \approx 184 \text{ dB} \quad (5.170)$$

berechnen. Die zusätzliche Reflexionsdämpfung von 91 dB liegt hier also in der gleichen Größenordnung wie die Dämpfung von 93 dB nur aufgrund des Skineffekts. Eine dünnere Schirmfolie mit $l = 0,01$ mm hätte bei derselben Frequenz noch eine Gesamtdämpfung von 101 dB.

Man kann (5.163) auf **vier** aufeinander folgende Schichten erweitern. Dabei gilt im ersten Medium $-\infty < z \leq -d$, im zweiten $-d \leq z \leq 0$, im dritten $0 \leq z \leq l$ und im vierten $l \leq z < \infty$. Die Medien 2 und 3 haben also eine Dicke von d bzw. l . Für einen (5.162) entsprechenden Ansatz

$$\begin{aligned} \underline{E}_1 &= \underline{e}_x \underline{E}_0 \left(e^{-\underline{\gamma}_1(z+d)} + \underline{r}_1 e^{\underline{\gamma}_1(z+d)} \right) \\ \underline{E}_4 &= \underline{e}_x \underline{E}_0 \underline{d}_4 e^{-\underline{\gamma}_4(z-l)} \end{aligned} \quad (5.171)$$

erhalten wir nach Auflösen eines (6×6) -Gleichungssystems das Ergebnis:

$$\underline{r}_1 = \frac{\underline{\xi}}{\underline{\nu}} \quad \text{und} \quad \underline{d}_4 = \frac{8 \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Y}_3}{\underline{\nu}} \quad \text{mit} \quad (5.172)$$

$$\begin{aligned} \underline{\xi} &= (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) \left[(\underline{Y}_1 - \underline{Y}_2)(\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) e^{\underline{\gamma}_2 d + \underline{\gamma}_3 l} + (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)(\underline{Y}_3 - \underline{Y}_4) e^{-\underline{\gamma}_2 d - \underline{\gamma}_3 l} \right] + \\ &+ (\underline{Y}_2 - \underline{Y}_3) \left[(\underline{Y}_1 - \underline{Y}_2)(\underline{Y}_3 - \underline{Y}_4) e^{\underline{\gamma}_2 d - \underline{\gamma}_3 l} + (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)(\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) e^{-\underline{\gamma}_2 d + \underline{\gamma}_3 l} \right] \\ \underline{\nu} &= (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) \left[(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)(\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) e^{\underline{\gamma}_2 d + \underline{\gamma}_3 l} + (\underline{Y}_1 - \underline{Y}_2)(\underline{Y}_3 - \underline{Y}_4) e^{-\underline{\gamma}_2 d - \underline{\gamma}_3 l} \right] + \\ &+ (\underline{Y}_2 - \underline{Y}_3) \left[(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)(\underline{Y}_3 - \underline{Y}_4) e^{\underline{\gamma}_2 d - \underline{\gamma}_3 l} + (\underline{Y}_1 - \underline{Y}_2)(\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) e^{-\underline{\gamma}_2 d + \underline{\gamma}_3 l} \right]. \end{aligned} \quad (5.173)$$

5.6 Beugung an einer metallischen Schirmkante

Bisher haben wir die Reflexion an unendlich ausgedehnten, ebenen Trennflächen untersucht. Im Folgenden wollen wir die Beugung an einem halbunendlichen, ebenen, metallischen Schirm mit scharfer, geradliniger Kante betrachten (**Sommerfeldsches Halbebenenproblem**). Dazu lassen wir eine TEM-Welle unter dem Winkel $0 < \varphi_0 < \pi$ auf eine Halbebene ($y = 0, x \geq 0$) einfallen. Die Kante der Halbebene sei mit der z -Achse identisch und es gelte $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_z = 0$, d. h. die Kante stehe senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. In Bild 5.21 sind gestrichelt die Richtungen der Schattengrenze ($\pi + \varphi_0$) und der gespiegelten Schattengrenze ($\pi - \varphi_0$) dargestellt.

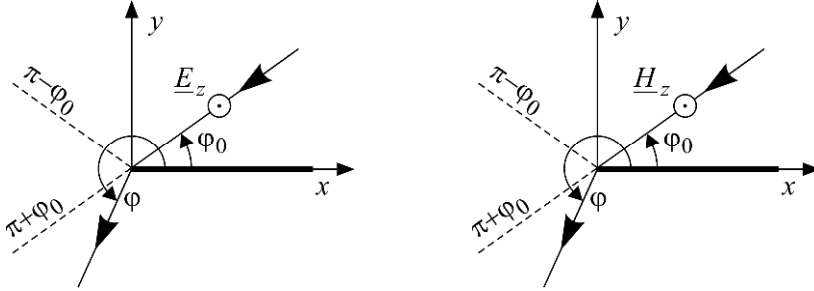


Bild 5.21 Schräger Einfall einer TEM-Welle auf einen halbunendlichen, metallischen, dünnen Schirm

Wir betrachten – wie bei schrägem Einfall üblich (siehe Tabelle 5.6) – wieder zwei orthogonale Polarisationen. Im linken Fall aus Bild 5.21 ist der elektrische Feldvektor senkrecht zur Einfallsebene und parallel zur Kante orientiert. Mit $\mathbf{k} = k(-\mathbf{e}_x \cos \varphi_0 - \mathbf{e}_y \sin \varphi_0)$ und dem Vektor zum Aufpunkt $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho = \rho(\mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi)$ folgt die Feldstärke der einfallenden Welle:

$$\underline{E}_i(\mathbf{r}) = \underline{E}_0 e^{-j \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \mathbf{e}_z \underline{E}_0 e^{j k \rho \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (5.174)$$

Wir haben also ein ebenes Problem, das wir in Polarkoordinaten beschreiben. Die einfallende Welle regt neben einer reflektierten auch eine gebeugte Welle an, die im ganzen Raum vorhanden ist; insbesondere kann sie in den geometrischen Schattenbereich ($\pi + \varphi_0 < \varphi < 2\pi$) eindringen. Die Superposition aller Feldanteile kann man als strenge Lösung des Beugungsproblems durch Fresnelsche Integrale ausdrücken [Som78, Born85, Born93, Mit71, Fel94, Van91]:

$$\underline{E}_{ges}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \underline{E}_0 \frac{1+j}{2} \left[e^{j k \rho \cos(\varphi - \varphi_0)} \underline{G}(u) - e^{j k \rho \cos(\varphi + \varphi_0)} \underline{G}(v) \right] \quad \text{mit} \quad (5.175)$$

$$u = 2\sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}, \quad v = 2\sqrt{\frac{k\rho}{\pi}} \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}, \quad \underline{G}(x) = \underline{F}(\infty) + \underline{F}(x) = \frac{1-j}{2} + \int_0^x e^{-j\frac{\pi}{2}\tau^2} d\tau. \quad (5.176)$$

Die Halbebene definiert einen Verzweigungsschnitt bei $\varphi = 0$, darum muss $0 < \varphi < 2\pi$ gelten. Der erste Teil der Lösung ist mit der einfallenden Welle und der zweite Teil mit der reflektierten Welle verknüpft. Bei der orthogonalen Polarisation $\mathbf{e}_z \underline{H}_0$ ändert sich die Randbedingung auf dem Schirm. Darum muss lediglich das Vorzeichen des zweiten Terms getauscht werden:

$$\underline{H}_{ges}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \underline{H}_0 \frac{1+j}{2} \left[e^{j k \rho \cos(\varphi - \varphi_0)} \underline{G}(u) + e^{j k \rho \cos(\varphi + \varphi_0)} \underline{G}(v) \right]. \quad (5.177)$$

Bild 5.22 zeigt den Betrag von (5.175) und (5.177) auf einem Kreis mit Radius $\rho = 3\lambda$ als Funktion des Winkels φ . Der Kreismittelpunkt liegt auf der Kante im Koordinatenursprung.

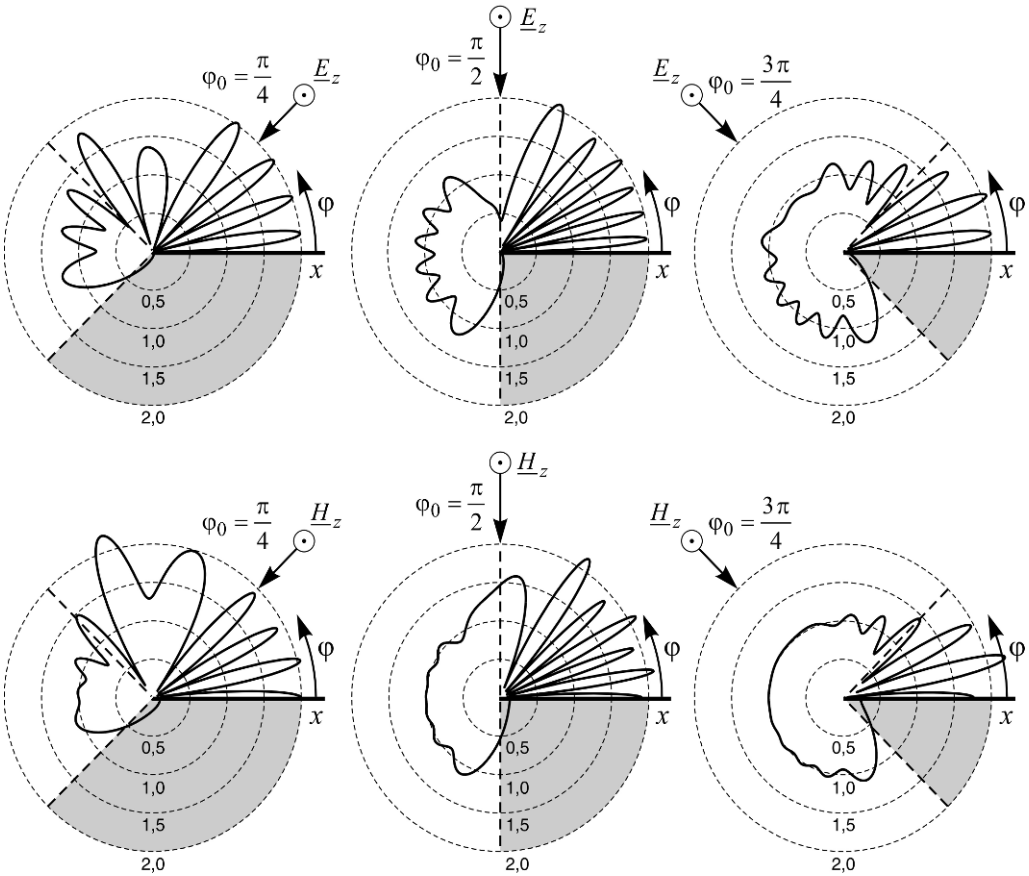
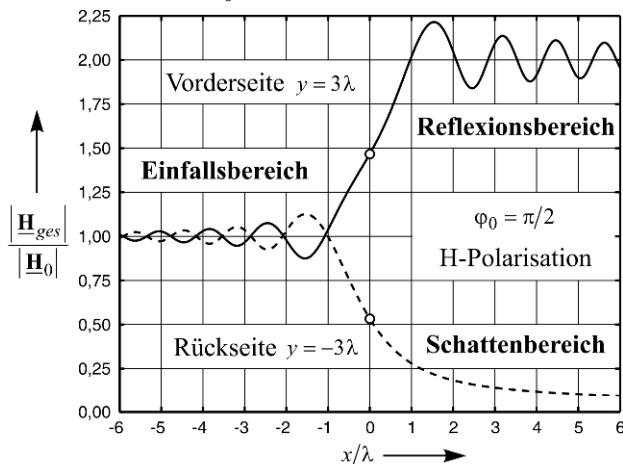


Bild 5.22 Normierte Gesamtfeldstärke $|\underline{E}_{\text{ges}}/E_0|$ bzw. $|\underline{H}_{\text{ges}}/H_0|$ nach (5.175) und (5.177) bei $\rho = 3\lambda$

An der Schattengrenze ist (für $\rho = 3\lambda$) der Betrag der Gesamtfeldstärke etwa halb so groß wie bei der einfallenden Welle. Für $\rho \rightarrow \infty$ würde man exakt den Wert $|E_0|/2$ erhalten. Im Bereich $0 < \varphi < \pi - \varphi_0$ kommt es zu starken Interferenzen, die zu Feldstärken zwischen null und



mehr als dem doppelten Wert der einfallenden Welle führen. Bei $\pi - \varphi_0 < \varphi < \pi + \varphi_0$ dominiert das Feld der einfallenden Welle, während den geometrischen Schattenbereich $\pi + \varphi_0 < \varphi < 2\pi$ nur noch das Beugungsfeld erreicht. Ohne Beugungsbeitrag würden wir bei senkrechtem Einfall und $y = \pm 3\lambda$ die Feldstärken 2, 1 und 0 erwarten (Bild 5.23). Diesen Werten überlagert sich eine Beugungswelle, die $\sim 1/\sqrt{\rho}$ und direkt auf der Kante singular ist (Abschnitt 8.5).

Bild 5.23 Magnetfeld (H-Polarisation, $\varphi_0 = \pi/2$) vor dem Schirm ($y = 3\lambda$) und dahinter ($y = -3\lambda$)

5.7 Übungen

- 5.7.1** Die komplexe Amplitude der elektrischen Feldstärke einer TEM-Welle wird mit $k_0 = \omega/c_0$ und $0 \leq \delta \leq \pi/2$ durch folgenden Ausdruck beschrieben:

$$\underline{\mathbf{E}}(z, \omega) = E_0 \left(e^{j\delta} \mathbf{e}_x + e^{-j\delta} \mathbf{e}_y \right) e^{-jk_0 z}.$$

Wie lautet die reelle Zeitfunktion $\mathbf{E}(z, t)$?

Wie groß muss δ gewählt werden, damit lineare bzw. zirkulare Polarisation vorliegt?

Es gelte $E_0 = 1 \text{ V/m}$ und $\delta = 0$. Welche Wirkleistung wird im zeitlichen Mittel innerhalb einer Phasenfront von 1 m^2 transportiert?

- 5.7.2** Eine ebene Welle soll in Luft senkrecht auf eine ebene Kupferplatte ($\kappa = 58 \cdot 10^6 \text{ S/m}$) auftreffen. Die Dicke der Platte sei sehr viel größer als die Skintiefe, und es gelte $\kappa \gg \omega \epsilon_0$. Zeigen Sie, dass für denjenigen Anteil der hinlaufenden Energie, der reflektiert wird, in sehr guter Näherung gilt:

$$R = |\underline{r}|^2 = \left| \frac{\underline{Z}_{Cu} - Z_0}{\underline{Z}_{Cu} + Z_0} \right|^2 \approx \frac{1 - \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega \epsilon_0} + \frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}}}{1 + \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega \epsilon_0} + \frac{\kappa}{\omega \epsilon_0}}}.$$

Formen Sie diesen Ausdruck für $\kappa/(\omega \epsilon_0) \gg 1$ weiter um und zeigen Sie, dass gilt:

$$R \approx 1 - 2 \frac{\omega}{c_0} \delta = 1 - 2 k_0 \delta \quad \text{mit der Eindringtiefe } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \kappa}}.$$

Dabei ist $2 k_0 \delta$ der relative Energieanteil, der in der Kupferplatte in Wärme umgewandelt wird. Welchen Wert hat R bei der Frequenz $f = 130 \text{ GHz}$?

- 5.7.3** Eine TEM-Welle breitet sich mit der Amplitude $E_0 = 1 \text{ V/m}$ in destilliertem Wasser mit den Materialkonstanten $\epsilon_r = 81$, $\mu_r = 1$ und $\kappa = 0$ aus. Sie fällt s-polarisiert schräg auf die ebene Trennfläche Wasser → Luft. Ab welchem Einfallswinkel θ_c tritt Totalreflexion ein? Wie groß ist der Betrag der Feldstärke im Luftraum direkt am Ort der Trennfläche bzw. $\lambda_0/4$ von der Trennfläche entfernt, falls der Einfallswinkel $\theta_1 = 45^\circ$ beträgt?

- 5.7.4** Eine in x-Richtung linear polarisierte TEM-Welle breite sich in die positive z-Richtung aus und falle aus dem Vakuum senkrecht auf die Oberfläche eines verlustlosen dielektrischen Halbraums mit $\epsilon_r = 3$ ein. Zeigen Sie, dass für die Quotienten aus den Phasoren der beteiligten Wellenanteile gilt:

$$\underline{E}_{x,r} / \underline{E}_{x,h} = -\underline{H}_{y,r} / \underline{H}_{y,h} = -0,268, \quad \underline{E}_{x,d} / \underline{E}_{x,h} = 0,732, \quad \text{und} \quad \underline{H}_{y,d} / \underline{H}_{y,h} = 1,268.$$

Lösungen:

- 5.7.1** $\mathbf{E}(z, t) = E_0 \mathbf{e}_x \cos(\omega t - k_0 z + \delta) + E_0 \mathbf{e}_y \cos(\omega t - k_0 z - \delta)$
lineare Polarisation für $\delta = 0$ oder $\delta = \pi/2$ und zirkulare Polarisation für $\delta = \pi/4$
 $P = 2,655 \text{ mW}$

- 5.7.2** $R = 0,999$

- 5.7.3** $\theta_c = 6,38^\circ$, $E(z=0) = 1,42 \text{ V/m}$ und $E(z=\lambda_0/4) = 73,2 \mu\text{V/m}$

6 Wellenleiter

Allgemein lassen sich Wellenleiter wie in Bild 6.1 in *Zweileitersysteme* und *Einleitersysteme* unterteilen. Zu den Zweileitersystemen [Heu05], die zur Übertragung für Frequenzen ab $f = 0$ Hz geeignet sind, gehören symmetrische Paralleldrahtleitungen (a), koaxiale Leitungen (b) und Streifenleitungen (c). Alle Hohlleiter (d-g) kommen dagegen mit nur einem Leiter aus.

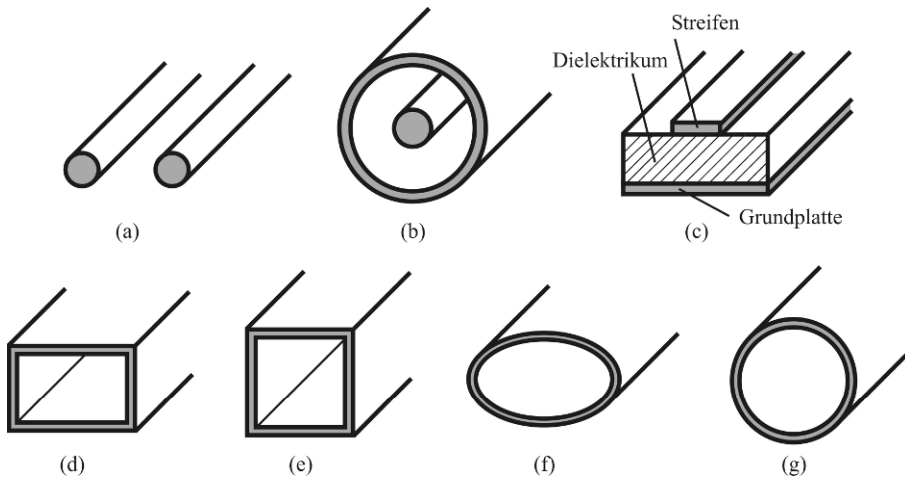


Bild 6.1 Wellenleiter als Zweileitersysteme (a-c) und Einleitersysteme (d-g)

Hohlleiter stellen **Einleitersysteme** dar, die aus einem Metallrohr gleich bleibenden Querschnitts bestehen. Dabei sind – wie in Bild 6.1 angedeutet – mehrere unterschiedliche Querschnittsformen in Gebrauch. Eine Wellenausbreitung in Hohlleitern ist erst oberhalb einer unteren Frequenzgrenze f_c möglich, die man als **Grenzfrequenz**, kritische Frequenz oder cutoff-Frequenz bezeichnet. Die Hohlleitung hat demnach die Übertragungseigenschaften eines Hochpasses. Die Grenzfrequenz hängt von den Querschnittsabmessungen des Hohlleiters und von der Permittivität $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ eines eventuell im Hohlleiter vorhandenen Dielektrikums ab. Unterhalb der Grenzfrequenz existieren im Hohlleiter nur aperiodisch gedämpfte elektromagnetische Felder, die exponentiell mit der Entfernung von der Erregung abnehmen. Hohlleiter sind für die Übertragung mit Gleichstrom und für die Übertragung mit Wechselströmen niedriger Frequenz unbrauchbar, da ihnen hierzu der erforderliche zweite Leiter fehlt. In der Praxis setzt man Hohlleiter für Frequenzen etwa oberhalb 1 GHz ein, da dann die Querschnittsabmessungen vernünftige Werte annehmen.

In den meisten Fällen werden Hohlleiter als Speiseleitungen von Hornstrahlern und Reflektorantennen eingesetzt. Ihre große Durchbruchfeldstärke von etwa $E_d = 15 \text{ kV/cm}$ ermöglicht die Übertragung sehr hoher Sendeleistungen. So sind bei Großgrundradaren für die Luft-raumüberwachung Impuls-Spitzenleistungen von einigen Megawatt nötig. Hohlleiter sind meist mit Luft gefüllt und haben wegen des im Allgemeinen fehlenden Dielektrikums eine relativ niedrige Ausbreitungsdämpfung (typischer Wert $0,1 \text{ dB/m}$). Darum werden sie auch für die Übertragung sehr niedriger Empfangsleistungen ($< 1 \text{ pW}$) verwendet, wie sie z. B. bei Radar- und Satellitenanwendungen auftreten.

6.1 Schwingungsformen in Hohlleitern

Bei der einfachsten Wellenform in einem Hohlleiter mit Rechteckquerschnitt verbinden die elektrischen Feldlinien als Geraden die untere und die obere Hohlleiterwand; sie beginnen bzw. enden senkrecht auf beiden Wänden. Die magnetischen Feldlinien formen Ringe, die parallel zur unteren und oberen Wand mit den elektrischen Feldlinien im Hohlleiter wandern. Die elektrischen und magnetischen Feldlinien stehen senkrecht aufeinander und ändern nach jeder halben Leitungswellenlänge ($\lambda_L/2$) die Richtung (Bild 6.2). Diese Hohlleiterwelle hat magnetische Feldkomponenten, die in Ausbreitungsrichtung der Welle weisen, während die elektrischen Feldlinien ausschließlich in Ebenen quer zur Ausbreitungsrichtung liegen. Elektromagnetische Wellen mit dieser Eigenschaft bezeichnet man allgemein als H-Wellen. Der in Bild 6.2 vorgestellte Wellentyp im Rechteckhohlleiter heißt H_{10} -Welle.

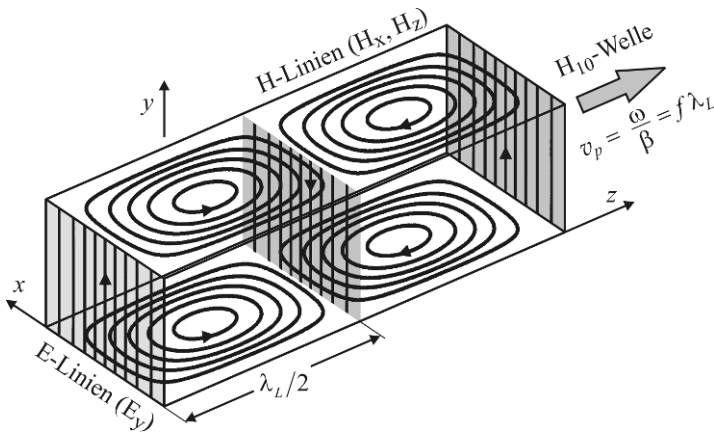


Bild 6.2 Elektrische und magnetische Feldlinien der H_{10} -Welle des Rechteckhohlleiters

In Hohlleitern kann eine Vielzahl von Wellentypen existieren. Die unterschiedlichen Schwingungsformen lassen sich in zwei Gruppen einteilen:

- **E-Wellen** sind durch elektrische Feldstärkekomponenten in Ausbreitungsrichtung gekennzeichnet. Die magnetischen Feldlinien liegen immer nur quer zur Ausbreitungsrichtung. Oft werden E-Wellen auch als TM-Wellen bezeichnet (transverse magnetic modes).
- **H-Wellen** sind durch magnetische Feldstärkekomponenten in Ausbreitungsrichtung gekennzeichnet. Die elektrischen Feldlinien liegen immer nur quer zur Ausbreitungsrichtung. Oft werden H-Wellen auch als TE-Wellen bezeichnet (transverse electric modes).

Ergänzend sei hier angemerkt, dass in verlustlosen Zweileiterssystemen (z. B. Parallel-drahtleitung, Koaxialleitung, Bandleitung, Streifenleitung) neben diesen beiden Wellengrundformen auch noch TEM-Wellen (transverse electromagnetic field) möglich sind, die keinerlei Feldkomponenten in Wellenausbreitungsrichtung besitzen ($E_z = H_z = 0$) und wegen ihrer Grenzfrequenz $f_c = 0$ auch für Gleichstromübertragung geeignet sind. E- und H-Wellen treten in Hohlleitern beliebigen Querschnitts auch gleichzeitig nebeneinander auf. Während TEM-Wellen, die auch Leitungs- oder Lecher-Wellen¹ genannt werden, in Hohlleitern nicht möglich

¹ Ernst **Lecher** (1856-1926): österreich. Physiker (Kalorimetrie, Infrarotstrahlung, elektr. Schwingungen)

sind, können sich E- und H-Wellen ihrerseits durchaus in Zweileitersystemen ausbreiten. Sie stellen neben der gewünschten TEM-Welle – der Grundwelle von Zweileitersystemen – unerwünschte höhere Wellentypen dar und tragen zu Signalverzerrungen auf dem Übertragungsweg wesentlich bei. Sie stören vor allem durch ihre abweichenden Energiegeschwindigkeiten und damit unterschiedlichen Laufzeiten die Übertragung von Signalen (Abschnitt 6.6.2).

Die angedeuteten Probleme lassen sich bei geeigneter Wahl der Betriebsfrequenz unter Beachtung der Abmessungen des Hohlleiterquerschnitts leicht lösen. Liegt die Betriebsfrequenz oberhalb der Grenzfrequenz der niedrigsten Welle (Grundwelle), aber unterhalb der Grenzfrequenzen aller möglichen höheren Wellentypen, dann breitet sich nur die jeweilige Grundwelle aus und man spricht vom Betrieb im eindeutigen Bereich. Bei Störungen an Inhomogenitäten können zwar elektromagnetische Felder unerwünschter höherer Wellentypen entstehen, die aber rasch aperiodisch abklingen und der eingespeisten Grundwelle keine Wirkleistung entziehen.

Außer der Unterscheidung in E- und H-Wellen (Moden) sind wegen der Vielzahl der denkbaren Wellentypen weitere „Sortier-Kennzeichnungen“ erforderlich. Man verwendet hierzu zwei Indexziffern m und n , wie sie bereits von der H_{10} -Welle bekannt sind. Diese Modenindizes beschreiben in Kurzform die elektrischen bzw. magnetischen Feldbilder in der Querschnittsebene des Hohlleiters. Sie beziehen sich auf die Anzahl der Maxima bzw. auf die Anzahl der Nullstellen im Hohlleiterquerschnitt – und zwar bei E_{mn} -Wellen auf die des magnetischen und bei H_{mn} -Wellen auf die des elektrischen Feldes.

Für den Hohlleiter mit **Rechteckquerschnitt** gilt:

- Der erste Index m gibt die Anzahl der Maxima über der Breitseite ($a = m \lambda_x / 2$) und der zweite Index n die Anzahl der Maxima über der Schmalseite ($b = n \lambda_y / 2$) an.

Tabelle 6.1 zeigt transversale Feldbilder verschiedener H_{mn} -Wellen des Rechteckhohlleiters.

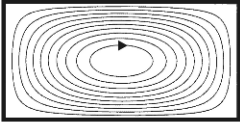
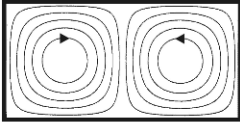
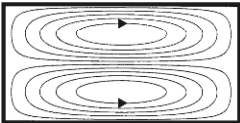
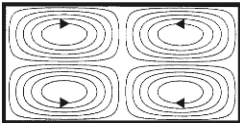
Tabelle 6.1 Darstellung des elektrischen Transversalfeldes von H-Wellen im Rechteckhohlleiter

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
$n = 0$			
$n = 1$			
$n = 2$			

Aus den drei grundlegenden Wellentypen H_{10} , H_{01} und H_{11} können alle weiteren durch periodisches Aneinanderreihen in horizontaler bzw. vertikaler Richtung gewonnen werden. Dabei müssen in benachbarten Elementarzellen die Richtungen der Vektorpfeile jeweils umgedreht werden.

Wie wir später noch sehen werden, darf bei der E_{mn} -Welle des Rechteckhohlleiters keiner der beiden Indizes null werden. Ähnlich zu den H-Wellen aus Tabelle 6.1 können hier aus dem grundlegenden E_{11} -Wellentyp alle höheren Wellen durch periodisches Aneinanderreihen in horizontaler bzw. vertikaler Richtung gewonnen werden (Tabelle 6.2). Dabei kehrt sich der Drehsinn der magnetischen Wirbel in benachbarten Elementarzellen jeweils um.

Tabelle 6.2 Darstellung des magnetischen Transversalfeldes von E-Wellen im Rechteckhohlleiter

	$m = 1$	$m = 2$
$n = 1$		
$n = 2$		

Beim Vergleich der Tabellen 6.1 und 6.2 stellt man folgenden interessanten Zusammenhang fest. Greift man nämlich aus dem magnetischen Feldbild der E_{11} -Welle einen Quadranten heraus, so geht er in einen Quadranten des elektrischen Feldbildes der H_{11} -Welle über (Bild 6.3). Diese Transformation der Felder geht auf die unterschiedlichen Randbedingungen zurück. Die tangential zur Hohlleiterwand verlaufenden Magnetlinien decken sich vollkommen mit den normal stehenden elektrischen Feldlinien.

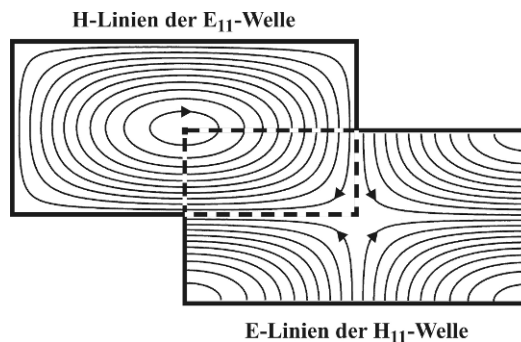
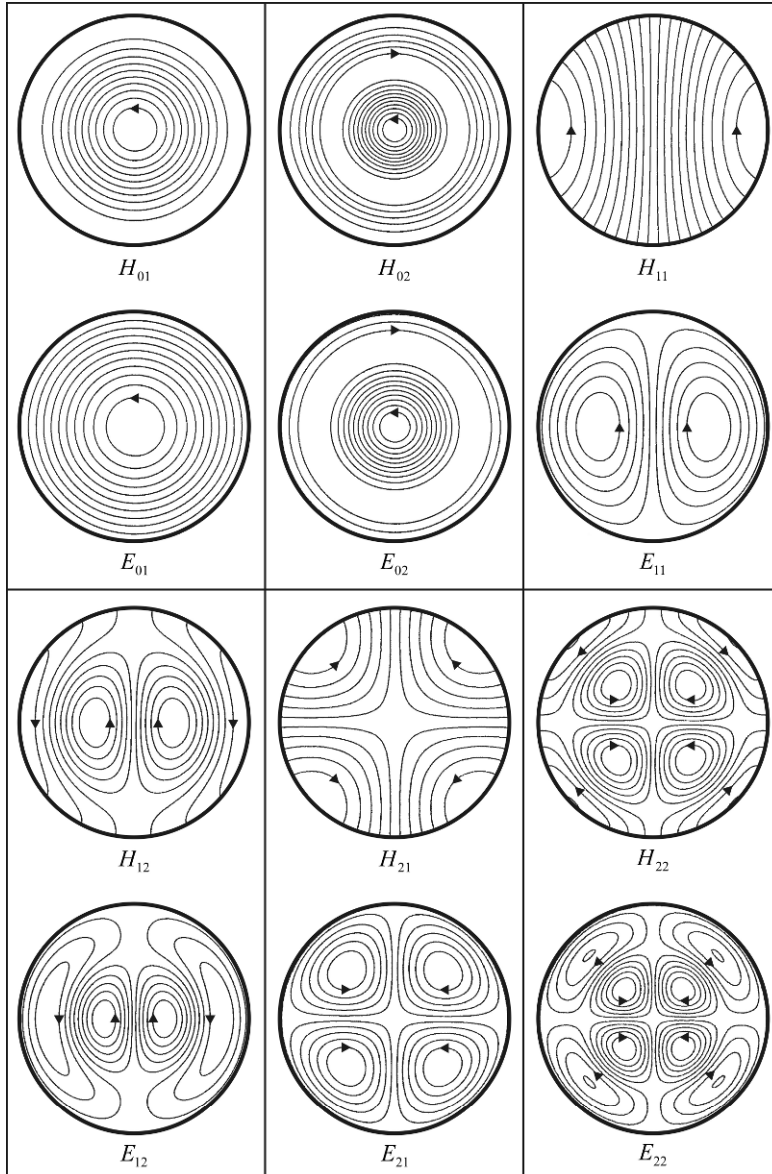


Bild 6.3 Zur Dualität der magnetischen und elektrischen Feldlinien von E_{11} - und H_{11} -Welle

Für den Hohlleiter mit **Kreisquerschnitt** gilt:

- Der erste Index gibt die Anzahl der Maxima längs des halben Rohrumfangs und der zweite Index die Anzahl der Nullstellen über dem Radius an. Treten gleichzeitig an der Wand und in der Achse des Hohlleiters Nullstellen auf, zählen beide zusammen als eine Nullstelle.

Tabelle 6.3 Darstellung der transversalen Feldverteilung verschiedener Eigenwellen des Rundhohlleiters. Bei H-Wellen sind elektrische und bei E-Wellen magnetische Feldlinien gezeichnet.

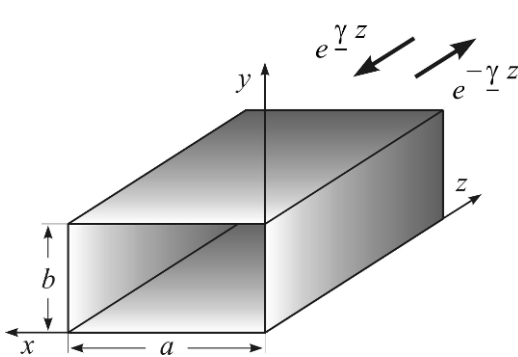


In Tabelle 6.3 sind verschiedene Wellentypen im Rundhohlleiter dargestellt. Für $m \geq 1$ fällt beim Vergleich zwischen einer beliebigen H_{mn} -Welle und derjenigen E_{mn} -Welle mit demselben Indexpaar auf, dass die elektrischen Feldlinien der H-Welle aus dem zentralen Bereich der magnetischen Feldlinien der E-Welle hervorzugehen scheinen. Man braucht dazu nur bei der E-Welle den Hohlleiterrand nach innen zu verlegen und die ursprünglichen Magnetlinien als elektrische Feldlinien der neuen H-Welle zu interpretieren. Das Feldbild der H-Welle lässt sich also bereits in einem kleineren Querschnitt führen, weswegen bei $m \geq 1$ die H_{mn} -Welle immer vor der zugehörigen E_{mn} -Welle ausbreitungsfähig wird; für $m = 0$ ist es gerade umgekehrt.

Alle Wellentypen sind dadurch gekennzeichnet, dass im verlustfreien Fall direkt am Metallrohr keine elektrischen Feldstärkeanteile parallel zur Hohlleiterwand und keine magnetischen Feldstärkeanteile senkrecht zur Hohlleiterwand existieren (**Randbedingungen**). Zur **Anregung** eines bestimmten Feldtyps in einem Hohlleiter bedarf es einer Anordnung, die das elektrische oder magnetische Feld der gewünschten Wellenform teilweise oder völlig nachahmt. Man bildet also die Anregungsstelle so aus, dass sie Feldkomponenten aufweist wie bei dem anzuregenden Hohlleiterfeld. Die Anregung kann elektrisch mit einem Stift parallel zu den elektrischen Feldlinien des zu erregenden Feldtyps erfolgen oder magnetisch mit einer Koppelschleife, deren magnetisches Feld so gerichtet ist wie das anzuregende Magnetfeld.

6.2 Rechteckhohlleiter

Zur systematischen Untersuchung der in Rechteckhohlleitern möglichen Wellentypen geht man von den Maxwell'schen Gleichungen aus, für die Lösungen in kartesischen Koordinaten (x, y, z)



zu suchen sind, die die Randbedingungen an den als ideal leitend angenommenen Innenwänden des Hohlleiters erfüllen (Bild 6.4). Man spricht von einem **Randwertproblem** oder **Eigenwertproblem**. Die Leitung wird als verlustlos, von großer Länge und als homogen angenommen. Die Wellenausbreitung erfolge in positiver oder negativer z -Richtung; x und y sind daher Querschnittskoordinaten.

Bild 6.4 Homogener, verlustloser Rechteckhohlleiter mit kartesischem Koordinatensystem

6.2.1 Eigenwellen

Analog zur Ausbreitung von TEM-Wellen auf Zweileitersystemen wird die Abhängigkeit der Feldkomponenten von der Längsordinate in komplexer Schreibweise mit

$$e^{\pm \gamma z} = e^{\pm j \underline{k}_z z} \quad (6.1)$$

angesetzt. Das negative Vorzeichen im Exponenten gehört zu Wellen, die sich in die positive z -Richtung ausbreiten, während der positive Exponent zu Wellen mit Ausbreitung in negativer z -Richtung gehört. Die Ausbreitungskonstante wird aus Gründen der späteren Bequemlichkeit zu $\underline{\gamma} = j \underline{k}_z = \alpha + j \beta$ gesetzt und man verwendet dann nur noch die neue Konstante $\underline{k}_z = \beta - j \alpha$.

Die Abkürzungen α und β stehen – wie in Kapitel 4 – wieder für Dämpfungs- und Phasenkonstante. Die Zeitabhängigkeit wird als harmonisch angenommen und durch $e^{j\omega t}$ beschrieben. Die Maxwell'schen Feldgleichungen für Phasoren in quellenfreien Gebieten

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} &= j\omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}} \\ \operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}} &= -j\omega \mu \underline{\mathbf{H}}\end{aligned}\quad (6.2)$$

können mit Hilfe des Differenzialoperators „rot“ in kartesischen Koordinaten als sechs gekoppelte Komponentengleichungen geschrieben werden. Durch Ineinandereinssetzen kann man die Komponenten $\underline{E}_x$, $\underline{E}_y$, $\underline{H}_x$ und $\underline{H}_y$ eliminieren und man erhält zwei entkoppelte Differenzialgleichungen zweiter Ordnung für die unbekannten Längsfeldstärken $\underline{E}_z$ und $\underline{H}_z$, die *unabhängig* voneinander sind:

$$\left(\Delta_t + k^2 - \underline{k}_z^2 \right) \begin{Bmatrix} \underline{E}_z \\ \underline{H}_z \end{Bmatrix} = 0, \text{ d. h.} \quad (6.3)$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 - \underline{k}_z^2 \right) \underline{E}_z = 0 \right] \quad \text{und} \quad \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 - \underline{k}_z^2 \right) \underline{H}_z = 0 \right] \quad (6.4)$$

mit $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$ und dem transversalen Laplace-Operator Δ_t in kartesischen Koordinaten, der nur die Differenziation nach x und y enthält. Die allgemeinen Lösungen $\underline{E}_z$ und $\underline{H}_z$ der beiden Helmholtz-Gleichungen (6.4) kann man in zwei unabhängige Klassen aufspalten. Setzt man $\underline{H}_z = 0$, so erhält man **E-Wellen** und für $\underline{E}_z = 0$ findet man **H-Wellen**. Die triviale Lösung $\underline{E}_z = \underline{H}_z = 0$ ist nur bei Zweileitersystemen von Bedeutung und führt auf TEM-Wellen. Diese partiellen Differenzialgleichungen kann man nach Bernoulli durch Trennung der Veränderlichen mit einem **Produktansatz**² lösen, dessen Faktoren nur Funktionen jeweils einer Koordinaten sind. Für E-Wellen gilt:

$$\underline{E}_z = \underline{E}_0 f(x) g(y) e^{\pm j \underline{k}_z z}. \quad (6.5)$$

$\underline{E}_0$ ist dabei eine dimensionsbehaftete komplexe Amplitude mit $[\underline{E}_0] = \text{V/m}$. Nach Einsetzen und Wahl geeigneter Separationskonstanten k_x^2 und k_y^2 erhält man zwei gewöhnliche Differenzialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -k_x^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = -k_y^2. \quad (6.6)$$

Die Konstanten müssen die **Separationsgleichung** erfüllen, d. h. es muss gelten:

$$\left[k_x^2 + k_y^2 + \underline{k}_z^2 = k^2 = (\omega/c)^2 \right]. \quad (6.7)$$

Diese Gleichung wird auch **Eigenwertgleichung** genannt und die noch unbekannten Parameter k_x und k_y heißen Eigenwerte des Randwertproblems. Ein Fundamentalsystem von Lösungen für die Differenzialgleichung (6.6) von f bilden die trigonometrischen Funktionen:

$$f(x) = C_1 \sin k_x x + C_2 \cos k_x x \quad (6.8)$$

mit passenden Konstanten C_1 und C_2 .

² Neben dem kartesischen sind noch zehn weitere Koordinatensysteme bekannt, in denen die Helmholtz-Gleichung separiert werden kann [Mo61a].

Für die zweite Separationsfunktion g findet man entsprechend mit C_3 und C_4 :

$$g(y) = C_3 \sin k_y y + C_4 \cos k_y y. \quad (6.9)$$

Die Längsfeldstärke $\underline{E}_z$ muss auf den Hohlleiterwänden bei $x=0$, $x=a$ und $y=0$, $y=b$ verschwinden (Dirichlet-Randbedingungen: $\underline{E}_z = 0$), woraus sich sofort $C_2 = C_4 = 0$ ergibt. Mit $C_1 = C_3 = 1$ erhält man schließlich die Lösung für E_{mn} -Wellen:

$$\underline{E}_z = \underline{E}_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{\pm j k_z z}. \quad (6.10)$$

Nur für $k_x = (m\pi)/a$ und $k_y = (n\pi)/b$ mit den Modenindizes $m \geq 1$ sowie $n \geq 1$ wird das Verschwinden der Längsfeldstärke auf den vier Hohlleiterwänden sichergestellt. Keiner der beiden Modenindizes darf null werden, da sich sonst nur die triviale Lösung einstellen würde – d. h. ein Nullfeld, das im *gesamten* Hohlleiter verschwindet. Die E_{11} -Welle ist damit die einfachste E-Welle des Rechteckhohlleiters. Der (6.5) entsprechende, formal ähnliche Ansatz einer H-Welle

$$\underline{H}_z = \underline{H}_0 F(x) G(y) e^{\pm j k_z z} \quad (6.11)$$

führt nach Separation der Helmholtz-Gleichung (6.4) für die Feldkomponente $\underline{H}_z$ und Einarbeiten der Neumann-Randbedingungen ($\partial \underline{H}_z / \partial n = 0$) auf H_{mn} -Wellen mit $m+n \geq 1$:

$$\underline{H}_z = \underline{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{\pm j k_z z}. \quad (6.12)$$

Eine H_{00} -Lösung ist keine echte Welle, sondern ein in x und y homogenes Magnetfeld, das nur am Ort der Einspeisung existiert [Esh04]. Die **Ausbreitungskonstante** k_z ist für E- und H-Wellen (mit gleichen Indizes) jeweils identisch und folgt aus der Separationsgleichung (6.7) zu

$$k_z = \beta = \frac{2\pi}{\lambda_L} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (6.13)$$

Wegen $k = \omega/c$ wird k_z bei ausreichend hoher Frequenz reell und wir erhalten eine im Hohlleiter ausbreitungsfähige Welle, andernfalls stellt sich eine so genannte **cutoff-Welle** ein. In (6.13) ist λ_L die **Hohlleiterwellenlänge**, mit der sich das Feldbild der Welle entlang der z -Achse periodisch wiederholt – während wir mit $\lambda_x = 2\pi/k_x = 2a/m$ und $\lambda_y = 2\pi/k_y = 2b/n$ die **Querschnittswellenlängen** als räumliche Perioden des Feldbildes in x - bzw. y -Richtung erhalten. An der **Grenzwellenzahl** k_c (bzw. Grenzwellenlänge λ_c oder Grenzfrequenz f_c)

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} = \frac{2\pi f_c}{c} = \frac{\omega_c}{c} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (6.14)$$

wechselt die Hohlleiterwelle für ansteigende Frequenz ihr Verhalten vom aperiodisch gedämpften cutoff-Zustand in den Bereich ausbreitungsfähiger Wellen (mit $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$). Zwischen der Grenzwellenlänge und den Querschnittswellenlängen besteht folgender Zusammenhang:

$$\frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2}. \quad (6.15)$$

Im Falle einer H_{10} -Welle geht $\lambda_y \rightarrow \infty$ und es folgt $\lambda_c = \lambda_x = 2a$.

Unterhalb der Grenzfrequenz, d. h. für $k < k_c$ breiten sich die elektromagnetischen Felder nicht mehr wellenförmig aus; sie schwingen gleichphasig und nehmen in positiver z-Richtung entsprechend $e^{-\alpha z}$ exponentiell ab. Dann wird k_z imaginär:

$$k_z = -j\alpha = -j\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2}. \quad (6.16)$$

Es handelt sich hierbei um eine Dämpfung des Feldes infolge Reflexion im Unterschied zu einer ebenfalls möglichen Dämpfung durch Wandstromverluste. Dieses aperiodische Verhalten von Hohlleitern unterhalb ihrer Grenzfrequenz kann man zum Aufbau von Dämpfungsgliedern und Filtern ausnutzen [Mat80]. Die unterschiedlichen möglichen Feldtypen – je nach den Werten der Indizes m und n – bezeichnet man allgemein als Eigenwellen oder Eigenmoden. Sind diese ausbreitungsfähig ($f > f_c$), nennt man sie **Wellentypen** mit periodischer Feldänderung in Ausbreitungsrichtung. Im aperiodischen Fall ($f < f_c$) heißen sie evaneszente **Dämpfungstypen** mit exponentieller Abnahme der Feldgrößen in z-Richtung.

Ein harter **Cutoff-Übergang** von $k_z = -j\alpha$ (evaneszent) nach $k_z = \beta$ (ausbreitungsfähig) tritt in dieser Form nur bei *verlustlosen* Wellenleitern auf. In der Praxis jedoch, weist jeder Hohlleiter – wegen der begrenzten Leitfähigkeit κ seiner metallischen Wände – ohmsche Verluste auf. Diese Verluste sind die Ursache, dass vielmehr ein *gleitender* Übergang zwischen beiden Frequenzbereichen stattfindet. Bei geringen Wandstromverlusten ($\kappa \gg \omega\epsilon_0$) stellt sich nämlich auch eine kleine Phasenkonstante β unterhalb f_c und eine kleine Dämpfungskonstante α oberhalb f_c ein. Eine genauere Betrachtung der H_{10} -Welle [Col91] führt mit $k_c = \pi/a$ auf:

$$k_z = \beta - j\alpha = \sqrt{k^2 - k_c^2 + (1-j)\frac{\delta}{a}\left(2k_c^2 + \frac{a}{b}k^2\right)}. \quad (6.17)$$

Diese Darstellung gilt im Frequenzbereich $0 < \omega < \infty$, solange nur die Eindringtiefe $\delta = \sqrt{2/(\omega\mu_0\kappa)} \ll a$ bleibt. Grafische Auswertungen von (6.17) findet man in [Zin95, Kar05].

Wenn Zustände in einem physikalischen System den gleichen Eigenwert haben, werden sie **entartet** genannt. So folgt aus (6.14), dass E_{mn} - und H_{mn} -Wellen im Rechteckhohlleiter jeweils für gleiche Indizes m und n gleiche Grenzfrequenz haben. Da hier zwei Eigenwellen entartet sind, ist die Entartung zweiten Grades. Im Quadrathohlleiter haben die vier Eigenwellen E_{mn} , H_{mn} , E_{nm} und H_{nm} gleiche Grenzfrequenz und Ausbreitungskonstante. Die Entartung ist hier vierten Grades, was durch die geometrische Symmetrie der Anordnung bedingt ist.

Die **Phasengeschwindigkeit** v_p der in Hohlleitern beliebigen Querschnitts fortschreitenden E- oder H-Wellen, mit der sich also das Feldbild längs der z-Achse verschiebt, ist nach (4.28):

$$v_p(\omega) = \frac{\omega}{\beta} = \frac{k}{\beta} c = \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_c^2}} c = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} > c. \quad (6.18)$$

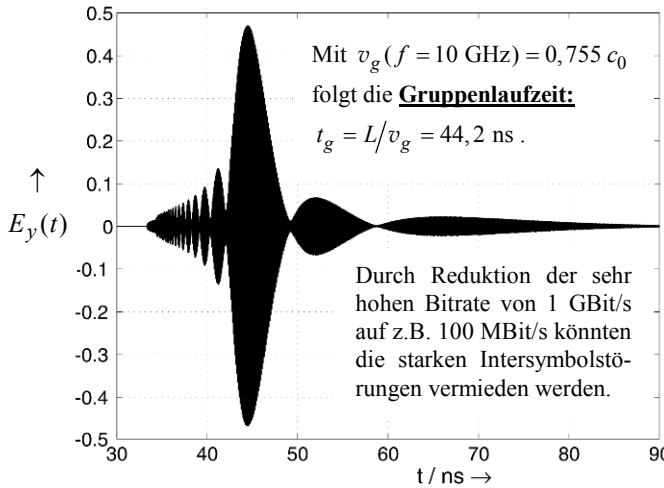
Speziell für die in den Anwendungen besonders wichtige H_{10} -Welle erhalten wir mit $\lambda_c = 2a$

$$v_p^{H_{10}}(\omega) = \frac{c}{\sqrt{1 - (\pi/(ka))^2}}. \quad (6.19)$$

Für die **Gruppengeschwindigkeit**, mit der sich eine schmale Frequenzgruppe (also eine Information oder der Energiefluss) im Hohlleiter ausbreitet, gilt nach (4.35):

$$v_g(\omega) = v_E(\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)^{-1} = \frac{\beta}{k} c = c \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2} < c. \quad (6.20)$$

Das Produkt aus Phasen- und Gruppengeschwindigkeit ist im dämpfungsfreien Hohlleiter also gleich dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit, d. h. $v_p(\omega) v_g(\omega) = c^2$, vgl. (4.41). Für Frequenzen weit oberhalb der Grenzfrequenz nähern sich die Ausbreitungsverhältnisse denen ebener Wellen ($\beta \rightarrow k$ und damit $v_p, v_g \rightarrow c$). Die Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit



keit von der Frequenz, die als **Dispersion** bezeichnet wird, führt bei der Übertragung breitbandiger Signale zu linearen Verzerrungen. Mit $v_g < c < v_p$ liegt in Hohlleitern *normale Dispersion* vor. Bild 6.5 zeigt das Ausgangszeitsignal am Ende eines 10 m langen R 100 Rechteckhohlleiters (Tabelle 6.5) aus Aluminium. Bei Anregung mit einem modulierten Rechteckimpuls treten erste Vorschwinger ab $t_F = L/c_0 = 33,4$ ns auf. Das **Impulsmaximum** stellt sich etwa bei $\tau/2 + t_g = 44,7$ ns ein.

Bild 6.5 H_{10} -Impulsdispersion in einem R 100 Rechteckhohlleiter aus Aluminium: Am Eingang wird eine Sinusquelle mit der Frequenz 10 GHz und der Amplitude 1 für $\tau = 1$ ns lang eingeschaltet. Nach einer Leitungslänge von $L = 10$ m hat sich das ursprünglich lokalisierte Wellenpaket wegen der Laufzeitunterschiede seiner Spektralkomponenten stark verbreitert und wurde in der Amplitude geschwächt [Kar05].

Alle weiteren Feldkomponenten der E_{mn} -Wellen im Rechteckhohlleiter erhält man aus der Längsfeldstärke $\underline{E}_z$ nach (6.10) mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen. Dabei wird – als bequeme Abkürzung – der **Feldwellenwiderstand** $\underline{Z}_F^E$ der E-Wellen eingeführt

$$\underline{Z}_F^E(\omega) = \frac{k_z}{\omega \epsilon} = \frac{k_z}{k} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2} < \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} & \text{für } \lambda < \lambda_c \\ -j \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{(\lambda/\lambda_c)^2 - 1} & \text{für } \lambda > \lambda_c, \end{cases} \quad (6.21)$$

der im Hohlleiter als Verhältnis der Querkomponenten des elektrischen Feldstärkevektors und der jeweils darauf senkrecht stehenden Querkomponente der magnetischen Feldstärke definiert ist. Bei E_{mn} -Wellen mit $\underline{H}_z = 0$ gibt es mit $m, n \geq 1$ stets *fünf* Feldkomponenten:

$$\begin{aligned} \underline{E}_z &= \underline{E}_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{\pm j k_z z} \\ \underline{H}_x &= \pm \frac{\underline{E}_y}{\underline{Z}_F^E} = \frac{j\omega\epsilon}{k^2 - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} = \underline{E}_0 \frac{j\omega\epsilon}{k^2 - k_z^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{\pm j k_z z} \\ \underline{H}_y &= \mp \frac{\underline{E}_x}{\underline{Z}_F^E} = -\frac{j\omega\epsilon}{k^2 - k_z^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} = -\underline{E}_0 \frac{j\omega\epsilon}{k^2 - k_z^2} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{\pm j k_z z}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Die zweite mögliche Gruppe von Hohlleiterwellen, die H_{mn} -Wellen mit $\underline{E}_z = 0$, findet man analog. Man muss dazu nur die Randbedingungen für $\underline{H}_z$ auf der Hohlleiterwand beachten:

$$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = 0 \quad \text{für } x=0 \text{ und } x=a \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} = 0 \quad \text{für } y=0 \text{ und } y=b. \quad (6.23)$$

Auch bei H-Wellen ist es zweckmäßig, einen **Feldwellenwiderstand** $\underline{Z}_F^H$ einzuführen:

$$\underline{Z}_F^H(\omega) = \frac{\omega \mu}{k_z} = \frac{k}{k_z} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} > \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} & \text{für } \lambda < \lambda_c \\ j \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{(\lambda/\lambda_c)^2 - 1}} & \text{für } \lambda > \lambda_c \end{cases} \quad (6.24)$$

Der **Feldwellenwiderstand** ist für jede Eigenwelle eine charakteristische Größe. Oberhalb der Grenzfrequenz ist er ein reiner Wirkwiderstand, unterhalb dagegen ein reiner Blindwiderstand. Bei den E-Wellen ist dieser Blindwiderstand kapazitiv, bei den H-Wellen induktiv. Für jeweils alle E-Wellen bzw. alle H-Wellen ist der Wellenwiderstand ein und dieselbe einheitliche Funktion vom Verhältnis $f/f_c = \lambda_c/\lambda$. Diese Funktion ist für beide Arten von Eigenwellen in Bild 6.6 aufgetragen. Dabei wurde mit $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ die dimensionslos normierte Darstellung $\underline{Z}_F/Z = R_F/Z + j X_F/Z$ gewählt.

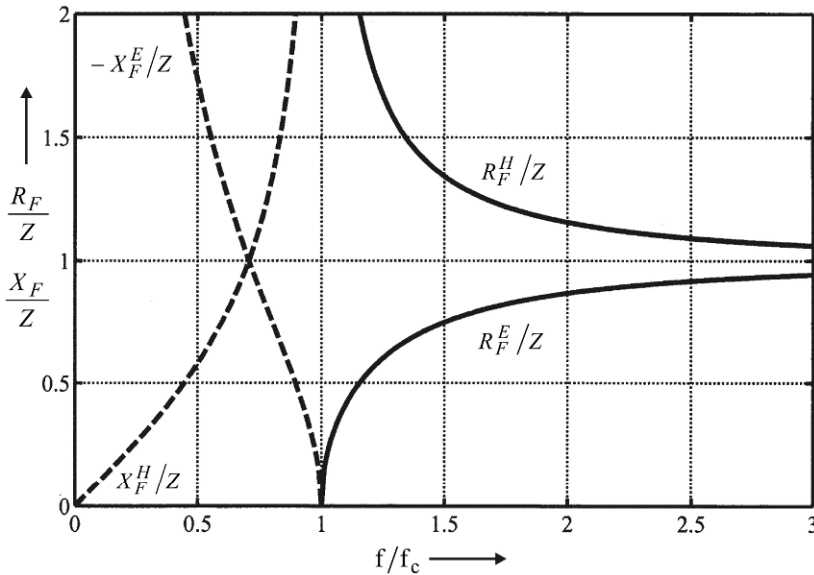


Bild 6.6 Feldwellenwiderstände $\underline{Z}_F = R_F + j X_F$ von H- und E-Wellen im Rechteckhohlleiter; imaginär unterhalb der Grenzfrequenz ($f < f_c$) und reell oberhalb ($f > f_c$)

Weit oberhalb der Grenzfrequenz, also bei elektrisch großen Hohlleiterabmessungen, stellen sich quasi Freiraumverhältnisse ein und es gilt:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \underline{Z}_F^{E,H}(\omega) = Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}. \quad (6.25)$$

Mit (6.21) und (6.24) folgt, dass das Produkt der Feldwellenwiderstände zweier Eigenwellen vom E- und H-Typ – jeweils derselben Ordnung (m,n) – gleich dem Quadrat des Feldwellenwiderstands Z_0 des freien Raums ist:

$$\boxed{\underline{Z}_F^E(\omega) \underline{Z}_F^H(\omega) = \mu/\varepsilon = Z^2} \quad (6.26)$$

Wir wollen schließlich noch die Feldkomponenten von H_{mn} -Wellen mit $\underline{E}_z = 0$ angeben. Dazu führen wir zweckmäßig eine dimensionsbehaftete komplexe Amplitude $\underline{H}_0$ mit $[\underline{H}_0] = A/m$ ein. Unter Beachtung der Nebenbedingung $m+n \geq 1$ können die Modenindizes der H_{mn} -Wellen folgende Werte annehmen: $m = 0, 1, 2, \dots$ und $n = 0, 1, 2, \dots$. Im Gegensatz zu E-Wellen, die im Rechteckhohlleiter stets *fünf* Feldkomponenten haben, gibt es H_{m0} - und H_{0n} -Wellen, die nur *drei* Feldkomponenten aufweisen.

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{H}_z &= \underline{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{\pm j \underline{k}_z z} \\ \underline{E}_x &= -\frac{j\omega\mu}{k^2 - \underline{k}_z^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} = \mp \underline{Z}_F^H \underline{H}_y = \underline{H}_0 \frac{j\omega\mu}{k^2 - \underline{k}_z^2} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{\pm j \underline{k}_z z} \\ \underline{E}_y &= \frac{j\omega\mu}{k^2 - \underline{k}_z^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = \pm \underline{Z}_F^H \underline{H}_x = -\underline{H}_0 \frac{j\omega\mu}{k^2 - \underline{k}_z^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{\pm j \underline{k}_z z} \end{aligned}} \quad (6.27)$$

Die **Grundwelle** im Rechteckhohlleiter hat von allen möglichen Wellentypen die geringste Grenzfrequenz. Wegen (6.14) folgt zunächst:

$$f_c^{(m,n)} = \frac{c}{\lambda_c^{(m,n)}} = c \sqrt{\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2} \quad (6.28)$$

Die Grundwelle muss die kleinsten Ordnungszahlen m und n aufweisen, daher muss sie eine H-Welle sein, denn nur dort kann entweder $m = 0$ oder $n = 0$ sein. Für $a > b$ ist die H_{10} -Welle Grundwelle; für $b > a$ ist es die H_{01} -Welle. Man findet folgende Grenzfrequenzen:

$$f_c^{(1,0)} = \frac{c}{2a} \quad \text{und} \quad f_c^{(0,1)} = \frac{c}{2b} \quad (6.29)$$

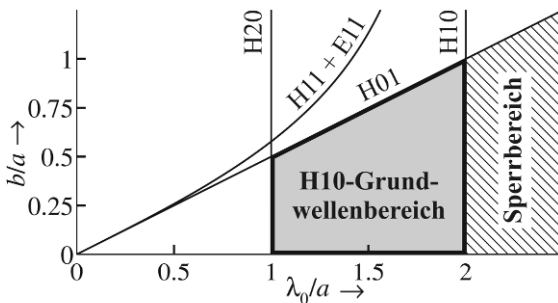
In der Praxis werden häufig Rechteckhohlleiter mit $a \geq 2b$ verwendet, bei denen der erste höhere Wellentyp stets die H_{20} -Welle ist (siehe Bild 6.7). Die theoretisch nutzbare **Bandbreite** eines solchen Rechteckhohlleiters, innerhalb derer sich nur die Grundwelle alleine ausbreiten kann, beträgt dann eine Oktave (Frequenzverhältnis von 2:1). Praktisch hält man aber einen Sicherheitsabstand von den Bandgrenzen ein und benutzt für eindeutigen Grundwellenbetrieb den Frequenzbereich $f_{\min} = 1,25 f_c^{(1,0)} < f < 1,9 f_c^{(1,0)} = f_{\max}$. Für die Ausbreitungskonstante $\underline{k}_z$ und Grenzwellenlänge λ_c gelten bei H-Wellen die gleichen Beziehungen wie für E-Wellen. Für ein gebräuchliches Seitenverhältnis $a/b = 2$ werden in Tabelle 6.4 die auf die Grenzfrequenz der H_{10} -Grundwelle $f_c^{(1,0)} = c/(2a)$ bezogenen Grenzfrequenzen $f_c^{(m,n)}$ der H_{mn} - und E_{mn} -Wellen dargestellt, also

$$\boxed{\frac{f_c^{(m,n)}}{f_c^{(1,0)}} = \frac{2a}{\lambda_c^{(m,n)}} = \sqrt{m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2} \quad a=2b \Rightarrow \sqrt{m^2 + 4n^2}}. \quad (6.30)$$

Der Bereich der H_{m0} - und H_{0n} -Wellen ist grau unterlegt. Zwischen der einfachen und doppelten Grenzfrequenz der Grundwelle gibt es einen Bereich, in dem sich alleine die H_{10} -Welle ausbreiten kann. Jenseits davon treten weitere Schwingungstypen (teilweise entartete) hinzu.

Tabelle 6.4 Grenzfrequenzen höherer H- und E-Eigenwellen im Rechteckhohlleiter bei $a/b = 2$

$f_c^{(m,n)} / f_c^{(1,0)}$	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$m=0$		2,00	4,00	6,00
$m=1$	1,00	2,24	4,13	
$m=2$	2,00	2,84	4,48	
$m=3$	3,00	3,61	5,00	
$m=4$	4,00	4,48	5,66	
$m=5$	5,00	5,39		
$m=6$	6,00			



In Bild 6.7 sind nach (6.30) die normierten Grenzwellenlängen $\lambda_c^{(m,n)}/a$ dargestellt. Man sieht, in welcher Reihenfolge die Wellentypen im Rechteckhohlleiter bei festem Seitenverhältnis b/a mit fallender Wellenlänge $\lambda_0 < \lambda_c^{(m,n)}$ ausbreitungsfähig werden. Die größte Bandbreite im H_{10} -Grundwellenbereich erhält man bei $b/a \leq 0,5$. Für eine Höhe von $b = a/2$ ist dann die übertragbare Leistung maximal (6.38).

Bild 6.7 Grenzwellenlängenspektrum im Rechteckhohlleiter nach [Mei66, Peh88]

Übung 6.1: Transportierte Leistung einer H_{10} -Welle

- Bestimmen Sie die Leistung, die von einer H_{10} -Welle im Rechteckhohlleiter transportiert wird. Verwenden Sie dazu eine Welle, die sich in die positive z -Richtung ausbreitet.
- **Lösung:**

Bei der H_{10} -Welle gibt es wegen $n = 0$ nur drei nichtverschwindende Feldkomponenten:

$$\begin{aligned} \underline{H}_z &= \underline{H}_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j \underline{k}_z z} \\ \underline{H}_x &= -\frac{\underline{E}_y}{\underline{Z}_F^H} = \underline{H}_0 \frac{j \underline{k}_z}{\pi/a} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j \underline{k}_z z}, \end{aligned} \quad (6.31)$$

wobei Ausbreitungskonstante und Feldwellenwiderstand folgende Werte annehmen:

$$\underline{k}_z = \sqrt{k^2 - (\pi/a)^2} \quad \text{und} \quad \underline{Z}_F^H = \frac{\omega \mu}{\underline{k}_z}. \quad (6.32)$$

Die in Längsrichtung transportierte Wirkleistung ergibt sich durch Integration des Poyntingvektors über den rechteckigen Hohlleiterquerschnitt:

$$P = \operatorname{Re} \left\{ \iint_A \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) \cdot \underline{\mathbf{e}}_z dA \right\} = -\operatorname{Re} \left\{ \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \frac{1}{2} \underline{E}_y \underline{H}_x^* dy dx \right\}. \quad (6.33)$$

Mit $\underline{E}_y \underline{H}_x^* = -\underline{Z}_F^H |\underline{H}_x|^2$ folgt daraus:

$$P = \omega \mu |\underline{H}_0|^2 \frac{\sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}}{2 (\pi/a)^2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx dy = \omega \mu |\underline{H}_0|^2 \frac{\sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}}{2 (\pi/a)^2} \frac{a b}{2}, \quad (6.34)$$

was man auch wie folgt schreiben kann:

$$P = \omega \mu |\underline{H}_0|^2 \frac{a^2 b}{4 \pi^2} \sqrt{(k a)^2 - \pi^2}. \quad (6.35)$$

Das stärkste elektrische Feld stellt sich in Hohlleitemitte bei $x = a/2$ ein und wird nach (6.31) und (6.32):

$$E_{\max} = \frac{\omega \mu}{\pi/a} |\underline{H}_0|, \quad (6.36)$$

womit für die transportierte Leistung der H_{10} -Welle schließlich gilt:

$$P = \frac{E_{\max}^2}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} \frac{a b}{4} \sqrt{1 - (\pi/k a)^2}. \quad (6.37)$$

Erreicht $E_{\max}$ die Durchbruchfeldstärke von typisch $E_d = 15 \text{ kV/cm}$, so ist die höchste übertragbare Leistung erreicht. Im luftgefüllten Rechteckhohlleiter gilt dann:

$$P = 149,3 \text{ kW} \frac{a b}{\text{cm}^2} \sqrt{1 - (\pi/k a)^2}, \quad (6.38)$$

woraus sich die Leistungswerte aus Tabelle 6.5 berechnen lassen. □

In Tabelle 6.5 werden gebräuchliche Rechteckhohlleiter, ihr eindeutiger Übertragungsbereich, Abmessungen der Innenmaße a und b , Dämpfungen der H_{10} -Grundwelle im mittleren Frequenzbereich und maximal übertragbare Radar-Impulsleistungen nach (6.38) dargestellt. Die angegebenen Dämpfungswerte resultieren aus der Tatsache, dass in den metallischen Wänden Stromwärmeverluste auftreten, die bei höheren Frequenzen zunehmen. Befindet sich im Hohlleiter anstelle von Luft ein Dielektrikum, so ist mit zusätzlichen Polarisationsverlusten zu rechnen. Weitere Dämpfungen können durch Flanschversatz, Achsknicke, Krümmungen oder Verdrehungen der Hohlleiterlängsachse auftreten. An solchen Inhomogenitäten werden einerseits Reflexionen angeregt, andererseits kann eine spürbare Modenkonversion durch Anregung von höheren Wellen auftreten.

Tabelle 6.5 Daten von Rechteckhohlleitertypen nach IEC-Empfehlungen [Jan92]

Typ	Grenzfrequenz der H_{10} -Welle $f_c = \frac{c_0}{2a}$ fc / GHz	nutzbarer Frequenzbereich der H_{10} -Welle 1,25 fc...1,9 fc GHz	Hohlleiterinnenmaße		Dämpfung im Kupferhohlleiter $\kappa = 58 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ (s. Anhang C.5)		Max. zulässige Scheitelleistung ($f_{\min} < f < f_{\max}$) nach Gl. (6.38)
			Breite a / mm	Höhe b / mm	1,5 fc GHz	dB/m	
R 14	0,908	1,13... 1,73	165,10	82,550	1,36	0,00521	12,31 ... 17,32
R 18	1,157	1,45... 2,20	129,54	64,770	1,74	0,00750	7,55 ... 10,65
R 22	1,372	1,72... 2,61	109,22	54,610	2,06	0,00968	5,37 ... 7,58
R 26	1,736	2,17... 3,30	86,360	43,180	2,60	0,0138	3,34 ... 4,74
R 32	2,078	2,60... 3,95	72,140	34,040	3,12	0,0188	2,20 ... 3,12
R 40	2,577	3,22... 4,90	58,170	29,083	3,87	0,0249	1,51 ... 2,15
R 48	3,152	3,94... 5,99	47,549	22,149	4,73	0,0354	0,94 ... 1,34
R 58	3,712	4,64... 7,05	40,386	20,193	5,57	0,0431	0,73 ... 1,04
R 70	4,301	5,38... 8,17	34,849	15,799	6,45	0,0576	0,49 ... 0,70
R 84	5,260	6,57... 9,99	28,499	12,624	7,89	0,0791	0,32 ... 0,46
R 100	6,557	8,20... 12,5	22,860	10,160	9,84	0,110	0,21 ... 0,30
R 120	7,869	9,84... 15,0	19,050	9,5250	11,8	0,133	0,16 ... 0,23
R 140	9,488	11,9... 18,0	15,799	7,8990	14,2	0,176	0,11 ... 0,16
R 180	11,571	14,5... 22,0	12,954	6,4770	17,4	0,237	0,076... 0,107
R 220	14,025	17,6... 26,6	10,688	4,3180	21,0	0,368	0,042... 0,059
R 260	17,357	21,7... 33,0	8,6360	4,3180	26,0	0,436	0,033... 0,047
R 320	21,077	26,3... 40,0	7,1120	3,5560	31,6	0,583	0,023... 0,032
R 400	26,344	32,9... 50,1	5,6900	2,8450	39,5	0,814	0,015... 0,021
R 500	31,392	39,2... 59,6	4,7750	2,3880	47,1	1,059	0,010... 0,015
R 620	39,877	49,8... 75,8	3,7590	1,8800	59,8	1,516	0,0063... 0,0090
R 740	48,356	60,4... 91,9	3,0998	1,5494	72,5	2,026	0,0043... 0,0061
R 900	59,014	73,8... 112,1	2,5400	1,2700	88,5	2,730	0,0029... 0,0041
R 1200	73,768	92,2... 140,2	2,0320	1,0160	110,7	3,816	0,0018... 0,0026
R 1400	90,791	113,5... 172,5	1,6510	0,8255	136,2	5,210	0,0012... 0,0017
R 1800	115,714	144,6... 219,9	1,2954	0,6477	173,6	7,496	0,0008... 0,0011

6.2.2 Hohlleiterschaltungen und Orthogonalentwicklung

Im geradlinigen homogenen Hohlleiter ist jede Eigenwelle an die Randbedingungen angepasst und ist für sich alleine existenzfähig. An jeder Diskontinuität – wie z. B. Querschnittssprüngen, Verzweigungen oder dielektrischen Einsätzen – kann eine einzelne Eigenwelle die neuen Randbedingungen freilich nicht mehr erfüllen. Das Gesamtfeld in der inhomogenen Struktur kann allerdings durch eine Superposition verschiedener Eigenwellen exakt beschrieben werden. Man macht dazu einen Ansatz vom Typ einer **Fourier-Reihe**, bei dem im Allgemeinen über unendlich viele E- und H-Wellen summiert wird [Lew75]:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} - \text{Wellen} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} H_{mn} - \text{Wellen} . \quad (6.39)$$

Bei den H-Wellen dürfen natürlich nicht beide Indizes gleichzeitig null werden. Als Beispiel wollen wir die in Bild 6.8 gezeigte Verbindung dreier Rechteckhohlleiter betrachten. Sie soll durch zwei, aus den Raumteilen I und II kommende und auf die Trennfläche bei $z = 0$ zulaufende H_{01} -Wellen (mit horizontal polarisiertem elektrischen Feld $\underline{E}_x$) gespeist werden. Da die Diskontinuität nur in y-Richtung auftritt, haben alle angeregten Eigenwellen denselben Modenindex $m = 0$, der ja die gleich bleibende x-Richtung beschreibt. Es werden somit reflek-

tierte und transmittierte Wellenanteile angeregt, die ausschließlich vom H_{0n} -Typ sind mit $n=1, 2, 3, \dots$. Ihre Amplituden und Phasen können mit Hilfe der Methode der Orthogonalentwicklung [Pie77] exakt gefunden werden [Kar96].

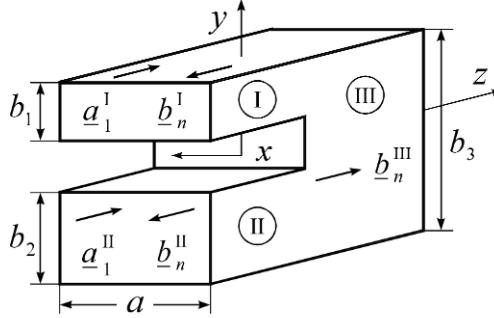


Bild 6.8 Hohlleiterzusammenführung mit Phasoren der hin- und rücklaufenden Eigenwellen

Das für alle drei Teilhohlleiter gleiche kartesische Koordinatensystem befindet sich in der Mitte des großen Hohlleiters III. Mit $\underline{a}_1^I$ und $\underline{a}_1^{II}$ bezeichnen wir die bekannten Phasoren der auf die Trennfläche bei $z=0$ zulaufenden H_{01} -Speisewellen. Entsprechend beschreiben $\underline{b}_n^I$, $\underline{b}_n^{II}$ und $\underline{b}_n^{III}$ die von der Trennfläche jeweils weglaufenden Wellenanteile. Eine H_{0n} -Welle besitzt keine Feldabhängigkeit in x -Richtung und hat nur drei Feldkomponenten. Beispielhaft wird für den Raumteil III der vollständige Feldansatz angegeben:

$$\begin{aligned} \underline{E}_x^{III}(y, z) &= -\sqrt{\frac{2}{a b_3}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left[n \pi (y + b_3/2) / b_3 \right] \sqrt{\underline{Z}_n^{III}} \underline{b}_n^{III} e^{-\underline{\gamma}_n^{III} z} \\ \underline{H}_y^{III}(y, z) &= -\sqrt{\frac{2}{a b_3}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left[n \pi (y + b_3/2) / b_3 \right] \sqrt{\underline{Y}_n^{III}} \underline{b}_n^{III} e^{-\underline{\gamma}_n^{III} z} \\ \underline{H}_z^{III}(y, z) &= -\frac{1}{j \omega \mu_0} \sqrt{\frac{2}{a b_3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \pi}{b_3} \cos \left[n \pi (y + b_3/2) / b_3 \right] \sqrt{\underline{Z}_n^{III}} \underline{b}_n^{III} e^{-\underline{\gamma}_n^{III} z}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Dabei sind $\underline{Z}_n^{III} = 1 / \underline{Y}_n^{III}$ mit $n = 1, 2, 3 \dots$ die jeweiligen Feldwellenwiderstände der H_{0n} -Wellen im Raumteil III. Die Ausbreitungskonstanten

$$\underline{\gamma}_n^{III} = \begin{cases} j \beta = j \sqrt{k_0^2 - (n \pi / b_3)^2} \\ \alpha = \sqrt{(n \pi / b_3)^2 - k_0^2} \end{cases} \quad (6.41)$$

sind imaginär für ausbreitungsfähige Wellen ($n < 2 b_3 / \lambda_0$) und reell für gedämpfte cutoff-Wellen. In den Raumteilen I und II werden entsprechende Reihen angesetzt, die zur Erfüllung der Stetigkeit der Felder in den Trennflächen der Teilhohlleiter mit den Reihen des Raumteils III gleich gesetzt werden müssen. Unter Ausnutzung der Orthogonalität der Eigenfunktionen entsteht dadurch ein unendlich großes, lineares Gleichungssystem. Aus diesem können die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten aller ausbreitungsfähigen und cutoff- H_{0n} -Wellen in allen drei Raumteilen bestimmt werden, die man in Form einer unendlich großen Streumatrix anordnet.

Zur numerischen Auswertung müssen alle Reihen simultan abgeschnitten werden. Dazu werden in der Regel die höchsten Modenindizes n_1 , n_2 und n_3 in den verschiedenen Raumteilen – d. h. die Anzahl der jeweils summierten Eigenwellen – entsprechend der jeweiligen Linearabmessung der Hohlleiterhöhen gewählt:

$$\boxed{\frac{n_1}{b_1} \approx \frac{n_2}{b_2} \approx \frac{n_3}{b_3}} \quad (6.42)$$

Man gibt sich z. B. im Raumteil III die Anzahl n_3 so vor, dass der Abbruchfehler der Reihen (6.40) gering ist; mit $n_3 = 100$ Harmonischen stellt sich meist gute Konvergenz ein. Dann errechnet man n_1 und n_2 als diejenigen natürlichen Zahlen, die die Bedingung (6.42) am besten erfüllen. Nur für diese Wahl konvergieren bei $n_1, n_2, n_3 \rightarrow \infty$ die Orthogonalreihen gegen die physikalisch richtige Lösung. Es nimmt dann die Kondition der resultierenden Streumatrix ein Minimum ein. Ferner ist nur bei dem richtigen Wellenzahlverhältnis die **Kantenbedingung** erfüllt, die eindeutig festlegt, in welcher Weise die zur Kante quer liegenden Feldkomponenten singulär werden dürfen (siehe Abschnitt 8.5). Die Vieldeutigkeit der Lösung bei der Methode der Orthogonalentwicklung erklärt sich damit, dass die Kantenbedingung im Reihenansatz noch nicht enthalten ist. Erst die Erfüllung der Kantenbedingung macht die Lösung eindeutig und das geschieht gerade durch Wahl der Approximationszahlen wie in (6.42). Damit wird die Mehrdeutigkeit beseitigt und die einzig richtige Lösung gefunden.

Eine grafisch interessante Möglichkeit, die Genauigkeit der Lösung zu beurteilen, ist die Überprüfung der notwendigen Stetigkeit der Felder in der Trennfläche bei $z = 0$, an die alle drei Raumteile angrenzen. Dazu betrachten wir den Längsschnitt der Hohlleiterstruktur und wollen versuchen, Feldlinienbilder im *Zeitbereich* zu konstruieren. Bei alleiniger Anregung von H_{0n} -Rechteckhohlleiterwellen hat die elektrische Feldstärke ausschließlich eine E_x -Komponente, während die magnetische Feldstärke eine H_y - und eine H_z -Komponente aufweist (Bild 6.9).

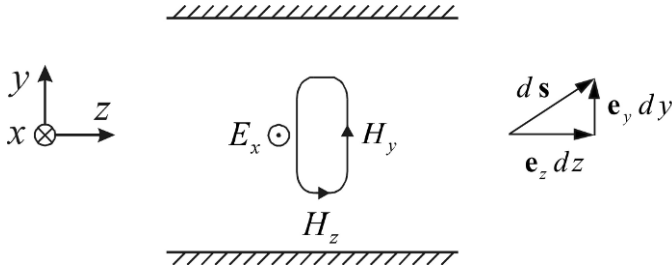


Bild 6.9 Feldkomponenten einer H_{0n} -Welle im Längsschnitt eines Rechteckhohlleiters

Wir wollen eine Feldlinie in klassischer Weise dadurch definieren, dass die Tangente an jedem ihrer Punkte in Richtung des jeweiligen lokalen Feldvektors zeigt. Der Abstand zweier Feldlinien sei ein Maß für die Intensität des Vektorfeldes in diesem Bereich. Mit dem vektoriellen Wegelement $d\mathbf{s} = \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz$ als infinitesimales Bogenelement längs einer Linie erhält man z. B. die magnetischen Feldlinien nach Bild 6.9 aus:

$$\boxed{\mathbf{H}(y, z, t) \times d\mathbf{s} = 0.} \quad (6.43)$$

Für den Längsschnitt der hier betrachteten Hohlleiterverzweigung erhalten wir mit $\mathbf{H} = \mathbf{e}_y H_y + \mathbf{e}_z H_z$ die Bedingung

$$(\mathbf{e}_y H_y + \mathbf{e}_z H_z) \times (\mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz) = 0, \quad (6.44)$$

die auf folgende Differenzialgleichung führt:

$$H_y dz - H_z dy = 0. \quad (6.45)$$

Durch Einsetzen der magnetischen Felder einer *ausbreitungsfähigen* H_{0n} - Welle erhalten wir in Abhängigkeit vom Ort und von der Zeit:

$$\frac{H_y}{H_z} = \pm \frac{\beta}{n \pi / b} \tan \frac{n \pi y}{b} \tan (\omega t \pm \beta z) = \frac{dy}{dz}. \quad (6.46)$$

Diese Differenzialgleichung kann nach Trennung der Veränderlichen direkt integriert werden:

$$\pm \beta \int \tan (\omega t \pm \beta z) dz = \frac{n \pi}{b} \int \cot \frac{n \pi y}{b} dy. \quad (6.47)$$

Nach elementarem Ausführen der Integrale (6.47) erhält man die zeitabhängige Bestimmungsgleichung für die Punkte (y, z) der gesuchten **Magnetfeldlinien:**

$$\boxed{\cos (\omega t \pm \beta z) \sin \frac{n \pi y}{b} = \text{const.}} \quad (6.48)$$

Tatsächlich können die magnetischen Feldlinien einer *ausbreitungsfähigen* H_{0n} - Welle somit als **Höhenlinien** (Äquipotenziallinien) eines dreidimensionalen Funktionengebirges gezeichnet werden. Dieses Funktionengebirge geht auch aus der elektrischen Querfeldstärke

$$E_x(y, z, t) = -Z_0 H_0 \frac{k}{n \pi / b} \sin (\omega t \pm \beta z) \sin \frac{n \pi y}{b} \quad (6.49)$$

durch räumliche Verschiebung um eine viertel Wellenlänge in z-Richtung oder durch zeitliche Verschiebung um eine viertel Periode hervor. Auf ähnliche Weise können auch die Magnetlinien aller *nicht ausbreitungsfähiger* H_{0n} - Wellen gezeichnet werden. Damit ist auch jede beliebige Superposition aller denkbaren H_{0n} - Wellen grafisch darstellbar.

Zunächst soll der Hohlleiterübergang aus Bild 6.8 mit unendlich dünner Mittelblende, also für $b_1 + b_2 = b_3$ betrachtet werden. Die Anregung geschieht durch zwei phasen- und amplitudengleiche H_{01} - Wellen. Mit $a = b_1 = b_2 = 0,7 \lambda_0$ und $b_3 = 1,4 \lambda_0$ ist die Schaltung so bemessen, dass in den beiden kleinen Hohlleitern jeweils nur die H_{01} - Welle und im großen Hohlleiter die H_{01} - und die H_{02} - Welle ausbreitungsfähig sind. Wegen der Symmetrie in der Anregung und auch in der Geometrie werden im großen Hohlleiter ausschließlich *ungeradzahlige* H_{0n} - Wellen angeregt, also $H_{01}, H_{03}, H_{05}, H_{07}, \dots$. Bricht man die drei Orthogonalreihen (6.40) nach $n_1 = n_2 = 70$ und $n_3 = 140$ Eigenwellen ab³, dann kann aus den Höhenlinien des dreidimensionalen E_x - Gebirges die in Bild 6.10 gezeigte Darstellung des magnetischen Gesamtfeldes gewonnen werden. Die Stetigkeit des Magnetfeldes ist durch den knickfreien Übergang der Feldlinien an den Raumteilgrenzen gut zu erkennen.

³ Da ausschließlich *ungerade* Wellentypen auftreten, werden bei $n_3 = 140$ im großen Raumteil tatsächlich nur 70 Wellen mit $n = 1, 3, 5, \dots, 139$ aufsummiert.

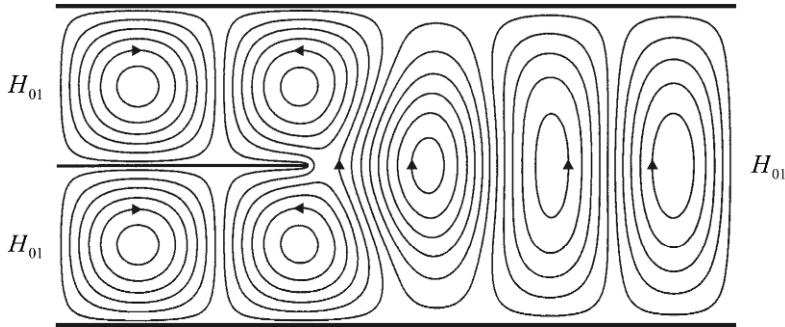


Bild 6.10 Magnetische Feldlinien der Hohlleiterverbindung mit unendlich dünner Mittelblende bei Summenanregung

Als zweites Beispiel soll der Steg zwischen den beiden kleineren Hohlleitern eine Dicke von $0,2 \lambda_0$ aufweisen, während die anderen Geometrieparameter $a = 0,7 \lambda_0$, $b_1 = b_2 = 0,6 \lambda_0$ und $b_3 = 1,4 \lambda_0$ betragen. Die Anregung geschieht durch zwei gegenphasige H_{01} -Wellen, d. h. für die Phasoren der Speisewellen gilt $\underline{a}_1^H = -\underline{a}_1^L$. Wegen der Differenzanregung werden im großen Hohlleiter nur geradzahlige H_{0n} -Wellen angeregt, also $H_{02}, H_{04}, H_{06}, H_{08}, \dots$. Bricht man die drei Orthogonalreihen (6.40) nach $n_1 = n_2 = 38$ und $n_3 = 88$ Eigenwellen ab⁴, so erhält man das ebenfalls stetige magnetische Gesamtfeld aus Bild 6.11.

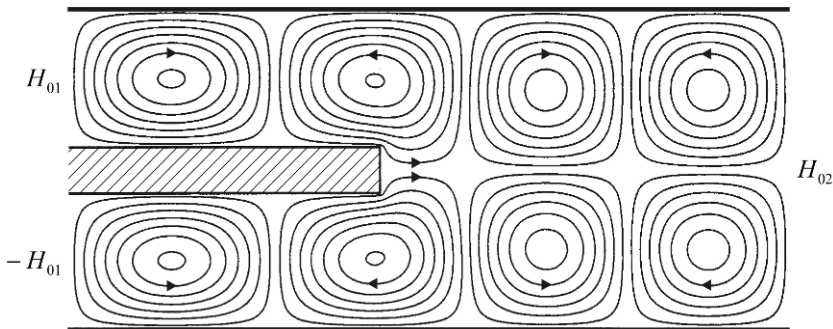
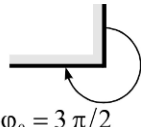
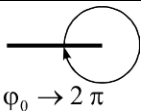


Bild 6.11 Magnetische Feldlinien der Hohlleiterverbindung mit einem Mittelsteg der Dicke $0,2 \lambda_0$ bei Differenzanregung

Die raschere Feldbildberuhigung nach der Stoßstelle erfolgt bei der Differenzanregung mit dickem Mittelsteg, weil dort die H_{04} -Welle stärker gedämpft wird als die H_{03} -Welle der Summenanregung mit unendlich dünner Mittelblende. Nach nicht einmal einer ganzen Hohlleiterwellenlänge stellt sich in beiden Fällen wieder eine im Wesentlichen monomodale Strömung ein, da höhere Harmonische bereits abgeklungen sind. Tatsächlich konvergieren die Orthogonalreihen bei dickem Mittelsteg schneller als jene bei unendlich dünner Mittelblende, weswegen hier nur eine kleinere Anzahl von Harmonischen – für die gleiche Genauigkeit – summiert werden muss [Kar98a]. Die Konvergenzgeschwindigkeit wird nämlich wesentlich von der Stärke der Kantensingularität in der Trennfläche bestimmt (Tabelle 6.6).

⁴ Da im großen Hohlleiter nur *gerade* Wellentypen angeregt werden, summiert man bei $n_3 = 88$ effektiv nur 44 Wellen mit $n = 2, 4, 6, \dots, 88$.

Tabelle 6.6 Zum Konvergenzverhalten von Orthogonalreihen bei Kantensingularitäten (Abschnitt 8.5)

Kantenform	b_n^{III}	singuläre Felder H_y und H_z	nichtsinguläres Feld E_x
 $\varphi_0 = 3 \pi/2$	$O(n^{-7/6})$	$O(n^{-2/3})$	$O(n^{-5/3})$
 $\varphi_0 \rightarrow 2 \pi$	$O(n^{-1})$	$O(n^{-1/2})$	$O(n^{-3/2})$

Kantensingularitäten können numerisch durch Summation von Orthogonalreihen nur ansatzweise nachgebildet werden. Insbesondere führt das so genannte Gibbsche⁵ Phänomen in lokaler Umgebung der Singularität zu teilweise beträchtlichen unphysikalischen Überschwingern.

6.3 Rundhohlleiter

Die theoretische Behandlung des Rundhohlleiters verläuft ähnlich der des Rechteckhohlleiters. Die Ergebnisse für Hohlleiterwellenlänge λ_L , Feldwellenwiderstand $\underline{Z}_F^E$ und $\underline{Z}_F^H$ sowie Phasen- und Gruppengeschwindigkeit als Funktionen der Grenzwellenlänge λ_c sind darum für Rechteck- wie für Rundhohlleiter die gleichen. Es ist also nur noch notwendig, die mathematische Darstellung für E- und H-Wellen anzugeben und deren Grenzfrequenzen bzw. Grenzwellenlängen aufzufinden, womit dann auch sofort die Ausbreitungskonstanten $\underline{k}_z$ bekannt sind.

6.3.1 Eigenwellen

Zur Bestimmung der Eigenschaften der in einer Rundhohlleitung (Bild 6.12) möglichen Felder sind Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen in **Zylinderkoordinaten** (ρ, φ, z) zu suchen, die die Randbedingungen bei $\rho = a$ erfüllen ($\underline{E}_t = 0, \underline{H}_n = 0$).

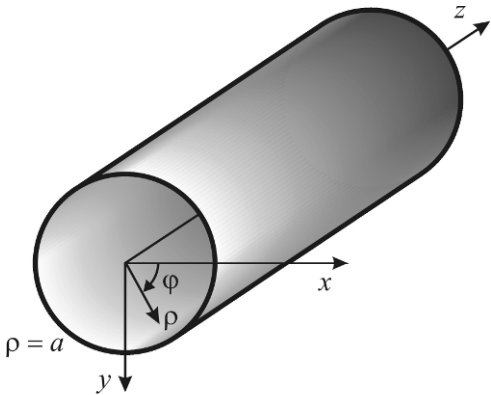


Bild 6.12 Homogener Rundhohlleiter mit Zylinderkoordinaten

⁵ Josiah Willard **Gibbs** (1839-1903): amerik. Mathematiker, Physiker (Thermodynamik, Fourier-Reihen)

Ähnlich wie bei den Feldkomponenten im Rechteckhohlleiter kann man aus den Maxwell'schen Gleichungen eine Darstellung der Querfeldstärken $\underline{E}_\rho, \underline{E}_\varphi, \underline{H}_\rho, \underline{H}_\varphi$ in Abhängigkeit von den Längsfeldstärken $\underline{E}_z$ und $\underline{H}_z$ erhalten. Die beiden Längsfeldstärken sind unabhängig voneinander. Dies führt wieder auf die Unterteilung in **E-Wellen** mit $\underline{H}_z = 0$ und **H-Wellen** mit $\underline{E}_z = 0$. Die für beide Feldkomponenten $\underline{E}_z$ und $\underline{H}_z$ geltende Helmholtz-Gleichung lautet:

$$\left(\Delta + k^2 \right) \begin{Bmatrix} \underline{E}_z \\ \underline{H}_z \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{mit} \quad \underline{E}_z = \underline{E}_0 f(\rho) g(\varphi) e^{\pm j \underline{k}_z z}. \quad (6.50)$$

Dabei bezeichnet Δ den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten und es gilt $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$. Mit Tabelle 2.6 erhalten wir ausführlich geschrieben:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \begin{Bmatrix} \underline{E}_z \\ \underline{H}_z \end{Bmatrix} = 0. \quad (6.51)$$

Durch den Produktansatz (6.50) – ähnlich dem in (6.5) bzw. (6.11) – mit anschließender Trennung der Veränderlichen kann man hieraus wieder drei entkoppelte Differenzialgleichungen zweiter Ordnung herleiten. Für ρ erhält man die so genannte Besselsche⁶ Differenzialgleichung, während für φ und z harmonische Differenzialgleichungen auftreten. Die Besselsche Differenzialgleichung löst man z. B. mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes, der auf die Zylinderfunktion erster Art oder **Besselfunktion** führt. Eine zweite mathematisch mögliche Lösungsfunktion, die **Neumannfunktion**⁷ oder Zylinderfunktion zweiter Art (Abschnitt 6.6.2), ist im Rundhohlleiter physikalisch ohne Bedeutung, da sie auf der Zylinderlängsachse eine Singularität besitzt. Für E_{mn} -Wellen findet man schließlich folgende Feldkomponenten, wobei der Eigenwert $m = 0, 1, 2, \dots$ ganzzahlig sein muss, damit bei $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ die Felder identisch sind:

$$\begin{aligned} \underline{E}_z &= \underline{E}_0 \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} J_m(K\rho) e^{\pm j \underline{k}_z z} \\ \underline{E}_\rho &= \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial z \partial \rho} = \pm \underline{E}_0 \frac{j \underline{k}_z}{K} \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} J'_m(K\rho) e^{\pm j \underline{k}_z z} \\ \underline{E}_\varphi &= \frac{1}{\rho K^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_z}{\partial z \partial \varphi} = \pm \underline{E}_0 \frac{j \underline{k}_z}{K^2} \frac{m}{\rho} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ -\sin m\varphi \end{Bmatrix} J_m(K\rho) e^{\pm j \underline{k}_z z} \\ \underline{H}_z &= 0 \\ \underline{H}_\rho &= \frac{j \omega \epsilon}{\rho K^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \varphi} = \pm \frac{\underline{E}_\varphi}{\underline{Z}_F^E} \\ \underline{H}_\varphi &= -\frac{j \omega \epsilon}{K^2} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial \rho} = \mp \frac{\underline{E}_\rho}{\underline{Z}_F^E}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

⁶ Friedrich Wilhelm **Bessel** (1784-1846): dt. Astronom und Mathematiker (Bahnbestimmung des Halley'schen Kometen, Sternparallaxenmessung, Geodäsie, Zylinderfunktionen)

⁷ Carl Gottfried **Neumann** (1832-1925): dt. Mathematiker (Potenzialtheorie, Zylinderfunktionen)

Analog gilt für H_{mn} -Wellen:

$$\begin{aligned}
 \underline{H}_z &= \underline{H}_0 \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} J_m(K\rho) e^{\pm j k_z z} \\
 \underline{H}_\rho &= \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 \underline{H}_z}{\partial z \partial \rho} = \pm \underline{H}_0 \frac{j k_z}{K} \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} J'_m(K\rho) e^{\pm j k_z z} \\
 \underline{H}_\varphi &= \frac{1}{\rho K^2} \frac{\partial^2 \underline{H}_z}{\partial z \partial \varphi} = \pm \underline{H}_0 \frac{j k_z}{K^2} \frac{m}{\rho} \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ -\sin m\varphi \end{Bmatrix} J_m(K\rho) e^{\pm j k_z z} \\
 \underline{E}_z &= 0 \\
 \underline{E}_\rho &= -\frac{j\omega\mu}{\rho K^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \varphi} = \mp \underline{Z}_F^H \underline{H}_\varphi \\
 \underline{E}_\varphi &= \frac{j\omega\mu}{K^2} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial \rho} = \pm \underline{Z}_F^H \underline{H}_\rho.
 \end{aligned} \tag{6.53}$$

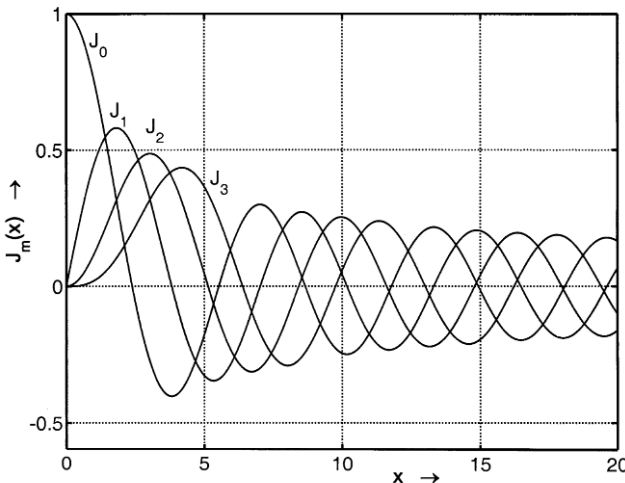
Die Ausbreitungskonstante k_z wird durch die **Separationsgleichung**

$$K^2 = k^2 - k_z^2 \tag{6.54}$$

festgelegt und J'_m ist die Ableitung der Besselfunktion nach dem *gesamten* Argument, also:

$$J'_m(K\rho) = \frac{dJ_m(K\rho)}{d(K\rho)}. \tag{6.55}$$

Grafische Darstellungen der Besselfunktion $J_m(x)$ und ihrer Ableitung nach dem Argument $J'_m(x)$ zeigen die Bilder 6.13 und 6.14. Dabei bezeichnet δ_{m0} das Kronecker-Symbol.



Für $|x| \ll 1$ gilt [JEL66]:

$$J_0(x) \approx 1$$

$$J_m(x) \approx \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2} \right)^m.$$

Für $|x| \gg 1, m$ gilt:

$$J_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Bild 6.13 Darstellung der ersten vier Besselfunktionen $J_m(x)$

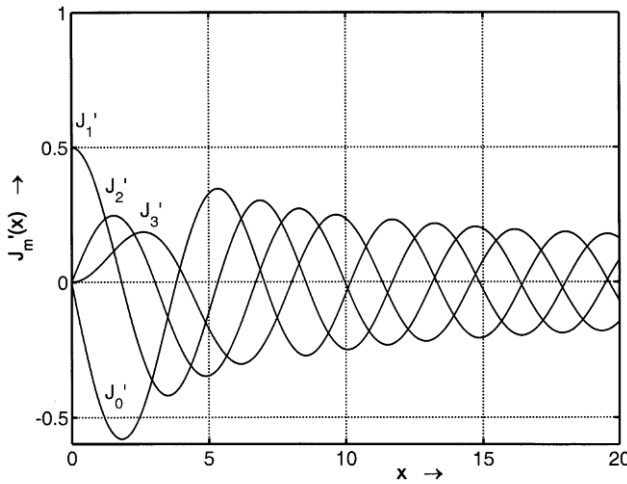


Bild 6.14 Darstellung der Ableitung der ersten vier Besselfunktionen $J'_m(x)$ und einige Nullstellen

Die **Feldwellenwiderstände** hängen wie im Rechteckhohlleiter – vgl. (6.21) und (6.24) – von der Ausbreitungskonstanten k_z ab:

$$\underline{Z}_F^E = \frac{k_z}{\omega \epsilon} \quad \text{und} \quad \underline{Z}_F^H = \frac{\omega \mu}{k_z}. \quad (6.56)$$

Die in (6.52) und (6.53) dargestellten Feldstärkewerte erfüllen nur für bestimmte Eigenwerte K die vorgeschriebenen Randbedingungen. Unsere Lösung ist daher erst dann vollständig bestimmt, wenn wir noch berücksichtigen, dass die elektrische Feldstärke senkrecht zur metallischen Zylindergrenzfläche stehen muss. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann gilt auch automatisch, dass die magnetische Feldstärke parallel zur Zylinderwand verläuft. Wir erhalten somit folgende **Randbedingungen** an der inneren Hohlleiterwand bei $\rho = a$:

$$J_m(Ka) = 0 \quad \text{bei E-Wellen} \quad (6.57)$$

$$J'_m(Ka) = 0 \quad \text{bei H-Wellen.} \quad (6.58)$$

Die Nullstellen der Besselfunktion bzw. ihrer Ableitung werden mit j_{mn} bzw. j'_{mn} bezeichnet und sind tabelliert, wobei der Index m die Ordnungszahl der betreffenden Besselfunktion und n die Nummer der Nullstelle angeben. Eine eventuelle Nullstelle auf der Längsachse für $K\rho = 0$ wird hierbei nicht mitgezählt. Mit den Eigenwerten

$$\boxed{K_{mn}^E = \frac{j_{mn}}{a}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{K_{mn}^H = \frac{j'_{mn}}{a}} \quad \text{für } m = 0, 1, 2, \dots \text{ und } n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.59)$$

erhält man schließlich die **Ausbreitungskonstanten** der E- und H-Wellen im Rundhohlleiter:

$$\underline{k}_z^E = \begin{cases} \beta^E = \frac{2\pi}{\lambda_L^E} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{j_{mn}}{a}\right)^2} < k & \text{für ausbreitungsfähige E-Wellen} \\ -j\alpha^E = -j\sqrt{\left(\frac{j_{mn}}{a}\right)^2 - k^2} & \text{für cutoff-E-Wellen} \end{cases} \quad (6.60)$$

Nullstellen einiger Besselfunktionen und ihrer Ableitung. Mit $J'_0(x) = -J_1(x)$ gilt $j'_{0n} = j_{1n}$.

n	j_{0n}	j'_{0n}	j'_{1n}
1	2,405	3,832	1,841
2	5,520	7,016	5,331
3	8,654	10,17	8,536
4	11,79	13,32	11,71
5	14,93	16,47	14,86
6	18,07	19,62	18,02

Näherungen für $n \gg m$:

$$j_{mn} \approx (n + m/2 - 1/4) \pi$$

$$j'_{mn} \approx (n + \delta_{m0} + m/2 - 3/4) \pi$$

$$\underline{k}_z^H = \begin{cases} \beta^H = \frac{2\pi}{\lambda_L^H} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{j_{mn}'}{a}\right)^2} < k & \text{für ausbreitungsfähige H-Wellen} \\ -j\alpha^H = -j\sqrt{\left(\frac{j_{mn}'}{a}\right)^2 - k^2} & \text{für cutoff-H-Wellen.} \end{cases} \quad (6.61)$$

E_{mn} - und H_{mn} -Wellen haben im Rundhohlleiter bei gleichem m und n also im Allgemeinen verschiedene Ausbreitungskonstanten. Im Rechteckhohlleiter gilt dagegen $\underline{k}_z^E = \underline{k}_z^H = \underline{k}_z$. Die Grenzwellenlängen findet man aus $k_z^2 = k^2 - ((2\pi)/\lambda_c)^2$, das an der Grenzfrequenz für $k = K$ gerade verschwinden muss. Mit (6.59) erhält man nämlich:

$$\lambda_c^E = \frac{2\pi a}{j_{mn}} \quad \text{und} \quad \lambda_c^H = \frac{2\pi a}{j_{mn}'}. \quad (6.62)$$

Auf den Durchmesser normierte Werte für $\lambda_c/(2a)$ zeigt Tabelle 6.7. Dabei sind die Grundwelle und ein entartetes Wellenpaar besonders hervorgehoben. Ein geeigneter Frequenzbereich für H_{11} -Grundwellenbetrieb ist z. B. $1,6 > \lambda/(2a) > 1,4$, woraus $1,07 < f/f_c^{H_{11}} < 1,22$ folgt.

Tabelle 6.7 Die niedrigsten Eigenwellen des Rundhohlleiters, geordnet nach fallender Grenzwellenlänge

Typ	H_{11}	E_{01}	H_{21}	E_{11} H_{01}	H_{31}	E_{21}	H_{41}	H_{12}	E_{02}	E_{31}	H_{51}
$\frac{\lambda_c}{2a}$	1,7063	1,3064	1,0286	0,8199	0,7478	0,6117	0,5908	0,5893	0,5691	0,4924	0,4897

Im Rundhohlleiter sind E_{m0} - und H_{m0} -Feldtypen nicht existenzfähig, da zur Erfüllung der Randbedingungen an der Hohlleiterwand immer eine Nullstelle des tangentialen elektrischen Feldes notwendig ist. Der H_{11} -Feldtyp bildet im Rundhohlleiter mit der größten Grenzwellenlänge den Haupt- oder Grundtyp. Seine Feld- und Wandstromverteilung sind ähnlich denen des H_{10} -Typs im Rechteckhohlleiter (Bild 6.17). Aus Tabelle 6.7 erkennt man, dass es Paare von E- und H-Wellen gibt, die jeweils gleiche Grenzwellenlänge λ_c besitzen und sich daher auch gleich schnell ausbreiten. Es sind dies die E_{1n} - und H_{0n} -Wellen mit $n = 1, 2, 3, \dots$, die durchaus gänzlich verschiedene Feldbilder aufweisen. Bei Rundhohlleiterstrecken mit nicht exakt geradliniger Längsachse kann es zu erheblichen Koppelverlusten durch Energietransfer zwischen solchen Wellentypen kommen. Man bezeichnet E_{1n} - und H_{0n} -Wellen als entartete Wellen. **Entartung** liegt auch bei allen Wellen im Rechteckhohlleiter vor, wo die E_{mn} - und H_{mn} -Wellen für jeweils gleiches m und n identische Grenzfrequenzen besitzen. Für die **Phasen-** und **Gruppengeschwindigkeit** im Rundhohlleiter gelten die gleichen Beziehungen wie für den Rechteckhohlleiter (6.18) und (6.20), wobei für die Grenzwellenlänge λ_c der Wert des betreffenden Feldtyps des Rundhohlleiters nach Tabelle 6.7 einzusetzen ist:

$$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad \text{und} \quad v_p = c^2/v_g. \quad (6.63)$$

In Tabelle 6.8 sind die nach IEC genormten Abmessungen von Rundhohlleitern angegeben, die jeweils mit der H_{11} -Grundwelle betrieben werden. Dabei sind die Grenzfrequenzen der H_{11} -Grundwelle und der nächst höheren E_{01} -Welle, die Innenmaße und die Dämpfung einer H_{11} -Welle durch Wandstromverluste bei bestimmten Frequenzwerten im Kupferhohlleiter zusammengestellt. Die **Bandbreite** für Monomodebetrieb ist im Rundhohlleiter zwar stets kleiner als im Rechteckhohlleiter, doch ist er für die Speisung von Drehkuppungen unverzichtbar.

Tabelle 6.8 Daten von Rundhohlleitertypen nach IEC-Empfehlungen [Jan92]

Typ	Grenzfrequenz der H_{11} -Welle f_c / GHz	Grenzfrequenz der E_{01} -Welle f_c / GHz	Innenmaß $D=2a$ / mm	H_{11} -Dämpfung im Cu-Hohlleiter $\kappa = 58 \cdot 10^6$ S/m (s. Anhang C.5) 1,2 f_c / GHz dB / m	
C 22	1,795	2,345	97,87	2,154	0,0115
C 25	2,101	2,744	83,62	2,521	0,0145
C 30	2,460	3,213	71,42	2,952	0,0184
C 35	2,878	3,760	61,04	3,454	0,0233
C 40	3,379	4,414	51,99	4,055	0,0297
C 48	3,953	5,163	44,45	4,743	0,0375
C 56	4,612	6,023	38,10	5,534	0,0473
C 65	5,399	7,052	32,54	6,479	0,0599
C 76	6,323	8,258	27,788	7,587	0,0759
C 89	7,375	9,632	23,825	8,849	0,0956
C 104	8,679	11,336	20,244	10,415	0,1221
C 120	10,054	13,132	17,475	12,065	0,1522
C 140	11,645	15,210	15,088	13,974	0,1897
C 165	13,835	18,070	12,700	16,601	0,2457
C 190	15,792	20,626	11,126	18,950	0,2996
C 220	18,446	24,093	9,525	22,135	0,3783
C 255	21,090	27,546	8,331	25,308	0,4624
C 290	24,656	32,204	7,126	29,587	0,5845
C 330	27,669	36,139	6,350	33,203	0,6949
C 380	31,583	41,252	5,563	37,900	0,8474
C 430	36,795	48,060	4,775	44,155	1,0656
C 495	40,215	52,526	4,369	48,258	1,2175
C 580	49,064	64,084	3,581	58,877	1,6407
C 660	55,495	72,484	3,166	66,594	1,9736

6.3.2 Felddbilder

Die elektrischen und magnetischen Feldlinien im Querschnitt oder im Längsschnitt einer Eigenwelle des Rundhohlleiters gewinnt man völlig analog zum Rechteckhohlleiter aus der jeweiligen Differenzialgleichung der Feldlinien – vgl. (6.45):

$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\rho}{H_\rho} = \frac{\rho d\varphi}{H_\varphi} = \frac{dz}{H_z}. \quad (6.64)$$

Beispielsweise gilt für die E-Linien im Querschnitt einer H_{mn} -Welle nach (6.53):

$$\frac{E_\rho}{E_\varphi} = \frac{d\rho}{\rho d\varphi} = \frac{ma}{j_{mn}' \rho} \left\{ \begin{array}{l} -\cot m\varphi \\ \tan m\varphi \end{array} \right\} \frac{J_m \left(\frac{j_{mn}' \rho}{a} \right)}{J_m' \left(\frac{j_{mn}' \rho}{a} \right)}. \quad (6.65)$$

Nach Integration dieser Differenzialgleichung – ähnlich zur Rechnung beim Rechteckhohlleiter – erhält man eine Bestimmungsgleichung für die Punkte (ρ, φ) der **elektrischen Feldlinien**:

$$\boxed{J_m \left(\frac{j_{mn}' \rho}{a} \right) \left\{ \begin{array}{l} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{array} \right\} = \text{const.}}, \quad (6.66)$$

die – wie beim Rechteckhohlleiter – als **Höhenlinie** (Äquipotenziallinie) der Längsfeldstärke H_z gezeichnet werden kann. Die Ergebnisse wurden bereits in Tabelle 6.3 dargestellt.

6.4 Besondere Hohlleitertypen

Durch eine kapazitive Verengung eines Rechteckhohlleiters in der E-Ebene kann – bei identischen äußeren Abmessungen – die Grenzwellenlänge der H_{10} -Welle deutlich erhöht werden, ohne dass sich die Grenzwellenlängen der nächst höheren Wellentypen wesentlich verändern (Bild 6.15). Ein solcher **Steghohlleiter** (engl.: ridge waveguide) besitzt daher eine in Richtung niedrigerer Frequenzen erweiterte Übertragungsbandbreite [Mei66, Mei68]. Infolge der Querschnittsverengung sinkt aber die übertragbare Leistung. Die Spannungsfestigkeit kann durch Verwendung eines kantenlosen Steges mit halbkreisförmigem Querschnitt verbessert werden.

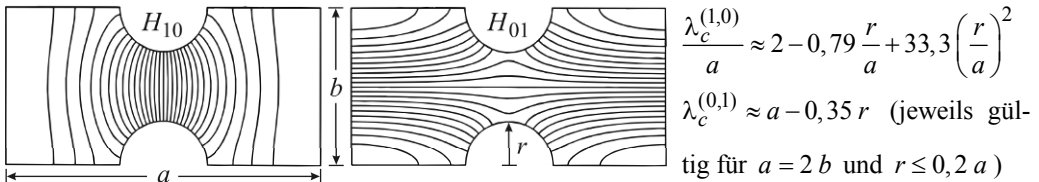


Bild 6.15 Steghohlleiter mit E-Linien der H_{10} -Grundwelle und der H_{01} -Welle für $a = 2b$ und $r = 0,14a$

Der **Quadrathohlleiter** ist ein Sonderfall des Rechteckhohlleiters (Bild 6.16). Bei ihm könnte man Breite und Höhe vertauschen, ohne dass sich der Querschnitt und damit das Übertragungsverhalten der Hohlleiterwelle ändern. Dieses Verhalten ermöglicht die gleichzeitige Übertragung zweier orthogonaler Signale im **Polarisationsmultiplex**. Die vertikal polarisierte H_{10} - und die horizontal polarisierte H_{01} -Welle bilden ein entartetes Wellenpaar, bei dem jede Einzelwelle separat angeregt und wieder ausgekoppelt werden kann. An Diskontinuitäten ist jedoch ein Übersprechen zwischen beiden Kanälen durch Modenkonversion möglich.

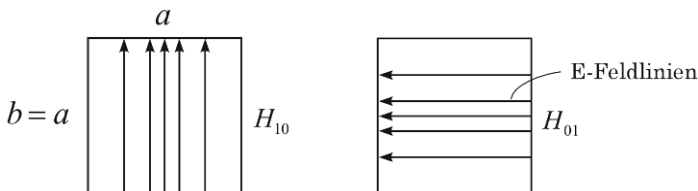


Bild 6.16 Quadrathohlleiter mit den transversalen E-Linien der einfachsten H-Wellen

Für die Grundwelle im Rundhohlleiter, die H_{11} -Welle, sind dagegen beliebig viele Polarisationsrichtungen denkbar. Von ihnen benutzt man in der Praxis meist nur zwei, die – ähnlich zum Quadrathohlleiter – senkrecht aufeinander stehen. Wellen im Hohlleiter mit **elliptischem Querschnitt** haben ähnliche Eigenschaften wie Wellen im Rundhohlleiter. Da der elliptische Hohlleiter nicht mehr rotationssymmetrisch ist, fixiert er die Lage der Welle eindeutig (Bild 6.17). Seine Grundwelle ähnelt der H_{11} -Welle des Rundhohlleiters und wird H_1 -Welle genannt.

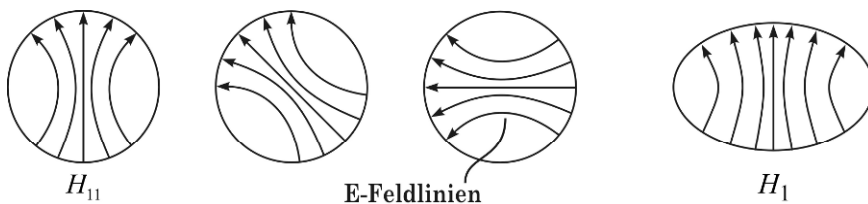


Bild 6.17 Rundhohlleiter und elliptischer Wellenleiter mit den transversalen E-Linien ihrer Grundwellen

In Bild 6.18 sind die elektrischen Feldlinien der niedrigsten drei H-Wellen und die Magnetfeldlinien der niedrigsten drei E-Wellen eines Hohlleiters mit elliptischem Querschnitt dargestellt [Kar98b]. Dabei stehen die große und die kleine *Halbachse* der Querschnittsellipse in einem Verhältnis von $a/b = 2/1$. Alle Wellen werden mit fortlaufendem Index durchnummeriert.

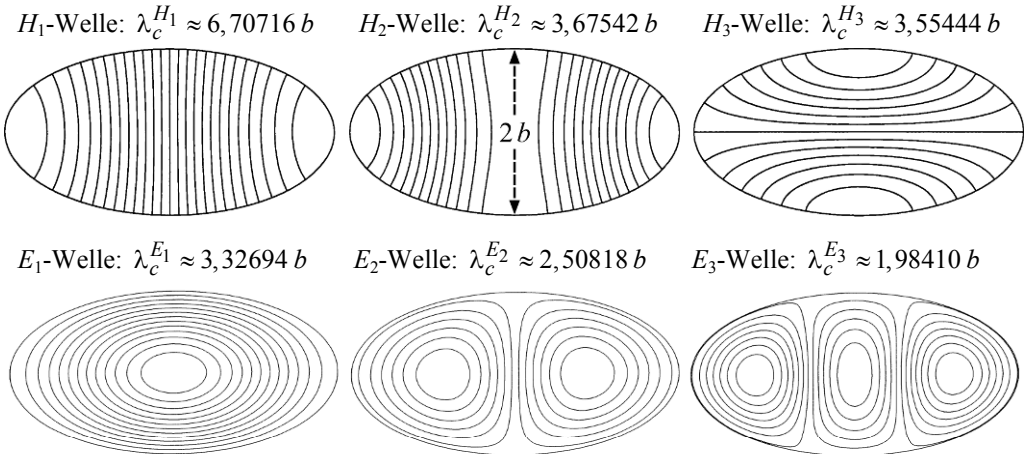


Bild 6.18 Feldlinien der ersten drei H- und E-Wellen im elliptischen Wellenleiter (Achsenverhältnis 2:1)

Im Prinzip sind viele weitere Querschnittsformen denkbar, wenn auch in der Praxis wenig gebräuchlich. So breiten sich z. B. auch in **Dreieckshohlleitern** elektromagnetische Wellen aus. Die elektrischen Feldlinien der niedrigsten zwei H-Wellen und die magnetischen Feldlinien der ersten beiden E-Wellen sind in Bild 6.19 zusammen mit ihren Grenzwellenlängen dargestellt.

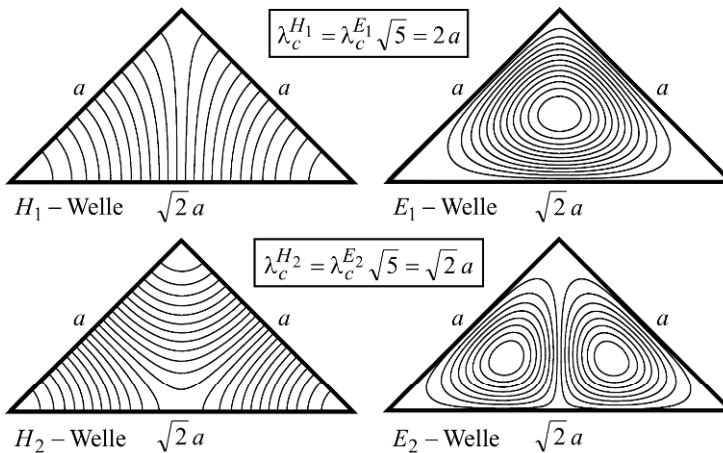
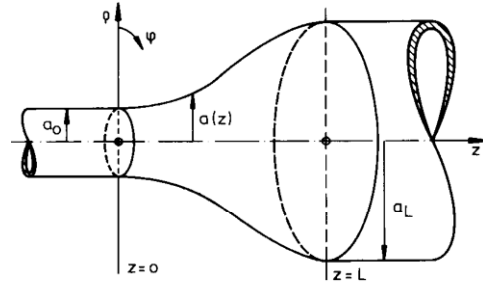


Bild 6.19 Einfachste H- und E-Wellen im Dreieckshohlleiter (elektrische bzw. magnetische Feldlinien)

Gewöhnlich sind Hohlleiter mit Luft oder geeigneten Gasen gefüllt. In besonderen Fällen können Hohlleiter auch den vollen Querschnitt ausfüllende **Dielektrika** enthalten. Ein Dielektrikum verringert die Grenzfrequenz eines Hohlleiters auf den Wert $f_c^{\text{neu}} = f_c^{\text{alt}} / \sqrt{\epsilon_r}$. Wellenlänge, Phasengeschwindigkeit und Energieschwindigkeit werden ebenfalls kleiner. Richtungsleitungen, Dämpfungsglieder, Phasenschieber oder Zirkulatoren können als nichtreziproke Hohlleiterbauelemente auch magnetisierte **Ferrite** (siehe Abschnitt 3.5) enthalten [Kar98b].

Wenn Hohlleiter unterschiedlichen Querschnitts oder verschiedener Achslage miteinander verbunden werden müssen, führt eine direkte Flanschverbindung beider Teile wegen der dann auftretenden Diskontinuitäten in der Regel zu starken Reflexionsverlusten. Außerdem werden an Unstetigkeiten höhere Wellentypen angeregt, die zu Laufzeitverzerrungen bei der Übertragung führen können. Man bevorzugt deshalb sanfte und schwach inhomogene Übergänge – so genannte **Taperhohlleiter** – die als Anpassungsglieder zwischen verschiedenen Hohlleiterformen eingesetzt werden [Kar88]. Zur Vermeidung kritischer Reflexions- und Kopplungsverluste weisen Taperprofile keine Knicke oder Sprünge in ihrer Randkurve auf.

Bild 6.20 Rundhohlleiter-Taper als glatter Übergang zwischen zwei achsengleichen Rundhohlleitern



Aus konstruktiven Gründen ist es zuweilen unvermeidlich, Hohlleiter mit gekrümmter Längsachse einzusetzen. So findet man **Hohlleiterkrümmen** bei vielen Speiseleitungen von Horn- und Reflektorantennen. Die Eigenwellen von schwach und uniform gekrümmten Toroidhohlleitern können mit Hilfe einer Störungsrechnung aus den Feldlösungen des querschnittsgleichen Hohlleiters mit gerader Längsachse ermittelt werden [Kar87a, Kar91b]. **Toroidhohlleiter** zeigen eine bemerkenswerte Verschiebung sowohl der Feldlinien als auch der Energieströmung in ihren äußeren Querschnittsbereich – weg vom Krümmungsmittelpunkt (Bild 6.21).

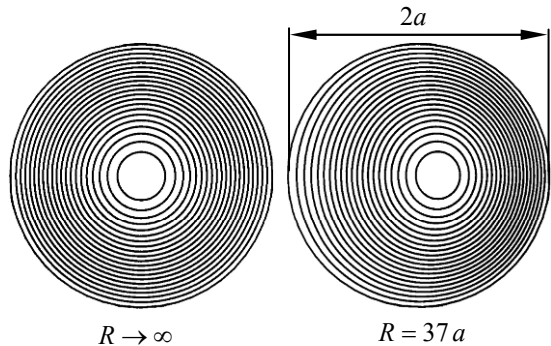
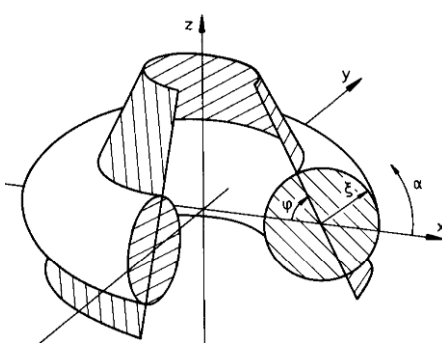
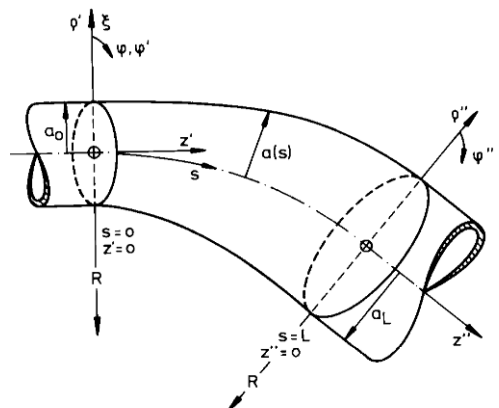


Bild 6.21 Gleichmäßig gekrümmter Rundhohlleiter mit Toruskordinaten (ξ, φ, α) und Feldverdrängung in den äußeren Querschnittsbereich (nach rechts) z. B. beim Magnetfeld einer E_{01} -Welle ($R = 37a$)

Die Kombination einer Achsenkrümmung mit dem gleichmäßigen Krümmungsradius R und einer Querschnittstaperung führt auf den **toroidalen Taperhohlleiter**. Mit ihm können optimierte Übergänge sehr kompakter Baulänge gestaltet werden [Kar87b]. In erster Näherung können die Feldstörungen resultierend aus beiden schwachen Inhomogenitäten ungestört überlagert werden.

Bild 6.22 Toroidaler Taper als schwach inhomogener Übergang zwischen zwei Rundhohlleitern



6.5 Hohlraumresonatoren

Wird ein zylindrischer Hohlleiter beliebigen Querschnitts an *beiden* Enden durch leitende Wände abgeschlossen, so entsteht ein **Hohlraum** der Länge l in z -Richtung, in dem sich eine Schwingung mit ortsfesten Knoten und Bäuchen ausbilden kann. Die Randbedingungen auf den Stirnseiten bei $z=0$ und $z=l$ werden erfüllt, wenn gerade ein ganzzahliges Vielfaches von *halben* Hohlleiterwellenlängen λ_L in die Strecke l hineinpasst, womit also $l = p \lambda_L/2$ gelten muss. In Bild 6.23 sehen wir für $p=1$ die niedrigste H-Resonanz eines quaderförmigen Resonators, die aus der H_{10} -Welle des Rechteckhohlleiters hervorgeht und darum H_{101} -Resonanz genannt wird. Da alle drei Achsen des Quaders im Prinzip gleichberechtigt sind, kann man durch Verdrehung um 90° weitere Schwingungsformen erzeugen – so ergibt sich z. B. ein Resonatorfeld, dessen H-Linien aus der E_{11} -Welle des Rechteckhohlleiters hervorgehen und darum E_{110} -Resonanz genannt wird. Wie bei allen verlustlosen Schwingkreisen besteht auch in Hohlraumresonatoren zwischen E- und H-Feld stets eine Phasenverschiebung von $\pi/2$.

$$a = 2b = l = 40,386 \text{ mm}$$

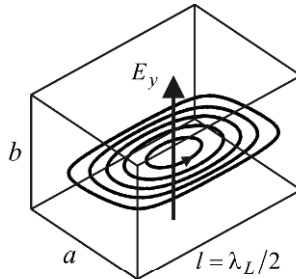
$$\text{Wände: } \kappa_{\text{Cu}} = 58 \cdot 10^6 \text{ S/m}$$

$$\text{Luftfüllung: } c = c_0$$

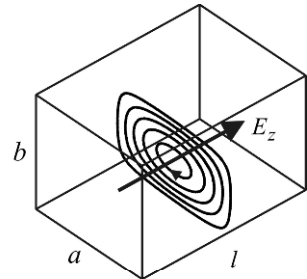
$$f_R^{H_{101}} = 5,249 \text{ GHz}$$

$$\text{Güte: } Q^{H_{101}} = 11069$$

$$\text{Zeitkonstante: } \tau = \frac{2Q^{H_{101}}}{\omega_R^{H_{101}}} = 671 \text{ ns}$$



H_{101} -Resonanz



E_{110} -Resonanz

Bild 6.23 Quaderförmiger Hohlraum mit niedrigsten H- und E-Resonanzen mit Werten aus (6.68) und (6.69). Wegen $e^{-t/\tau}$ ist nach 3523 Schwingungsperioden eine freie Schwingung auf e^{-1} abgeklungen.

Aus der Separationsgleichung $1/\lambda_R^2 = 1/\lambda_L^2 + 1/\lambda_c^2$ gewinnt man die Eigenfrequenzen

$$f_R = \frac{c}{\lambda_R} = \frac{c}{\lambda_c} \sqrt{1 + \left(\frac{p\lambda_c}{2l} \right)^2} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} p = 0, 1, 2, \dots & \text{für } E_{mnp} \text{ - Resonanz} \\ p = 1, 2, 3, \dots & \text{für } H_{mnp} \text{ - Resonanz} \end{cases} \quad (6.67)$$

des schwingenden Hohlraums. Hierbei ist λ_c die Grenzwellenlänge im betreffenden Rechteck- oder Rundhohlleiter. Speziell für die beiden Schwingungsformen aus Bild 6.23 erhalten wir:

$$f_R^{H_{101}} = \frac{c}{2a} \sqrt{1 + (a/l)^2} \quad \text{und} \quad f_R^{E_{110}} = \frac{c}{2a} \sqrt{1 + (a/b)^2}. \quad (6.68)$$

Wird der Hohlraum an seiner Resonanzfrequenz f_R erregt – z. B. durch ein hineinragendes Leiterstück geeigneter Form, parallel zu den E-Linien – so ergeben sich große Amplituden der Feldstärken wie bei einem Schwingkreis im Resonanzfall. Leitend umschlossene Hohlräume können daher bei hohen Frequenzen anstelle von Schwingkreisen zum Herausheben eines schmalen Frequenzbereiches benutzt werden. Ihre Güte Q hängt vom umschlossenen Volumen, von den Wandstromverlusten, von der Materialfüllung und vom Wellentyp ab [Mei68, Mat80]:

$$\delta Q^{H_{101}} = \frac{abl(a^2 + l^2)}{l^3(a + 2b) + a^3(l + 2b)} \quad \text{mit der Eindringtiefe } \delta = 1/\sqrt{\pi f_R^{H_{101}} \mu_0 \kappa}. \quad (6.69)$$

6.6 Koaxialleitung

Zur Fortleitung elektromagnetischer Wellen benutzt man bei höheren Frequenzen neben den Hohlleitern auch die koaxiale Leitung. Sie besteht aus einem kreiszylindrischen Außenleiter, in dem – wie in Bild 6.24 – koaxial der ebenfalls kreiszylindrische Innenleiter angeordnet ist.

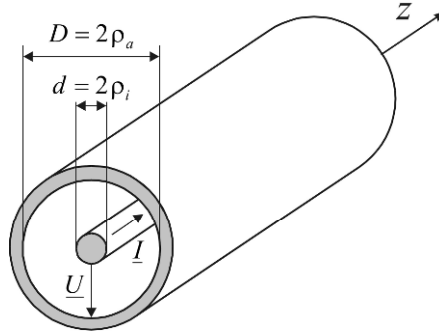


Bild 6.24 Konzentrische Koaxialleitung mit kreiszylindrischem Querschnitt

Zwischen Außen- und Innenleiter kann sich entweder ein festes Dielektrikum oder auch Luft befinden. Bei einem Luftdielektrikum wird der Innenleiter durch Isolierstützen, z. B. aus Keramikscheiben, gehalten. Durch die geschlossene Bauweise erhält man eine gute Abschirmung der Felder nach außen. Infolge des Skineffekts fließen Ströme nur in einer dünnen Oberflächenschicht am Innen- und Außenleiter. Bei verlustfreien Wänden stellt sich im **Grundwellenbetrieb** ein rein transversales Feldbild ein und es gilt $\underline{E}_z = \underline{H}_z = 0$.

6.6.1 Grundwelle

Die rotationssymmetrische Grundwelle der Koaxialleitung ($\partial/\partial\varphi = 0$) ist bereits für $\omega \geq 0$ ausbreitungsfähig und kann aus dem elektrostatischen Feldbild abgeleitet werden. Eine Spannung $\underline{U}$ zwischen Innen- und Außenleiter verursacht eine radial gerichtete elektrische Feldstärke und die dazu orthogonale Magnetfeldstärke hängt mit dem Strom $\underline{I}$ zusammen:

$$\underline{E}_\rho(\rho, z) = \frac{\underline{U}}{\rho \ln(D/d)} e^{-j k z} \quad \text{und} \quad \underline{H}_\varphi(\rho, z) = \frac{\underline{I}}{2\pi\rho} e^{-j k z} . \quad (6.70)$$

Die Wellenzahl wird – wie üblich – mit $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ abgekürzt. Die elektrische und magnetische Feldstärke schwingen in der verlustlosen Koaxialleitung gleichphasig und stehen im Verhältnis des darum reellen **Feldwellenwiderstandes**

$$\underline{E}_\rho / \underline{H}_\varphi = Z = \sqrt{\mu/\epsilon} , \quad (6.71)$$

während Spannung und Oberflächenstrom im Verhältnis des ebenfalls reellen **Leitungswellenwiderstandes** stehen:

$$Z_L = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Z}{2\pi} \ln(D/d) . \quad (6.72)$$

Elektrische und magnetische Feldlinien der TEM-Grundwelle einer verlustlosen koaxialen Leitung sind in Bild 6.25 dargestellt. Man beachte die Verdichtung der Feldlinien am Innenleiter, da die Feldstärken mit sinkendem Radius größer werden.

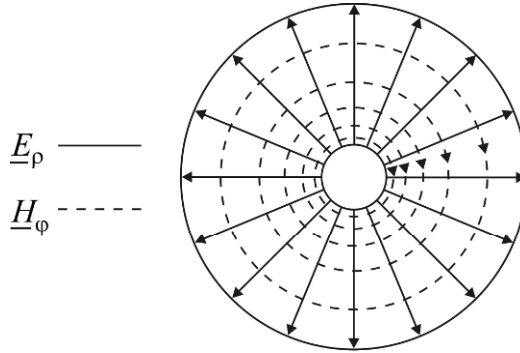


Bild 6.25 Elektrische und magnetische Feldlinien der TEM-Welle einer Koaxialleitung

Übung 6.2: Leitungswellenwiderstand und Wirkleistungstransport

- Berechnen Sie den Leitungswellenwiderstand einer *luftgefüllten* Koaxialleitung ($\epsilon_r = 1$) und ihre transportierte Wirkleistung.

- **Lösung:**

Für $\epsilon_r = 1$ gilt $Z = Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 376,73 \, \Omega$ und damit wird

$$Z_L = \frac{Z}{2\pi} \ln(D/d) \approx 59,96 \, \Omega \ln(D/d). \quad (6.73)$$

Bei $D/d = 7/3$ erhalten wir $Z_L \approx 50,8 \, \Omega$ und bei einem etwas dünneren Innenleiter mit $D/d = 7/2$ gilt $Z_L \approx 75,1 \, \Omega$. Die in Längsrichtung transportierte Wirkleistung ergibt sich durch Integration des Poyntingvektors über dem Querschnitt der Leitung:

$$P = \operatorname{Re} \left\{ \iint_A \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) \cdot \underline{\mathbf{e}}_z \, dA \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=\rho_i}^{\rho_a} \frac{1}{2} \underline{E}_\rho \underline{H}_\varphi^* \rho \, d\rho \, d\varphi \right\}. \quad (6.74)$$

Mit $\underline{E}_\rho \underline{H}_\varphi^* = Z_0 |\underline{H}_\varphi|^2$ folgt daraus

$$P = \frac{Z_0}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=\rho_i}^{\rho_a} |\underline{H}_\varphi|^2 \rho \, d\rho \, d\varphi = \frac{Z_0 |\underline{I}|^2}{4\pi} \int_{\rho=\rho_i}^{\rho_a} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{Z_0 |\underline{I}|^2}{4\pi} \ln \frac{D}{d} = \frac{\pi |\underline{U}|^2}{Z_0 \ln(D/d)}. \quad (6.75)$$

Nach (6.70) gilt am Innenleiter $E_i = \frac{2|\underline{U}|}{d \ln(D/d)}$ und damit wird

$$P = \frac{E_i^2}{Z_0} \frac{\pi d^2}{4} \ln \frac{D}{d} \quad \text{mit} \quad E_i < E_d \quad (\text{Durchbruchfeldstärke}). \quad (6.76)$$

Bei festem Außendurchmesser D wird für $\ln(D/d) = 0,5$ die übertragene Leistung maximal:

$$P_{\max} = \frac{E_d^2}{Z_0} \frac{\pi D^2}{8e} \approx \frac{E_d^2 D^2}{2608 \, \Omega}. \quad \square \quad (6.77)$$

6.6.2 Höhere Wellentypen

Neben der Grundwelle können unter bestimmten Bedingungen auch höhere Feldtypen in einer Koaxialleitung auftreten. Die strenge Behandlung der Hohlleiterwellen einer Koaxialleitung erfordert – wie auch beim Rundhohlleiter – die Lösung der Helmholtz-Gleichung in Zylinderkoordinaten. Wegen des Innenleiters gehört die Zylinderlängsachse jetzt nicht mehr zum untersuchten Feldgebiet; darum stellt neben der Besselfunktion nun auch die für $\rho = 0$ singuläre **Neumannfunktion** eine physikalisch sinnvolle Lösung dar. Grafische Darstellungen der Neumannfunktion $N_m(x)$ und ihrer Ableitung nach dem Argument $N'_m(x)$ zeigen die Bilder 6.26 und 6.27. Für $\rho \rightarrow 0$ münden alle Kurven in eine Singularität.

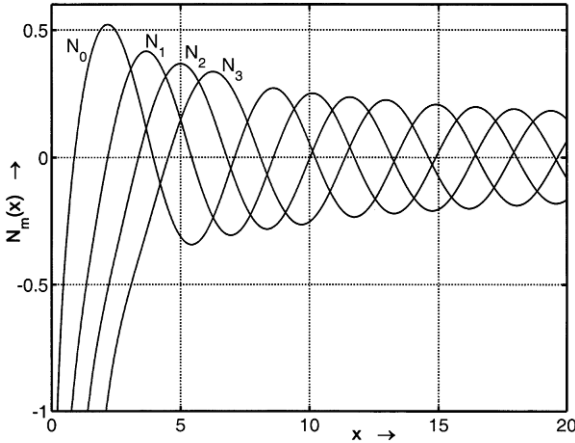


Bild 6.26 Darstellung der ersten vier Neumannfunktionen $N_m(x)$

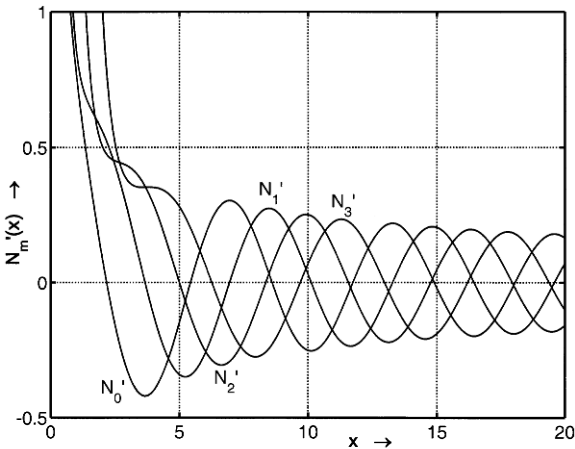


Bild 6.27 Darstellung der Ableitung der ersten vier Neumannfunktionen $N'_m(x)$ und einige Nullstellen

Nach [Pie77] erhält man mit $D = 2\rho_a$ und $d = 2\rho_i$ die Längsfelder von E- und H-Wellen, die bereits die Randbedingungen am Innenleiter $\underline{E}_z(\rho_i) = 0$ und $\partial \underline{H}_z / \partial \rho|_{\rho=\rho_i} = 0$ erfüllen:

Für $|x| \ll 1$ gilt nach [JEL66] mit der Eulerschen Konstanten

$$C = \ln \gamma \approx 0,577216:$$

$$N_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}$$

$$N_m(x) \approx -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^m.$$

Für $|x| \gg 1, m$ gilt:

$$N_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Nullstellen der Neumannfunktion und ihrer Ableitung. Mit $N'_0(x) = -N_1(x)$ gilt $n'_{0n} = n_{1n}$.

n	n_{0n}	n'_{0n}	n'_{1n}
1	0,894	2,197	3,683
2	3,958	5,430	6,941
3	7,086	8,596	10,12
4	10,22	11,75	13,29
5	13,36	14,90	16,44
6	16,50	18,04	19,59

Näherungen für $n \gg m$:

$$n_{mn} \approx (n + m/2 - 3/4) \pi$$

$$n'_{mn} \approx (n + m/2 - 1/4) \pi$$

$$\begin{aligned}\underline{E}_z &= \underline{E}_0 \left\{ \begin{array}{l} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{array} \right\} \left[J_m(K\rho) - \frac{J_m(K\rho_i)}{N_m(K\rho_i)} N_m(K\rho) \right] e^{\pm j k_z z} \\ \underline{H}_z &= \underline{H}_0 \left\{ \begin{array}{l} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{array} \right\} \left[J_m(K\rho) - \frac{J'_m(K\rho_i)}{N'_m(K\rho_i)} N_m(K\rho) \right] e^{\pm j k_z z}.\end{aligned}\quad (6.78)$$

Am Außenleiter bei $\rho = \rho_a$ muss folgende Eigenwertgleichung erfüllt werden:

$$\boxed{\begin{aligned}J_m(K\rho_a)N_m(K\rho_i) - J_m(K\rho_i)N_m(K\rho_a) &= 0 && \text{für E-Wellen} \\ J'_m(K\rho_a)N'_m(K\rho_i) - J'_m(K\rho_i)N'_m(K\rho_a) &= 0 && \text{für H-Wellen}\end{aligned}}\quad (6.79)$$

Die unendlich vielen Eigenwerte $K = K_{mn}^{E,H}$ mit $m = 0, 1, 2, \dots$ und $n = 1, 2, 3, \dots$ dieser beiden transzendenten Gleichungen können nur noch numerisch gefunden werden. Damit lassen sich auch die Ausbreitungskonstanten $k_z = (k^2 - K^2)^{1/2}$ und die Grenzwellenlängen $\lambda_c = 2\pi/K$ aller Eigenwellen bestimmen. Näherungslösungen für verschiedene Durchmesserhältnisse D/d findet man tabelliert in [Mar93]. Die Korrekturfaktoren p und q können aus den dort gegebenen Daten mit einer linearen bzw. einer quadratischen Ausgleichsrechnung im Bereich $1,2 \leq D/d \leq 4$ ermittelt werden. Etwa ab einer Betriebsfrequenz von

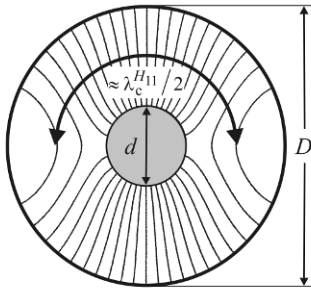
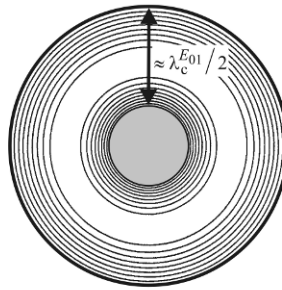
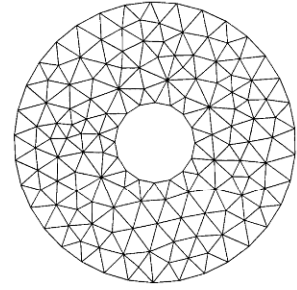
$$\boxed{f_c^{E_{01}} = \frac{c}{\lambda_c^{E_{01}}} \approx \frac{c_0/\sqrt{\epsilon_r}}{p(D-d)}} \quad \text{mit} \quad p = 0,9903 + 0,0080 \cdot \frac{D}{d} \quad (6.80)$$

wird bei exakt zylindersymmetrischem Aufbau der koaxialen Leitung – einschließlich Generator und Verbraucher – die E_{01} -Welle ausbreitungsfähig. Liegt keine vollkommene Zylindersymmetrie vor, so kann schon wesentlich früher eine H_{11} -Welle entstehen. Ihre **Grenzfrequenz** liegt ungefähr bei

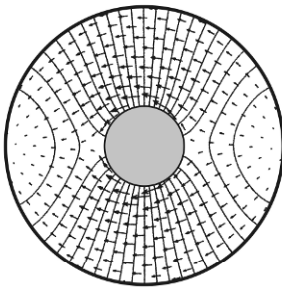
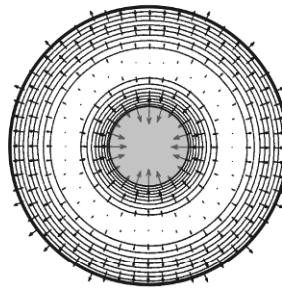
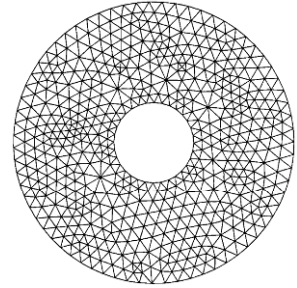
$$\boxed{f_c^{H_{11}} = \frac{c}{\lambda_c^{H_{11}}} \approx \frac{c_0/\sqrt{\epsilon_r}}{q\pi(D+d)/2}} \quad \text{mit} \quad q = 0,9720 + 0,0051 \cdot \left(\frac{D}{d} - 3,538\right)^2. \quad (6.81)$$

In [Mei68] findet man vergleichbare Näherungslösungen – allerdings mit etwas geringerer Genauigkeit – weil dort in erster Näherung $p = q = 1$ gesetzt wurde. Das Auftreten höherer Wellentypen schränkt die Verwendbarkeit von Koaxialleitungen bei höheren Frequenzen ein. Das dann auftretende Gemisch aus verschiedenen Eigenwellen bewirkt stark störende Laufzeit- und damit Phasenverzerrungen, was die Güte der Nachrichtenübertragung nachhaltig vermindert. Deshalb wird man in der Praxis eine koaxiale Leitung im Allgemeinen unterhalb der kritischen Frequenz ihrer H_{11} -Welle betreiben, um eine reine TEM-Welle sicherzustellen.

Die elektrischen Feldlinien der H_{11} -Welle im Querschnitt einer koaxialen Leitung mit $D/d = 7/2$ sind in Bild 6.28 dargestellt. Das Feldbild ähnelt dem der H_{11} -Welle im Rundhohlleiter (Tabelle 6.3), jedoch enden in der koaxialen Leitung einige der elektrischen Feldlinien auf dem Innenleiter. Die Magnetlinien werden durch kleine Pfeile dargestellt und biegen in die Längsrichtung der Leitung um. Die rotationssymmetrische E_{01} -Welle (die der E_{02} -Welle im Rundhohlleiter entspricht) hat dagegen ein transversales Magnetfeld, während die E-Felder in die z -Richtung umbiegen. Alle Felder wurden mit der **Finite-Elemente-Methode** (FEM) berechnet, die eine Triangulierung des Leitungsquerschnitts erfordert. Die ersten beiden Berechnungsgitter einer sich iterativ verfeinernden Sequenz sind ebenfalls in Bild 6.28 zu sehen. Zur Erhöhung der numerischen Genauigkeit strebt man möglichst gleichseitige Dreiecke an.

**H₁₁ - Welle** (E-Linien)**E₀₁ - Welle** (H-Linien)

154 Knoten / 258 Dreiecke

**H₁₁ - Welle** (E-Linien + H-Pfeile)**E₀₁ - Welle** (H-Linien + E-Pfeile)

566 Knoten / 1032 Dreiecke

Bild 6.28 Felddarstellungen der H_{11} - Welle und der E_{01} - Welle im Querschnitt einer Koaxialleitung für $D/d = 7/2$ mit den ersten beiden FEM-Gittern. Die halbe Grenzwellenlänge markiert jeweils anschaulich die Strecke, nach der die Feldrichtung sich umkehrt.

Übung 6.3: Nutzbarer Frequenzbereich einer Koaxialleitung

- Berechnen Sie die Grenzfrequenzen der H_{11} -Welle und der E_{01} -Welle einer mit $\epsilon_r = 2,25$ gefüllten Koaxialleitung mit den Abmessungen $D = 7 \text{ mm}$ und $d = 2 \text{ mm}$.
- Lösung:**

Aus den für $1,2 \leq D/d \leq 4$ gültigen Näherungen (hier mit $q = 0,9720$ und $p = 1,0183$)

$$f_c^{H_{11}} = \frac{c}{\lambda_{c}^{H_{11}}} \approx \frac{c_0 / \sqrt{\epsilon_r}}{q \pi (D+d)/2} \quad \text{und} \quad f_c^{E_{01}} = \frac{c}{\lambda_{c}^{E_{01}}} \approx \frac{c_0 / \sqrt{\epsilon_r}}{p (D-d)} \quad (6.82)$$

erhält man für $\epsilon_r = 2,25$ und $c_0 \approx 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ die gesuchten Grenzfrequenzen:

$$f_c^{H_{11}} \approx 14,54 \text{ GHz} \quad \text{und} \quad f_c^{E_{01}} \approx 39,25 \text{ GHz}. \quad (6.83)$$

Ein Betrieb im eindeutigen Bereich der TEM-Grundwelle ist bei dieser Leitung daher nur für Frequenzen $0 \leq f < 14,54 \text{ GHz}$ möglich.

- Für $d \rightarrow 0$ geht die koaxiale Leitung in den **Rundhohlleiter** über. Die Formeln (6.82) verlieren dann ihre Gültigkeit. Dabei wird die E_{01} -Koaxialwelle zur E_{02} -Hohlleiterwelle. Mit $j_{11}' \approx 1,8412$ und $j_{02} \approx 5,5201$ erhält man nach (6.62) folgende Grenzfrequenzen:

$$f_c^{H_{11}} = \frac{c_0 j_{11}'}{\sqrt{\epsilon_r} \pi D} \approx 16,73 \text{ GHz} \quad \text{und} \quad f_c^{E_{02}} = \frac{c_0 j_{02}}{\sqrt{\epsilon_r} \pi D} \approx 50,17 \text{ GHz}. \quad \square \quad (6.84)$$

6.9 Übungen

- 6.9.1** Ein verlustloser Rechteckhohlleiter habe die Kantenlängen $a = 10 \text{ cm}$ und $b = 6 \text{ cm}$. Finden Sie die Grenzfrequenzen folgender Wellentypen: H_{10} , H_{20} , H_{01} , E_{11} , E_{21} .
- 6.9.2** In welchem Verhältnis müssen die Kantenlängen a und b eines verlustlosen Rechteckhohlleiters stehen, damit die E_{13} -Welle und die H_{05} -Welle gleiche Grenzwellenlängen λ_c besitzen?
- 6.9.3** Für welches Kantenverhältnis a/b wird bei gegebenem Umfang $U = 2(a+b)$ die Gruppengeschwindigkeit der E_{11} -Welle in einem verlustlosen Rechteckhohlleiter maximal? Wie groß ist dann dieser Maximalwert, falls $ka = 2\pi$ gilt?
- 6.9.4** In einem verlustlosen Rechteckhohlleiter soll sich eine H_{10} -Welle bei der Frequenz $f = 4,8 \text{ GHz}$ mit der Gruppengeschwindigkeit $v_g = 1,87 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ausbreiten. Wie groß ist dann die Seitenlänge a des Hohlleiters zu dimensionieren?
Wie groß sind die Grenzfrequenz und die Phasengeschwindigkeit der H_{10} -Welle für diesen Hohlleiter?
Die Grenzfrequenz der H_{01} -Welle soll $f_c^{H_{01}} = 6 \text{ GHz}$ betragen. Wie groß ist dann die Seitenlänge b des Hohlleiters zu dimensionieren?
- 6.9.5** In einem Satellitenfunksystem soll das Frequenzband von 3,8 GHz bis 4,3 GHz übertragen werden. Zur Speisung der Antenne wird ein H_{10} -Rechteckhohlleiter aus Kupfer verwendet. Wählen Sie aus Tabelle 6.5 den passenden Typ aus und geben Sie seine Querschnittsabmessungen an. Wie groß ist die Grenzfrequenz der H_{10} -Welle? Geben Sie die Ausbreitungskonstante $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ der H_{10} -Welle bei der Frequenz 3,87 GHz an.
- 6.9.6** Ein verlustloser Rechteckhohlleiter mit den Querschnittsabmessungen $a = 30 \text{ mm}$ und $b = 10 \text{ mm}$ wird bei der Generatorfrequenz $f = 19 \text{ GHz}$ betrieben. Erstellen Sie eine Tabelle mit allen ausbreitungsfähigen H- und E-Wellen und benennen Sie diese.

Lösungen:

- 6.9.1** $f_c^{10} = 1,5 \text{ GHz}$, $f_c^{20} = 3 \text{ GHz}$, $f_c^{01} = 2,5 \text{ GHz}$, $f_c^{11} = 2,9 \text{ GHz}$, $f_c^{21} = 3,9 \text{ GHz}$
- 6.9.2** $a/b = 1/4$
- 6.9.3** $a/b = 1$ und $v_g = 2,12 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
- 6.9.4** $a = 4 \text{ cm}$, $f_c^{H_{10}} = c_0/(2a) = 3,75 \text{ GHz}$, $v_p = c_0^2/v_g = 1,6 c_0$ und $b = 2,5 \text{ cm}$
- 6.9.5** R 40-Hohlleiter mit $a = 58,170 \text{ mm}$ und $b = 29,083 \text{ mm}$
 $f_c^{H_{10}} = 2,577 \text{ GHz}$ und $\underline{\gamma} = (2,867 \cdot 10^{-3} + j 60,51) \cdot \text{m}^{-1}$
- 6.9.6** $\sqrt{m^2 + (3n)^2} < 3,8 \Rightarrow H_{10}, H_{20}, H_{30}, H_{01}, H_{11}, H_{21}, E_{11}, E_{21}$

7 Grundbegriffe der Antennentechnik

Bevor wir uns mit grundlegenden Eigenschaften von Antennen und deren anschaulicher Beschreibung durch **Kenngrößen** wie Richtdiagramm, Strahlungsleistung, Gewinn, Wirkfläche und Polarisation befassen, wollen wir zunächst die zwei einfachsten Antennengrundformen betrachten. An deren Beispiel werden wir die wichtigsten Antennenparameter besprechen.

7.1 Isotroper Strahler

Eine (hypothetische) verlustlose Antenne, die gleichmäßig in alle Raumrichtungen abstrahlt bzw. gleichmäßig aus allen Raumrichtungen empfängt, wird **isotroper Strahler** oder **Kugelstrahler** genannt. Als Sendeantenne erzeugt sie eine Kugelwelle mit sphärischen Phasenfronten. Im Abstand r erhält man winkelunabhängig ($\partial/\partial\vartheta = \partial/\partial\varphi = 0$) folgende Leistungsdichte:

$$S = \frac{P_S}{4\pi r^2}, \text{ wobei } P_S \text{ die gesamte abgestrahlte Wirkleistung bezeichnet.} \quad (7.1)$$

Da jede kugelsymmetrische Ladungs- oder Stromverteilung immer statisch ist und daher nicht strahlt, gibt es keine elektromagnetische Monopolstrahlung [Jac02] und ein Kugelstrahler kann nicht realisiert werden – ist aber als theoretische Vergleichsantenne durchaus von Interesse.

7.2 Hertzscher Dipol als elektrischer Elementarstrahler

Ein elektrisch kurzer Linearstrahler der Länge $l \ll \lambda_0/4$ kann als konzentriertes Bauelement betrachtet werden. Auf seiner gesamten Länge wollen wir mit der komplexen Amplitude $\underline{I}$ eine räumlich konstante Stromverteilung, die zeitlich sinusförmig schwingt, annehmen (Bild 7.1).

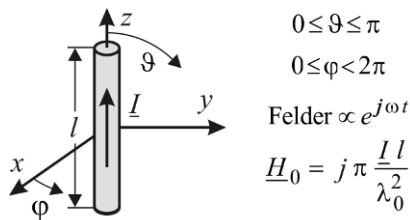


Bild 7.1 Vertikal orientierter kurzer Linearstrahler mit komplexer Amplitude $\underline{H}_0$ seines Magnetfeldes

Eine im Grenzfall infinitesimal kurze Antenne wird **Hertzscher Dipol** genannt. In Kapitel 9 werden wir das zugehörige Strahlungsfeld noch ausführlich herleiten. Im Moment wollen wir uns mit den transversalen Komponenten des Fernfeldes bei Abständen von $r \geq 2\lambda_0$ begnügen. Wir finden in (7.2) mit zunehmendem Abstand r kleinere Felder und eine nacheilende Phase:

$$\begin{aligned} \underline{H}_\varphi &= \underline{H}_0 \sin \vartheta \frac{e^{-j k_0 r}}{k_0 r} \\ \underline{E}_\vartheta &= Z_0 \underline{H}_\varphi = Z_0 \underline{H}_0 \sin \vartheta \frac{e^{-j k_0 r}}{k_0 r}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Im Fernfeld sind die Feldkomponenten $\underline{E}_\vartheta$ und $\underline{H}_\varphi$ phasengleich und ihre Amplitude nimmt wie $1/r$ ab. Sie stehen zueinander im Verhältnis des reellen **Feldwellenwiderstandes** Z_0 :

$$\boxed{\frac{\underline{E}_\vartheta}{\underline{H}_\varphi} = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 376,73 \, \Omega \approx 120 \pi \, \Omega} \quad (7.3)$$

Hierin ist weder r noch ϑ enthalten, d. h. diese Verknüpfung gilt an jedem Punkt des Raumes, sofern nur $r \geq 2\lambda_0$ ist. Für Feldstärkemessungen ist es daher gleichgültig, ob $\underline{H}_\varphi$ oder $\underline{E}_\vartheta$ gemessen wird. Trotz der kugelförmigen Ausbreitung in Richtung $\mathbf{e}_r$ finden wir hier wieder die gleiche Verknüpfung der elektrischen und magnetischen Transversalfeldstärken wie auf einer Leitung oder bei einer ebenen Welle. Aus $\underline{E}_\vartheta$ und $\underline{H}_\varphi$ erhalten wir den **Energietransport** in radialer Richtung mit Hilfe des Poyntingschen Strahlungsvektors:

$$\boxed{\underline{S} = \underline{S}_r \mathbf{e}_r = \frac{1}{2} \underline{E}_\vartheta \times \underline{H}_\varphi^*} \quad (7.4)$$

Mit den Werten der Feldkomponenten im Fernfeld aus (7.2) erhält man die räumliche Abhängigkeit der Energiestromdichte:

$$\underline{S}_r = S_r = \frac{1}{2} Z_0 |\underline{H}_\varphi|^2 = \frac{1}{2} Z_0 |\underline{H}_0|^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{(k_0 r)^2} \quad (7.5)$$

Die Leistungsdichte S_r ist reell und daher eine reine Wirkleistungsgröße.

Übung 7.1: Strahlungsleistung des Hertzschen Dipols

- Man bestimme die gesamte von einem Hertzschen Dipol abgestrahlte Wirkleistung P_S .
- **Lösung:**

In den ihn umgebenden kugelförmigen Raumbereich mit dem Flächenelement $d\mathbf{A} = \mathbf{e}_r r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ (siehe Tabelle 2.6) entsendet der kurze Dipol die Wirkleistung

$$P_S = \operatorname{Re} \left\{ \oint_A \underline{S} \cdot d\mathbf{A} \right\} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} S_r r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (7.6)$$

die sich als Integral der Leistungsdichte (7.5) über der Oberfläche A einer Kugel um den Ursprung im Abstand r darstellen lässt. Im Fernfeld gilt daher:

$$P_S = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{1}{2} Z_0 |\underline{H}_0|^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{(k_0 r)^2} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{1}{2 k_0^2} Z_0 |\underline{H}_0|^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (7.7)$$

Mit der komplexen Amplitude $\underline{H}_0 = j \pi \underline{I} l / \lambda_0^2$ und mit $\int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta = 4/3$ erhält man:

$$P_S = \frac{2\pi}{2 k_0^2} Z_0 |\underline{H}_0|^2 \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{\pi \lambda_0^2}{4 \pi^2} Z_0 \left(\frac{\pi l}{\lambda_0^2} \right)^2 |\underline{I}|^2 \frac{4}{3} = \frac{\pi}{3} Z_0 \left(\frac{l}{\lambda_0} \right)^2 |\underline{I}|^2. \quad (7.8)$$

Mit einem beim Vergleich zu elektrischen Schaltungen nahe liegenden Ansatz

$$P_S = R_S |\underline{I}|^2 / 2 \quad (7.9)$$

können wir den **Strahlungswiderstand** R_S des Hertzschen Dipols einführen:

$$R_S = \frac{2\pi}{3} Z_0 \left(\frac{l}{\lambda_0} \right)^2 \approx 789 \Omega \left(\frac{l}{\lambda_0} \right)^2. \quad (7.10)$$

Die abgestrahlte Wirkleistung ist also proportional zum Strahlungswiderstand, d. h. $P_S \propto R_S \propto (l/\lambda_0)^2$. Eine elektrisch kurze Drahtantenne mit homogener Strombelegung strahlt also umso wirkungsvoller, je länger die Antenne und je kleiner die Wellenlänge ist. Es muss dabei natürlich immer noch die Beziehung $l \ll \lambda_0/4$ erfüllt sein. Es ist somit ohne weiteres zu verstehen, warum im Gebiet sehr hoher Frequenzen, also bei sehr kurzen Wellenlängen, ein leistungsstarkes Strahlungsfeld bei gegebener Stromstärke I leichter zu verwirklichen ist. Für $l = \lambda_0/40$ erhalten wir aus (7.10) einen Wert von $R_S = 0,49 \Omega$ und damit keinen leistungsstarken Strahler. Das einfachste **Ersatzbild** einer verlustlosen Sendeanenne ohne Berücksichtigung der Energiespeicherung im Nahfeld ist in Bild 7.2 dargestellt. Der Strahlungswiderstand R_S symbolisiert darin den freien Raum. □

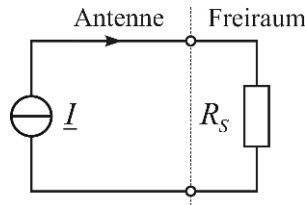


Bild 7.2 Ersatzschaltbild einer verlustlosen Sendeanenne mit Quellstrom und Strahlungswiderstand

7.3 Kenngrößen von Antennen

Die wichtigsten elektromagnetischen Eigenschaften von Antennen für den Einsatz in Funksystemen lassen sich durch eine Reihe von Kenngrößen erfassen. Diese Kenngrößen sollen in den folgenden Abschnitten erläutert und einfache Berechnungsverfahren für sie angegeben werden. Um diese Kenngrößen und ihre Berechnung zu veranschaulichen, werden sie jeweils für den Hertzschen Dipol ausgewertet. An diesem Beispiel lassen sich die wichtigsten Antenneneigenschaften gut erklären.

7.3.1 Richtdiagramm

Im Fernfeld nimmt die Krümmung der sphärischen Phasenfront einer Kugelwelle immer weiter ab. Für $r \rightarrow \infty$ kann die Kugelwelle lokal durch eine homogene ebene Welle angenähert werden. Die transversalen Feldkomponenten werden phasengleich und es wird nur in radialer Richtung Wirkleistung transportiert, deren Winkelverteilung durch die Sendeanenne festgelegt ist. Der Winkelabhängigkeit der Strahlung, d.h. der **Strahlungsverteilung** im Raum, kommt eine große praktische Bedeutung zu. Von ihr hängt es ab, welcher Anteil der ausgestrahlten Leistung für den eigentlichen Verwendungszweck ausgenutzt werden kann. Strahlung in oder Aufnahme aus unerwünschten Richtungen erhöht die gegenseitigen Störungsmöglichkeiten. Bestimmte Aufgaben verlangen vielfach auch eine ganz bestimmte Verteilung des Strahlungsfeldes. Einen Überblick über die Verteilung der Strahlung in verschiedene Raumrichtungen liefert die Verteilung der **Fernfeldstärke** einer Antenne in Abhängigkeit von der Raumrichtung (ϑ, φ) .

Man betrachtet das Fernfeld, da in der Regel nur dieses für die Übertragung in Frage kommt und die Winkelabhängigkeit der Strahlung erst in größerem Abstand von der Strahlungsquelle entfernungsunabhängig wird. Zur Kennzeichnung wird die **Richtcharakteristik** mit

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{|\underline{E}(\vartheta, \varphi)|}{|\underline{E}(\vartheta, \varphi)|_{\max}} \quad (7.11)$$

und $0 \leq C(\vartheta, \varphi) \leq 1$ eingeführt. Sie gibt die Winkelverteilung des elektrischen Fernfeldes, bezogen auf den Maximalwert in Hauptstrahlungsrichtung, an. Die Winkelverteilung der Strahlungsdichte ist damit:

$$\frac{S_r(\vartheta, \varphi)}{S_r(\vartheta, \varphi)_{\max}} = C^2(\vartheta, \varphi). \quad (7.12)$$

Bemerkung: Reziprozität (Übertragungssymmetrie)

Reziprozität oder Umkehrbarkeit bedeutet ganz allgemein, dass in einem System die Positionen von Ursache und Wirkung miteinander vertauscht werden können, ohne dass sich die Verknüpfung zwischen Ursache und Wirkung ändert. Insbesondere in der Nachrichtentechnik bleibt bei Reziprozität eine komplexe Empfangsgröße unverändert, wenn Sender und Empfänger (aber nicht die Antennen) miteinander vertauscht werden. Die Antennen bleiben also am gleichen Ort, nur ihre Sende- und Empfangsfunktionen werden vertauscht [Thi10].

Die Empfangscharakteristik einer Antenne ist also gleich ihrer Sendecharakteristik,

falls keine richtungsabhängigen Bauelemente – wie z. B. vormagnetisierte Ferrite (siehe Abschnitt 3.5) – eingebaut sind und das Übertragungsmedium isotrop ist. Im Empfangs- und im Sendefall ist die Stromverteilung auf der Antennenoberfläche aufgrund des unterschiedlichen Nahfeldes jedoch verschieden. Die Streumatrix reziproker Zweitore ist symmetrisch.

Übung 7.2: Richtcharakteristik

- Man bestimme die Richtcharakteristik des elektrischen Elementarstrahlers.
- **Lösung:**

Bei einem in z-Richtung orientierten **Hertzschen Dipol** gilt nach (7.2) im Fernfeld

$$\underline{E} = \mathbf{e}_\vartheta Z_0 \underline{H}_0 \sin \vartheta e^{-j k_0 r} / (k_0 r). \quad (7.13)$$

Die Abstrahlung wird maximal für $\vartheta = \pi/2$ mit $|\underline{E}|_{\max} = Z_0 |\underline{H}_0| / (k_0 r)$ und die Richtcharakteristik ist für $0 \leq \vartheta \leq \pi$

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{|\underline{E}|}{|\underline{E}|_{\max}} = \frac{\frac{Z_0 |\underline{H}_0|}{k_0 r} |\sin \vartheta|}{\frac{Z_0 |\underline{H}_0|}{k_0 r}} = \sin \vartheta. \quad (7.14)$$

Die Abstrahlung erreicht in der zur Dipolachse senkrechten Ebene ihr Maximum, während sie in Richtung der Dipolachse ihr Minimum, d. h. den Nullwert, hat. Gleichung (7.14) mit $C(\vartheta, \varphi) = \sin \vartheta$ beschreibt ein Toroid um die polare Achse und gibt die horizontal gleichmäßige (uniforme) Abstrahlung wieder. Eine räumliche Darstellung findet man in Bild 7.3. Der Hertzsche Dipol ist somit ein azimuthaler Rundstrahler. $\square$

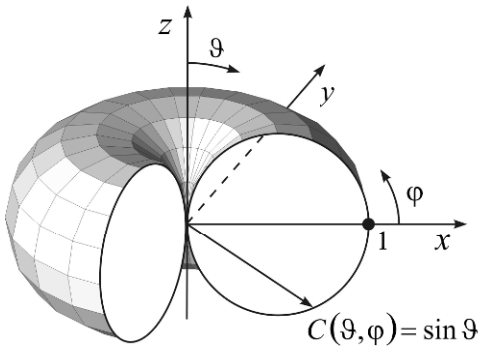
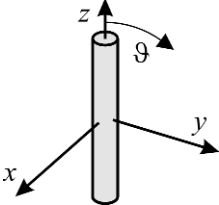
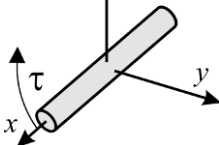
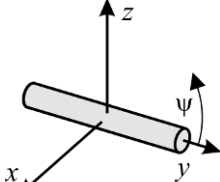
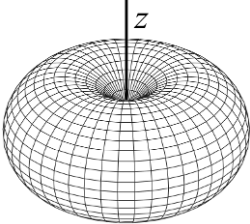
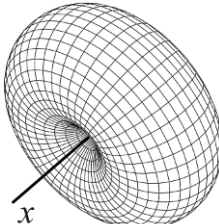
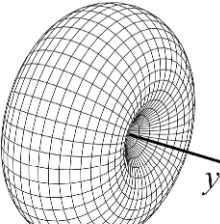


Bild 7.3 Toroidcharakteristik eines entlang der z-Achse vertikal orientierten Hertschen Dipols

Ist ein Hertscher Dipol nicht parallel zur z-Achse, sondern parallel zur x- oder y-Achse angeordnet, so strahlt er zwar prinzipiell gleich, die Feldkomponenten projizieren sich dann allerdings in anderer Weise auf die drei Koordinatenachsen. Die stärkste Abstrahlung erfolgt stets in einer Ebene quer zur jeweiligen Dipolachse. Das elektrische Feld in diesen Hauptstrahlungsrichtungen ist beim z-Dipol vertikal polarisiert und beim x- wie auch beim y-Dipol horizontal polarisiert. Durch die Verkippung um 90° erhalten wir ebenfalls eine um 90° gedrehte Richtcharakteristik, deren Beschreibung im „alten“ Koordinatensystem in Tabelle 7.1 erläutert wird. Hertsche Dipole mit gekippter Achse werden auch in Übung 8.5 behandelt.

Tabelle 7.1 Fernfeld-Charakteristik Hertscher Dipole in verschiedener Achslage

z-Dipol	x-Dipol	y-Dipol
		
$C = \sin \vartheta$	$C = \sin \tau = \sqrt{1 - \cos^2 \tau}$ $\cos \tau = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_r = \sin \vartheta \cos \varphi$ $\Downarrow$ $C = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}$	$C = \sin \psi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi}$ $\cos \psi = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_r = \sin \vartheta \sin \varphi$ $\Downarrow$ $C = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}$
		

Anstelle einer dreidimensionalen Darstellung der Strahlungsverteilung durch die Richtcharakteristik werden meist durch **Richtdiagramme** Schnitte der räumlichen Richtcharakteristik angegeben. Dabei werden bevorzugte Ebenen durch den Antennenmittelpunkt (bzw. das Phasenzentrum) und das Strahlungsmaximum ausgesucht. Oft geben das **vertikale** Richtdiagramm $C(\vartheta, \varphi = \varphi_0)$, d. h. die Abhängigkeit der Strahlung vom Elevationswinkel ϑ , und das **horizontale** Richtdiagramm $C(\vartheta = \pi/2, \varphi)$, d. h. die Abhängigkeit vom Azimutwinkel φ , einen ausreichenden Überblick. Richtdiagramme werden häufig in Polarkoordinaten dargestellt. Das Vertikal- und das Horizontaldiagramm des **Hertzschen Dipols** in der z-Achse sind in Bild 7.4 wiedergegeben.

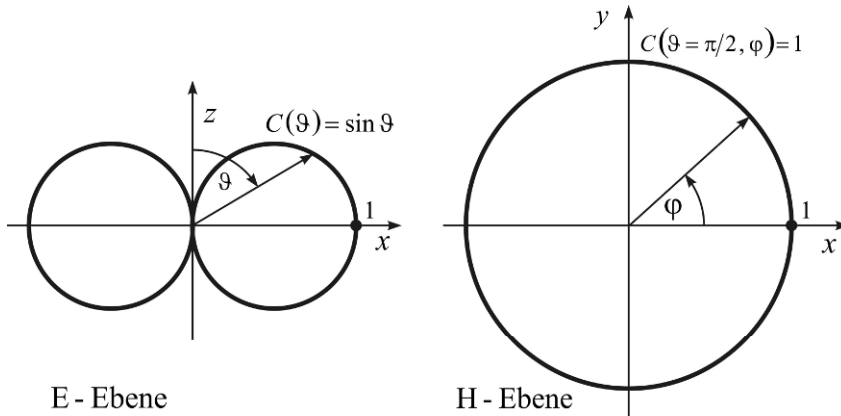


Bild 7.4 Vertikal- und Horizontaldiagramm eines Hertzschen Dipols in der z-Achse

Ein Maß für den Grad der Energiebündelung bei Richtantennen ist die Breite der Strahlungskeule. Sie wird ausgedrückt durch die vertikalen und horizontalen **Halbwertsbreiten** $\Delta\vartheta$ und $\Delta\varphi$ der Hauptkeule. Das ist der Winkelbereich, innerhalb dessen die Strahlungsdichte um nicht mehr als die Hälfte der maximalen Strahlungsdichte – also um 3 dB – absinkt. Die Feldstärke fällt in diesem Bereich höchstens auf $1/\sqrt{2} \triangleq 70,7\%$ ihres Maximalwertes ab. Innerhalb der Halbwertsbreite gilt daher:

$$C^2(\vartheta, \varphi) \geq 0,5. \quad (7.15)$$

Beim Hertzschen Dipol entnimmt man seinem Vertikaldiagramm $C(\vartheta)$, das in Bild 7.5 nochmals dargestellt ist, eine Halbwertsbreite von $\Delta\vartheta = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.

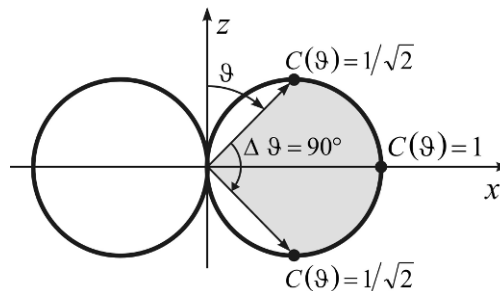


Bild 7.5 Halbwertsbreite $\Delta\vartheta$ im Vertikaldiagramm eines Hertzschen Dipols

Allgemein sind Richtdiagramme dadurch gekennzeichnet, dass es mindestens eine Hauptkeule und eventuell mehrere Nebenkeulen (Nebenzipfel) gibt. Jede Keule wird beiderseits durch eine Nullstelle oder ein Minimum begrenzt. Die Bündelung der Antennenstrahlung – und damit die Richtwirkung der Antenne – wird üblicherweise durch die Halbwertsbreite $\Delta\vartheta$ oder die Nullwertsbreite $\Delta\vartheta_0$ zum Ausdruck gebracht. Zuweilen werden die jeweils halben Größen $\Delta\vartheta/2$ bzw. $\Delta\vartheta_0/2$ als Halbwerts- und Nullwertswinkel bezeichnet. Bei einer Antenne der Ausdehnung $L \gg \lambda_0$ geben folgende **Faustformeln** (Winkel im Bogenmaß) einen groben Überblick:

$$\boxed{\Delta\vartheta \approx \lambda_0/L} \quad \text{und} \quad \boxed{\Delta\vartheta_0 \approx 2\Delta\vartheta \approx 2\lambda_0/L} . \quad (7.16)$$

Die Unterdrückung der meist unerwünschten Nebenzipfel in Relation zum Pegel in Hauptstrahlungsrichtung wird durch die Nebenzipfeldämpfung (in dB) gemessen. In Bild 7.6 werden verschiedene Möglichkeiten der Darstellung desselben Richtdiagramms $C(\vartheta)$ miteinander verglichen. In logarithmischer Darstellung sind die Nebenzipfel besser sichtbar, während sie in linearem Maßstab optisch zurücktreten. Polardiagramme geben zwar einen guten räumlichen Überblick, doch ist zum Ablesen von Zahlenwerten eine kartesische Darstellung geeigneter.

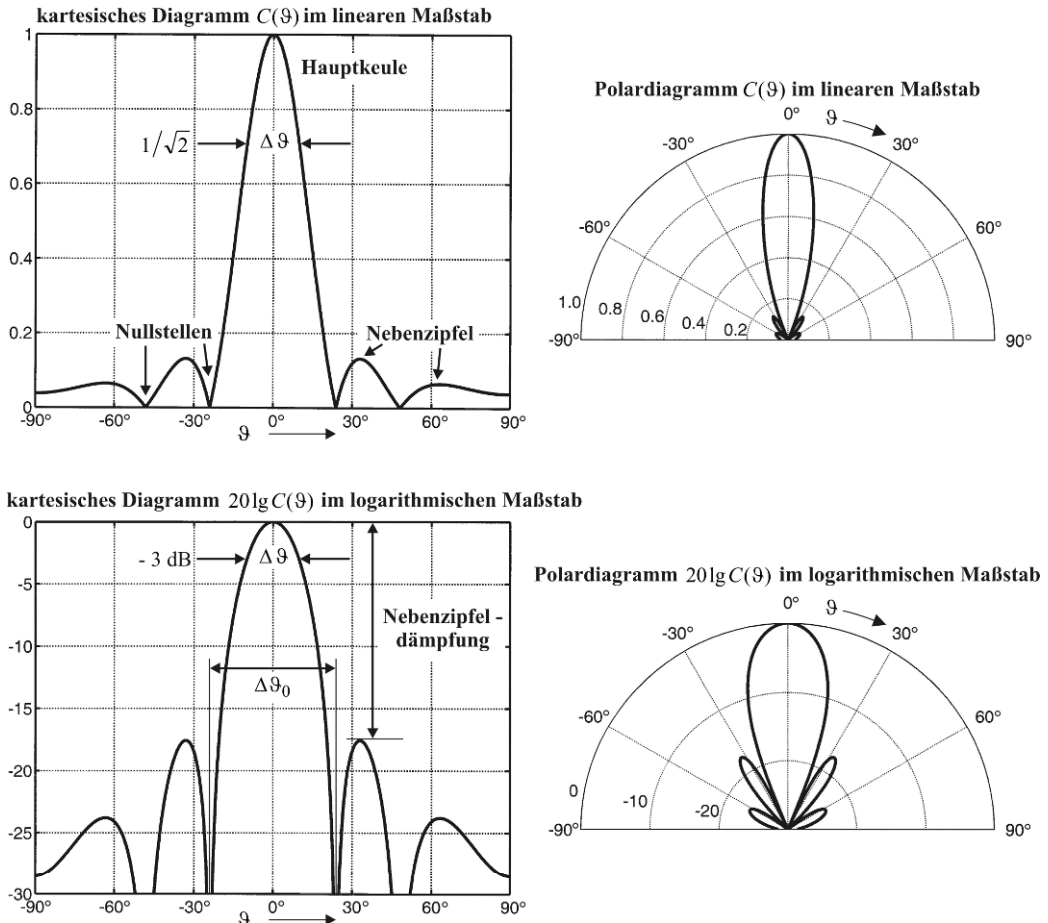


Bild 7.6 Verschiedene Darstellungsarten desselben Richtdiagramms $C(\vartheta)$

7.3.2 Richtfaktor und Gewinn

Nur ein theoretisch vorstellbarer **Kugelstrahler** (isotroper Strahler) strahlt in alle Raumrichtungen mit gleicher Stärke. Ein solcher idealer Rundstrahler ist jedoch nicht realisierbar. Alle in der Praxis vorkommenden Antennen haben – abhängig von der Raumrichtung (ϑ, φ) – eine unterschiedliche Strahlungsintensität.

Durch die Bündelung der Strahlungsintensität scheint die Antenne für einen Empfänger in der Hauptstrahlungsrichtung mit einer Gesamtleistung zu senden, die um einen Faktor größer ist als die wirklich von der Antenne abgestrahlte Leistung. Als Maß für die Richtwirkung einer Antenne wird darum der **Richtfaktor** D (**Direktivität**) eingeführt als

$$D = \frac{\text{maximale Strahlungsdichte}}{\text{mittlere Strahlungsdichte}} = \frac{S_r(\vartheta, \varphi)_{\max}}{\langle S_r(\vartheta, \varphi) \rangle} \quad (7.17)$$

Dabei ist $\langle S_r(\vartheta, \varphi) \rangle$ die mittlere Strahlungsdichte – also der Betrag des Poyntingvektors – im Fernfeld bei Mittelung über die Oberfläche einer Hüllkugel (siehe Bild 7.7).

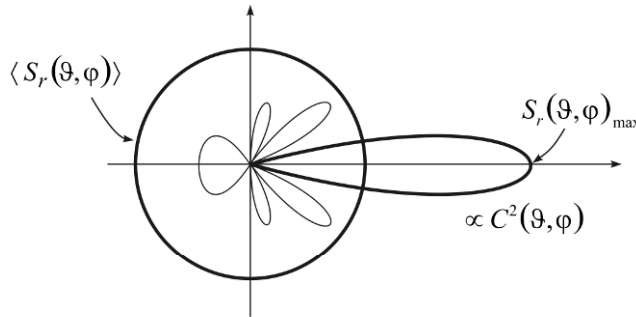


Bild 7.7 Verteilung der Strahlungsdichten einer realen Antenne und des isotropen Vergleichsstrahlers

Mit der gesamten Strahlungsleistung P_S gilt

$$\langle S_r(\vartheta, \varphi) \rangle = \frac{P_S}{4\pi r^2}, \quad (7.18)$$

was nach (7.1) gleichzeitig auch die Strahlungsdichte eines Kugelstrahlers ist. Aus (7.18) kann darum folgende anschauliche Definition des Richtfaktors abgeleitet werden:

$$D = \frac{\text{maximale Strahlungsdichte der Antenne}}{\text{Strahlungsdichte eines Kugelstrahlers}} = 4\pi r^2 \frac{S_r(\vartheta, \varphi)_{\max}}{P_S} \quad (7.19)$$

Der Richtfaktor D gibt daher an, um wie viel stärker die betrachtete Antenne in Hauptrichtung abstrahlt als ein Kugelstrahler gleicher Strahlungsleistung P_S . Hierbei wird jeweils gleiche Polarisation zugrunde gelegt.

Die Summe aus abgestrahlter Leistung P_S und **Verlustleistung** P_V ergibt die Antenneneingangsleistung, die bei idealer Anpassung identisch zur Generatorleistung wird ($P_G = P_S + P_V$). Die Verluste, welche in der Antenne in Wärme umgesetzt werden, können durch die endliche Leitfähigkeit der Leiter (η_K) und durch Absorption in verlustbehafteten Dielektrika (η_E) entstehen. Reflexionsverluste sind hier nicht zu berücksichtigen, da sie durch geeignete Anpassungsmaßnahmen vernachlässigbar klein sind. Somit folgt der **Antennenwirkungsgrad**

$$\boxed{\eta = \eta_K \eta_E = \frac{P_S}{P_G} = \frac{P_S}{P_S + P_V} \leq 1}, \quad (7.20)$$

den man als Verhältnis von abgestrahlter Leistung P_S zu zugeführter Leistung $P_G = P_S + P_V$ errechnet. Mit dem Antennenwirkungsgrad wird der **Gewinn** einer Antenne definiert als

$$\boxed{G = \eta D = \frac{P_S}{P_S + P_V} 4\pi r^2 \frac{S_r(\vartheta, \varphi)_{\max}}{P_S} = 4\pi r^2 \frac{S_r(\vartheta, \varphi)_{\max}}{P_S + P_V} = 4\pi r^2 \frac{S_r(\vartheta, \varphi)_{\max}}{P_G}}. \quad (7.21)$$

Beim Antennengewinn wird damit die maximale Strahlungsdichte einer Antenne mit der Strahlungsdichte des verlustfreien Kugelstrahlers bei gleicher Generatorleistung P_G verglichen. Für verlustfreie Antennen ($\eta = 1$) stimmen Gewinn und Richtfaktor überein, sonst gilt $G < D$. Der Antennengewinn wird oft im logarithmischen Maßstab angegeben. Dann gilt – bezogen auf den isotropen Strahler (deswegen dBi) –

$$\boxed{g = 10 \lg G \text{ dBi}}. \quad (7.22)$$

Mit Hilfe von (7.19) und (7.21) finden wir die Beziehung:

$$S_r(\vartheta, \varphi)_{\max} = \frac{D P_S}{4\pi r^2} = \frac{G P_G}{4\pi r^2}. \quad (7.23)$$

Mit ihr wird unter Bezug auf den Kugelstrahler eine für Funkstrecken wichtige Größe eingeführt. Die so genannte **EIRP** (equivalent isotropically radiated power) $G P_G$ wird meist logarithmisch auf 1 Watt bezogen und beträgt:

$$\boxed{eirp = 10 \lg \frac{EIRP}{1 \text{ W}} \text{ dBW} = 10 \lg \frac{G P_G}{1 \text{ W}} \text{ dBW}}. \quad (7.24)$$

Die $EIRP = G P_G$ gibt die äquivalente Leistung eines isotropen Strahlers an, der im Fernfeld überall die gleiche Leistungsdichte erzeugt wie sie eine Richtantenne mit Generatorleistung P_G und Gewinn G nur in ihrer Hauptstrahlungsrichtung realisieren kann.

Übung 7.3: Richtfaktor

- Man bestimme den Richtfaktor D des Hertzschen Dipols.
- **Lösung:**

In die Beziehung (7.19)

$$D = 4\pi r^2 \frac{S_r(\vartheta, \varphi)_{\max}}{P_S} \quad (7.25)$$

setzt man nach (7.5) die maximale Strahlungsdichte im Fernfeld des Hertzschen Dipols

$$S_r(\vartheta, \varphi)_{\max} = \frac{1}{2} Z_0 |\underline{H}_0|^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{(k_0 r)^2} \Big|_{\max} = \frac{Z_0 |\underline{H}_0|^2}{2 (k_0 r)^2} \quad (7.26)$$

und nach (7.8) seine gesamte Strahlungsleistung

$$P_S = \frac{4\pi}{3 k_0^2} Z_0 |\underline{H}_0|^2 \quad (7.27)$$

ein und erhält:

$$D = 4\pi r^2 \frac{\frac{Z_0 |H_0|^2}{2(k_0 r)^2}}{\frac{4\pi}{3k_0^2} Z_0 |H_0|^2} = \frac{3}{2}. \quad (7.28)$$

Der Hertzsche Dipol erzeugt somit in seiner Hauptstrahlungsrichtung ($\vartheta = \pi/2$) eine um 50 % höhere Strahlungsdichte als ein isotroper Strahler gleicher Strahlungsleistung. Er hat demnach keine hohe Richtwirkung. Für stärkere Bündelung der Strahlungsleistung in schmalere Winkelbereiche müssen elektrisch längere Antennen verwendet werden. $\square$

7.3.3 Äquivalenter Raumwinkel

Eng mit dem Richtfaktor verknüpft ist der so genannte äquivalente Raumwinkel Ω einer Antenne. Aus der Definition des Richtfaktors D und der **gesamten Strahlungsleistung** P_S

$$D = 4\pi r^2 \frac{S_r(\vartheta, \varphi)_{\max}}{P_S} \quad \text{bzw.} \quad P_S = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} S_r(\vartheta, \varphi) r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (7.29)$$

folgt zunächst die Darstellung:

$$D = \frac{4\pi}{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{S_r(\vartheta, \varphi)}{S_r(\vartheta, \varphi)_{\max}} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi} = \frac{4\pi}{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} C^2(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}. \quad (7.30)$$

Man definiert aus dem Nenner von (7.30) den **äquivalenten Raumwinkel**

$$\Omega = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} C^2(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \leq 4\pi \quad (\text{total beam area}), \quad (7.31)$$

den man sich als denjenigen Raumwinkel vorstellen kann, in den die Antenne ihre gesamte Strahlungsleistung abgeben würde, wenn in ihm die größte Strahlungsdichte der Hauptkeule $S_r(\vartheta, \varphi)_{\max}$ gleichmäßig vorhanden wäre und außerhalb keine. Er ist ein Maß für die Bündelung der Antennenstrahlung. So „sieht“ ein isotroper Strahler mit $C = 1$ den vollen Raum und daher einen Raumwinkel $\Omega = 4\pi$. Der Raumwinkel Ω wird in Steradian ($\text{sr} = \text{rad}^2$) gemessen. Mit dem äquivalenten Raumwinkel können wir den **Richtfaktor** der Antenne ermitteln:

$$D = \frac{4\pi}{\Omega}. \quad (7.32)$$

Die Leistung $P_M \leq P_S$ innerhalb eines Kreiskegels der Öffnung ϑ_0 strahlt in den Raumwinkel

$$\Omega_M(\vartheta_0) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta_0} C^2(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \leq \Omega. \quad (\Omega_M = \text{main beam area, falls } \vartheta_0 \text{ der Nullwertswinkel ist}) \quad (7.33)$$

Mit $\vartheta_0 = \Delta\vartheta_0/2$ stellt P_M die **Hauptkeulenleistung** dar. Ist die Hauptkeule unsymmetrisch oder nicht deutlich abgegrenzt, so muss ϑ_0 geschätzt werden. Wir betrachten im Folgenden ein unidirektionales Diagramm mit einer einzig kegelförmigen Hauptkeule elliptischen Querschnitts, die wir durch eine konstante Strahlungsdichte innerhalb ihrer Halbwertsbreiten Θ_H

und Θ_E in zwei orthogonalen Schnitten approximieren [Kra50, Kra88]. Der Hauptkeulenraumwinkel Ω_M ist in dieser Näherung durch die Mantelfläche eines Kugelabschnitts gegeben:

$$r^2 \Omega_M \approx A_M = 4\pi r^2 \sin \frac{\Theta_H}{4} \sin \frac{\Theta_E}{4} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \Theta_H, \Theta_E \leq 2\pi. \quad (7.34)$$

Für $\Theta_H = \Theta_E = 2\pi$ wird $\Omega_M = \Omega = 4\pi$ und wir erhalten als Sonderfall den isotropen Strahler. Mit Hilfe der **beam efficiency** $\varepsilon_M = \Omega_M / \Omega = P_M / P_S \leq 1$, die den Einfluss der Nebenkeulen berücksichtigt und Werte von $0,6 \leq \varepsilon_M \leq 1$ hat, sowie einem **pattern factor**, der von der genauen Form der Hauptkeule abhängt und meist im Bereich $1 \leq k_p \leq 1,6$ liegt, folgt eine nützliche Beziehung zwischen den Halbwertsbreiten der Hauptkeule und dem Richtfaktor [Kra88]:

$$\boxed{D \approx \frac{\varepsilon_M}{k_p} \frac{1}{\sin \frac{\Theta_H}{4} \sin \frac{\Theta_E}{4}}} \quad \text{bzw.} \quad D \approx \frac{\varepsilon_M}{k_p} \frac{16}{\Theta_H \Theta_E}, \quad \text{falls} \quad \Theta_H, \Theta_E \ll 1. \quad (7.35)$$

Die Halbwertsbreiten sind hier im Bogenmaß (rad) einzusetzen. Will man sie im Gradmaß verwenden, dann muss der Raumwinkel 16 sr umgerechnet werden und man erhält:

$$D \approx \frac{\varepsilon_M}{k_p} \frac{52525}{\Theta_H^\circ \Theta_E^\circ} \quad (\text{für Diagramme mit einer kegelförmigen Hauptkeule}). \quad (7.36)$$

Der Korrekturfaktor liegt meist im Bereich $0,5 \leq \varepsilon_M / k_p \leq 0,9$ und hängt stark vom jeweiligen Antennentyp ab (Anhang C.7). Auch im Hinblick auf Fertigungstoleranzen ist eine vorsichtige Abschätzung [Stu98a, Stu98b, Bal05] wie $D \approx 26000 / (\Theta_H \Theta_E)$ angebracht (Abschnitt 16.1). Wenn wir also bei einer Antenne Halbwertsbreiten von 10° messen, können wir daher einen Richtfaktor von etwa 24 dBi erwarten – in günstigen Fällen vielleicht noch 1 bis 2 dB mehr.

Bei **Rundstrahlantennen** mit *scheibenförmiger* Hauptkeule (z. B. in der Äquatorebene) kann Ω_M durch die Mantelfläche einer Kugelschicht angenähert werden:

$$r^2 \Omega_M \approx A_M = 4\pi r^2 \sin \frac{\Theta_E}{2} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \Theta_E \leq \pi. \quad (7.37)$$

Für $\Theta_E = \pi$ erhalten wir auch hier wieder den isotropen Strahler. Analog zu (7.35) folgt jetzt:

$$\boxed{D \approx \frac{\varepsilon_M}{k_p} \frac{1}{\sin \frac{\Theta_E}{2}}} \quad \text{bzw.} \quad D \approx \frac{\varepsilon_M}{k_p} \frac{2}{\Theta_E} \triangleq \frac{\varepsilon_M}{k_p} \frac{114,6}{\Theta_E^\circ}, \quad \text{falls} \quad \Theta_E \ll 1. \quad (7.38)$$

Übung 7.4: Richtfaktorabschätzungen

- Berechnen Sie für die Richtcharakteristiken $C_1 = \sin \vartheta$ und $C_2 = |\cos \vartheta|$ Näherungen für den Richtfaktor und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den exakten Werten aus (7.30).
- **Lösung:**

Beide Diagramme sind nebenkeulenfrei, darum gilt $\varepsilon_M = 1$ und wir erhalten (mit $k_p = 1$):

$$D_1 \approx \frac{1}{\sin \frac{\pi/2}{2}} = \sqrt{2} \approx 1,414 \quad \text{bzw.} \quad D_2 \approx \frac{1}{\sin \frac{\pi/2}{4} \sin \frac{\pi/2}{4}} \approx 6,828. \quad (7.39)$$

Die exakten Werte $D_1 = 1,5$ und $D_2 = 3$ erhält man durch elementares Ausführen der Integrale in (7.30). Man beachte, dass $C_2 = |\cos \vartheta|$ nicht der Voraussetzung einer *einzigsten* kegelförmigen Hauptkeule genügt, da es hier *zwei* identische Hauptkeulen bei $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ gibt. Wir dürfen daher mit $D_2 \approx 3,414$ nur den *halben* Wert aus (7.39) ansetzen. Für beide Fälle geben wir noch den pattern factor an: $k_{p,1} = 0,943$ bzw. $k_{p,2} = 1,138$. $\square$

7.3.4 Antennenwirkfläche

Die Empfangseigenschaften einer Antenne können durch ihre **Wirkfläche** A_W beschrieben werden. Die Wirkfläche wird zunächst als formale Rechengröße eingeführt; anschließend werden wir ihre anschauliche Bedeutung und ihren Zusammenhang mit dem Gewinn zeigen. Die Betrachtung geht zunächst von einer Empfangsantenne aus, im Gegensatz zum Gewinn, der für eine Sendantenne besonders anschaulich ist.

Eine Empfangsantenne entzieht einer einfallenden Welle einen gewissen Leistungsbetrag. Die dadurch an den nachgeschalteten Empfänger abgegebene Leistung P_E wollen wir mit der Strahlungsdichte S der einfallenden Welle wie folgt verknüpfen:

$$\boxed{P_E = A_W S} \quad (7.40)$$

Mit A_W ist damit die Antennenwirkfläche eingeführt, durch welche die einfallende Welle mit der Strahlungsdichte S gerade die Empfängerleistung P_E führt. Die Antenne fängt also alle Leistung ein, die durch die Wirkfläche hindurchtritt. Aus folgender Ersatzschaltung einer Empfangsantenne (Bild 7.8) kann man die von der Antenne an ihren Verbraucher abgegebene Wirkleistung leicht ermitteln:

$$P_E = \frac{1}{2} |I|^2 R_L = \frac{|\underline{U}_0|^2}{2} \frac{R_L}{(R_L + R_S)^2 + (X_L + X_S)^2} \quad (7.41)$$

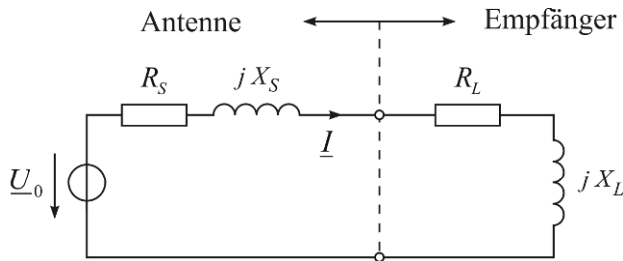


Bild 7.8 Ersatzschaltung einer Empfangsantenne zur Betrachtung der Leistungsanpassung

Für eine möglichst große Empfängerleistung muss die einfallende Welle „richtig“ polarisiert sein, d. h. die Empfangsantenne muss optimal zum einfallenden Feld orientiert sein. Ferner muss die Lastimpedanz $\underline{Z}_L = R_L + jX_L$ des Empfängers konjugiert komplex an die Strahlungsimpedanz $\underline{Z}_S = R_S + jX_S$ der Antenne angepasst sein. Für $R_L = R_S$ und $X_L = -X_S$ erhalten wir die im Lastwiderstand R_L maximal verfügbare Empfängerleistung:

$$\boxed{P_{E,\max} = \frac{1}{2} \frac{|\underline{U}_0|^2}{(R_L + R_S)^2} R_L = \frac{|\underline{U}_0|^2}{8 R_S}} \quad (7.42)$$

Zu einer von Orientierung und Lastimpedanz unabhängigen und allein für die jeweilige Antenne charakteristischen Wirkfläche kommt man, wenn man sie für optimale Orientierung und Leistungsanpassung definiert. Dann ist die Wirkfläche als reine Antenneneigenschaft unabhängig vom Aufbau und von der Beschaltung der Antenne. Wegen (7.40), (7.42) und $P_E = P_{E,\max}$ folgt die Wirkfläche einer Antenne dann aus:

$$A_W = \frac{P_E}{S} = \frac{|\underline{U}_0|^2}{\frac{8R_S}{S}}. \quad (7.43)$$

Mit der Strahlungsdichte einer einfallenden ebenen Welle

$$S = \frac{|\underline{E}|^2}{2Z_0} \quad (7.44)$$

kann man anstelle (7.43) auch schreiben:

$$A_W = \frac{|\underline{U}_0|^2}{\frac{8R_S}{\frac{|\underline{E}|^2}{2Z_0}}}, \quad (7.45)$$

d. h. es gilt:

$$\boxed{A_W = \frac{Z_0}{4R_S} \frac{|\underline{U}_0|^2}{|\underline{E}|^2}}. \quad (7.46)$$

Für die Antennenwirkfläche des **Hertzschen Dipols** findet man mit $|\underline{U}_0| = |\underline{E}|l$ und $R_S = (2\pi/3)Z_0(l/\lambda_0)^2$ aus (7.10) sofort folgenden Zusammenhang:

$$\boxed{A_W = \frac{3}{8\pi} \lambda_0^2}. \quad (7.47)$$

Auffallend an dieser Beziehung ist, dass die Empfängerleistung $P_E = A_W S$ unabhängig von der Länge l der Antenne ist. Damit könnte theoretisch eine verlustfreie lineare Antenne als Empfangsantenne beliebig kurz sein. In der Praxis hätte eine solche extrem kurze Antenne allerdings einen verschwindend kleinen Strahlungswiderstand, demgegenüber der Verlustwiderstand der Antenne nicht mehr vernachlässigt werden könnte. Darüber hinaus würde dann die konjugiert komplexe Anpassung immer schwieriger.

Mit dem uns bereits bekannten **Gewinn** des Hertzschen Dipols, nämlich $G = 3/2$, können wir für seine **Wirkfläche** auch schreiben:

$$\boxed{A_W = \frac{\lambda_0^2}{4\pi} G}. \quad (7.48)$$

Mit Hilfe der Reziprozität kann man zeigen, dass diese Beziehung nicht nur für den Hertzschen Dipol, sondern ganz allgemein für jede Antennenform gültig ist. Wirkfläche und Gewinn einer Antenne stehen daher immer im festen Verhältnis

$$\frac{A_W}{G} = \frac{\lambda_0^2}{4\pi} \quad (7.49)$$

zueinander, gleichgültig ob es sich um eine Empfangs- oder Sendeantenne handelt. Nach der Definition $A_W = P_E/S$ ist die Wirkfläche einer Antenne zunächst nur eine abstrakte Rechengröße. Anhand der Strömungslinien der Strahlungsdichte $\underline{S}$ lässt sie sich aber auch als geomet-

rische Fläche darstellen. Dichte und Richtung des Wirkleistungsflusses in einem elektromagnetischen Wechselfeld gibt der Realteil des komplexen Poyntingvektors an:

$$\operatorname{Re}\{\underline{S}\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{E} \times \underline{H}^*\}. \quad (7.50)$$

Die Feldlinien dieses reellen Vektors bilden die **Strömungslinien** der zeitgemittelten Feldenergie. Wenn eine kurze lineare Empfangsantenne parallel zum elektrischen Feld einer einfallenden homogenen ebenen Welle steht und für maximale Leistungsaufnahme konjugiert komplex angepasst ist, dann verlaufen die Strömungslinien des Wirkleistungsflusses so wie es in Bild 7.9 für zwei Ebenen senkrecht und parallel zur Antenne gezeigt wird.

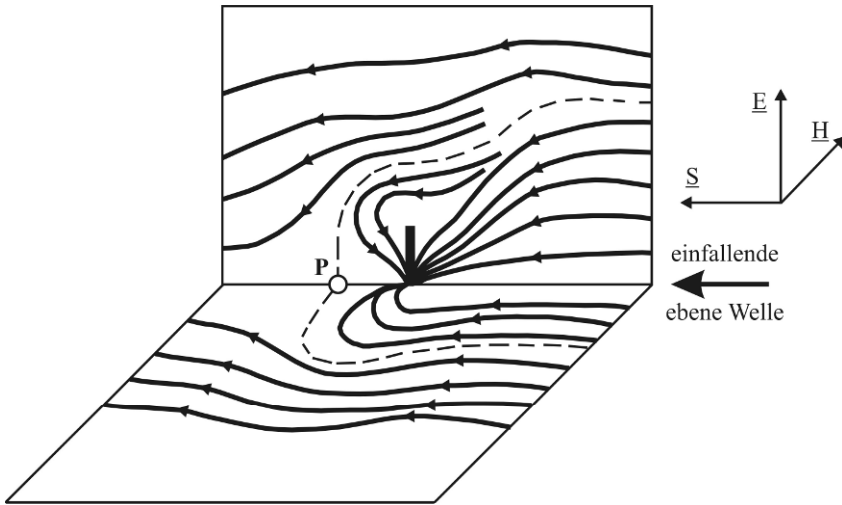


Bild 7.9 Energiestromlinien in der Umgebung eines angepassten Empfangsdipols nach [Lan72]

Die gestrichelten Linien trennen Strömungslinien, die im Antennenfußpunkt enden, von allen anderen, die an der Antenne vorbei laufen. Nur Wirkleistung, die *innerhalb* dieser gestrichelten Linien fließt, erreicht die Antenne. Man nennt diese Linien auch **Grenzstromlinien**. Die Gesamtheit der Grenzstromlinien findet man perspektivisch in Bild 7.10.

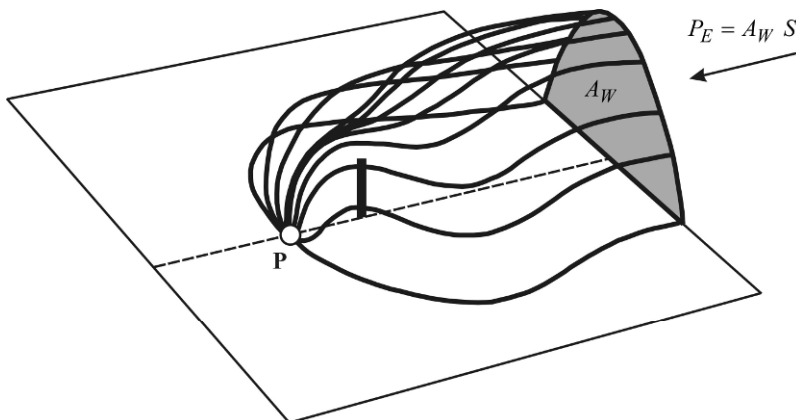


Bild 7.10 Grenzstromlinien und abgegrenzte Antennenwirkfläche A_W nach [Lan72]

Sie enden alle in dem Punkt **P** auf der Geraden, die durch den Antennenfußpunkt geht und die Richtung der einfallenden Welle hat. Mit wachsender Entfernung von der Empfangsantenne gehen die Grenzstromlinien asymptotisch in Geraden parallel zur Wellenausbreitungsrichtung über. Der von ihnen abgegrenzte Raum enthält dabei asymptotisch einen Querschnitt, der die **Wirkfläche** A_W der Antenne darstellt. Denn die durch diese Fläche eintretende Leistung P_E der ankommenden Welle wird von der Empfangsantenne bei optimalem Verbraucher aufgenommen und dies ist gerade die Definition der Wirkfläche $A_W = P_E / S$.

Die Wirkfläche einer Antenne hat damit auch physikalische Bedeutung. In genügendem Abstand kann senkrecht zur Richtung der einfallenden Welle vor der Antenne eine ebene Fläche der Größe A_W aufgespannt werden, durch welche die gesamte Empfangsleistung senkrecht hindurchtritt. Zum besseren Verständnis sei noch bemerkt, dass die Wirkfläche einer Antenne im Allgemeinen nicht mit ihrer geometrischen Fläche übereinstimmt. Bei **Reflektorantennen** gilt die einfache Beziehung:

$$A_W = q A_{\text{geo}}. \quad (7.51)$$

Die Aperturfläche wird mit A_{geo} als geometrische Öffnung des Reflektors bezeichnet und der Flächenwirkungsgrad q kann Werte im Bereich $0 < q \leq 1$ annehmen.

Übung 7.5: Reflektorantennen

- Man bestimme den Gewinn einer elektrisch großen Reflektorantenne ($k_0 a \gg 1$) mit kreisförmiger Apertur als Funktion ihres Durchmessers $D = 2a$, des Flächenwirkungsgrades q und der Frequenz f . Eine Erweiterung des Ergebnisses (7.54) auf kleinere Aperturen findet man in (8.128).

- Lösung:**

Die Wirkfläche einer Reflektorantenne ist:

$$A_W = q A_{\text{geo}} = q \frac{\pi D^2}{4}. \quad (7.52)$$

Damit erhält man ihren Gewinn nach (7.48) aus der Beziehung:

$$G = \frac{4\pi}{\lambda_0^2} A_W = \frac{4\pi}{\lambda_0^2} q \frac{\pi D^2}{4} = q \left(\frac{\pi D}{\lambda_0} \right)^2. \quad (7.53)$$

Mit der Wellenzahl $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ kann man auch schreiben:

$$G = q (k_0 a)^2. \quad (7.54)$$

Eine zugeschnittene Größengleichung erhält man mit $c_0 = \lambda_0 f = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$:

$$G = q \frac{(\pi D)^2}{\left(\frac{2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{f} \right)^2}, \quad (7.55)$$

woraus nach kurzer Umformung folgt:

$$G = q \left(10,48 \frac{f}{\text{GHz}} \frac{D}{\text{m}} \right)^2. \quad (7.56)$$

Übliche Werte des Flächenwirkungsgrads q liegen im Richtfunkbereich ($D \approx 80 \lambda_0$) bei 50–55 %, während mit größeren Reflektorantennen bis etwa 80 % erreichbar sind. Zur genaueren Berechnung des Flächenwirkungsgrads von Aperturstrahlern sei auf die Abschnitte 16.4 und 16.6 verwiesen. Dort werden Einflüsse der Aperturabschattung durch einen Subreflektor und die Wirkung spezieller Belegungsfunktionen diskutiert. Eine typische **Erdefunkstelle** (Standard-A-Antenne: $D = 30 \text{ m}$, $f = 4 \text{ GHz}$ und $q = 0,78$) hat nach (7.56) einen Gewinn von $G \approx 1,23 \cdot 10^6$ oder logarithmisch $g = 10 \lg G \approx 60,9 \text{ dBi}$. $\square$

7.3.5 Polarisation

Zur anschaulichen Deutung der **Polarisation bei einer Antennenstrecke** wollen wir einen Kreuzdipol betrachten, dessen horizontaler und vertikaler Ast unabhängig voneinander angeregt werden. Erfolgt die Einspeisung amplitudengleich aber um $\delta = -\pi/2$ phasenverschoben, dann wird nach (5.3) mit dieser Antenne Zirkularpolarisation entlang der z-Achse erzeugt:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 (\mathbf{e}_x \cos(\omega t \mp \beta z) + \mathbf{e}_y \sin(\omega t \mp \beta z)) = E_0 \operatorname{Re} \left\{ (\mathbf{e}_x - j \mathbf{e}_y) e^{j(\omega t \mp \beta z)} \right\}. \quad (7.57)$$

Ein Kreuzdipol hat zwei entgegengesetzt gerichtete Hauptkeulen. Die Welle, die sich in Bild 7.11 in die positive z-Richtung ausbreitet (–), ist rechtsdrehend polarisiert (RHC – right hand circular), während die sich in die negative z-Richtung ausbreitende Welle (+) linksdrehend polarisiert ist (LHC – left hand circular) – siehe auch Abschnitt 5.1 und Übung 8.8.

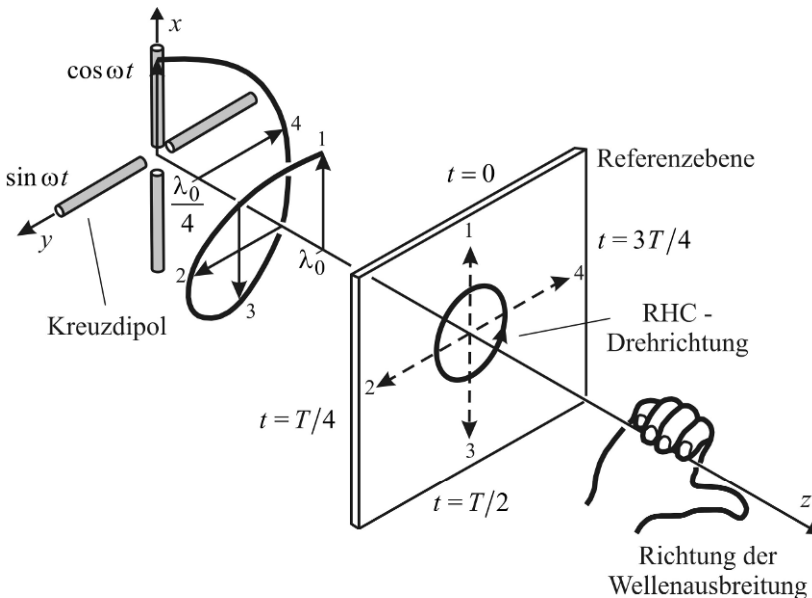


Bild 7.11 Kreuzdipol mit zeitlich rechtsdrehender Zirkularpolarisation und räumlicher Linksschraube

Betrachtet man zu einem festen Zeitpunkt alle $\mathbf{E}$ -Vektoren auf der gesamten z-Achse, so bilden die Endpunkte dieser Vektorpfeile bei zeitlich rechtsdrehender Polarisation eine **Linksschraube** im Raum (Bild 7.11) und bei zeitlich linksdrehender Polarisation ergibt sich eine **Rechts-**

schraube. Soll eine **Empfangsantenne** aus dem sie umgebenden Strahlungsfeld möglichst viel Energie aufnehmen, so muss die Polarisisation der Antenne mit der des Feldes übereinstimmen. Wenn z. B. eine ideal rechtszirkular polarisierte Welle von einer Empfangsantenne aufgenommen werden soll, kann man – in Abhängigkeit vom Achsenverhältnis AR der Polarisationsellipse der Antenne (Bild 5.2) – einen **Polarisationswirkungsgrad** definieren:

$$\eta_P = \left| \frac{\mathbf{e}_x - j \mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{AR \mathbf{e}_x - j \mathbf{e}_y}{\sqrt{AR^2 + 1}} \right)^* \right|^2 = \frac{(AR+1)^2}{2(AR^2+1)} = \frac{1}{2} + \frac{AR}{AR^2+1} \quad (7.58)$$

Bei optimaler Polarisationsanpassung mit $AR=1$ wird auch $\eta_P=1$, während eine linear polarisierte Empfangsantenne mit $AR=\infty$ oder $AR=0$ nur ein $\eta_P=1/2$ aufweist, was dann wegen $10 \lg \eta_P = -3 \text{ dB}$ zu einem Pegelverlust von 3 dB führen wird. Ausgehend von diesem speziellen Beispiel kann man den Verlust bei allgemein verschiedenen Polarisationszuständen zwischen Antenne und Feld auf analoge Weise herleiten (Tabelle 7.2).

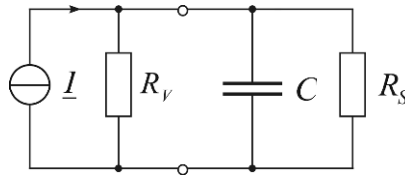
Tabelle 7.2 Einfluss unterschiedlicher Polarisationen zwischen Antenne und Feld (siehe Bild 7.11)

Dämpfungswerte in dB		Feldpolarisation			
		vertikal $\mathbf{e}_x$	horizontal $\mathbf{e}_y$	rechtszirkular $\frac{\mathbf{e}_x - j \mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}$	linkszirkular $\frac{\mathbf{e}_x + j \mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}$
Antennen- polarisation	vertikal $\mathbf{e}_x$	0	∞	3	3
	horizontal $\mathbf{e}_y$	∞	0	3	3
	rechts- zirkular $\frac{\mathbf{e}_x - j \mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}$	3	3	0	∞
	links- zirkular $\frac{\mathbf{e}_x + j \mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}$	3	3	∞	0

- Bei gleicher Polarisisation von Antenne und Feld entsteht kein Verlust (0 dB).
- Bei linearen Polarisationen, die orthogonal (senkrecht) aufeinander stehen, oder bei entgegengesetzten zirkularen Polarisationen wird theoretisch keine Energie von der Empfangsantenne aufgenommen. Die Dämpfung wäre dann unendlich. In der Praxis ist in solchen Fällen die Dämpfung jedoch höchstens so hoch wie die **Polarisationsentkopplung** der Antenne und des nachgeschalteten Empfängers (typischer Wert: 20–40 dB).
- Bei zirkularer Feldpolarisation, die man sich aus zwei amplitudengleichen horizontalen und vertikalen Komponenten zusammengesetzt vorstellen kann, wird bei linearer Antennenpolarisation nur die Hälfte aufgenommen. Der Leistungsverlust ist somit 3 dB.

7.4 Übungen

- 7.4.1** In einer Richtfunkstrecke wird eine Antenne mit einem Richtfaktor von 15 dBi von einem Sender mit einer Leistung von 20 dBm gespeist. In der 40 km entfernten Empfangsstation wird eine Antenne mit einer Wirkfläche von 2 m^2 verwendet. Welche Leistung nimmt die Empfangsantenne auf?
- 7.4.2** Die Hauptkeule einer bei 5 GHz betriebenen, rotationssymmetrischen Reflektorantenne habe in der E-Ebene und in der H-Ebene eine Halbwertsbreite von jeweils 5° . Geben Sie mit Hilfe der Tabelle im Anhang C.7 eine Näherung für den Gewinn der Antenne an. Welchen Aperturdurchmesser muss deshalb die Antenne besitzen, wenn Sie deren Flächenwirkungsgrad mit 0,5 abschätzen?
- 7.4.3** Die inneren Verluste eines $l = 1 \text{ cm}$ langen Hertzschen Dipols können durch einen Widerstand $R_V = 10 \mu\Omega$ modelliert werden. Die Energiespeicherung im Nahfeld wird durch einen Kondensator von $C = 0,01 \text{ pF}$ beschrieben.



Bei welcher Frequenz f wird der Dipol betrieben, falls der Strahlungswiderstand R_S gleich dem Verlustwiderstand R_V wird?

Wie groß wird bei dieser Frequenz der Antennenwirkungsgrad, den man als das Verhältnis von Strahlungsleistung zur Gesamtleistung $\eta = P_S / (P_S + P_V)$ definiert?

Welcher Gewinn $G = \eta D$ ergibt sich dann bei diesem Wirkungsgrad?

- 7.4.4** Stellen Sie den Polarisationswirkungsgrad (7.58) graphisch im Bereich $0 \leq AR \leq 5$ dar. Was fällt Ihnen auf, wenn Sie in (7.58) die Substitution $AR \rightarrow 1/AR$ durchführen?

Lösungen:

7.4.1 $P_E = \frac{D P_S}{4 \pi r^2} A_W = 0,314 \text{ nW}$

7.4.2 $G \approx \frac{38900}{\Theta_H^\circ \Theta_E^\circ} = 1556 \hat{=} 31,9 \text{ dBi}$; aus $G = q \left(\frac{\pi D}{\lambda_0} \right)^2$ folgt $D \approx 106,5 \text{ cm}$

7.4.3 Aus $R_S = 789 \Omega \left(\frac{l}{c_0/f} \right)^2 \equiv R_V$ folgt $f = 3,375 \text{ MHz}$. Mit $\eta = 50 \%$ wird $G = 0,75$.

- 7.4.4** Es gilt $\eta_p(AR) = \eta_p(1/AR)$, weil bei zirkularer Empfangspolarisation eine Drehung der Empfangsantenne um 90° keinen Einfluss auf die empfangene Leistung hat.

8 Grundbegriffe von Strahlungsfeldern

Die strenge Behandlung von Antennenproblemen ist nur in wenigen Ausnahmefällen durchführbar, denen praktisch nur eingeschränkte Bedeutung zukommt. Ansonsten ist man auf Näherungsverfahren angewiesen, die von Fall zu Fall verschieden sind und sich einer einheitlichen systematischen Behandlung entziehen. Aus einer großen Vielzahl von gebräuchlichen Methoden wird in Tabelle 8.1 eine Auswahl analytisch exakter und genäherter Verfahren zur Berechnung elektromagnetischer Felder zusammengestellt (siehe z. B. [Stra93]).

Tabelle 8.1 Einige ausgewählte Verfahren zur Berechnung elektromagnetischer Felder

Analytische Methoden	Numerische Methoden
Spiegelungsverfahren	Finite Differenzen
Konforme Abbildung	Finite Elemente (Variationsverfahren)
Skalare Potenzialtheorie für Quellenfelder	Finite Integrationstechnik
Vektorpotenzial für Wirbelfelder	Integralgleichungsmethode
Hertzscher Vektor	Spektralbereichsmethode
Orthogonalentwicklung (Eigenwellen)	Momentenmethode
Geometrische Beugungstheorie	Methode der Geraden

Zur Berechnung von Antennenstrahlungsfeldern wird meist von den Strömen auf der Antennenoberfläche ausgegangen. Nach dem **Eindeutigkeitssatz** ist das Strahlungsfeld durch seine **Randbedingungen** nämlich bereits festgelegt [Har61]. In wenigen Sonderfällen sind die **Oberflächenströme** bekannt oder können auf einfache Weise berechnet werden. In aller Regel müssen sie jedoch mit numerischen Verfahren aufwändig bestimmt werden. In der Praxis genügen meist einfache Stromnäherungen – die durch Integration über die strahlenden Flächen gewonnenen Strahlungsfelder sind dann genauer, da die Integration Fehler im Integranden glättet.

8.1 Grundgleichungen

Bei harmonischer Zeitabhängigkeit lauten die Maxwellschen Gleichungen im Frequenzbereich:

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{\underline{H}} &= j \omega \varepsilon \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{J}} \\ \text{rot } \underline{\underline{E}} &= -j \omega \mu \underline{\underline{H}} \end{aligned} \quad (\text{im verlustfreien Fall mit } \kappa = 0). \quad (8.1)$$

Die ortsabhängigen Feldstärken $\underline{\underline{E}}$ und $\underline{\underline{H}}$ werden als komplexe Amplituden oder Phasoren bezeichnet, die in Anlehnung an die komplexe Wechselstromrechnung aus Amplitude und Nullphasenwinkel der zugehörigen reellen Schwingung gebildet werden. Ihr komplexer Charakter soll durch Unterstreichen zum Ausdruck gebracht werden. Mit $\mathbf{r}$ als Ortsvektor zum betrachteten Raumpunkt erhält man die entsprechenden reellen Größen im Zeitbereich aus:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \underline{\underline{E}}(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ \underline{\underline{E}}(\mathbf{r}, \omega) \right\} \cos \omega t - \text{Im} \left\{ \underline{\underline{E}}(\mathbf{r}, \omega) \right\} \sin \omega t \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \left\{ \underline{\underline{H}}(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ \underline{\underline{H}}(\mathbf{r}, \omega) \right\} \cos \omega t - \text{Im} \left\{ \underline{\underline{H}}(\mathbf{r}, \omega) \right\} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Die komplexen Vektoren $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$ und $\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)$ haben im Allgemeinen drei Feldkomponenten. Jeder dieser drei Raumkomponenten wird ein Zeiger in der komplexen Ebene zugeordnet.

In den meisten Fällen sind wir an der Abstrahlung einer stromführenden Antenne in den freien Raum interessiert, den wir als raumladungsfreies Vakuum mit $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ und $\kappa = 0$ annehmen dürfen. Bei der elektrischen Stromdichte kann es sich dann nur noch um eine eingeprägte Quellstromdichte $\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{J}}_E$ handeln, wobei wir der Einfachheit halber auf den Index verzichten wollen. Diese Stromdichte stellt eine von allen Feldkräften unabhängige – äußerlich durch einen Generator erzwungene – Bewegung von elektrischen Ladungsträgern dar. Sie bildet also in den Maxwell'schen Gleichungen ein inhomogenes Glied und stellt die Ursache oder Quelle elektromagnetischer Felder dar. Neben der elektrischen Stromdichte $\underline{\mathbf{J}}$ wollen wir auch noch eine magnetische Stromdichte $\underline{\mathbf{M}}$ einführen, die allerdings keine physikalische Realität besitzt, da es keine magnetischen Elementarladungen der Raumladungsdichte ρ_M gibt ($\operatorname{div} \underline{\mathbf{B}} = \rho_M = 0$). Zunächst ist $\underline{\mathbf{M}}$ nur eine fiktive Hilfsgröße mit $[\underline{\mathbf{M}}] = \text{V/m}^2$, mit der sich aber die Behandlung vieler Probleme vereinfachen lässt. Vorläufig können wir die Einführung von $\underline{\mathbf{M}}$ nur mit der **Symmetrie** rechtfertigen (die bereits Pierre Curie¹ aufgefallen war), welche die Feldgleichungen mit ihr annehmen (siehe hierzu auch Abschnitt 8.6):

$$\boxed{\operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} = j \omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{J}}} \quad \text{und} \quad \boxed{-\operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}} = j \omega \mu \underline{\mathbf{H}} + \underline{\mathbf{M}}}. \quad (8.3)$$

Durch gegenseitiges Einsetzen wollen wir in Übung 8.1 die inhomogenen Maxwell'schen Gleichungen voneinander entkoppeln. Im Kapitel 3 sind wir ähnlich vorgegangen. Dort hatten wir allerdings nur den quellenfreien Fall mit $\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{M}} = 0$ betrachtet. Jetzt wollen wir das damalige Ergebnis (3.61) verallgemeinern.

Übung 8.1: Inhomogene vektorielle Helmholtz-Gleichungen

- Entkoppeln Sie das System (8.3) gekoppelter partieller Differenzialgleichungen erster Ordnung durch gegenseitiges Einsetzen und leiten Sie dadurch zwei Differenzialgleichungen von jeweils zweiter Ordnung für die Phasoren $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ her. Setzen Sie homogene Medien voraus, d. h. ε und μ sollen ortsunabhängig sein.
- **Lösung:**

Zunächst bildet man die Rotation der ersten Gleichung

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} = j \omega \varepsilon \operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}} + \operatorname{rot} \underline{\mathbf{J}}, \quad (8.4)$$

löst nach dem Term $\operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}}$ auf

$$\operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{j \omega \varepsilon} (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} - \operatorname{rot} \underline{\mathbf{J}}) \quad (8.5)$$

und setzt ihn in die zweite Gleichung ein:

$$-\frac{1}{j \omega \varepsilon} (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} - \operatorname{rot} \underline{\mathbf{J}}) = j \omega \mu \underline{\mathbf{H}} + \underline{\mathbf{M}}. \quad (8.6)$$

Mit Hilfe der vektoranalytischen Beziehung $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{\mathbf{H}} - \nabla^2 \underline{\mathbf{H}}$ erhält man:

¹ Pierre **Curie** (1859-1906): frz. Physiker (Kristallographie, Piezoelektrizität, Symmetriebetrachtungen, Magnetismus, Nobelpreis f. Physik 1903 zur Untersuchung radioaktiver Strahlungsphänomene)

$$-\frac{1}{j\omega\epsilon}\left(\text{grad div}\underline{\mathbf{H}}-\nabla^2\underline{\mathbf{H}}-\text{rot}\underline{\mathbf{J}}\right)=j\omega\mu\underline{\mathbf{H}}+\underline{\mathbf{M}}. \quad (8.7)$$

Aus der zweiten Maxwellschen Gleichung folgt nun durch Bildung der Divergenz:

$$-\text{div rot}\underline{\mathbf{E}}=j\omega\mu\text{div}\underline{\mathbf{H}}+\text{div}\underline{\mathbf{M}}=0 \quad (8.8)$$

und damit $\text{div}\underline{\mathbf{H}}=-\frac{1}{j\omega\mu}\text{div}\underline{\mathbf{M}}$, womit wir erhalten:

$$-\frac{1}{j\omega\epsilon}\left(-\frac{1}{j\omega\mu}\text{grad div}\underline{\mathbf{M}}-\nabla^2\underline{\mathbf{H}}-\text{rot}\underline{\mathbf{J}}\right)=j\omega\mu\underline{\mathbf{H}}+\underline{\mathbf{M}}. \quad (8.9)$$

Mit $k^2=\omega^2\mu\epsilon$ findet man schließlich die **vektorielle inhomogene Helmholtz-Gleichung** für den Phasor $\underline{\mathbf{H}}$:

$$\nabla^2\underline{\mathbf{H}}+k^2\underline{\mathbf{H}}=-\text{rot}\underline{\mathbf{J}}-\frac{1}{j\omega\mu}\left(\text{grad div}\underline{\mathbf{M}}+k^2\underline{\mathbf{M}}\right). \quad (8.10)$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung $\text{div}\underline{\mathbf{M}}=-j\omega\rho_M$ kann man noch die magnetische Raumladungsdichte ρ_M einführen und erhält:

$$\boxed{\nabla^2\underline{\mathbf{H}}+k^2\underline{\mathbf{H}}=-\text{rot}\underline{\mathbf{J}}+j\omega\epsilon\underline{\mathbf{M}}+\frac{1}{\mu}\text{grad}\rho_M}. \quad (8.11)$$

Auf die gleiche Art und Weise kann man auch eine **vektorielle inhomogene Helmholtz-Gleichung** für den Phasor $\underline{\mathbf{E}}$ herleiten. Wir wollen hier nur das Ergebnis angeben:

$$\boxed{\nabla^2\underline{\mathbf{E}}+k^2\underline{\mathbf{E}}=\text{rot}\underline{\mathbf{M}}+j\omega\mu\underline{\mathbf{J}}+\frac{1}{\epsilon}\text{grad}\rho}. \quad (8.12)$$

Diese beiden Gleichungen beschreiben elektromagnetische Wellen, deren Quellen (Sender) durch die Strom-Ladungs-Verteilungen der inhomogenen rechten Seiten gegeben sind. Im ladungs- und stromfreien Raum erhält man wieder die homogenen Helmholtz-Gleichungen aus Abschnitt 3.4:

$$\begin{aligned} \nabla^2\underline{\mathbf{H}}+k^2\underline{\mathbf{H}} &= 0 \\ \nabla^2\underline{\mathbf{E}}+k^2\underline{\mathbf{E}} &= 0. \end{aligned} \quad \square \quad (8.13)$$

Die vorangegangene Übungsaufgabe macht deutlich, dass die direkte Lösung der Maxwell'schen Gleichung durch gegenseitige Entkopplung nur durch die Behandlung sehr aufwändiger Differenzialgleichungen möglich ist. Große Schwierigkeiten bei der Integration der inhomogenen Differenzialgleichungen bereiten vor allem die komplizierten rechten Seiten, die die Quellen der Felder darstellen. Die genannten Probleme haben dazu geführt, dass man nach einfacheren Verfahren zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen gesucht hat.

8.2 Potenziallösung der Feldgleichungen

Eine elegante und weit verbreitete Möglichkeit zur Lösung der Feldgleichungen besteht darin, die gesuchten Felder aus **Potenzialfunktionen** abzuleiten. Man bestimmt so zunächst eine

Hilfsgröße, aus der man im nächsten Schritt durch einfache Differenziationen die Feldstärken gewinnt. Das Verfahren ist in Bild 8.1 anschaulich skizziert.

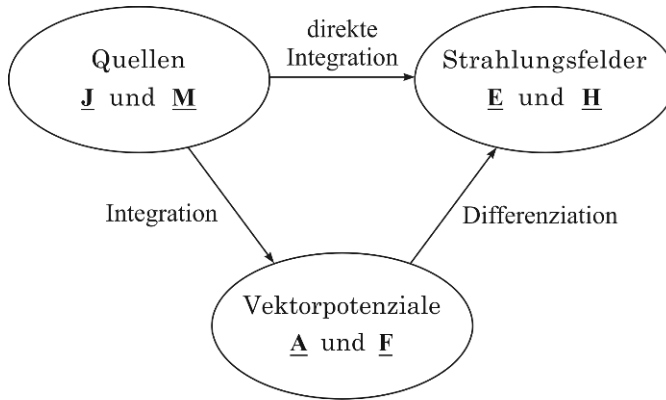


Bild 8.1 Schwierige direkte Lösung der Helmholtz-Gleichungen (8.11) und (8.12) und schnellerer Weg durch Einführung von Vektorpotenzialen

Dieser scheinbare „Umweg“ ist dennoch meist der schnellere, weil man die Potenziale aus einfacheren Differenzialgleichungen bestimmen kann als das bei den Feldern möglich ist (siehe Abschnitt 8.1).

- Wir wollen stets homogene Medien voraussetzen, d. h. ϵ und μ sollen ortsunabhängig sein.
- Des Weiteren wollen wir nur raumladungsfreie Gebiete mit verschwindender elektrischer und magnetischer Raumladung betrachten, d. h.

$$\boxed{\underline{\rho} = 0 \quad \text{und} \quad \underline{\rho}_M = 0} . \quad (8.14)$$

8.2.1 Magnetisches Vektorpotenzial

- Zunächst nehmen wir an, dass nur elektrische Stromdichten J eingepreßt sind, also überall M = 0 gilt. Dann lauten die Feldgleichungen:

$$\text{rot } \underline{H} = j \omega \epsilon \underline{E} + \underline{J} \quad \text{und} \quad \text{rot } \underline{E} = -j \omega \mu \underline{H} . \quad (8.15)$$

Bildet man die Divergenz der zweiten Gleichung, so folgt wegen der Identität $\text{div rot } \underline{E} = 0$, sofort auch $\text{div } \underline{H} = 0$, da wegen $\underline{\rho}_M = 0$ das Magnetfeld quellenfrei sein muss. Nun lassen sich quellenfreie Vektorfelder immer als Wirbel anderer Vektorfelder darstellen. Da auch stets $\text{div rot } \underline{A} = 0$ gilt, kann man also H aus einem noch unbekannten Vektorfeld A gemäß

$$\boxed{\underline{H} = \text{rot } \underline{A}} \quad (8.16)$$

ableiten. Die zweite Maxwellsche Gleichung kann dann auch so formuliert werden:

$$\text{rot } (\underline{E} + j \omega \mu \underline{A}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{E} = -\text{grad } \Phi - j \omega \mu \underline{A}} , \quad (8.17)$$

weil für jede skalare Potenzialfunktion Φ stets $\text{rot grad } \Phi = 0$ gilt. Die Ursachen der elektrischen Feldstärke sind nämlich ruhende Ladungen und zeitlich veränderliche Ströme – erstere werden durch ein Skalarpotenzial Φ und letztere durch ein Vektorpotenzial A beschrieben. Durch Einsetzen von (8.16) und (8.17) in die erste Maxwellsche Gleichung erhalten wir dann:

$$\text{rot rot } \underline{\mathbf{A}} = -j\omega\varepsilon(j\omega\mu\underline{\mathbf{A}} + \text{grad } \Phi) + \underline{\mathbf{J}}, \quad (8.18)$$

was wir mit Hilfe der Beziehung $\text{rot rot } \underline{\mathbf{A}} = \text{grad div } \underline{\mathbf{A}} - \nabla^2 \underline{\mathbf{A}}$ noch umformen können:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{A}} + k^2 \underline{\mathbf{A}} - \text{grad}(\text{div } \underline{\mathbf{A}} + j\omega\varepsilon\Phi) = -\underline{\mathbf{J}}. \quad (8.19)$$

Das Helmholtzsche Theorem (Abschnitt 2.2.5) besagt, dass ein Vektorfeld durch Angabe seiner Quellen und Wirbel vollständig bestimmt ist. Bisher hatten wir mit $\underline{\mathbf{H}} = \text{rot } \underline{\mathbf{A}}$ nur die Wirbel von $\underline{\mathbf{A}}$ festgelegt – über seine Quellen können wir noch frei verfügen. In Form der **Lorenz-Eichung**² tun wir dies in der Absicht, dass (8.19) eine möglichst einfache Gestalt annimmt:

$$\boxed{\text{div } \underline{\mathbf{A}} + j\omega\varepsilon\Phi = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2 \underline{\mathbf{A}} + k^2 \underline{\mathbf{A}} = -\underline{\mathbf{J}}}. \quad (8.20)$$

Nach dieser Festlegung können beide Feldstärken aus dem Vektorpotenzial bestimmt werden:

$$\boxed{\underline{\mathbf{H}} = \text{rot } \underline{\mathbf{A}}} \quad \text{und} \quad \boxed{\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} (\text{grad div } \underline{\mathbf{A}} + k^2 \underline{\mathbf{A}})}. \quad (8.21)$$

Weil sich die Phasoren $\underline{\mathbf{H}}$ und $\underline{\mathbf{E}}$ durch Differenzieren aus dem Vektor $\underline{\mathbf{A}}$ ergeben, heißt $\underline{\mathbf{A}}$ Vektorpotenzial und weil sich dabei direkt das magnetische Feld ergibt, wird $\underline{\mathbf{A}}$ **magnetisches Vektorpotenzial** genannt. Es hat die Dimension eines elektrischen Stromes – also Ampère. Das magnetische Vektorpotenzial $\underline{\mathbf{A}}$ wird durch den eingepägten Quellstrom der Dichteverteilung $\underline{\mathbf{J}}$ vollständig bestimmt. Dazu muss die Differenzialgleichung (8.20) für $\underline{\mathbf{A}}$ erfüllt sein. Ihre allgemeine Lösung erhält man aus der Superposition einer Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung. Eine mögliche Partikulärlösung der inhomogenen Differenzialgleichung $\nabla^2 \underline{\mathbf{A}} + k^2 \underline{\mathbf{A}} = -\underline{\mathbf{J}}$ für eine beliebige Stromdichteverteilung $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')$ ist durch folgendes **Faltungsintegral** gegeben [Jeli87, Krö90, Leu05]:

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' = \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) * \frac{e^{-jk|\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}|}. \quad (8.22)$$

Es muss dabei – wie in Bild 8.2 – über alle Volumenbereiche V' mit Quellen integriert werden; Integrationsvariable ist dabei der Ortsvektor $\mathbf{r}'$ zum Quellpunkt Q . Ferner ist $\mathbf{r}$ der Ortsvektor zum betrachteten Aufpunkt P . Der Abstand zwischen Quellpunkt und Aufpunkt wird mit $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ bezeichnet. Die Wellenzahl wird mit $k = 2\pi/\lambda = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ abgekürzt.

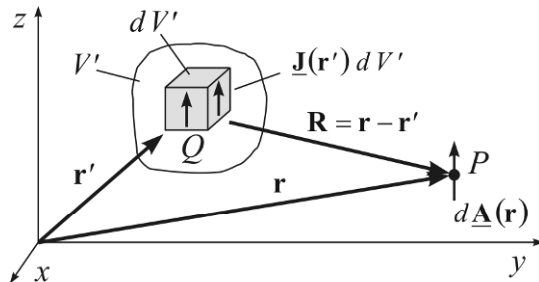


Bild 8.2 Integration (8.22) über alle Gebiete mit Quellströmen $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')$ führt zum Vektorpotenzial in P

² Ludvig **Lorenz** (1829-1891): dän. Physiker (Licht- und Beugungstheorie, Lorenz-Mie-Streuung an einer Kugel, Lorenz-Eichung). L. Lorenz wird häufig mit dem niederld. Physiker H.A. Lorentz verwechselt [Jac02], weshalb in vielen Lehrbüchern **irrtümlich** von **Lorentz-Eichung** gesprochen wird.

Das Vektorpotenzial $d\mathbf{A}$ jedes Stromelementes $\mathbf{J}(\mathbf{r}')dV'$ hat überall im Raum die Richtung der Stromdichte $\mathbf{J}$ am Ort $\mathbf{r}'$. Nur die kartesischen Komponenten eines Vektors haben überall im Raum dieselbe Richtung. Zur einfachen Integralberechnung sollte die Quellenverteilung $\mathbf{J}(\mathbf{r}') = J_x(\mathbf{r}')\mathbf{e}_x + J_y(\mathbf{r}')\mathbf{e}_y + J_z(\mathbf{r}')\mathbf{e}_z$ daher in kartesischen Komponenten gegeben sein. Dadurch erhält man das Vektorpotenzial zunächst auch in kartesischen Komponenten $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r})\mathbf{e}_x + A_y(\mathbf{r})\mathbf{e}_y + A_z(\mathbf{r})\mathbf{e}_z$, die man dann in andere Koordinatensysteme – z. B. in Kugelkoordinaten – umrechnen kann.

Den Quotienten in der Integraldarstellung (8.22) des Vektorpotenzials

$$\underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad (8.23)$$

nennt man die **skalare Greensche Funktion** des dreidimensionalen freien Raumes, bei dem keine Randbedingungen im Endlichen zu beachten sind. Man kann also abgekürzt schreiben:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \iiint_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (8.24)$$

oder dargestellt in kartesischen Komponenten:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = & \mathbf{e}_x \iiint_{V'} J_x(\mathbf{r}') \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \\ & + \mathbf{e}_y \iiint_{V'} J_y(\mathbf{r}') \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \\ & + \mathbf{e}_z \iiint_{V'} J_z(\mathbf{r}') \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV'. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Dabei beschreibt $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ die Stromdichteverteilung der eingepprägten Quellströme und die Greensche Funktion $\underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ gibt die Struktur des dreidimensionalen freien Raumes wieder. Man hat es hier – wie auch zu erwarten war – mit einer kugelförmigen Wellenausbreitung zu tun, d. h. von jedem Quellpunkt Q breitet sich radial nach außen gerichtet eine neue Elementarwelle aus. Die jeweilige Ausbreitungsrichtung ist durch folgenden Einheitsvektor gegeben:

$$\mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (8.26)$$

Physikalische Interpretation:

Die Wirkung jedes Stromelementes $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ nimmt nach (8.22) umgekehrt proportional zum Abstand $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ab und ist entsprechend dem Phasenfaktor im Exponenten der Exponentialfunktion um die Laufzeit $\tau = R/c$ aufgrund der endlichen Lichtgeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ verzögert. Man bezeichnet deshalb das Vektorpotenzial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ auch als **retardiertes Potenzial**, aus dem man durch Differenziation – wie oben gezeigt wurde – wieder die Feldstärken $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ ableiten kann. Man beachte dabei, dass nicht etwa die Felder, sondern das Vektorpotenzial retardiert werden muss! Eine zweite mögliche Lösung von (8.20) wird **avanciertes Potenzial** genannt und unterscheidet sich von (8.22) durch ein anderes Vorzeichen im Exponenten. Diese Lösung ist auszuschließen, da sie gegen das Kausalitätsprinzip verstößt. Die Phase muss stets nachteilend – also negativ – sein, denn niemals erscheint die Wirkung vor der Ursache.

Zum besseren Verständnis der mathematischen Theorie wollen wir das magnetische Vektorpotenzial $\mathbf{A}$ und die Magnetfeldstärke $\mathbf{H}$ in der Umgebung eines linienförmigen Gleichstroms bestimmen.

Übung 8.2: Geradliniger Stromfaden

- Gegeben sei in Bild 8.3 ein zunächst unendlich langer ($z_1 \rightarrow -\infty$ und $z_2 \rightarrow \infty$) leitender Draht mit verschwindenden Querabmessungen (Dicke sei null).

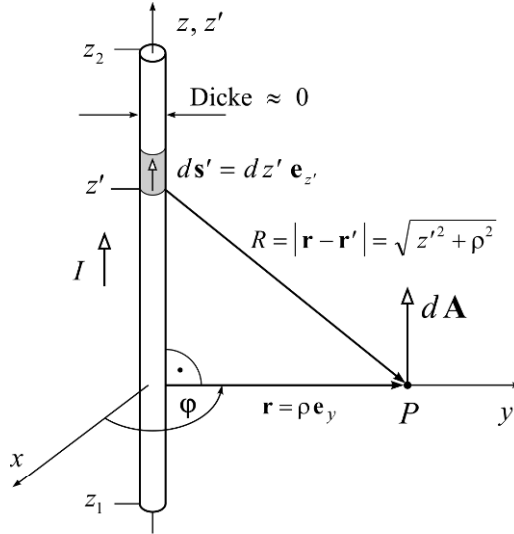


Bild 8.3 Gleichstromführender, geradliniger Stromfaden verschwindender Dicke

- Der Draht werde von einem Gleichstrom I in positiver z -Richtung durchflossen. Bestimmen Sie das magnetische Vektorpotenzial $\mathbf{A}$ und alle Feldkomponenten auf der y -Achse.

Lösung:

Für Gleichstrom einerseits ($k = \omega/c = 0$) und eine linienhafte Stromdichteverteilung andererseits, d. h. $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') dV' = I ds'$, kann man die allgemeine Formel für das Vektorpotenzial

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' \quad (8.27)$$

vereinfachen und erhält:

$$\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_{C'} \frac{ds'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}, \quad (8.28)$$

wobei entlang des linienförmigen Leiters C' zu integrieren ist. Mit $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ folgt daraus:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \text{rot} \int_{C'} \frac{ds'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{I}{4\pi} \int_{C'} \text{rot} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds' \right). \quad (8.29)$$

Benutzt man zur Umformung die bekannte vektoranalytische Beziehung

$$\text{rot}(a\mathbf{b}) = a \text{rot } \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \text{grad } a \quad (8.30)$$

und beachtet dabei, dass die Operation rot nur auf die ungestrichenen Koordinaten wirkt, so ergibt sich:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{I}{4\pi} \int_{C'} ds' \times \text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{I}{4\pi} \int_{C'} \left(\frac{-1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \text{grad} |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \right) \times ds'. \quad (8.31)$$

Mit $\text{grad} |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \mathbf{e}_R \frac{d}{dR} R = \mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ folgt schließlich:

$$\boxed{\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{-I}{4\pi} \int_{C'} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \times ds'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}}. \quad (8.32)$$

Diese Beziehung ist unter der Bezeichnung **Biot-Savartsches Gesetz**³ bekannt und wurde bereits im Jahre 1820 auf experimentellem Wege gefunden. Das Gesetz beschreibt auf exakte Weise das stationäre Magnetfeld in der Umgebung eines Gleichstroms. Wir würden allerdings falsche Ergebnisse erhalten, wenn wir das statische Biot-Savartsche Gesetz dadurch für Wechselströme verallgemeinern wollten, dass wir das Magnetfeld eines hochfrequenten Wechselstroms etwa mit Hilfe der „verzögerten“ Formel

$$\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi} \int_{C'} \underline{I}(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \times ds'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \quad (8.33)$$

berechnen würden. Wie bereits in (8.22) gezeigt wurde, muss vielmehr das Vektorpotenzial al retardiert und dann erst durch Bildung der Rotation das Magnetfeld berechnet werden:

$$\boxed{\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int_{C'} \underline{I}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds'}. \quad (8.34)$$

Nur mit (8.34) findet man das korrekte Ergebnis; (8.33) ist hingegen falsch! Aus Bild 8.3 liest man $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{z'^2 + \rho^2}$ ab und damit folgt nach (8.28) für das Vektorpotenzial nun wieder der Gleichstromanordnung:

$$\mathbf{A}(\rho) = \frac{I \mathbf{e}_z}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{\sqrt{z'^2 + \rho^2}} = \frac{I \mathbf{e}_z}{4\pi} \ln \left(z' + \sqrt{z'^2 + \rho^2} \right) \Big|_{z_1}^{z_2} = \frac{I \mathbf{e}_z}{4\pi} \ln \frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 + \rho^2}}{z_1 + \sqrt{z_1^2 + \rho^2}}. \quad (8.35)$$

Mit $\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A} = \text{rot}(A_z(\rho) \mathbf{e}_z) = -\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial A_z(\rho)}{\partial \rho}$ erhält man die magnetische Feldstärke als

$$H_\varphi(\rho) = -\frac{I}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 + \rho^2}}{z_1 + \sqrt{z_1^2 + \rho^2}} = -\frac{I}{4\pi} \left\{ \frac{\frac{2\rho}{2\sqrt{z_2^2 + \rho^2}}}{z_2 + \sqrt{z_2^2 + \rho^2}} - \frac{\frac{2\rho}{2\sqrt{z_1^2 + \rho^2}}}{z_1 + \sqrt{z_1^2 + \rho^2}} \right\}. \quad (8.36)$$

³ Jean-Baptiste **Biot** (1774-1862): frz. Physiker und Astronom (Schwerkraftmessungen, Schallgeschwindigkeit, Doppelbrechung und Polarisierung von Licht, magnetische Wirkung von Gleichströmen)

Félix **Savart** (1791-1841): frz. Physiker (Optik, Akustik, magnetische Wirkung von Gleichströmen)

Setzt man nun $z_1 = -z_2$, so kann man den Ausdruck weiter vereinfachen und erhält:

$$\begin{aligned}
 H_\varphi(\rho) &= -\frac{I}{4\pi} \left\{ \frac{\frac{\rho}{\sqrt{z_2^2 + \rho^2}}}{z_2 + \sqrt{z_2^2 + \rho^2}} - \frac{\frac{\rho}{\sqrt{z_2^2 + \rho^2}}}{-z_2 + \sqrt{z_2^2 + \rho^2}} \right\} = \\
 &= -\frac{I}{4\pi} \frac{\rho}{\sqrt{z_2^2 + \rho^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{z_2^2 + \rho^2} + z_2} - \frac{1}{\sqrt{z_2^2 + \rho^2} - z_2} \right\} = \\
 &= -\frac{I}{4\pi} \frac{\rho}{\sqrt{z_2^2 + \rho^2}} \frac{\sqrt{z_2^2 + \rho^2} - z_2 - \sqrt{z_2^2 + \rho^2} - z_2}{z_2^2 + \rho^2 - z_2^2} = \\
 &= \frac{I}{2\pi\rho} \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 + \rho^2}}.
 \end{aligned} \tag{8.37}$$

Durch den Grenzübergang $z_2 \rightarrow \infty$ findet man schließlich das bekannte Ergebnis des Magnetfeldes um einen dünnen, unendlich langen, geradlinigen, von Gleichstrom durchflossenen Draht:

$$H_\varphi(\rho) = \lim_{z_2 \rightarrow \infty} \frac{I}{2\pi\rho} \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 + \rho^2}} = \frac{I}{2\pi\rho}. \quad \square \tag{8.38}$$

Das **Biot-Savartsche Gesetz** (8.32) ermöglicht uns die direkte Bestimmung der magnetischen Feldstärke $\mathbf{H}$, die von dünnen stromdurchflossenen Drähten erzeugt wird. Alternativ können wir nach (8.28) zuerst das Vektorpotenzial $\mathbf{A}$ bestimmen, um daraus durch Bildung der Rotation wieder das gleiche $\mathbf{H}$ -Feld zu erlangen. Nun ist es allerdings so, dass wegen des Vektorproduktes das Integral für $\mathbf{H}$ gewöhnlich komplizierter ist als dasjenige für $\mathbf{A}$, wie aus der Gegenüberstellung in Tabelle 8.2 deutlich wird.

Tabelle 8.2 Magnetfelder linienhafter Gleichstromverteilungen

Biot-Savartsches Gesetz	Vektorpotenzial
$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{-I}{4\pi} \int_{C'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{s}'}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' ^3}$	$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_{C'} \frac{d\mathbf{s}'}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' }$ $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$

Man beachte:

- Für einfache Feldprobleme hoher Symmetrie kann zuweilen die Berechnung mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes doch schneller sein [Pur89].
- Auch falls sich $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv 0$ an bestimmten Raumpunkten $\mathbf{r}$ ergeben würde, muss man dort auf die direkte Berechnung des $\mathbf{H}$ -Feldes zurückgreifen, da sonst eine Rotationsbildung nicht mehr möglich ist. Ein Beispiel dafür ist die Berechnung des Magnetfeldes auf der Achse eines symmetrischen Kreisstroms, auf der zwar das Vektorpotenzial – nicht aber das Magnetfeld – verschwindet.

8.2.2 Elektrisches Vektorpotenzial

Mit dem magnetischen Vektorpotenzial $\underline{A}$ erfasst man alle Beiträge elektrischer Stromquellen $\underline{J}$ zum elektromagnetischen Feld. In entsprechender Weise lassen sich auch die Beiträge magnetischer Stromquellen $\underline{M}$ berechnen.

- Wir nehmen dazu an, dass überall $\underline{J} = 0$ ist und im homogenen Raum nur magnetische Stromquellen $\underline{M}$ eingepreßt sind. Dann lauten die Feldgleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \underline{H} &= j \omega \varepsilon \underline{E} \\ -\operatorname{rot} \underline{E} &= j \omega \mu \underline{H} + \underline{M}. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Dieses neue Differenzialgleichungssystem geht aus dem zuvor in (8.15) behandelten formal hervor, wenn man dort ersetzt:

$\underline{H}$	durch	$-\underline{E}$
$\underline{E}$	durch	$\underline{H}$
$\underline{J}$	durch	$\underline{M}$
ε	durch	μ
μ	durch	ε .

Diese Korrespondenzen werden üblicherweise als **Fitzgeraldsche Transformation**⁴ bezeichnet. Durch Anwendung dieser Transformationsvorschriften, die dadurch ergänzt werden, dass man das magnetische Vektorpotenzial $\underline{A}$ durch das so genannte **elektrische Vektorpotenzial** $\underline{F}$ ersetzt, gewinnt man eine Lösung des neuen Systems der Maxwell'schen Gleichungen, die linear unabhängig von der Ursprünglichen ist. Man erspart sich so eine nochmalige Ausführung der gesamten Herleitung. Die dualen Rechenschritte sind in Tabelle 8.3 zusammengefasst.

Tabelle 8.3 Duale Gleichungen und Größen (Fitzgeraldsche Transformation)

Felder mit elektrischen Stromquellen	Felder mit magnetischen Stromquellen
$\operatorname{rot} \underline{H} = j \omega \varepsilon \underline{E} + \underline{J}$	$-\operatorname{rot} \underline{E} = j \omega \mu \underline{H} + \underline{M}$
$-\operatorname{rot} \underline{E} = j \omega \mu \underline{H}$	$\operatorname{rot} \underline{H} = j \omega \varepsilon \underline{E}$
$\underline{H} = \operatorname{rot} \underline{A}$	$\underline{E} = -\operatorname{rot} \underline{F}$
$\underline{E} = \frac{1}{j \omega \varepsilon} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{A} + k^2 \underline{A})$	$\underline{H} = \frac{1}{j \omega \mu} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{F} + k^2 \underline{F})$
$\nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = -\underline{J}$	$\nabla^2 \underline{F} + k^2 \underline{F} = -\underline{M}$
$\underline{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \underline{J}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk \mathbf{r}-\mathbf{r}' }}{ \mathbf{r}-\mathbf{r}' } dV'$	$\underline{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \underline{M}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk \mathbf{r}-\mathbf{r}' }}{ \mathbf{r}-\mathbf{r}' } dV'$

⁴ George Francis **Fitzgerald** (1851-1901): irischer Physiker (Weiterentwicklung der Maxwell'schen elektromagnetischen Lichttheorie, Deutung für das negative Ergebnis des Michelson-Versuchs durch Annahme einer relativistischen Längenkontraktion bewegter Körper)

- Im **Gesamtfeld** überlagern sich – aufgrund der Linearität der Maxwell'schen Gleichungen – die Felder der elektrischen und magnetischen Stromquellen gemäß:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}} &= -\operatorname{rot} \underline{\mathbf{F}} + \frac{1}{j \omega \varepsilon} \left(\operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{\mathbf{A}} + k^2 \underline{\mathbf{A}} \right) \\ \underline{\mathbf{H}} &= \operatorname{rot} \underline{\mathbf{A}} + \frac{1}{j \omega \mu} \left(\operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{\mathbf{F}} + k^2 \underline{\mathbf{F}} \right).\end{aligned}\quad (8.40)$$

Nun stellt diese Partikulärlösung der inhomogenen vektoriellen Helmholtz-Gleichung nicht unbedingt immer die allgemeinste Lösung im unbegrenzten homogenen Raum mit Quellen dar. Es können nämlich Felder hinzukommen, die von Quellen außerhalb des betrachteten Gebietes stammen, die also in diesem Gebiet quellenfrei sind. Diese zusätzlichen Felder sind deshalb Lösungen der quellenfreien Feldgleichungen⁵

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} &= j \omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}} \\ -\operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}} &= j \omega \mu \underline{\mathbf{H}}.\end{aligned}\quad (8.41)$$

Man kann sie auch aus magnetischen oder elektrischen Vektorpotenzialen ableiten, nämlich solchen, die die homogenen vektoriellen Helmholtz-Gleichungen erfüllen:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{A}} + k^2 \underline{\mathbf{A}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \nabla^2 \underline{\mathbf{F}} + k^2 \underline{\mathbf{F}} = 0. \quad (8.42)$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen vektoriellen Helmholtz-Gleichung setzt sich nun aus einer Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung zusammen.

- Die homogene Gleichung löst man im Allgemeinen durch Separation mit Hilfe eines Bernoullischen Produktansatzes, während
- die inhomogene Gleichung durch die Integrale aus Tabelle 8.3 erfüllt wird.

8.2.3 Darstellung der Feldstärken

Aus den Quellintegralen für die Vektorpotenziale

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) &= \iiint_{V'} \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \\ \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) &= \iiint_{V'} \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{r}') \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV',\end{aligned}\quad (8.43)$$

die wir unter Einführung der skalaren Greenschen Funktion des freien Raumes

$$\underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad (8.44)$$

kompakt geschrieben haben, erhält man durch (8.40) die Feldstärken $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$. Für die weiteren Untersuchungen ist es sinnvoll, eine schon auf Larmor [Lar03] zurückgehende explizite

⁵ Die Lösungen der quellenfreien Feldgleichungen werden auch in abgeschlossenen Gebieten zum Erfüllen von eventuell vorhandenen Randbedingungen im Endlichen benötigt.

Darstellung der Felder zu gewinnen, indem man die Differenziationen nach der *ungestrichenen* Variablen $\mathbf{r}$ unter das Integral zieht und direkt am Integranden ausführt (**Franzsche Formeln**):

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}} &= -\iiint_{V'} \text{rot} [\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{r}') \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dV' + \frac{1}{j\omega\epsilon} \iiint_{V'} (\text{grad div} + k^2) [\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dV' \\ \underline{\mathbf{H}} &= \iiint_{V'} \text{rot} [\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dV' + \frac{1}{j\omega\mu} \iiint_{V'} (\text{grad div} + k^2) [\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{r}') \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] dV'.\end{aligned}\quad (8.45)$$

Wir benutzen folgende vektoranalytische Hilfsformeln aus Tabelle 2.3:

$$\begin{aligned}\text{rot}(\mathbf{A}\Phi) &= \Phi \text{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A} \times \text{grad}\Phi \\ \text{div}(\mathbf{A}\Phi) &= \Phi \text{div}\mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \text{grad}\Phi \\ \text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{rot}\mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot}\mathbf{A},\end{aligned}\quad (8.46)$$

wobei wir beachten, dass die Differenziationen nur auf die ungestrichene Variable $\mathbf{r}$ ausgeführt werden. So erhalten wir die folgenden Zwischenergebnisse (analog für $\underline{\mathbf{M}}$ anstelle $\underline{\mathbf{J}}$):

$$\begin{aligned}\text{rot} [\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] &= -\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \times \text{grad} \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \text{div} [\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] &= \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \cdot \text{grad} \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \text{grad} [\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \cdot \text{grad} \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] &= (\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \text{grad} \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \times \text{rot} \text{grad} \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \\ &= (\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \text{grad} \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}').\end{aligned}\quad (8.47)$$

Damit können die Felddarstellungen (8.45) neu geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}} &= \iiint_{V'} \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{r}') \times \nabla \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \frac{1}{j\omega\epsilon} \iiint_{V'} [(\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \nabla + k^2 \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}')] \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \\ \underline{\mathbf{H}} &= -\iiint_{V'} \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \times \nabla \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + \frac{1}{j\omega\mu} \iiint_{V'} [(\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \nabla + k^2 \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{r}')] \underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV'.\end{aligned}\quad (8.48)$$

Mit $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ und dem Nabla-Operator $\nabla = \mathbf{e}_R \frac{d}{dR}$ wird

$$\nabla \underline{G} = \mathbf{e}_R \frac{d}{dR} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} = -\mathbf{e}_R \left(\frac{1}{R} + jk \right) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} = -\mathbf{e}_R jk \underline{L}_0 \underline{G} \quad (8.49)$$

mit der Abkürzung

$$\boxed{\underline{L}_0(kR) = 1 - \frac{j}{kR}}. \quad (8.50)$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\left[(\underline{\mathbf{J}} \cdot \nabla) \nabla + k^2 \underline{\mathbf{J}} \right] \underline{G} &= \left[\left(\underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{e}_R \frac{d}{dR} \right) \mathbf{e}_R \frac{d}{dR} + k^2 \underline{\mathbf{J}} \right] \underline{G} = \\ &= \left[(\underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{e}_R) \mathbf{e}_R \left(\frac{d^2}{dR^2} - \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right) + \underline{\mathbf{J}} \left(k^2 + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right) \right] \frac{e^{-jkR}}{4\pi R},\end{aligned}\quad (8.51)$$

wobei die Beziehung $(\underline{\mathbf{J}} \cdot \nabla) \mathbf{e}_R = \frac{1}{R} (\underline{\mathbf{J}} - (\underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{e}_R) \mathbf{e}_R)$ benutzt wurde.

Nach Berechnung der Ableitungen in (8.51) erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} \left[(\underline{\mathbf{J}} \cdot \nabla) \nabla + k^2 \underline{\mathbf{J}} \right] \underline{\mathbf{G}} &= \left[(\underline{\mathbf{J}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_R) \underline{\mathbf{e}}_R \left(\frac{3}{R^2} + \frac{3jk}{R} - k^2 \right) - \underline{\mathbf{J}} \left(\frac{1}{R^2} + \frac{jk}{R} - k^2 \right) \right] \underline{\mathbf{G}} = \\ &= \left[-k^2 \underline{L}_2 (\underline{\mathbf{J}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_R) \underline{\mathbf{e}}_R + k^2 \underline{L}_1 \underline{\mathbf{J}} \right] \underline{\mathbf{G}} \end{aligned} \quad (8.52)$$

mit den bequemen Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \underline{L}_1(kR) &= 1 - \frac{j}{kR} - \frac{1}{(kR)^2} \\ \underline{L}_2(kR) &= 1 - \frac{3j}{kR} - \frac{3}{(kR)^2} . \end{aligned} \quad (8.53)$$

Nun können die Felder explizit angegeben werden (siehe auch [Schr85]):

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= - \iiint_{V'} j k \underline{L}_0 \underline{\mathbf{M}} \times \underline{\mathbf{e}}_R \underline{\mathbf{G}} dV' + \frac{k^2}{j \omega \epsilon} \iiint_{V'} \left[-\underline{L}_2 (\underline{\mathbf{J}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_R) \underline{\mathbf{e}}_R + \underline{L}_1 \underline{\mathbf{J}} \right] \underline{\mathbf{G}} dV' \\ \underline{\mathbf{H}} &= \iiint_{V'} j k \underline{L}_0 \underline{\mathbf{J}} \times \underline{\mathbf{e}}_R \underline{\mathbf{G}} dV' + \frac{k^2}{j \omega \mu} \iiint_{V'} \left[-\underline{L}_2 (\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_R) \underline{\mathbf{e}}_R + \underline{L}_1 \underline{\mathbf{M}} \right] \underline{\mathbf{G}} dV' \end{aligned} \quad (8.54)$$

oder nach Einführung des Feldwellenwiderstandes $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ des Freiraums:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= -jk \iiint_{V'} \left[\underline{L}_0 \underline{\mathbf{M}} \times \underline{\mathbf{e}}_R + Z \underline{L}_1 \underline{\mathbf{J}} - Z \underline{L}_2 (\underline{\mathbf{J}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_R) \underline{\mathbf{e}}_R \right] \underline{\mathbf{G}} dV' \\ Z \underline{\mathbf{H}} &= jk \iiint_{V'} \left[Z \underline{L}_0 \underline{\mathbf{J}} \times \underline{\mathbf{e}}_R - \underline{L}_1 \underline{\mathbf{M}} + \underline{L}_2 (\underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_R) \underline{\mathbf{e}}_R \right] \underline{\mathbf{G}} dV' . \end{aligned} \quad (8.55)$$

Bei gegebenen elektrischen und magnetischen Quellstromdichten $\underline{\mathbf{J}}$ und $\underline{\mathbf{M}}$ erhält man durch die Integrale in (8.55) eine **explizite und exakte Darstellung** der gesuchten Strahlungsfelder im homogenen, freien Raum, die im Allgemeinen nur noch numerisch berechnet werden kann. Bequeme Näherungslösungen werden wir in Abschnitt 8.3 besprechen. Die in (8.55) eingeführten Abkürzungen sind in Tabelle 8.4 – der Übersicht halber – noch einmal zusammengestellt.

Tabelle 8.4 Abkürzungen in der Felddarstellung (8.55)

$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$		$Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$
$\underline{L}_0 = 1 - \frac{j}{kR}$	$\underline{L}_1 = 1 - \frac{j}{kR} - \frac{1}{(kR)^2}$	$\underline{L}_2 = 1 - \frac{3j}{kR} - \frac{3}{(kR)^2}$
$\underline{\mathbf{e}}_R = \frac{\underline{\mathbf{R}}}{R} = \frac{\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}'}}{ \underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}' }$		$\underline{\mathbf{G}} = \frac{e^{-jk \underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}' }}{4\pi \underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}' } = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} .$

Die Integraldarstellung (8.55) der Feldstärken ist nur dann gültig, wenn Beobachterpunkt $\underline{\mathbf{r}}$ und Integrationspunkt $\underline{\mathbf{r}'}$ nicht zusammenfallen, d. h. wenn $R = |\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}'| \neq 0$ gilt, da sonst in der Greenschen Funktion $\underline{\mathbf{G}}$ eine Singularität auftreten würde.

8.3 Fernfeldnäherungen

Die Berechnung der Integrale (8.43) für die Vektorpotenziale wird erschwert durch das Auftreten des Aufpunktvektors $\mathbf{r}$ im Integranden. Weiterhin sind, wie in Abschnitt 8.2 gezeigt wurde, die Feldstärken $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ aus den Vektorpotenzialen nur umständlich zu bestimmen. In der Funkübertragung sind Sende- und Empfangsantennen jedoch im Allgemeinen weit voneinander entfernt bzw. gibt es in der Radartechnik meist eine große Distanz zwischen Antenne und Zielobjekt. Dann liegt wie in Bild 8.4 der Aufpunkt P weitab von der Verteilung der Quellen Q innerhalb des Volumens V' . Für diese Verhältnisse lassen sich Näherungen

- für die Integraldarstellungen von $\underline{\mathbf{A}}$ und $\underline{\mathbf{F}}$ angeben
- und auch die Felder $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ können in einfacherer Weise aus den Vektorpotenzialen abgeleitet werden.

Diese Näherungen werden als **Fernfeldnäherungen** bezeichnet. Das Feld, welches dabei gewonnen wird, heißt Fernfeld. Wir wollen es für eine beliebige räumliche Stromdichteverteilung $\underline{\mathbf{J}}$ und $\underline{\mathbf{M}}$ herleiten und uns dann mit dem Gültigkeitsbereich dieser Näherung befassen.

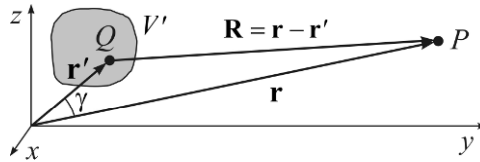


Bild 8.4 Aufpunkt P im Fernfeld eines räumlich begrenzten Quellvolumens V'

Bei Strahlungs- und Streuproblemen nimmt man häufig folgende **Raumaufteilung** vor:

- Gebiet des Nahfeldes,
- Fresnel-Gebiet und
- Gebiet des Fernfeldes, auch Fraunhofer-Gebiet⁶ genannt.

Zwischen diesen drei Gebieten gibt es keine scharf definierten Trennlinien, sie gehen vielmehr fließend ineinander über. Zur Beschreibung des Nahfeldes, das direkt auf der Oberfläche der strahlenden Struktur beginnt, können in den allgemeinen Felddarstellungen (8.55) keine Vernachlässigungen vorgenommen werden. Fresnel- und Fraunhofer-Gebiet werden durch die Näherungen, die wir im Folgenden in den Integranden der Quellenintegrale vornehmen werden, charakterisiert. Für beide Gebiete wird mit der Notation aus Bild 8.4 angenommen, dass gilt:

$$\boxed{kR \gg 1 \quad \text{und} \quad r \gg r'}. \quad (8.56)$$

Die **erste Annahme** besagt, dass der Abstand R zwischen Quellpunkt Q und Beobachterpunkt P größer als etwa eine bis zwei Wellenlängen ist. Dies berechtigt zur Vernachlässigung aller höherer Terme in $1/R$ und die L -Faktoren des vorherigen Abschnitts werden näherungsweise zu eins, d. h. $\underline{L}_0 = \underline{L}_1 = \underline{L}_2 = 1$. Man erhält demnach folgende vereinfachte Felddarstellung:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= -jk \iiint_{V'} [\underline{\mathbf{M}} \times \mathbf{e}_R + Z(\underline{\mathbf{J}} - (\underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{e}_R)\mathbf{e}_R)] \underline{G} dV' \\ Z \underline{\mathbf{H}} &= jk \iiint_{V'} [Z \underline{\mathbf{J}} \times \mathbf{e}_R - (\underline{\mathbf{M}} - (\underline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{e}_R)\mathbf{e}_R)] \underline{G} dV'. \end{aligned} \quad (8.57)$$

⁶ Joseph von **Fraunhofer** (1787-1826): dt. Physiker und Glastechniker (Lichtbeugung, Sonnenspektrum)

Mit Hilfe der Vektoridentität $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ findet man für $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{e}_R$

$$\mathbf{e}_R \times (\mathbf{e}_R \times \mathbf{C}) = \mathbf{e}_R (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_R) = -(\mathbf{C} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_R) \mathbf{e}_R), \quad (8.58)$$

womit man für die Felder in (8.57) auch schreiben kann:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= j k \iiint_{V'} [(\mathbf{e}_R \times \underline{\mathbf{M}}) + Z \mathbf{e}_R \times (\mathbf{e}_R \times \underline{\mathbf{J}})] \underline{G} dV' \\ Z \underline{\mathbf{H}} &= -j k \iiint_{V'} [Z (\mathbf{e}_R \times \underline{\mathbf{J}}) - \mathbf{e}_R \times (\mathbf{e}_R \times \underline{\mathbf{M}})] \underline{G} dV'. \end{aligned} \quad (8.59)$$

Hieraus wird deutlich, dass für $kR \gg 1$ nur noch Komponenten senkrecht zur lokalen Ausbreitungsrichtung $\mathbf{e}_R$ auftreten. Zunächst treten daher auch Komponenten in Richtung des Ortsvektors des Beobachterpunktes $\mathbf{e}_r$ auf. Die zweite Annahme $r \gg r'$ besagt weiter, dass der Abstand des Beobachterpunktes vom Koordinatenursprung sehr viel größer als der Abstand eines Quellpunktes vom Koordinatenursprung ist. Um dies zu gewährleisten, wird der Koordinatenursprung – wie in Bild 8.4 – nahe der Quellenverteilung Q oder sogar in ihrem Zentrum gewählt. Damit wird in guter Näherung der Vektor $\mathbf{r}$, der vom Koordinatenursprung zum Beobachterpunkt P zeigt, parallel zum Vektor $\mathbf{R}$, der vom Quellpunkt Q zum Beobachterpunkt P gerichtet ist. Es gilt also für $r \gg r'$ angenähert:

$$\mathbf{e}_R \parallel \mathbf{e}_r. \quad (8.60)$$

In Richtung des Beobachters treten jetzt keine Radialkomponenten mehr auf. Weil $\mathbf{e}_r$ nicht von der Integrationsvariablen r' abhängt, kann es außerdem vor das Integral gezogen werden:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= j k \mathbf{e}_r \times \iiint_{V'} [\underline{\mathbf{M}} + Z \mathbf{e}_r \times \underline{\mathbf{J}}] \underline{G} dV' \\ Z \underline{\mathbf{H}} &= -j k \mathbf{e}_r \times \iiint_{V'} [Z \underline{\mathbf{J}} - \mathbf{e}_r \times \underline{\mathbf{M}}] \underline{G} dV'. \end{aligned} \quad (8.61)$$

Nach Vergleich mit (8.43) lassen sich in (8.61) wieder die bekannten Vektorpotenziale $\underline{\mathbf{A}}$ und $\underline{\mathbf{F}}$ einführen und es folgt:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= j k \mathbf{e}_r \times [\underline{\mathbf{F}} + Z \mathbf{e}_r \times \underline{\mathbf{A}}] \\ Z \underline{\mathbf{H}} &= -j k \mathbf{e}_r \times [Z \underline{\mathbf{A}} - \mathbf{e}_r \times \underline{\mathbf{F}}]. \end{aligned} \quad (8.62)$$

Nach Ausführen der Vektorprodukte erhalten wir zweckmäßig in sphärischen Komponenten:

$$\begin{aligned} \underline{E}_r = Z \underline{H}_r &= 0 \\ \underline{E}_\vartheta = Z \underline{H}_\varphi &= -j k (Z \underline{A}_\vartheta + \underline{F}_\varphi) \\ \underline{E}_\varphi = -Z \underline{H}_\vartheta &= -j k (Z \underline{A}_\varphi - \underline{F}_\vartheta). \end{aligned} \quad (8.63)$$

Die Feldkomponenten ergeben sich also direkt aus den Komponenten der Vektorpotenziale ohne weitere Differenziationen. Die Felddarstellungen (8.63) gelten mit hoher Genauigkeit sowohl im Fresnel-Gebiet als auch im Fernfeld. $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ sind orthogonal und phasengleich, stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (siehe Bild 8.5) und sind durch den Feldwellenwiderstand des freien Raumes $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ miteinander verknüpft, sodass gilt:

$$\underline{\mathbf{E}} = -\mathbf{e}_r \times Z \underline{\mathbf{H}} \quad \text{bzw.} \quad Z \underline{\mathbf{H}} = \mathbf{e}_r \times \underline{\mathbf{E}}. \quad (8.64)$$

Ntürlich muss sich im dreidimensionalen Raum von einer Punktquelle Q stets eine Kugelwelle ausbreiten, die – im Ganzen gesehen – sphärische Phasenfronten besitzt, welche sich mit der Geschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ radial fortpflanzen. Im scheinbaren Ursprung dieser Kugelwelle befindet sich das Phasenzentrum der Strahleranordnung, das nicht unbedingt mit der geometrischen Mitte der Quellenverteilung übereinstimmen muss. Ausreichend weit von der Strahlungsquelle entfernt ($kR \gg 1$ und $r \gg r'$) erscheint einem lokalen Beobachter (z. B. einer Empfangsantenne) die Phasenfront nur schwach gekrummt und praktisch eben. Die dort messbaren transversalen Felderstrken zeigen alle Eigenschaften einer lokal ebenen Welle (Bild 8.5).

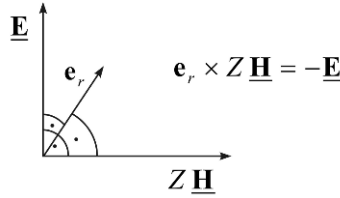


Bild 8.5 Ebene Welle mit Ausbreitung in Richtung $\mathbf{e}_r$ und transversalen Feldkomponenten $\underline{\mathbf{E}}$ bzw. $\underline{\mathbf{H}}$

8.3.1 Fresnel-Näherung

Für $kR \gg 1$ variiert in der Greenschen Funktion $\underline{G} = e^{-jkR}/(4\pi R)$ der rasch oszillierende Zähler viel schneller als der nur langsam veränderliche Nenner. Zum korrekten Erfassen der Phasendrehung müssen wir für den Wert R im Exponenten daher eine bessere Näherung als im Nenner benutzen. Die langsam variierende Amplitude, die gerade durch den Nenner bestimmt ist, wird dagegen durch einen Ansatz $R = r$ bereits ausreichend genau wiedergegeben. Bis hierher sind die Voraussetzungen für das Fresnel- und Fraunhofer-Gebiet gleich. Erst bei der Behandlung der Phase der Greenschen Funktion treten signifikante Unterschiede auf. Für den Abstand R zwischen Quellpunkt Q und Aufpunkt P gilt nämlich [Nol93]:

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2}, \quad (8.65)$$

wobei wir die bequeme Notation $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$ und $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = r'^2$ benutzt haben. Weiter erhalten wir:

$$R = r \sqrt{1 - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2} = r \sqrt{1 - 2 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}'_r \frac{r'}{r} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2} = r \sqrt{1 - \frac{r'}{r} \left(2 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}'_r - \frac{r'}{r}\right)}, \quad (8.66)$$

wobei gemäß der Annahme $r \gg r'$ der zweite und dritte Term in der Wurzel klein gegen eins ist. Entwickeln wir nun die Wurzel in eine Taylor-Reihe bis zum quadratischen Glied in r'/r , so erhalten wir mit $\sqrt{1-x} = 1 - x/2 - x^2/8 - \dots$:

$$R = r \left[1 - \frac{r'}{2r} \left(2 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}'_r - \frac{r'}{r}\right) - \frac{r'^2}{8r^2} \left(2 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}'_r - \frac{r'}{r}\right)^2 \right] = r - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}' + \frac{1}{2r} \left[r'^2 - (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}')^2 \right]. \quad (8.67)$$

Bei quadratischer Näherung (8.67) im Phasenterm (Zähler) und nullter Näherung $R = r$ im Amplitudenterm (Nenner) wird schließlich die Greensche Funktion im **Fresnel-Gebiet**:

$$\underline{G} = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} e^{jk \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} e^{-j \frac{k}{2r} \left[r'^2 - (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}')^2 \right]}. \quad (8.68)$$

8.3.2 Fraunhofer-Näherung

Bricht man die Entwicklung für R schon nach dem linearen Glied ab, so wird anstelle (8.67)

$$R = r - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}', \quad (8.69)$$

und die Greensche Funktion im **Fraunhofer-Gebiet** (Fernfeld) ist

$$\underline{G} = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} e^{jk\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} \quad (8.70)$$

Zusammenfassend sei in Tabelle 8.5 die Approximation des Abstandes R vom Quellpunkt zum Aufpunkt nochmals dargestellt.

Tabelle 8.5 Abstand R innerhalb der Amplitude und der Phase der Greenschen Funktion $\underline{G}$

Amplitude	$R = R_0 = r$
Phase im Fraunhofer-Gebiet	$R = R_1 = r - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'$
Phase im Fresnel-Gebiet	$R = R_2 = r - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}' + \frac{1}{2r} \left[r'^2 - (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}')^2 \right]$

Die *lineare* Entwicklung für R im Fraunhofer-Gebiet kann anhand von Bild 8.6 noch auf eine andere Art anschaulich begründet werden.

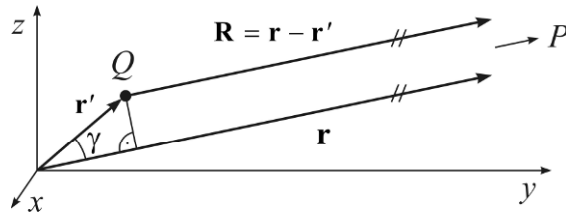


Bild 8.6 Fernfeldsituation paralleler Vektoren $\mathbf{R}$ und $\mathbf{r}$

Es gilt – bei angenommener Parallelität beider Fernfeldstrahlen, d. h. $\mathbf{e}_R \parallel \mathbf{e}_r$ – offenbar die Beziehung:

$$R = r - r' \cos \gamma. \quad (8.71)$$

Mit dem Skalarprodukt $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = r r' \cos \gamma$ kann man aber auch schreiben:

$$R = r - r' \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r r'} = r - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}', \quad (8.72)$$

was gerade wieder die Fernfeldnäherung (8.69) im Fraunhofer-Gebiet darstellt. Sie vernachlässigt gegenüber der Fresnel-Näherung (8.67) alle Terme zweiter Ordnung in r' . Den Approximationsfehler δR der Fraunhofer-Näherung kann man daher wie folgt abschätzen:

$$\delta R = R_1 - R_2 = -\frac{1}{2r} \left[r'^2 - (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}')^2 \right]. \quad (8.73)$$

Im ungünstigsten Fall für $\gamma = \pi/2$, wenn Aufpunkt- und Quellpunktvektor senkrecht aufeinander stehen, gilt $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}' = 0$ und der Betrag des Fehlers wird maximal, d. h. $\delta R = -r'^2/(2r)$. Dieser Fehler geht, mit dem Faktor $-k = -2\pi/\lambda$ behaftet, vorwiegend als Phasenfehler

$$-k \delta R = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{r'^2}{2r} = \frac{\pi r'^2}{\lambda r} \quad (8.74)$$

in die Greensche Funktion ein. Für einen Aufpunkt im Abstand $r = 2r'^2/\lambda$ ist dieser Phasenfehler gerade $\pi/2$; man nennt diesen Abstand den **Rayleigh-Abstand**. Genügend klein, d. h. $-k \delta R \leq \pi/8 \triangleq 22,5^\circ$, ist der Phasenfehler im Allgemeinen nur für Aufpunkte, die weiter als $r = 8r'^2/\lambda$ von den Quellen entfernt liegen. Erst jenseits dieses Abstandes sind die gemachten Fernfeldnäherungen zulässig. Liegt das Zentrum einer symmetrischen strahlenden Anordnung im Koordinatenursprung, so gilt $r' \leq L/2$, wenn L die maximale Linearabmessung der Antenne bezeichnet und man gibt üblicherweise den **Fernfeldabstand** mit

$$\boxed{r \geq \frac{2L^2}{\lambda}} \quad (8.75)$$

an. Man vergleiche (8.75) mit (14.12). Den Fernfeldabstand wollen wir uns in Bild 8.7 am Beispiel einer Linearantenne der Länge L noch geometrisch verdeutlichen.

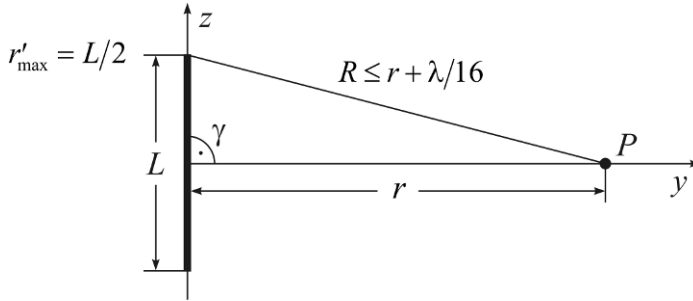


Bild 8.7 Linearantenne der Länge L und Fernfeldabstand r für maximalen Gangunterschied von $\lambda/16$

Der Phasenunterschied zwischen Zentrums- und Randstrahl wird kleiner oder höchstens gleich $\pi/8$, wenn der geometrische Gangunterschied maximal $\lambda/16$ beträgt, d. h. $R \leq r + \lambda/16$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck in Bild 8.7 folgt damit die Beziehung:

$$\sqrt{r^2 + (L/2)^2} \leq r + \lambda/16, \quad (8.76)$$

in der man bei $r \gg L/2$ die Wurzel in eine Taylor-Reihe entwickeln kann:

$$\sqrt{r^2 + (L/2)^2} = r \sqrt{1 + L^2/(4r^2)} \approx r \left(1 + L^2/(8r^2)\right) = r + \frac{L^2}{8r}. \quad (8.77)$$

Damit fordert man $r + L^2/(8r) \leq r + \lambda/16$, woraus wieder die Fernfeldbedingung (8.75) folgt. Das **Fresnel-Gebiet** erstreckt sich dann zwischen dem Rayleigh-Abstand und dem Fernfeldabstand, d. h. im Bereich

$$\boxed{\frac{L^2}{2\lambda} < r < \frac{2L^2}{\lambda}}. \quad (8.78)$$

Aus den für das Fernfeld gemachten Voraussetzungen $kR \gg 1$ und $r \gg r'$ folgt mit $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ auch $kr \gg 1$. Damit erhalten wir eine zweite notwendige **Fernfeldbedingung**:

$$\boxed{r \gg \frac{\lambda}{2\pi}} \quad \text{oder anders ausgedrückt:} \quad \boxed{r \geq 2\lambda}. \quad (8.79)$$

Zur Gültigkeit der gemachten Fernfeldnäherungen müssen stets beide Bedingungen (8.75) und (8.79) erfüllt sein. Man gewährleistet dies durch die Forderungen in Tabelle 8.6.

Tabelle 8.6 Zur Berechnung des Fernfeldabstands bei verschiedenen Antennenabmessungen L

elektrisch kleine Antennen mit $L \leq \lambda$	elektrisch große Antennen mit $L \geq \lambda$
$r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$, d. h. $r \geq 2\lambda$	$r \geq \frac{2L^2}{\lambda} \geq 2\lambda$

Fernfeldbedingungen stellen sich demnach erst mindestens zwei Wellenlängen vom Antennenmittelpunkt entfernt ein – bei elektrisch großen Antennen sogar erst noch weiter, abhängig von der größten Antennenabmessung L .

In Bild 8.8 ist der Strahlungsbereich einer elektrisch großen Kreisapertur mit homogener Phasenbelegung und einem Durchmesser $D \geq \lambda$ dargestellt. Die Zeichnung nimmt etwa einen Wert von $D = 2\lambda$ an. Die Hauptstrahlung der Antenne erfolgt in Richtung der z -Achse. Ab einem Winkel (im Bogenmaß) von ca. $\lambda/(2D)$ sinkt die Strahlungsdichte auf unter die Hälfte ihres Maximalwerts – etwa beim doppelten Winkel, nämlich λ/D , weist sie eine Nullstelle auf.

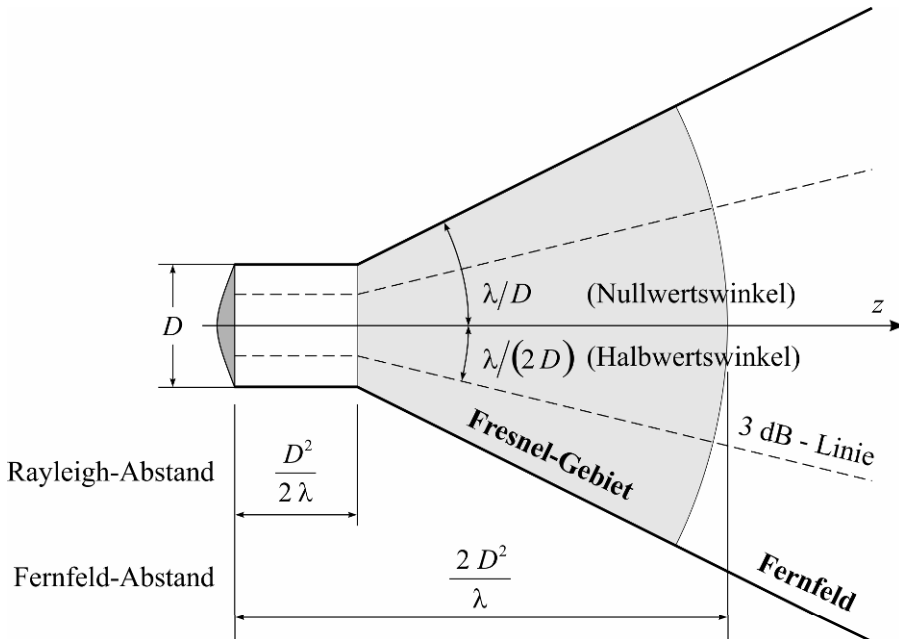


Bild 8.8 Strahlungszonen einer homogen belegten Kreisapertur mit Durchmesser D nach [Zin95]

Im **Nahfeldbereich**, der sich bis zum Rayleigh-Abstand $D^2/(2\lambda)$ erstreckt, befindet sich alle Energie im Wesentlichen innerhalb einer kreiszylindrischen Röhre mit Durchmesser D . Die Energieabstrahlung erfolgt zunächst nahezu parallel, bis sie sich ab dem **Rayleigh-Abstand** in einem kegelförmigen Bereich mit halbem Öffnungswinkel λ/D aufweitet. Die Pfadlängendifferenz zwischen Zentrums- und Randstrahl beträgt am Rayleigh-Abstand gerade $\lambda/4$. Nach Durchlaufen des **Fresnel-Gebietes** mit $D^2/(2\lambda) < r < 2D^2/\lambda$ ist die Pfadlängendifferenz kleiner als $\lambda/16$ und man erreicht den Beginn des **Fernfeldes** mit praktisch ebenen Phasenfronten. Im Fernfeld transportiert die Welle reine Wirkleistung, da E- und H-Felder in Phase sind.

Übung 8.3: Fernfeldabstand

- Die Bodenantenne einer Satellitenstrecke habe einen Durchmesser von $D = 15 \text{ m}$. In welcher Mindestentfernung gelten bei einer Frequenz von $f = 14 \text{ GHz}$ die Fernfeldbeziehungen?

- Lösung:**

Für einen Phasenfehler kleiner $\pi/8$ muss der Abstand r von der Antenne größer sein als $2D^2/\lambda$. Mit $D = 15 \text{ m}$ und $\lambda = 2,14 \text{ cm}$ folgt

$$r \geq \frac{2 \cdot 15^2 \text{ m}^2}{0,0214 \text{ m}} \approx 21 \text{ km}. \quad (8.80)$$

Im praktischen Einsatz wird sich der Satellit daher stets im Fernfeld der Bodenstationsantenne befinden. In diesem Abstand r gilt natürlich auch $r \gg \lambda/(2\pi)$.

- Bemerkung:**

In der **Optik** ist für die Interferenzerscheinungen, die sich im Fernfeldbereich einstellen, der Name Fraunhofer-Beugung üblich. Die Interferenzerscheinungen für kleinere Abstände werden Fresnel-Beugung genannt. Sie können nur mit einer Näherung zweiter Ordnung für $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ berechnet werden (Tabelle 8.5). $\square$

8.3.3 Fernfeldabstand und Antennengewinn

Wie wir bereits gesehen haben, breitet sich im Fernfeld jeglicher Quellenverteilung die Energie in Form einer lokal ebenen Welle aus. Die Feldvektoren $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ schwingen dort phasengleich, sind transversal und stehen senkrecht aufeinander. Meist werden zur Abschätzung des Fernfeldabstands die Faustformeln aus Tabelle 8.6 verwendet, in die allein die größte Linearabmessung L der strahlenden Quelle eingeht. Tatsächlich hängt der wirkliche Beginn des Fernfeldes noch zusätzlich von der räumlichen Verteilung nach Betrag und Phase der Quellströme ab, weswegen die einfache Beziehung $r \geq 2L^2/\lambda$ nicht immer verlässliche Werte liefern kann. In Kapitel 7 haben wir den Antennengewinn G eingeführt – sein Wert hängt sowohl von der Größe der Antenne als auch von der Strombelegung auf ihrer Oberfläche ab. Wir wollen daher versuchen, den Fernfeldabstand über den Antennengewinn auszudrücken.

Zunächst betrachten wir den infinitesimal kurzen Hertzschen Dipol. Er gehört natürlich zur Klasse elektrisch kurzer Antennen und sein Fernfeld stellt sich für Abstände

$$r \gg \lambda/(2\pi) \quad (8.81)$$

ein. Mit dem Gewinn des Hertzschen Dipols $G = 3/2$ kann man aber auch schreiben:

$$r \gg \frac{2}{3} G \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{G \lambda}{3\pi}. \quad (8.82)$$

Eine Ungleichung dieser Art sieht man im Allgemeinen als ausreichend erfüllt an, wenn die eine Seite um einen Faktor von etwa zehn größer ist als die andere, d. h. man fordert etwa:

$$\boxed{r \geq G \lambda}. \quad (8.83)$$

In einem Abstand $r \geq G \lambda$ vom Hertzschen Dipol kann man also Fernfeldbedingungen annehmen. Diese Bedingung, in der als Antennengröße nur noch der Gewinn G auftritt, ist nicht mehr direkt von der Antennenabmessung L abhängig.

- Darum kann sie gleichermaßen für elektrisch kurze wie auch für lange Antennen verwendet werden.

In den meisten Fällen erhält man durch die Beziehung $r \geq G \lambda$ eine größere Schätzung für den Fernfeldabstand als durch $r \geq 2 L^2 / \lambda$. Das spiegelt die bekannte Tatsache wieder, dass gerade bei Hochgewinnantennen das Fernfeld sich erst später ausbildet, als man nach der klassischen Formel $r \geq 2 L^2 / \lambda$ erwarten würde. Dass die Einführung des linearen Antennengewinns G – und nicht etwa G^2 , $\sqrt{G}$ o. ä. – in die Fernfeldformel gerechtfertigt war, wollen wir in Übung 8.4 zeigen.

Übung 8.4: Fernfeldabstand bei einer Reflektorantenne

- Überprüfen Sie die Fernfeldformel $r \geq G \lambda$ bei einer Reflektorantenne, deren Gewinn G vom Flächenwirkungsgrad q , der Wellenlänge λ und dem Durchmesser D wie folgt abhängt (siehe Übung 7.5):

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_W = \frac{4\pi}{\lambda^2} q \frac{\pi D^2}{4} = q \left(\frac{\pi D}{\lambda} \right)^2. \quad (8.84)$$

- **Lösung:**

Aus $r \geq G \lambda$ folgt sofort:

$$r \geq q \left(\frac{\pi D}{\lambda} \right)^2 \lambda = q \frac{\pi^2 D^2}{\lambda}. \quad (8.85)$$

Ein typischer Flächenwirkungsgrad – z. B. bei Richtfunkantennen – ist $q = 0,51$ und es gilt dann näherungsweise:

$$r \geq 5 D^2 / \lambda. \quad (8.86)$$

Man sieht, wie der Fernfeldabstand bei einer Reflektorantenne nicht nur von der Antennengröße D sondern auch von der Amplituden- und Phasenbelegung der Apertur, die direkt den Flächenwirkungsgrad q bestimmen, abhängt (Abschnitt 16.6). Die klassische Abschätzung mit gleicher Proportionalität $r \propto D^2 / \lambda$ – aber mit anderem Vorfaktor –

$$\boxed{r \geq 2 D^2 / \lambda} \quad (8.87)$$

berücksichtigt nur die geometrischen Abmessungen und nicht die Art der Belegung. Sie liefert im Allgemeinen kleinere Schätzwerte für den Beginn des Fernfeldes als die Abschätzung über den Gewinn:

$$\boxed{r \geq G \lambda}. \quad (8.88)$$

Welche Faustformel nun „besser“ ist, kann a priori schwer entschieden werden. Man kann Antennen finden, bei denen beide Abschätzungen versagen. Insbesondere stellt sich bei Antennen mit sehr niedrigen Nebenkeulen oft erst wesentlich später eine entfernungsunabhängige Charakteristik ein. Zur Sicherheit kann man den tatsächlichen Beginn des Fernfeldes bei jeder Testantenne durch separate Messungen experimentell überprüfen [Thu98]. $\square$

8.3.4 Fernfelder und Fourier-Transformation

Nachdem wir uns mit dem Gültigkeitsbereich der Fernfeldnäherungen befasst haben, wollen wir noch einmal zur Darstellung der Vektorpotenziale durch die Quellintegrale (8.43) zurückkehren, in die wir die Greensche Funktion (8.70) des Fraunhofer-Bereichs einsetzen. Der Faktor $e^{-jk r}/(4\pi r)$ ist dabei vom Quellpunktvektor $\mathbf{r}'$ unabhängig und kann jeweils vor die Integrale gezogen werden:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) &= \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \iiint_{V'} \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') e^{jk \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} dV' \\ \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) &= \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \iiint_{V'} \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{r}') e^{jk \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} dV'.\end{aligned}\quad (8.89)$$

Die Integranden hängen jetzt nur noch von den Quellpunktkoordinaten $\mathbf{r}'$ und der Aufpunkttrichtung $\mathbf{e}_r$ ab, aber nicht mehr vom Aufpunktabstand r . Die Volumenintegrale lassen sich damit meistens viel einfacher auswerten. Wenn wir es nicht mit räumlich verteilten Quellströmen, sondern mit flächen- oder linienhaft verteilten Erregungen zu tun haben, gehen gemäß

$$\boxed{\underline{\mathbf{J}} dV' \triangleq \underline{\mathbf{J}}_F dA' \triangleq \underline{I} ds'} \quad (8.90)$$

die Volumenintegrale in einfachere Oberflächen- oder gar Linienintegrale über. Häufig drückt man die Quellstromdichte $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') = \underline{J}_x(x', y', z') \mathbf{e}_x + \underline{J}_y(x', y', z') \mathbf{e}_y + \underline{J}_z(x', y', z') \mathbf{e}_z$ kartesisch aus – was eine bequemere Integration ermöglicht – während die Lage des Aufpunktes zweckmäßig in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) beschrieben wird. Zur Auswertung von (8.89) wird das Skalarprodukt $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'$ benötigt. Mit der uns aus Tabelle 2.5 bereits bekannten Beziehung $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \vartheta$ und dem Ortsvektor $\mathbf{r}' = x' \mathbf{e}_x + y' \mathbf{e}_y + z' \mathbf{e}_z$ folgt $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}' = x' \sin \vartheta \cos \varphi + y' \sin \vartheta \sin \varphi + z' \cos \vartheta$, womit wir nun schreiben können:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) &= \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \iiint \underline{\mathbf{J}}(x', y', z') e^{jk(x' \sin \vartheta \cos \varphi + y' \sin \vartheta \sin \varphi + z' \cos \vartheta)} dx' dy' dz' \\ \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) &= \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \iiint \underline{\mathbf{M}}(x', y', z') e^{jk(x' \sin \vartheta \cos \varphi + y' \sin \vartheta \sin \varphi + z' \cos \vartheta)} dx' dy' dz'.\end{aligned}\quad (8.91)$$

Die Vektorpotenziale im Fraunhofer-Gebiet sind somit durch eine räumlich dreidimensionale **Fourier-Transformation** mit den Quellstromdichten verknüpft. Damit kann man zur Berechnung der Quellintegrale in vielen Fällen auf Korrespondenztabelle der Fourier-Transformation zurückgreifen. Wegen der kartesischen Darstellung der Quellstromdichten erhält man zunächst auch ein kartesisches Vektorpotenzial $\underline{\mathbf{A}} = \underline{A}_x \mathbf{e}_x + \underline{A}_y \mathbf{e}_y + \underline{A}_z \mathbf{e}_z$, das man nach Tabelle 2.5 in sphärische Komponenten umrechnet ($\underline{\mathbf{F}}$ entsprechend):

$$\underline{A}_\vartheta = \underline{A}_x \cos \vartheta \cos \varphi + \underline{A}_y \cos \vartheta \sin \varphi - \underline{A}_z \sin \vartheta \quad \text{und} \quad \underline{A}_\varphi = -\underline{A}_x \sin \varphi + \underline{A}_y \cos \varphi. \quad (8.92)$$

Mit (8.63) erhalten wir schließlich eine **Fernfelddarstellung**, die wir in Kapitel 13 zur Berechnung verschiedener Aperturstrahler noch häufig anwenden werden:

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{E}_\vartheta &= Z \underline{H}_\varphi = jk \left(\underline{F}_x \sin \varphi - \underline{F}_y \cos \varphi - Z \cos \vartheta (\underline{A}_x \cos \varphi + \underline{A}_y \sin \varphi) + Z \underline{A}_z \sin \vartheta \right) \\ \underline{E}_\varphi &= -Z \underline{H}_\vartheta = jk \left(\cos \vartheta (\underline{F}_x \cos \varphi + \underline{F}_y \sin \varphi) - \underline{F}_z \sin \vartheta + Z (\underline{A}_x \sin \varphi - \underline{A}_y \cos \varphi) \right).\end{aligned}} \quad (8.93)$$

In Tabelle 8.7 wollen wir die Vorgehensweise nochmals übersichtlich zusammenfassen.

Tabelle 8.7 Berechnung der transversalen Fernfelder im Fraunhofer-Bereich aus den Quellstromdichten

Abstand zu den Quellen:	$r \geq 2 \lambda \quad \underline{\text{und}} \quad r \geq 2 \frac{L^2}{\lambda}$
<u>Vektorpotenziale:</u>	$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{-jk r}}{4 \pi r} \iiint_{V'} \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') e^{jk \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} dV'$ $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{-jk r}}{4 \pi r} \iiint_{V'} \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{r}') e^{jk \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} dV'$
Quellstromdichten:	$\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') = \mathbf{e}_x \underline{J}_x(\mathbf{r}') + \mathbf{e}_y \underline{J}_y(\mathbf{r}') + \mathbf{e}_z \underline{J}_z(\mathbf{r}')$
Vereinfachungen:	$\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') dV' \triangleq \underline{\mathbf{J}}_F(\mathbf{r}') dF' \triangleq \underline{\mathbf{I}}(\mathbf{r}') d\mathbf{s}'$
Radialer Einheitsvektor:	$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \vartheta$
Quellvektor:	$\mathbf{r}' = \mathbf{e}_x x' + \mathbf{e}_y y' + \mathbf{e}_z z'$
Skalarprodukt:	$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}' = x' \sin \vartheta \cos \varphi + y' \sin \vartheta \sin \varphi + z' \cos \vartheta$
Ergebnis der Integration:	$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x \underline{A}_x(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_y \underline{A}_y(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_z \underline{A}_z(\mathbf{r})$ $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x \underline{F}_x(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_y \underline{F}_y(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_z \underline{F}_z(\mathbf{r})$
Kugelkomponenten:	$\underline{A}_\vartheta = \underline{A}_x \cos \vartheta \cos \varphi + \underline{A}_y \cos \vartheta \sin \varphi - \underline{A}_z \sin \vartheta$ $\underline{F}_\vartheta = \underline{F}_x \cos \vartheta \cos \varphi + \underline{F}_y \cos \vartheta \sin \varphi - \underline{F}_z \sin \vartheta$ $\underline{A}_\varphi = -\underline{A}_x \sin \varphi + \underline{A}_y \cos \varphi$ $\underline{F}_\varphi = -\underline{F}_x \sin \varphi + \underline{F}_y \cos \varphi$
<u>Fernfeldkomponenten:</u>	$\underline{E}_r = Z \underline{H}_r = 0$ $\underline{E}_\vartheta = Z \underline{H}_\varphi = -jk \left(Z \underline{A}_\vartheta + \underline{F}_\varphi \right)$ $\underline{E}_\varphi = -Z \underline{H}_\vartheta = -jk \left(Z \underline{A}_\varphi - \underline{F}_\vartheta \right)$

Die formale Berechnung der Strahlungsfelder verläuft anhand der Tabelle 8.7 von oben nach unten. Wir wollen den Rechengang in Übung 8.5 am Beispiel des Hertzschen Dipols erläutern.

Übung 8.5: Fernfelder des Hertzschen Dipols

- Berechnen Sie anhand Tabelle 8.7 die Fernfelder eines Hertzschen Dipols. Orientieren Sie den Dipol jeweils parallel zu einer der drei Achsen des kartesischen Koordinatensystems.

- **Lösung:**

Ein Dipol in z-Richtung mit der Länge $l \ll \lambda/4$ hat einen räumlich konstanten Strombelag, sein Vektorpotenzial wird daher:

$$\underline{A}(\mathbf{r}) = \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \int_{z'=-l/2}^{l/2} \underline{I} \mathbf{e}_z e^{jk z' \cos \vartheta} dz' = \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \underline{I} \mathbf{e}_z \frac{e^{jk z' \cos \vartheta}}{jk \cos \vartheta} \Big|_{z'=-l/2}^{l/2}. \quad (8.94)$$

Für kleine Strahlerlnge $kl \rightarrow 0$ folgt aus (8.94):

$$\underline{A}_z = \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \underline{I} \frac{2j \sin((kl/2) \cos \vartheta)}{jk \cos \vartheta} = \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \underline{I} l \quad (\text{z-Dipol}). \quad (8.95)$$

Das Vektorpotenzial ist parallel zum Quellstrom. Ohne nochmalige Rechnung folgt daher:

$$\underline{A}_x = \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \underline{I} l \quad (\text{x-Dipol}) \quad (8.96)$$

$$\underline{A}_y = \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \underline{I} l \quad (\text{y-Dipol}). \quad (8.97)$$

Die Umrechnung in sphärische Komponenten führt auf:

$$\underline{A}_\vartheta = -\underline{A}_z \sin \vartheta \quad (\text{z-Dipol}), \quad (8.98)$$

$$\underline{A}_\vartheta = \underline{A}_x \cos \vartheta \cos \varphi \quad (\text{x-Dipol}), \quad (8.99)$$

$$\underline{A}_\varphi = -\underline{A}_x \sin \varphi$$

$$\underline{A}_\vartheta = \underline{A}_y \cos \vartheta \sin \varphi \quad (\text{y-Dipol}). \quad (8.100)$$

$$\underline{A}_\varphi = \underline{A}_y \cos \varphi$$

Schließlich finden wir die gesuchten Fernfeldstrken (siehe auch [Mot86]):

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}^{(\text{z-Dipol})} &= jk Z \underline{I} l \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta \\ \underline{\mathbf{E}}^{(\text{x-Dipol})} &= -jk Z \underline{I} l \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} (\mathbf{e}_\vartheta \cos \vartheta \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi) \\ \underline{\mathbf{E}}^{(\text{y-Dipol})} &= -jk Z \underline{I} l \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} (\mathbf{e}_\vartheta \cos \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi), \end{aligned} \quad (8.101)$$

aus denen man leicht wieder die Richtcharakteristiken der jeweiligen Gesamtfeldstärke aus Tabelle 7.1 ableiten kann. $\square$

8.4 Ausstrahlungsbedingung

Von allen möglichen Lösungen der Feldgleichungen kommen für ein bestimmtes Antennenproblem nur jene in Betracht, welche die Randbedingungen an der Antenne und die Stetigkeitsbedingungen an möglichen Grenzflächen im Strahlungsfeld erfüllen. Daneben ist im freien, dreidimensionalen Raum noch die so genannte Ausstrahlungsbedingung zu beachten, die nur solche Lösungen zulässt, bei denen die Energieströmung von der Antenne weg in den freien Raum hinaus erfolgt (auslaufende Welle) und die Gesamtenergie endlich bleibt. Es genügt hierzu allerdings nicht, im Unendlichen nur das bloße Verschwinden aller Feldkomponenten zu fordern. Zusätzlich muss eine – vom Ursprung ausgehende – gekrümmte, sphärische Phasenfront bei ihrer Ausbreitung zunehmend flacher werden und sie kann daher im Unendlichen als gänzlich krümmungsfrei und lokal eben betrachtet werden. Die Feldvektoren $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ sind – bei verlustfrei angenommenen Medien – für $r \rightarrow \infty$ in Phase und stehen senkrecht aufeinander. Darum kann mit (8.64) die folgende **Ausstrahlungsbedingung** formuliert werden:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r (\mathbf{E} + \mathbf{e}_r \times Z \mathbf{H}) = 0 \quad (8.102)$$

Mit $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ wird der Feldwellenwiderstand des freien Raumes bezeichnet. Die Ausstrahlungsbedingung (8.102) besagt anschaulich, dass die Feldstärken für $r \rightarrow \infty$ wie $1/r$ gegen null gehen und sie sich in großem Abstand von allen Strahlungsquellen wie ebene Wellenfelder verhalten. Das unendlich ferne Strahlungsfeld wird somit transversal mit ebenen Phasenfronten. Analog zur Darstellung der Ausstrahlungsbedingung mittels der Felder kann man äquivalente Forderungen auch für die Vektorpotenziale $\mathbf{A}$ und $\mathbf{F}$ stellen:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} + jk \mathbf{A} \right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} + jk \mathbf{F} \right) = 0 \quad (8.103)$$

Die Formulierung (8.103) wird Sommerfeldsche⁷ Ausstrahlungsbedingung genannt [Som77]. In der Tat wird sie nur von einer fortlaufenden Kugelwelle $\mathbf{A} \propto e^{-jk r}/r$, dagegen nicht von einer rücklaufenden Welle $\mathbf{A} \propto e^{jk r}/r$ erfüllt, wie Übung 8.6 zeigt.

Übung 8.6: Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung

- Zeigen Sie, dass eine auslaufende Kugelwelle mit einem Fernfeld-Vektorpotenzial $\mathbf{A} \propto e^{-jk r}/r$ die Ausstrahlungsbedingung von Sommerfeld erfüllt.
- **Lösung:**

Nach Einsetzen von $\mathbf{A} \propto e^{-jk r}/r$ in (8.103) folgt sofort:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-jk r}}{r} + jk \frac{e^{-jk r}}{r} \right) &= \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(-\frac{jk}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) e^{-jk r} = \\ &= - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{e^{-jk r}}{r} = 0. \quad \square \end{aligned} \quad (8.104)$$

⁷ Arnold Johannes Wilhelm **Sommerfeld** (1868-1951): dt. Physiker (Kreiseltheorie, Wellenausbreitung, Beugung, Atombau und Spektrallinien, quantenmechanische Elektronentheorie)

Eine Kugelwelle transportiert ihre Leistung radial nach außen und verteilt diese Leistung auf immer größer werdende Kugelschalen, deren Oberfläche $O = 4\pi r^2$ mit dem Quadrat vom Radius r anwächst. Die Leistungsdichte, d. h. der Poyntingsche Vektor $\underline{S}(\mathbf{r}) = \underline{E}(\mathbf{r}) \times \underline{H}^*(\mathbf{r})/2$, muss demnach quadratisch mit dem Radius abnehmen $\underline{S}(\mathbf{r}) \propto 1/r^2$. So leuchtet es ein, dass es wegen dieses rein geometrischen Effekts im Dreidimensionalen keine Ausstrahlung geben kann, die im Unendlichen stärker als $1/r$ (d. h. stärker als eine Kugelwelle) gegen null geht, wenn man von Dämpfungen im Ausbreitungsmedium mit komplexem $k = \beta - j\alpha$ absieht. Man kann sogar eine noch allgemeinere Ausstrahlungsbedingung für auslaufende Wellen im n-dimensionalen Raum aufstellen [Som77]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial r} + j k \underline{A} \right) = 0, \quad (8.105)$$

analog auch für das elektrische Vektorpotenzial $\underline{F}$. Im eindimensionalen Fall (Wellenausbreitung auf einer geradlinigen Leitung in Richtung der positiven z-Achse) erhält man mit $n = 1$:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial z} + j k \underline{A} \right) = 0. \quad (8.106)$$

An die Stelle einer Kugelwelle $\underline{A} \propto e^{-jkr}/r$ tritt hier eine ebene Phasenfront $\underline{A} \propto e^{-jkz}$. Analog zur Ausstrahlungsbedingung formuliert man bei Empfangsantennen eine **Einstrahlungsbedingung** für einlaufende Wellen $\underline{A} \propto e^{jkr}/r$. Sie lautet im Dreidimensionalen:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \underline{A}}{\partial r} - j k \underline{A} \right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \underline{F}}{\partial r} - j k \underline{F} \right) = 0. \quad (8.107)$$

Erst das Hinzukommen der Rand-, Stetigkeits- und Ausstrahlungsbedingung macht die Maxwellschen Gleichungen zu einem sachgemäß gestellten (eindeutig lösbaren) Randwertproblem. Außerdem ist noch die Erfüllung der so genannten Kantenbedingung gesondert zu überprüfen.

8.5 Kantenbedingung

Neben der Ausstrahlungsbedingung kommt für die strenge Beugungslösung an unendlich gut leitenden dünnen Schirmen oder keilförmigen Streukörpern noch die so genannte Kantenbedingung hinzu. Wir betrachten dazu in Bild 8.9 einen metallischen Keil mit scharfer geradliniger Kante C , der für $\varphi_0 \rightarrow 2\pi$ in einen unendlich dünnen Schirm übergeht (siehe auch Bild 5.21).

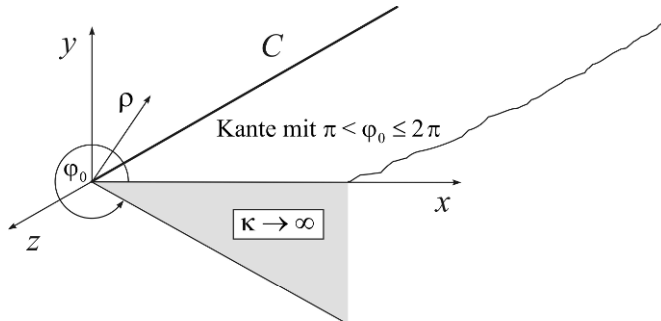


Bild 8.9 Zur Erläuterung von Feldsingularitäten an unendlich scharfen Kanten

Die Kante diene als z -Achse eines zylindrischen Koordinatensystems (ρ, φ, z) . Lässt man nun eine elektromagnetische Welle auf den Keil einfallen, so wird sie einerseits an den Keilflächen reflektiert, zusätzlich aber auch an der Kante gebeugt. Es stellt sich durch Überlagerung der einfallenden, reflektierten und gebeugten Welle ein Gesamtfeld ein, das wir in unmittelbarer Kantennähe betrachten wollen. Die im Allgemeinen sechs Feldkomponenten des Gesamtfeldes teilen wir – entsprechend ihrer relativen Lage zur Kante – in zwei Gruppen auf:

Längskomponenten: $\underline{E}_z, \underline{H}_z$

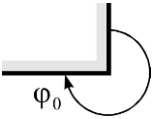
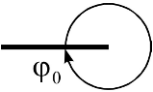
Querkomponenten: $\underline{E}_x, \underline{E}_y, \underline{H}_x, \underline{H}_y$.

Man kann nun zeigen [Mit71], dass sich bei kleinen Abständen $\rho \ll \lambda$ von der Kante die genannten Feldkomponenten für $\pi < \varphi_0 \leq 2\pi$ wie folgt verhalten:

$$\boxed{\underline{E}_z, \underline{H}_z \propto \rho^{\pi/\varphi_0}} \quad \text{und} \quad \boxed{\underline{E}_x, \underline{E}_y, \underline{H}_x, \underline{H}_y \propto \rho^{(\pi/\varphi_0)-1}}. \quad (8.108)$$

Im Grenzfall $\rho \rightarrow 0$, also direkt auf der Kante, verschwinden darum die Längsfeldstärken und die Querfeldstärken werden *singulär*. Die Stärke der **Singularität** hängt nach (8.108) vom Kantenwinkel ab und ist in Tabelle 8.8 für zwei Beispiele dargestellt.

Tabelle 8.8 Singularitäten der Querfeldstärken an geraden, ideal leitenden Kanten

Kantenform	Kantenwinkel	Singularität
	$\varphi_0 = 3\pi/2$	$O(\rho^{-1/3})$
	$\varphi_0 = 2\pi$	$O(\rho^{-1/2})$

Die stärkste Kantensingularität, die überhaupt auftreten kann, erhält man beim unendlich dünnen Schirm, der aus der allgemeinen Kante im Sonderfall $\varphi_0 = 2\pi$ entsteht (Abschnitt 5.6). Nach Tabelle 8.8 haben hier die Querfeldstärken mit abnehmendem Kantenabstand ρ einen Verlauf, der wie $\rho^{-1/2} = 1/\sqrt{\rho}$ gegen unendlich geht. Da nun andererseits die Energie in jedem endlichen Volumen $dV = \rho d\rho d\varphi dz$ an der Kante beschränkt bleiben muss, dürfen deshalb die Felder auch nicht stärker als mit $\rho^{-1/2}$ gegen unendlich gehen [Meix72]. Die unendlich scharfe Kante ist natürlich eine mathematische Fiktion. In der Praxis hat man dagegen stets Kanten mit Biegeradien, die höchstens klein gegen die Wellenlänge sein können, aber nie genau null werden. Die Felder werden dann nicht mehr singulär, können aber durchaus sehr hohe Werte annehmen. Auch im Bereich vor der **Spitze** eines geraden Kreiskegels treten Feldsingularitäten auf [Fel94, Van91]. Diese Tatsache macht man sich als Spitzeneffekt bei der Konstruktion von Blitzableitern zu Nutze.

Allgemeinere Beziehungen für metallische Kanten in geschichteten Dielektrika findet man in [Mit71, Hur76], die in [Gei92] auf Medien mit Verlusten ($\kappa < \infty$) erweitert wurden.

Im Falle $0 < \varphi_0 < \pi$ hat man keine „äußere“ Kante sondern einen „inneren“ Winkel, an dem für $\rho \rightarrow 0$ keine der sechs Feldkomponenten singulär werden. Der Sonderfall $\varphi_0 = \pi$ liefert die bekannte Reflexion an einer metallischen Ebene, die unter dem Gesichtspunkt von Kantensingularitäten nicht interessant ist.

8.6 Huygenssches Prinzip

8.6.1 Vektorielle Formulierung

In seiner elementaren Form besagt das **Huygenssche Prinzip**⁸, dass

- jeder nicht abgeschirmte Punkt einer Wellenfront wieder als Quelle von sphärischen Sekundärwellen (Elementarwellen) angesehen werden kann.
- Die Elementarwellen breiten sich mit einer Geschwindigkeit c und einer Frequenz aus, die gleich derjenigen der Primärwelle in jedem Punkt des Raumes ist.
- All diese Elementarwellen überlagern sich an nachfolgenden Orten $c \Delta t$ in Ausbreitungsrichtung wieder zu der eigentlichen Primärwelle. Weitere Wellenfronten können als Einhüllende aller Sekundärwellen konstruiert werden (Bild 8.10).
- Eine Elementarwelle strahlt nicht nach allen Seiten gleich stark. Nach rückwärts – also der Primärwelle entgegen – wird nichts und nach vorne am meisten ausgestrahlt (Kardioidcharakteristik $(1 + \cos \vartheta)/2$ der Huygensquelle – siehe Übung 13.1).

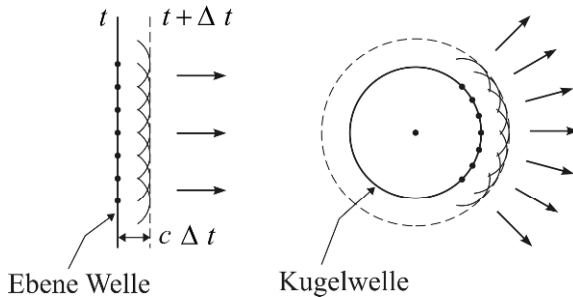


Bild 8.10 Die Einhüllende aller Sekundärwellen bildet eine neue Phasenfront.

Die Ausbildung einer ebenen Welle und einer Kugelwelle aus den Elementarwellen einzelner Punktquellen ist in Bild 8.10 dargestellt. Man kann das Huygenssche Prinzip aber noch allgemeiner formulieren. Wir betrachten dazu eine beliebige Verteilung eingepprägter Quellen $\underline{\mathbf{J}}$ und $\underline{\mathbf{M}}$ innerhalb eines Volumengebietes V . Dieses Volumen mit den Materialkonstanten ε_1 und μ_1 schließen wir wie in Bild 8.11a mit einer Hüllfläche A ein.

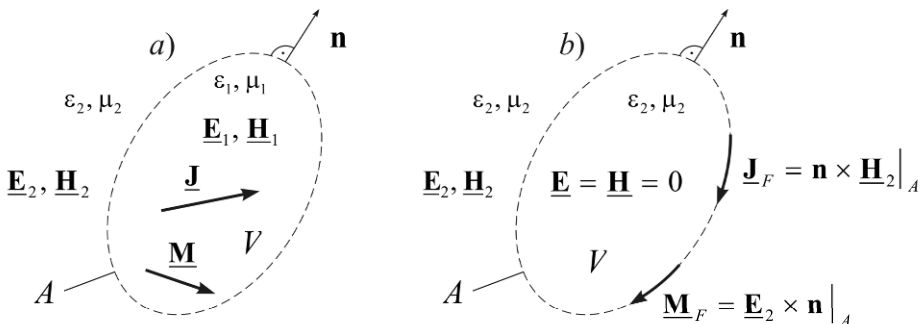


Bild 8.11 Eingeprägte Quellen $\underline{\mathbf{J}}$ und $\underline{\mathbf{M}}$ und Ersatzproblem mit äquivalenten Quellen $\underline{\mathbf{J}}_F$ und $\underline{\mathbf{M}}_F$

⁸ Christiaan **Huygens** (1629-1695): niederld. Mathematiker, Physiker und Astronom (Mechanik, Wellentheorie des Lichts, Entdecker des Saturnmonds Titan)

Wir wollen annehmen, dass sich alle Quellen im Inneren dieser geschlossenen Hüllfläche befinden und wir nur an der Bestimmung des Strahlungsfeldes außerhalb des Volumengebietes V interessiert sind. $\underline{\mathbf{E}}_1$ und $\underline{\mathbf{H}}_1$ sollen die durch die Quellen $\underline{\mathbf{J}}$ und $\underline{\mathbf{M}}$ erzeugten Felder im Inneren des Volumens V sein, während $\underline{\mathbf{E}}_2$ und $\underline{\mathbf{H}}_2$ die Felder im Außenbereich bezeichnen. Die zur Hüllfläche A tangential stehenden Komponenten gehen stetig ineinander über (Abschnitt 3.6). Aufgrund der Stetigkeit fließen in der Trennfläche *keine* Oberflächenströme, d. h. es gilt:

$$\mathbf{n} \times (\underline{\mathbf{H}}_2 - \underline{\mathbf{H}}_1)|_A = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{n} \times (\underline{\mathbf{E}}_2 - \underline{\mathbf{E}}_1)|_A = 0. \quad (8.109)$$

Keines der genannten Felder kann mit Hilfe der üblichen Quellintegrale (8.61) bestimmt werden, da der gesamte Raum wegen der dielektrischen Trennschicht nicht unbegrenzt homogen ist. Wir wollen nun ein zweites Feldproblem betrachten, das für die Felder im äußeren Medium völlig äquivalent zur vorherigen Anordnung sein soll (Bild 8.11b). Dazu führen wir anstelle der ursprünglichen inneren wahren Strahlungsquellen $\underline{\mathbf{J}}$ und $\underline{\mathbf{M}}$ neue fiktive **Oberflächenstromdichten** (die keinen wirklich bewegten Ladungsträgern entsprechen) auf der Hüllfläche A ein:

$$\underline{\mathbf{J}}_F = \mathbf{n} \times (\underline{\mathbf{H}}_2 - \underline{\mathbf{H}}_1)|_A \quad \text{und} \quad -\underline{\mathbf{M}}_F = \mathbf{n} \times (\underline{\mathbf{E}}_2 - \underline{\mathbf{E}}_1)|_A. \quad (8.110)$$

Diese **äquivalenten Quellen** gewährleisten im Medium 2 die gleichen Felder $\underline{\mathbf{E}}_2$ und $\underline{\mathbf{H}}_2$ wie beim Originalproblem, während sich im Medium 1 nun die neuen Felder $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ einstellen. Die neue Ersatzanordnung besitzt somit im Außenraum der Hüllfläche die gleiche Feldverteilung wie die ursprüngliche. Bezüglich der Felder außerhalb von A sind also beide Anordnungen äquivalent. Die Berechnungen werden dann besonders einfach, wenn wir die Ersatzquellen so wählen, dass das von der Hüllfläche A umschlossene Raumgebiet V vollkommen feldfrei wird, also wenn $\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{H}} = 0$ gilt. Diesen Zustand erreichen wir bei folgender Wahl:

$$\boxed{\underline{\mathbf{J}}_F = \mathbf{n} \times \underline{\mathbf{H}}_2|_A \quad \text{und} \quad -\underline{\mathbf{M}}_F = \mathbf{n} \times \underline{\mathbf{E}}_2|_A.} \quad (8.111)$$

Diese fiktiven elektrischen und magnetischen Oberflächenstromdichten schirmen sozusagen das innere Raumgebiet so ab, dass dort überhaupt kein Feld mehr existieren kann. Darum kann jetzt innerhalb von A die Stoffverteilung im Volumen V beliebig gewählt werden. Wenn wir sie durch den gleichen Stoff ε_2, μ_2 wie im Außenraum ersetzen (**Äquivalenztheorem von Love**), strahlen jetzt die Flächenströme im unbegrenzt homogenen Raum und wir können die Strahlungsfelder wieder mit Hilfe der Quellintegrale (8.61) gewinnen. Dabei ist anstelle einer Volumenintegration sogar nur über die geschlossene Hüllfläche A zu integrieren. Im Fernfeld folgt dann aus (8.61) mit der Greenschen Funktion (8.70) und $Z = \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$ sowie $k = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}) &= jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \mathbf{e}_r \times \oint\!\!\!\oint_{A'} [\underline{\mathbf{M}}_F(\mathbf{r}') + Z \mathbf{e}_r \times \underline{\mathbf{J}}_F(\mathbf{r}')] e^{jk \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} dA' \\ Z \underline{\mathbf{H}}_2(\mathbf{r}) &= -jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \mathbf{e}_r \times \oint\!\!\!\oint_{A'} [Z \underline{\mathbf{J}}_F(\mathbf{r}') - \mathbf{e}_r \times \underline{\mathbf{M}}_F(\mathbf{r}')] e^{jk \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} dA'. \end{aligned} \quad (8.112)$$

Nach Einsetzen der Oberflächenstromdichten (8.111) in (8.112) erhalten wir schließlich die Fernfelddarstellung der **Franzischen Formeln** [Fra48, Koch60, Tai72]:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}) &= jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \mathbf{e}_r \times \oint\!\!\!\oint_{A'} [\underline{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}(\mathbf{r}') + Z \mathbf{e}_r \times (\mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \underline{\mathbf{H}}_2(\mathbf{r}'))] e^{jk \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} dA' \\ Z \underline{\mathbf{H}}_2(\mathbf{r}) &= -jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \mathbf{e}_r \times \oint\!\!\!\oint_{A'} [Z \mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \underline{\mathbf{H}}_2(\mathbf{r}') - \mathbf{e}_r \times (\underline{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}(\mathbf{r}'))] e^{jk \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} dA'. \end{aligned}} \quad (8.113)$$

Vektorielltes Huygenssches Prinzip I – Äquivalenztheorem von Love

Sind im unbegrenzten homogenen Raum auf einer geschlossenen Hüllfläche A , die alle Strahlungsquellen einschließt, die tangentialen elektrischen und magnetischen Feldstärken bekannt (Bild 8.11b), dann können die an einem Punkt außerhalb herrschenden Feldstärken $\underline{E}_2$ und $\underline{H}_2$ aus diesen Feldern auf der Hüllfläche nach den Franzschen Formeln (8.113) exakt berechnet werden.

Zunächst ist allerdings mit der Integraldarstellung (8.113) nur wenig gewonnen, denn die im Integranden benötigten Tangentialfelder – als Folge der ursprünglich inneren Strahlungsquellen $\underline{J}$ und $\underline{M}$ – sind in der Regel gar nicht bekannt. In vielen Fällen kann man aber plausible Näherungen für die unbekannten Flächenströme angeben (Abschnitt 13.2). Die Oberflächenstromdichten $\underline{J}_F$ und $\underline{M}_F$ sind **äquivalente Quellen**. Sie werden in diesem Zusammenhang auch Huygens-Quellen genannt. Der Begriff der äquivalenten Quelle im Allgemeinen und des magnetischen Stroms im Besonderen erweist sich hier als sehr nützlich. Hätten wir neben dem elektrischen nicht auch den magnetischen Strom als Quellgröße in die Maxwell'schen Gleichungen (8.3) eingeführt, so könnte das Huygenssche Prinzip nicht so einfach formuliert werden.

Für die äquivalente Anordnung nach dem Huygensschen Prinzip ist das innerhalb der Hüllfläche A liegende Volumengebiet V feldfrei. Seine Stoffverteilung kann deshalb beliebig verändert werden, ohne das Feld im Außenraum zu stören. Anstatt das Material innerhalb A gleich dem des Außenraums zu wählen, kann man nach **Schelkunoff** das Innere wie in Bild 8.12 auch mit einem idealen elektrischen oder magnetischen Leiter ausfüllen [Ren00], woraus zwei neue zu Bild 8.11 äquivalente Ersatzanordnungen entstehen. Man beachte dabei, dass es sich bei $\underline{J}_F$ und $\underline{M}_F$ um fiktive äquivalente Quellen handelt – und nicht um reale bewegte Ladungsträger!

Vektorielltes Huygenssches Prinzip II – Äquivalenztheorem von Schelkunoff

Nach dem **Reziprozitätstheorem** [Har61] leisten äquivalente elektrische Quellen $\underline{J}_F$, die sich auf der Oberfläche eines elektrisch ideal leitenden Körpers befinden, keinen Beitrag zum Strahlungsfeld. Ebenso gibt es keine Abstrahlung von äquivalenten magnetischen Quellen $\underline{M}_F$, die sich auf der Oberfläche eines magnetisch ideal leitenden Körpers befinden. Damit folgt, dass in beiden Fällen das Strahlungsfeld vollständig nur durch eine der beiden Quellgrößen verursacht wird. Die jeweils andere leistet keinen Strahlungsbeitrag und ist in Bild 8.12 nicht dargestellt.

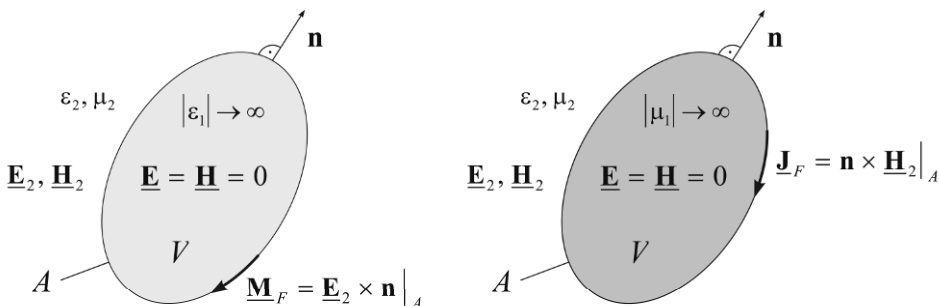


Bild 8.12 Huygens-Äquivalente: magnetische Quellströme auf elektrischem Leiter bzw. elektrische Quellströme auf magnetischem Leiter (nichtstrahlende Ströme jeweils nicht dargestellt)

Bei den Huygens-Äquivalenten mit elektrisch bzw. magnetisch ideal leitender Oberfläche strahlen die magnetischen und elektrischen Quellströme in Anwesenheit des massiven Körpers. Zwar können deshalb die Strahlungsfelder $\underline{E}_2$ und $\underline{H}_2$ nicht mehr mit den Integraldarstellungen (8.113) unter Benutzung der Greenschen Funktion des freien Raumes

$$\underline{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad (8.114)$$

berechnet werden, trotzdem sind diese Äquivalenzen bei der Behandlung vieler Feldprobleme sehr nützlich (Abschnitt 13.3). Bei besonders einfach geformten Hüllflächen A (z. B. bei einer Kugel) kann man die Greensche Funktion der massiven Ersatzanordnung oft analytisch angeben. Entartet die massive Hüllfläche zu einer unendlich ausgedehnten leitenden Ebene, so kann diese nach Hinzufügen eines **Spiegelstromes** (Abschnitt 11.4) einfach weggelassen werden. Die Kombination aus Originalstrom und Spiegelstrom strahlt dann wieder im freien Raum.

Eine elektrische Oberflächenstromdichte $\underline{\mathbf{J}}_F$, die auf einer elektrisch leitenden Ebene fließt, kann nicht strahlen, weil sie sich mit ihrem gegenphasigen Spiegelbild auslöscht (Tabelle 11.12). Gleichzeitig muss sich eine magnetische Oberflächenstromdichte $\underline{\mathbf{M}}_F$ auf einer elektrisch leitenden Ebene wegen ihres gleichphasigen Spiegelbilds verdoppeln. In diesem Huygens-Äquivalent (nun im unbegrenzten freien Raum) ist dann nur ein Oberflächenstrom, nämlich $2\underline{\mathbf{M}}_F$, von null verschieden. Auch eine magnetisch leitende Ebene kann nach Spiegelung der Quellströme weggelassen werden – die einzig verbleibenden Quellen sind dann $2\underline{\mathbf{J}}_F$.

Das Huygenssche Prinzip gilt streng genommen nur für eine geschlossene Hüllfläche A . Es leistet aber auch gute Dienste bei der näherungsweisen Behandlung von Beugungsproblemen, wie etwa bei der Berechnung des Strahlungsfeldes von Horn- und Parabolantennen (Bild 8.13). Dort können nur über die Feldverteilung auf einer begrenzten Fläche – nämlich der Hornöffnung oder Apertur – plausible Annahmen gemacht werden. Die Felder auf dem Rest der Hüllfläche A – nämlich auf der Außenwand – setzt man dann in erster Näherung zu null.

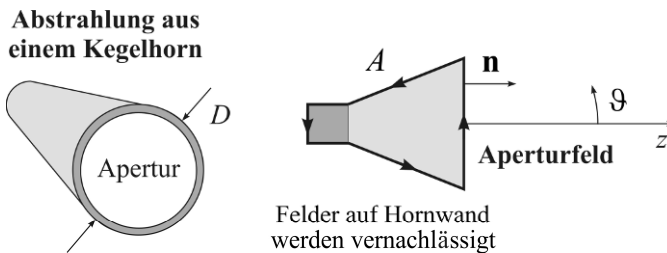


Bild 8.13 Kegelhornantenne (siehe Kapitel 14) und Ersatzproblem mit geschlossener Hüllfläche A

8.6.2 Skalare Formulierung

Bei exakter Formulierung des Huygensschen Prinzips ist das Vektorpotenzial $\underline{\mathbf{A}}$ wegen des vektoriellen Integranden nur umständlich zu berechnen:

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \oint\limits_{A'} \underline{\mathbf{J}}_F(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dA'. \quad (8.115)$$

Die Felder im Fresnel- und Fraunhoferbereich folgen daraus nach (8.62):

$$\underline{\mathbf{H}} = -jk \mathbf{e}_r \times \underline{\mathbf{A}} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{E}} = -\mathbf{e}_r \times Z \underline{\mathbf{H}}. \quad (8.116)$$

In der Praxis wird darum häufig eine skalare Näherungslösung benutzt, die auf Kirchhoff zurückgeht. Unter Vernachlässigung der Polarisation der Strahlungsquelle wird mit $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$

zunächst eine skalare Potenzialfunktion $\underline{\Phi}$ mittels eines einfacheren Quellintegrals bestimmt [Born93], wodurch dann die skalare Näherung $\underline{E}(\mathbf{r}) = j k Z \underline{\Phi}(\mathbf{r})$ ermöglicht wird:

$$\underline{\Phi}(\mathbf{r}) = \iint_{A'} \underline{J}_F(\mathbf{r}') \frac{e^{-j k R}}{4 \pi R} dA' . \quad (8.117)$$

Die Genauigkeit dieser Näherung, in der einfach die Richtung der Oberflächenstromdichte vernachlässigt wird, ist für viele praktische Anwendungen ausreichend. Insbesondere kann damit die Vorwärtsstrahlung einer elektrisch großen Apertur $D \gg \lambda$ im Winkelbereich $0 \leq \vartheta \leq \pi/3$ zuverlässig angegeben werden (Bild 8.14). Das skalare Strahlungsfeld $\underline{\Phi}(\mathbf{r})$ hängt dabei von der zweidimensionalen Strombelegung $\underline{J}_F(\mathbf{r}')$ der strahlenden Fläche A' ab und erfährt den bekannten Retardierungseffekt gemäß der Greenschen Funktion des freien Raums. Für den Abstand zwischen Quellpunkt und Aufpunkt kann mit Ausnahme des Nahfeldes die Näherung im Fresnel-Gebiet eingesetzt werden:

$$R = r - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}' + \frac{1}{2r} [r'^2 - (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}')^2] . \quad (8.118)$$

Übung 8.7: Strahlung einer homogen belegten Kreisapertur

- Berechnen Sie mit der skalaren Kirchhoffschen Beugungstheorie (8.117) das Strahlungsfeld einer in Amplitude und Phase homogen belegten kreisförmigen Fläche mit Durchmesser $D = 2a = 50\lambda$. Es gelte also, unter Vernachlässigung der Einheiten, $\underline{J}_F = 1$.

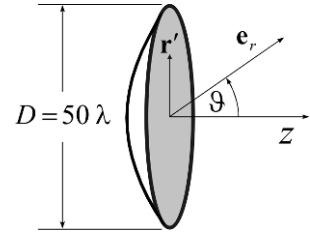


Bild 8.14 Reflektorantenne mit der fiktiven Annahme einer homogen belegten Kreisapertur

• Lösung:

Bei einer homogen belegten Apertur mit $\underline{J}_F(\mathbf{r}') = 1$ erhalten wir zunächst

$$\underline{\Phi}(\mathbf{r}) = \int_{\rho'=0}^a \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{e^{-j k R}}{4 \pi R} d\varphi' \rho' d\rho' , \quad (8.119)$$

wenn wir zweckmäßige zylindrische Koordinaten (siehe Tabelle 2.5) verwenden. Wegen $r'^2 = \rho'^2$ und $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}' = \rho' \cos \varphi' \sin \vartheta \cos \varphi + \rho' \sin \varphi' \sin \vartheta \sin \varphi = \rho' \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi')$ folgt im Fresnel-Gebiet aus (8.118):

$$R = r - \rho' \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi') + \frac{\rho'^2}{2r} [1 - \sin^2 \vartheta \cos^2(\varphi - \varphi')] . \quad (8.120)$$

Bei Aufpunktswinkeln im achsnahen Bereich ($\vartheta < 30^\circ$) gilt $\sin^2 \vartheta \ll 1$, weswegen die eckige Klammer in (8.120) näherungsweise mit 1 abgeschätzt werden kann. So erhält man schließlich folgendes Aperturfeldintegral (Methode der Physikalischen Optik – PO):

$$\underline{\Phi}(\mathbf{r}) = \frac{e^{-j k r}}{4 \pi r} \int_{\rho'=0}^a \int_{\varphi'=0}^{2\pi} e^{j k \rho' \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi')} e^{-j k \frac{\rho'^2}{2r}} d\varphi' \rho' d\rho' \quad (8.121)$$

mit der Fresnel-Näherung im Phasenterm und der Näherung $R = r$ im Amplitudenterm. Das Integral über den Umfangswinkel φ' hat die analytische Lösung [Gra81]:

$$\int_{\varphi'=0}^{2\pi} e^{j k \rho' \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi')} d\varphi' = 2\pi J_0(k \rho' \sin \vartheta), \quad (8.122)$$

womit das Strahlungsfeld nicht vom Azimutwinkel φ abhängt, was wegen der Rotations-symmetrie der Anordnung auch zu erwarten war. J_0 ist die Besselfunktion erster Art und nullter Ordnung, die wir auch schon beim Rundhohlleiter in Abschnitt 6.3 benötigt hatten. Im Fraunhoferschen Fernfeld kann in (8.121) der quadratische Phasenterm vernachlässigt werden und wir erhalten eine geschlossene Lösung (Tabelle 8.9), während im Fresnel-Gebiet das verbleibende Integral (mit r und ϑ als Parameter) durch Lommelsche Funktionen ausgedrückt werden könnte [Born93], die sich wiederum in eine Reihe aus Besselfunktionen entwickeln lassen. Wir ziehen es im Moment vor, das komplizierte Integral im Fresnel-Gebiet mittels einer numerischen Quadratur zu bestimmen. Für eine geschlossene Darstellung über Lommelsche Funktionen sei auf (14.53) verwiesen. Mit $E = j k Z \Phi$ finden wir schließlich die normierte Richtcharakteristik $0 \leq C \leq 1$ der strahlenden Kreisapertur.

Tabelle 8.9 Richtcharakteristik C einer homogen belegten Kreisapertur (skalare Theorie)

Fernfeld $r \geq 2 D^2/\lambda$	Fresnel-Gebiet $r \leq 2 D^2/\lambda$
$\underline{\Phi}(r, \vartheta) =$ $= \frac{e^{-j k r}}{2 r} \int_{\rho'=0}^a J_0(k \rho' \sin \vartheta) \rho' d\rho' =$ $= \frac{e^{-j k r}}{2 r} \frac{J_1(k a \sin \vartheta)}{k a \sin \vartheta} a^2$	$\underline{\Phi}(r, \vartheta) =$ $= \frac{e^{-j k r}}{2 r} \int_{\rho'=0}^a J_0(k \rho' \sin \vartheta) e^{-j k \frac{\rho'^2}{2 r}} \rho' d\rho'$ → numerisch auswerten!
$C(\vartheta) = \frac{ \underline{\Phi}(r, \vartheta) }{ \underline{\Phi}(r, \vartheta) _{\max}} = \left \frac{2 J_1(k a \sin \vartheta)}{k a \sin \vartheta} \right $	$C(\vartheta, r) = \frac{ \underline{\Phi}(r, \vartheta) }{ \underline{\Phi}(r, \vartheta) _{\max}}$

Wir wollen die auf ihr Maximum bei $\vartheta = 0$ normierte Fernfeld-Intensitätsfunktion

$$C^2(\vartheta) = \left(\frac{2 J_1(k a \sin \vartheta)}{k a \sin \vartheta} \right)^2 \quad (8.123)$$

für eine Apertur von $D = 2 a = 50 \lambda$ im logarithmischen Maßstab darstellen, also $10 \lg C^2(\vartheta)$ dB. Die Kurve ist praktisch deckungsgleich mit der am Fraunhofer-Abstand $r_F = 2 D^2/\lambda$ ausgewerteten Fresnel-Charakteristik $10 \lg C^2(\vartheta, r_F)$ dB. Außerdem sind in Bild 8.15 zwei weitere Kurven im Fresnel-Gebiet bei kleineren Abständen $r_F/4$ und $r_F/8$ dargestellt.

Man sieht in Bild 8.15, wie sich erst im Fernfeld die Nebenkeulenstruktur und die Nullstellen ausprägen. Im Fresnel-Gebiet dagegen sind alle Diagrammnullstellen noch aufgefüllt und die Abstrahlung erfolgt weniger gebündelt, sondern eher diffus. $\square$

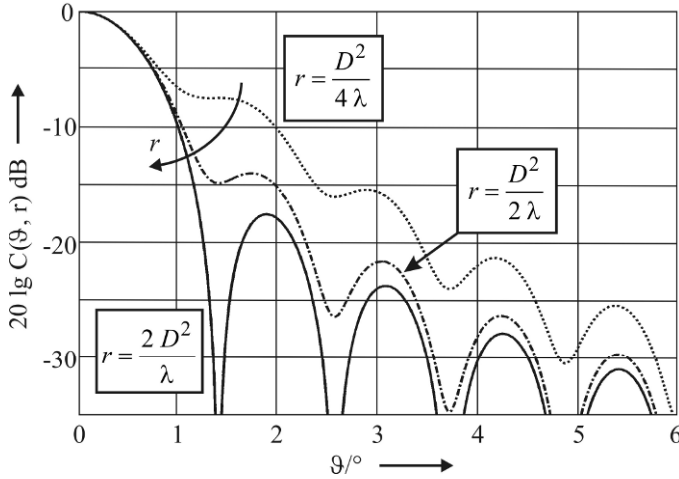


Bild 8.15 Entfernungabhängiges Richtdiagramm einer homogen belegten Kreisapertur mit $D = 50 \lambda$

In obiger Übungsaufgabe haben wir die Fernfeld-Richtcharakteristik einer homogen belegten Kreisapertur hergeleitet (für andere Belegungsfunktionen siehe Abschnitt 16.6):

$$C(\vartheta) = \left| \frac{2 J_1(k a \sin \vartheta)}{k a \sin \vartheta} \right|. \quad (8.124)$$

Die erste Nullstelle der Besselfunktion J_1 ist $j_{11} \approx 3,8317$. Alle Nebenkeulen von $C(\vartheta)$ liegen natürlich bei noch größeren Werten, d. h. bei $k a \sin \vartheta > j_{11}$, weswegen wir im gesamten Nebenkeulenbereich der Charakteristik $k a \sin \vartheta \gg 1$ setzen dürfen und für die Besselfunktion nach Bild 6.13 eine Näherung für große Argumente verwenden können:

$$J_1(k a \sin \vartheta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k a \sin \vartheta}} \sin(k a \sin \vartheta - \pi/4). \quad (8.125)$$

Daraus erhalten wir im Nebenkeulenbereich folgende asymptotische Darstellung:

$$C(\vartheta) \approx \frac{\sqrt{8/\pi}}{(k a \sin \vartheta)^{3/2}} \left| \sin(k a \sin \vartheta - \pi/4) \right|. \quad (8.126)$$

Die Nebenkeulen liegen dort, wo die Sinusfunktion 1 bzw. -1 wird, ihr Betrag also maximal ist. Die Höhe der Nebenkeulen wird allein durch den Vorfaktor in (8.126) bestimmt. Damit folgt für die Nebenkeulendämpfung einer homogen belegten Kreisapertur:

$$a_N \approx 10 \lg \frac{(k a \sin \vartheta)^3}{8/\pi} \text{ dB} > 0. \quad (8.127)$$

Bei kleinen Winkeln ϑ können wir noch die Näherung $\sin \vartheta \approx \vartheta$ machen, was bis $\vartheta = \pi/6 \hat{=} 30^\circ$ gut erfüllt ist. Damit erfolgt der asymptotische Abfall der Nebenkeulen etwa mit der dritten Potenz des Diagrammwinkels ϑ , also schneller als bei einer homogen belegten Rechteckapertur, wo sich – in den Hauptschnitten – nur ein quadratischer Abfall einstellt (siehe Übung 13.1). In Bild 8.16 ist die Richtcharakteristik (8.124) gemeinsam mit der Einhüllenden aller Nebenkeulen $-a_N$ im logarithmischen Maßstab für eine Kreisapertur mit $D = 2a = 40 \lambda$

wiedergegeben. Die Darstellung in Bild 8.16 zeigt, dass unsere Näherung (8.125) für große Argumente der Besselfunktion zur Herleitung der Nebenkeulendämpfung gerechtfertigt war.

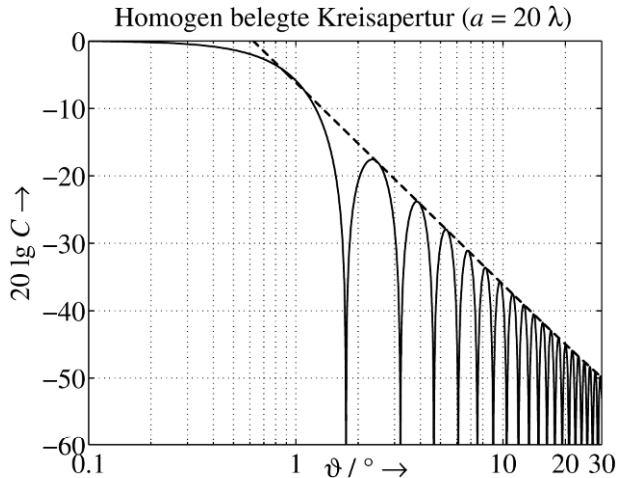


Bild 8.16 Die Nebenkeulen der Abstrahlung von einer homogen belegten Kreisapertur fallen etwa mit der inversen dritten Potenz des Diagrammwinkels. Das entspricht im logarithmischen Maßstab einer fallenden Geraden mit Steigung -3 .

Mit $C(\vartheta)$ aus (8.124) können wir schließlich noch den **Richtfaktor** einer homogen belegten Kreisapertur mit Radius a bestimmen, wobei in (7.30) nur über $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ zu integrieren ist:

$$D = \frac{(ka)^2}{1 - J_1(2ka)/(ka)} \quad D \text{ geht erst bei } \underline{\text{großen}} \text{ Aperturen } (ka \gg 1) \text{ in die übliche Formel (7.54) } D = (ka)^2 \text{ über!} \quad (8.128)$$

Man vergleiche dieses Ergebnis der skalaren Rechnung mit dem der vektoriellen aus [Mah05]:

$$D = \frac{(ka)^2}{1 - \xi} \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{1}{ka} \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(2ka) \quad (\text{siehe auch Abschnitt 17.5}). \quad (8.129)$$

Schlussbemerkung:

Mit der skalaren Kirchhoffschen Beugungstheorie (8.117) können wir das Strahlungsfeld einer Apertur durch Integration der Quellstromdichte über die gesamte Aperturfläche erhalten:

$$\frac{\underline{E}(\mathbf{r})}{jkZ} = \iint_{A'} \underline{J}_F(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dA' = \iint_{A_1'} \underline{J}_F(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dA' + \iint_{A_2'} \underline{J}_F(\mathbf{r}') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dA'. \quad (8.130)$$

Nehmen wir an, ein Teil der Apertur sei durch einen Schirm der Fläche A_2 abgedeckt. Die Antenne erzeugt dann mit ihrer verbleibenden Öffnung $A_1 = A - A_2$ das Feld $\underline{E}_1$. Bei komplementärer Bedeckung mit einem Schirm der Fläche A_1 stellt sich durch die Restapertur $A_2 = A - A_1$ das Feld $\underline{E}_2$ ein. Das aus Optik und Akustik bekannte **Babinetsche⁹ Prinzip** besagt, dass bei gleichzeitiger Anwesenheit beider Öffnungen sich gerade wieder das Feld $\underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2$ der ungestörten Gesamtapertur einstellen muss. Falls die Apertur nicht angeregt wird, gilt $\underline{E} = 0$, d. h. bei komplementären Antennen wie Dipol und Schlitz folgt $\underline{E}_1 = -\underline{E}_2$. Eine erweiterte vektorielle Version des Babinetschen Prinzips erläutern wir in Abschnitt 17.2.

⁹ Jacques **Babinet** (1794-1872): frz. Physiker (Wellentheorie des Lichts, optische Instrumente)

8.7 Kopolarisation und Kreuzpolarisation

In großer Entfernung jeder Sendeantenne können ihre transversalen Feldkomponenten wie folgt im Kugelkoordinatensystem dargestellt werden:

$$\underline{\mathbf{E}}_{\text{tr}} = \hat{\underline{E}} \frac{e^{-jkr}}{kr} \left(\underline{A}(\vartheta, \varphi) \mathbf{e}_\vartheta + \underline{B}(\vartheta, \varphi) \mathbf{e}_\varphi \right) \quad (8.131)$$

Die im Allgemeinen komplexen Funktionen $\underline{A}(\vartheta, \varphi)$ und $\underline{B}(\vartheta, \varphi)$ sind auch von der Frequenz und von weiteren Eigenschaften der speziellen Antenne abhängig. Beispielsweise gilt beim Hertzischen Dipol nach (8.101) mit der Abkürzung $\hat{\underline{E}} = jZ\pi I l / \lambda^2$:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \sin \vartheta & \text{und} & \quad \underline{B} = 0 & \quad \text{beim} & \quad \text{z-Dipol} \\ \underline{A} &= -\cos \vartheta \cos \varphi & \text{und} & \quad \underline{B} = \sin \varphi & \quad \text{beim} & \quad \text{x-Dipol} \\ \underline{A} &= -\cos \vartheta \sin \varphi & \text{und} & \quad \underline{B} = -\cos \varphi & \quad \text{beim} & \quad \text{y-Dipol} \end{aligned} \quad (8.132)$$

Falls man nur an der räumlichen Verteilung der Gesamtfeldstärke interessiert ist, berechnet man die auf ihr Maximum zu normierende Richtcharakteristik wie folgt:

$$C(\vartheta, \varphi) = \left| \underline{\mathbf{E}}_{\text{tr}} \right| / \left| \underline{\mathbf{E}}_{\text{tr}} \right|_{\text{max}} \triangleq \sqrt{|\underline{A}|^2 + |\underline{B}|^2} \quad (8.133)$$

womit wir z. B. für den Hertzischen Dipol wieder die Charakteristiken der Tabelle 7.1 erhalten können. Die Charakteristik (8.133) entspricht aber in vielen Fällen nicht der realen Messsituation. Im Allgemeinen kann die Empfangsantenne nämlich nicht die Gesamtfeldstärke sondern nur eine ganz bestimmte Polarisation detektieren. Wenn die gemessene Polarisation mit der Referenzpolarisation der Sendeantenne übereinstimmt, spricht man vom kopolaren Signal – im orthogonalen Fall vom kreuzpolaren Signal. Bei linear polarisierter Quelle gibt es nach [Lud73] gleich drei unterschiedliche Möglichkeiten, die zueinander orthogonalen Richtungen der Referenz- und der Kreuzpolarisation festzulegen. Mit Bild 8.17 betrachten wir den Fall einer vertikal polarisierten Strahlungsquelle, deren Hauptkeule in Richtung der z-Achse weist.

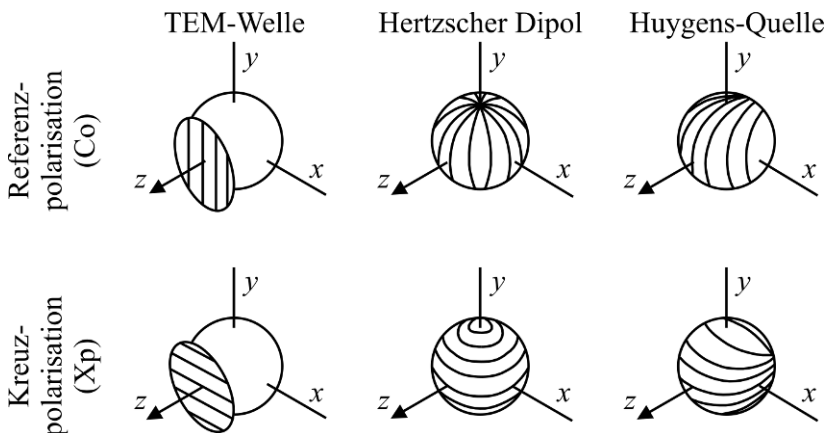


Bild 8.17 Definitionen der Referenzpolarisation (oben) und der Kreuzpolarisation (unten) nach [Lud73]

- 1) Die Referenzpolarisation ist die einer TEM-Welle im kartesischen Koordinatensystem, d. h. $\mathbf{e}_{\text{co}} = \mathbf{e}_y$. Die Richtung der orthogonalen Kreuzpolarisation ist dann $\mathbf{e}_{\text{xp}} = \mathbf{e}_x$.

- 2) Die Referenzpolarisation ist die eines Hertzschen Dipols in y-Richtung, d. h. mit (8.132)

$$\mathbf{e}_{\text{co}} = (\mathbf{e}_y \cos \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi) / \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}. \quad (8.134)$$

Die dazu orthogonale Richtung der Kreuzpolarisation mit $\mathbf{e}_{\text{co}} \cdot \mathbf{e}_{\text{xp}} = 0$ wird

$$\mathbf{e}_{\text{xp}} = (\mathbf{e}_y \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \cos \vartheta \sin \varphi) / \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}. \quad (8.135)$$

- 3) Die Referenzpolarisation ist die einer Huygens-Quelle (siehe Abschnitt 13.2), d. h.

$$\mathbf{e}_{\text{co}} = \mathbf{e}_y (\vartheta = 0) = \mathbf{e}_y \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi. \quad (8.136)$$

Die Kreuzpolarisation folgt aus

$$\mathbf{e}_{\text{xp}} = \mathbf{e}_x (\vartheta = 0) = \mathbf{e}_y \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi. \quad (8.137)$$

Der Vorteil der dritten Definition liegt darin, dass sie sich am allgemein üblichen Vorgehen bei der Messung von Fernfeldern orientiert. Außerdem bewirkt eine Verdrehung der linear polarisierten Quelle um 90° ($\varphi \rightarrow \varphi + \pi/2$) gerade eine Vertauschung von ko- und kreuzpolarem Signal, was bei der zweiten Definition nicht der Fall ist. Es ist offensichtlich, dass alle drei Definitionen auf der positiven z-Achse – also für $\vartheta = 0$ – übereinstimmen. Bei Aperturstrahlern, deren Hauptkeule in Richtung der z-Achse weist und die eine flächenhafte Strombelegung

$$\boxed{\underline{\mathbf{J}}(x, y) = \underline{J}(x, y) (\mathbf{e}_x a e^{j\psi} + \mathbf{e}_y b)} \quad \text{mit} \quad a^2 + b^2 = 1 \quad (8.138)$$

besitzen, liegt im Allgemeinen elliptische Polarisation vor. In diesem komplizierteren Fall kann man nach [LoLe88] auf der Basis von (8.136) die Richtung der Kopolarisation mit

$$\boxed{\underline{\mathbf{e}}_{\text{co}} = \mathbf{e}_y (a e^{j\psi} \cos \varphi + b \sin \varphi) + \mathbf{e}_\varphi (-a e^{j\psi} \sin \varphi + b \cos \varphi)} \quad (8.139)$$

und entsprechend (8.137) die der Kreuzpolarisation mit

$$\boxed{\underline{\mathbf{e}}_{\text{xp}} = \mathbf{e}_y (-a e^{-j\psi} \sin \varphi + b \cos \varphi) - \mathbf{e}_\varphi (a e^{-j\psi} \cos \varphi + b \sin \varphi)} \quad (8.140)$$

angeben. Beide komplexe Einheitsvektoren sind normiert $\underline{\mathbf{e}}_{\text{co}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_{\text{co}}^* = \underline{\mathbf{e}}_{\text{xp}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_{\text{xp}}^* = 1$ und wegen $\underline{\mathbf{e}}_{\text{co}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_{\text{xp}}^* = 0$ sind beide Richtungen auch orthogonal.

Tabelle 8.10 Erweiterte „Ludwig 3“-Definition von Ko- und Kreuzpolarisation nach [LoLe88]

Polarisation des Aperturstrahlers		
linear		zirkular
x	y	RHC / LHC
$a = 1, \psi = 0, b = 0$	$a = 0, b = 1$	$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}, \psi = \pm \frac{\pi}{2}$
$\underline{\mathbf{e}}_{\text{co}} = \mathbf{e}_y \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi$ $\underline{\mathbf{e}}_{\text{xp}} = -\mathbf{e}_y \sin \varphi - \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi$	$\underline{\mathbf{e}}_{\text{co}} = \mathbf{e}_y \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi$ $\underline{\mathbf{e}}_{\text{xp}} = \mathbf{e}_y \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi$	$\underline{\mathbf{e}}_{\text{co}} = (\mathbf{e}_y \mp j \mathbf{e}_\varphi) / \sqrt{2}$ $\underline{\mathbf{e}}_{\text{xp}} = (\mathbf{e}_y \pm j \mathbf{e}_\varphi) / \sqrt{2}$

In Tabelle 8.10 sind einige Spezialfälle allgemein elliptischer Polarisation dargestellt. Dabei wurden bei der Definition der komplexen Einheitsvektoren für Zirkularpolarisation unbedeutende Phasenfaktoren weggelassen. Den kopolaren bzw. kreuzpolaren Anteil eines Strahlungsfeldes und dessen jeweilige Richtcharakteristik erhalten wir mit (8.131) schließlich aus:

$$\underline{E}_{\text{co}} = \underline{E}_{\text{tr}} \cdot \underline{e}_{\text{co}}^* \rightarrow C_{\text{co}} = \left| \underline{E}_{\text{co}} \right| / \left| \underline{E}_{\text{co}} \right|_{\text{max}} \quad \text{und} \quad \underline{E}_{\text{xp}} = \underline{E}_{\text{tr}} \cdot \underline{e}_{\text{xp}}^* \rightarrow C_{\text{xp}} = \left| \underline{E}_{\text{xp}} \right| / \left| \underline{E}_{\text{co}} \right|_{\text{max}}. \quad (8.141)$$

Ein Strahlungsfeld wird dann als kreuzpolarisationsfrei bezeichnet, wenn im ganzen Raum eine dieser beiden Polarisationen verschwindet. Das **Kreuzpolarisationsmaß** folgt aus [Dil87]:

$$XP = 20 \lg \left[\max(C_{\text{xp}}) \right] \text{ dB} \quad (\text{im Bereich der Hauptkeule der Kopolarisation}), \quad (8.142)$$

wobei $\max(C_{\text{xp}})$ nur innerhalb eines Winkelbereichs mit $20 \lg C_{\text{co}} \geq -12 \text{ dB}$ zu suchen ist.

Übung 8.8: Polarisation eines Kreuzdipols

- Untersuchen Sie die Polarisationseigenschaften des Strahlungsfeldes eines Kreuzdipols.

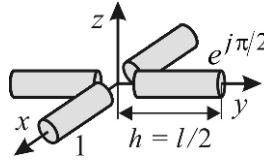


Bild 8.18 Zwei orthogonale Hertzsche Dipole mit 90° Phasenverschiebung

Lösung:

Das Fernfeld eines Kreuzdipols, dessen y-Zweig um 90° voreilend gespeist wird, ist

$$\underline{E}_{\text{tr}} = \hat{E} \frac{e^{-jkr}}{kr} (\underline{e}_\vartheta \cos \vartheta + j \underline{e}_\varphi) e^{j\varphi}, \quad (8.143)$$

wie man (8.101) oder (11.65) entnehmen kann. Mit (8.131) gilt also $\underline{A} = \cos \vartheta e^{j\varphi}$ und $\underline{B} = j e^{j\varphi}$. Wählen wir nach Tabelle 8.10 linksdrehende Zirkularpolarisation als Referenzpolarisation aus mit $a = b = 1/\sqrt{2}$ und $\psi = -\pi/2$, dann folgt aus (8.141) und (8.143):

$$\begin{aligned} \underline{E}_{\text{co}} &= \underline{E}_{\text{tr}} \cdot \underline{e}_{\text{co}}^* = \underline{E}_{\text{tr}} \cdot \frac{\underline{e}_\vartheta - j \underline{e}_\varphi}{\sqrt{2}} = \hat{E} \frac{e^{-jkr}}{kr} \frac{\cos \vartheta + 1}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} \\ \underline{E}_{\text{xp}} &= \underline{E}_{\text{tr}} \cdot \underline{e}_{\text{xp}}^* = \underline{E}_{\text{tr}} \cdot \frac{\underline{e}_\vartheta + j \underline{e}_\varphi}{\sqrt{2}} = \hat{E} \frac{e^{-jkr}}{kr} \frac{\cos \vartheta - 1}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}, \end{aligned} \quad (8.144)$$

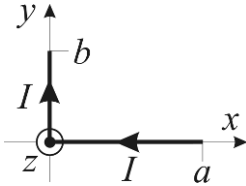
womit wir die ko- und kreuzpolare Richtcharakteristik der Antenne angeben können:

$$\begin{aligned} C_{\text{co}} &= \left| \underline{E}_{\text{co}} \right| / \left| \underline{E}_{\text{co}} \right|_{\text{max}} = \frac{1 + \cos \vartheta}{2} = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \triangleq \text{LHC} \\ C_{\text{xp}} &= \left| \underline{E}_{\text{xp}} \right| / \left| \underline{E}_{\text{co}} \right|_{\text{max}} = \frac{1 - \cos \vartheta}{2} = \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \triangleq \text{RHC}. \end{aligned} \quad (8.145)$$

Nach (8.142) wird $XP = -2,5 \text{ dB}$. Der Kreuzdipol strahlt linksdrehend zirkular polarisiert (LHC) bei $\vartheta = 0$ und rechtsdrehend zirkular polarisiert (RHC) bei $\vartheta = \pi$. In der x-y-Ebene bei $\vartheta = \pi/2$ gilt $C_{\text{co}} = C_{\text{xp}} = 1/2$. Dort hat das Strahlungsfeld nach (8.143) nur eine φ -Komponente und ist daher linear polarisiert. Bei allen anderen Winkeln ϑ wird elliptisch polarisiert abgestrahlt. Zum Kreuzdipol siehe auch die Abschnitte 7.3.5 und 11.2.5. $\square$

8.8 Übungen

- 8.8.1** Ein rechtwinklig abgelenkter Stromfaden der Länge $a+b$ wird von einem Gleichstrom I durchflossen. Der Stromfluss ist in die negative x -Richtung und die positive y -Richtung gerichtet.



Hilfe:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + z^2} \right)$$

Berechnen Sie das Vektorpotenzial $\mathbf{A}(\mathbf{r} = z \mathbf{e}_z)$ auf der z -Achse, also für $x = y = 0$ mit Hilfe des Linienintegrals (8.28)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Setzen Sie im Ergebnis der Integration zunächst $b = a$ und dann $|z| \ll a$. Welchen einfacheren Ausdruck für das Vektorpotenzial erhalten Sie jetzt? Berechnen Sie daraus die magnetische Feldstärke auf der z -Achse mit Hilfe von $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$.

- 8.8.2** Eine homogen belegte Kreisapertur hat im Fernfeld die Richtcharakteristik (8.124)

$$C(\vartheta) = \left| \frac{2 J_1(k a \sin \vartheta)}{k a \sin \vartheta} \right|.$$

Bestimmen Sie die Nullwertbreite der Hauptkeule bei einem Aperturdurchmesser von $D = 2a = 50\lambda$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Bild 8.15.

An der Stelle $x = 1,61634$ gilt $2 J_1(x)/x = 1/\sqrt{2}$. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Beziehung die Halbwertsbreite der Richtcharakteristik $C(\vartheta)$.

Lösungen:

$$\mathbf{8.8.1} \quad \mathbf{A}(z) = \frac{I}{4\pi} \left\{ -\mathbf{e}_x \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + z^2}}{z} + \mathbf{e}_y \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + z^2}}{z} \right\} \quad \text{und} \quad \mathbf{H}(z) = (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \frac{I}{4\pi z}$$

- 8.8.2** Die erste Nullstelle von $C(\vartheta)$ liegt bei $k a \sin \vartheta_0 = j_{11} \approx 3,8317$, woraus sofort die gesuchte Nullwertbreite folgt:

$$\Delta \vartheta_0 = 2 \vartheta_0 = 2 \arcsin \frac{j_{11}}{\pi D/\lambda} \triangleq \frac{139,8^\circ}{D/\lambda} = 2,796^\circ.$$

Die Halbwertsbreite wird:

$$\Delta \vartheta = 2 \arcsin \frac{1,61634}{\pi D/\lambda} \triangleq \frac{58,96^\circ}{D/\lambda} = 1,179^\circ.$$

Beide Werte können auch aus der Fernfeldkurve in Bild 8.15 abgelesen werden.

9 Elementardipole und Rahmenantennen

9.1 Elektrischer Elementarstrahler

Die einfachste Strahlungsquelle – sozusagen die Urform aller Antennen – ist ein infinitesimal kurzes Stromelement. Dieser fiktive Strahler wird **Hertzscher Dipol** genannt. Seine Fernfeldstrahlungseigenschaften haben wir bereits in Kapitel 7 besprochen. Nun wollen wir eine exakte Darstellung aller Feldkomponenten herleiten, die auch im Nahfeld gültig ist.

Eine realisierbare Antenne, die in der Praxis ähnliche Eigenschaften wie der Hertzsche Dipol aufweist, ist durch ein dünnes Stück Draht gegeben, dessen Länge l *klein* gegen die Viertelwellenlänge sein soll, d. h. es muss $l \ll \lambda_0/4$ gelten. Einen solchen Dipol kann man sich aus zwei gleichgroßen punktförmigen Ladungen Q entgegengesetzter Polarität entstanden denken, die zwischen zwei im Abstand l auseinander liegenden Endstellungen mit der Frequenz f in gegenläufiger Richtung hin- und herschwingen (Bild 9.1). Im Grenzfall $l \rightarrow 0$ entsteht aus dieser Anordnung wieder der infinitesimal kurze Hertzsche Dipol [Her96].

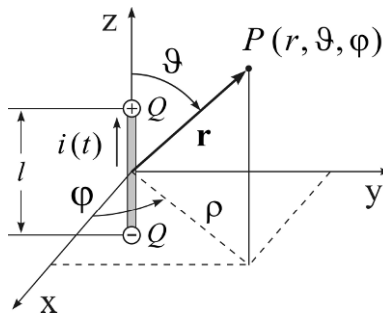


Bild 9.1 Kurzer Dipol der Länge $l \ll \lambda_0/4$ mit sinusförmigem Wechselstrom $i(t)$

Den bewegten Ladungen entspricht ein sinusförmiger Wechselstrom $i(t)$ in dem Element der Länge l , für den wir in der Schreibweise der komplexen Wechselstromrechnung

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \left\{ \underline{Q} e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ j\omega \underline{Q} e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \underline{I} e^{j\omega t} \right\} \quad (9.1)$$

schreiben wollen. Der Strom $\underline{I} = j\omega \underline{Q}$ kann für $l \ll \lambda_0/4$ als ortsunabhängig (homogen) über der Länge l angesehen werden. In Bild 9.1 liegt der Stromfaden in Richtung der z-Achse; man spricht deshalb von einem vertikalen Dipol mit dem **elektrischen Dipolmoment**

$$\underline{p} = p \underline{e}_z = \underline{Q} l \underline{e}_z = \frac{\underline{I} l}{j\omega} \underline{e}_z, \quad (9.2)$$

dessen Anteil $\underline{I} l$ die „Stärke“ der Abstrahlung bestimmt. Der Grenzübergang zu einem infinitesimal kurzen Stromfaden mit $l \rightarrow dl \rightarrow 0$ muss so geschehen, dass das Produkt $\underline{I} l$ endlich bleibt, weil sonst das Dipolmoment (9.2) und damit das gesamte Strahlungsfeld null würden. Das Strahlungsfeld einer **allgemeinen Stromverteilung** kann durch Summation bzw. Integration einzelner Stromfäden $\underline{I} dl$ berechnet werden. Bei einer realen Antenne superponiert man also die Wirkung einzelner **Elementardipole**. Daher rührt die große praktische Bedeutung des Hertzschen Dipols, obwohl er selbst als elektrischer Punktstrahler nicht realisierbar ist.

9.1.1 Strahlungsfelder

Beim Grenzübergang $l \rightarrow 0$ muss $\underline{I} \rightarrow \infty$ gehen, damit das Produkt $\underline{I} l$ nicht verschwindet. Wir beschreiben den elektrischen Elementarstrahler am Ort $\mathbf{r}_Q$ daher durch die Stromdichte

$$\boxed{\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') = \underline{I} l \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_Q) \mathbf{e}_z} \quad (9.3)$$

Darin ist $\mathbf{e}_z$ der Einheitsvektor in Stromrichtung und $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_Q)$ die **Diracsche Deltafunktion**¹ mit der Bedeutung einer Volumendichte. Es gilt:

$$\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_Q) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathbf{r}' \neq \mathbf{r}_Q \\ \infty & \text{für } \mathbf{r}' = \mathbf{r}_Q \end{cases} \quad (9.4)$$

und damit folgt das räumlich dreidimensionale Normierungsintegral:

$$\iiint_{V' \text{ um } \mathbf{r}_Q} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_Q) dV' = \iiint_{V' \text{ um } \mathbf{r}_Q} \delta(x' - x_Q) \delta(y' - y_Q) \delta(z' - z_Q) dV' = 1. \quad (9.5)$$

Der Diracimpuls $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_Q)$ hat daher die Einheit $1/\text{m}^3$, woraus für die Stromdichte $\underline{\mathbf{J}}$ in (9.3) die korrekte Einheit A/m^2 folgt. Die Integrationsvariable nennen wir $\mathbf{r}'$ und $\mathbf{r}_Q$ ist der Ortsvektor zum Quellpunkt. Der Einfachheit halber legen wir – wie in Bild 9.2 – den Koordinatenursprung in die Mitte des Dipols, sodass $\mathbf{r}_Q = 0$ wird.

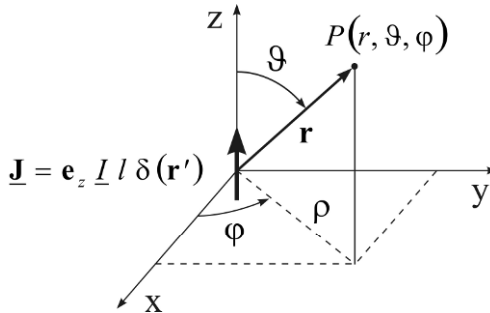


Bild 9.2 Infinitesimales, vertikales Stromelement – modelliert durch einen räumlichen Diracstoß

Nach unseren Vorüberlegungen in Kapitel 8 können wir das magnetische Vektorpotenzial $\underline{\mathbf{A}}$ eines elektrischen Quellstromes $\underline{\mathbf{J}}$ durch folgendes Quellintegral (8.22) angeben:

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'. \quad (9.6)$$

Mit der Volumenstromdichte des Hertzschen Dipols $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') = \mathbf{e}_z \underline{I} l \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_Q)$ folgt daraus:

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V'} \mathbf{e}_z \underline{I} l \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_Q) \frac{e^{-jk_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV', \quad (9.7)$$

und mit der Ausblendeigenschaft der Deltafunktion erhalten wir:

¹ Paul Adrien Maurice **Dirac** (1902-1984): engl. Physiker (Mitbegründer der Quantenmechanik, relativistische Wellenmechanik, Antimaterie, magnetische Monopole, Nobelpreis für Physik 1933)

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \underline{I} l \frac{e^{-j k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|}}{4 \pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|}. \quad (9.8)$$

Diese Darstellung des Vektorpotenzials ist nur gültig, wenn Beobachterpunkt $\mathbf{r}$ und Quellpunkt $\mathbf{r}_Q$ nicht zusammenfallen, d. h. wenn $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q| \neq 0$ gilt. Speziell für einen Hertzschen Dipol im Koordinatenursprung mit $\mathbf{r}_Q = 0$ folgt schließlich:

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \underline{A}_z = \mathbf{e}_z \underline{I} l \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r}. \quad (9.9)$$

Aus diesem kartesischen Vektorpotenzial in Stromrichtung erhält man mit

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}} &= \text{rot } \underline{\mathbf{A}} \\ \underline{\mathbf{E}} &= \frac{1}{j \omega \varepsilon_0} (\text{rot } \underline{\mathbf{H}} - \underline{\mathbf{J}}) \end{aligned} \quad (9.10)$$

die gesuchten Feldstärken. Nach einer Zerlegung in sphärische Komponenten wird unter Beachtung der Tabellen 2.5 und 2.6:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}} &= \text{rot} [\mathbf{e}_z \underline{A}_z(r)] = \text{rot} [\mathbf{e}_r \underline{A}_z(r) \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \underline{A}_z(r) \sin \vartheta] = \\ &= -\mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \underline{A}_z(r) \sin \vartheta) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\underline{A}_z(r) \cos \vartheta) \right]. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Das den Hertzschen Dipol umgebende **H-Feld** ist somit rotationssymmetrisch um die z-Achse (Längsachse), d. h. alle Komponenten in einem beliebigen Aufpunkt P sind unabhängig vom Azimutwinkel φ und können somit nur noch vom Abstand r und vom Elevationswinkel ϑ abhängen ($\partial/\partial\varphi = 0$). Ein Wechselstrom $\underline{I}$ in z-Richtung wird von magnetischen Feldlinien umgeben, die mit der z-Achse konzentrische Kreise bilden. Es gilt also:

$$\underline{H}_r = \underline{H}_\vartheta = 0, \quad (9.12)$$

und das Magnetfeld hat nur eine $\underline{H}_\varphi$ -Komponente mit

$$\begin{aligned} \underline{H}_\varphi &= -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \underline{I} l \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} \sin \vartheta \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\underline{I} l \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} \cos \vartheta \right) \right] = \\ &= -\frac{\underline{I} l}{4 \pi r} \left[\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} (e^{-j k_0 r}) + \frac{e^{-j k_0 r}}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\cos \vartheta) \right] = \\ &= -\frac{\underline{I} l}{4 \pi r} \left[-j k_0 \sin \vartheta e^{-j k_0 r} - \frac{e^{-j k_0 r}}{r} \sin \vartheta \right]. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Nach Ausklammern gleicher Faktoren finden wir schließlich:

$$\underline{H}_\varphi = j \underline{I} k_0 l \sin \vartheta \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} \left(1 + \frac{1}{j k_0 r} \right). \quad (9.14)$$

Aus der ersten Maxwell'schen Gleichung

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{j\omega \varepsilon_0} [\text{rot} \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) - \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r})] \quad (9.15)$$

kann nun auch die elektrische Feldstärke des Dipols bestimmt werden. Befindet sich die Punktquelle am Ort $\mathbf{r}_Q = 0$, dann wird nach (9.3) $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z I l \delta(\mathbf{r})$. Außerhalb des Ursprungs, der zur Vermeidung einer Singularität ausgeschlossen werden muss, gilt daher $\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r} \neq 0) = 0$, womit sich (9.15) für $\mathbf{r} \neq 0$ vereinfachen lässt:

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega \varepsilon_0} \text{rot} \underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{j\omega \varepsilon_0} \text{rot}(\mathbf{e}_\varphi \underline{H}_\varphi) = \frac{1}{j\omega \varepsilon_0} \nabla \times (\mathbf{e}_\varphi \underline{H}_\varphi). \quad (9.16)$$

Man sieht sofort, dass wegen des Vektorprodukts das **elektrische Feld** nur noch Komponenten $\underline{E}_r$ und $\underline{E}_\vartheta$ besitzen kann; somit gilt:

$$\boxed{\underline{E}_\varphi = 0}. \quad (9.17)$$

Die verbleibenden Feldkomponenten erhalten wir nach Tabelle 2.6 aus

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= \frac{1}{j\omega \varepsilon_0} \text{rot}(\mathbf{e}_\varphi \underline{H}_\varphi(r, \vartheta)) = \\ &= \frac{1}{j\omega \varepsilon_0} \left\{ \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} [\underline{H}_\varphi(r, \vartheta) \sin \vartheta] - \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \underline{H}_\varphi(r, \vartheta)] \right\}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Mit dem aus (9.14) bereits bekannten $\underline{H}_\varphi(r, \vartheta)$ erhalten wir zunächst:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= j \frac{I k_0 l}{4\pi} \frac{1}{j\omega \varepsilon_0} \left\{ \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \left(1 + \frac{1}{jk_0 r} \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} [\sin^2 \vartheta] - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[e^{-jk_0 r} \left(1 + \frac{1}{jk_0 r} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Nach Ausführen der Differenziationen findet man:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= j \frac{I k_0 l}{4\pi} \frac{1}{j\omega \varepsilon_0} \left\{ \mathbf{e}_r \frac{2 \cos \vartheta}{r} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \left(1 + \frac{1}{jk_0 r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta \frac{1}{r} e^{-jk_0 r} \left(jk_0 + \frac{1}{r} + \frac{1}{jk_0 r^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Man fasst weiter zusammen und erhält schließlich:

$$\boxed{\underline{\mathbf{E}} = j\omega \mu_0 I l \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \left\{ \mathbf{e}_r 2 \cos \vartheta \left(\frac{1}{jk_0 r} + \frac{1}{(jk_0 r)^2} \right) + \right.} \quad (9.21)$$

$$\left. + \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta \left(1 + \frac{1}{jk_0 r} + \frac{1}{(jk_0 r)^2} \right) \right\}.$$

Der Hertzsche Dipol strahlt damit eine **E-Welle** ab, die sich in radialer $\mathbf{e}_r$ -Richtung ausbreitet und die Feldkomponenten $(\underline{E}_r, \underline{E}_\vartheta, \underline{H}_\varphi)$ besitzt. Alle drei nichtverschwindenden Komponenten des Strahlungsfeldes des Hertzschen Dipols wollen wir noch einmal zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \underline{E}_r &= 2 Z_0 \underline{H}_0 \cos \vartheta \frac{e^{-j k_0 r}}{k_0 r} \left(\frac{1}{j k_0 r} + \frac{1}{(j k_0 r)^2} \right) \\ \underline{E}_\vartheta &= Z_0 \underline{H}_0 \sin \vartheta \frac{e^{-j k_0 r}}{k_0 r} \left(1 + \frac{1}{j k_0 r} + \frac{1}{(j k_0 r)^2} \right) \\ \underline{H}_\varphi &= \underline{H}_0 \sin \vartheta \frac{e^{-j k_0 r}}{k_0 r} \left(1 + \frac{1}{j k_0 r} \right). \end{aligned}$$

	$1/r$	$1/r^2$	$1/r^3$
$\underline{E}_r$		×	×
$\underline{E}_\vartheta$	×	×	×
$\underline{H}_\varphi$	×	×	

fern ↔ nah

(9.22)

Die komplexe Amplitude des H-Feldes $\underline{H}_0 = H_0 e^{j\varphi_0} = j\pi I l / \lambda_0^2$ hat die Einheit A/m. Mit $Z_0 = (\mu_0 / \varepsilon_0)^{1/2} \approx 376,73 \, \Omega$ wird der reelle Feldwellenwiderstand des freien Raums bezeichnet und die Wellenzahl ist $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \omega / c_0 = 2\pi / \lambda_0$. Aus den komplexen Amplituden (9.22) erhält man nach Multiplikation mit $e^{j\omega t}$ und anschließender Realteilbildung folgende Darstellung im **Zeitbereich**:

$$\begin{aligned} E_r(r, \vartheta, t) &= 2 Z_0 H_0 \frac{\cos \vartheta}{(k_0 r)^2} \left[-\frac{1}{k_0 r} \cos(\omega t - k_0 r + \varphi_0) + \sin(\omega t - k_0 r + \varphi_0) \right] \\ E_\vartheta(r, \vartheta, t) &= Z_0 H_0 \frac{\sin \vartheta}{k_0 r} \left[\left(1 - \frac{1}{(k_0 r)^2} \right) \cos(\omega t - k_0 r + \varphi_0) + \frac{1}{k_0 r} \sin(\omega t - k_0 r + \varphi_0) \right] \\ H_\varphi(r, \vartheta, t) &= H_0 \frac{\sin \vartheta}{k_0 r} \left[\cos(\omega t - k_0 r + \varphi_0) + \frac{1}{k_0 r} \sin(\omega t - k_0 r + \varphi_0) \right]. \end{aligned}$$
(9.23)

Die drei Feldkomponenten der E_{01} -Welle (TM_{01} -Welle) des Hertzschen Dipols (siehe Übung 12.1) sind in Bild 9.3 für einen Punkt des dreidimensionalen Raumes am Ort $\mathbf{r}$ dargestellt.

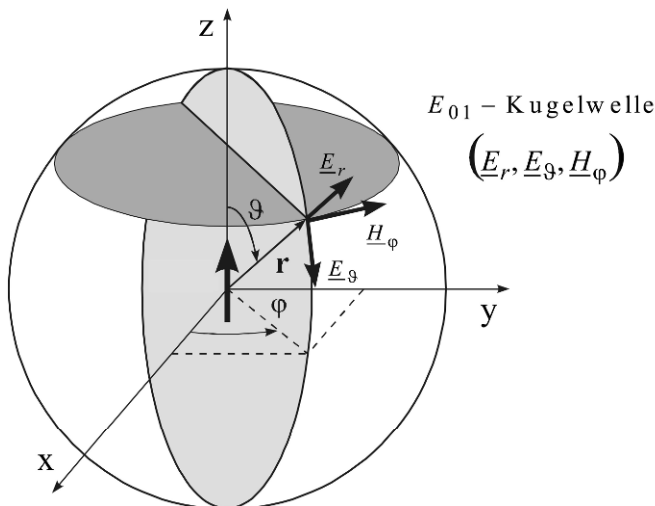


Bild 9.3 Vertikaler Elementardipol mit seinen drei Feldkomponenten

Die drei Feldkomponenten $(\underline{E}_r, \underline{E}_\vartheta, \underline{H}_\varphi)$ bilden ein orthogonales Dreibein und zwar liegt $\underline{E}_r$ in Ausbreitungsrichtung, während $\underline{E}_\vartheta$ und $\underline{H}_\varphi$ senkrecht aufeinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen (transversale Komponenten). Die Ausdrücke (9.22) für die Feldstärken bestehen aus mehreren Gliedern, die mit der ersten, zweiten und dritten Potenz der Entfernung r abnehmen. In unmittelbarer Umgebung des Elementarstrahlers ($k_0 r \ll 1$) wird das Feld durch diejenigen Glieder in den Feldgleichungen bestimmt, die den Abstand r in der *höchsten* Potenz enthalten. Man bezeichnet diesen Feldanteil als **Nahfeld**. Mit $e^{-jk_0 r} \approx 1$ erhält man die Näherungen:

$$\begin{aligned} \underline{E}_r &= -2 Z_0 \underline{H}_0 \frac{\cos \vartheta}{(k_0 r)^3} \\ \underline{E}_\vartheta &= -Z_0 \underline{H}_0 \frac{\sin \vartheta}{(k_0 r)^3} = -j \frac{Z_0}{k_0 r} \underline{H}_\varphi \\ \underline{H}_\varphi &= -j \underline{H}_0 \frac{\sin \vartheta}{(k_0 r)^2} \end{aligned} \quad (9.24)$$

Zwischen der elektrischen und der magnetischen Feldstärke $\underline{E}$ bzw. $\underline{H}$ besteht im Nahfeld eine Phasenverschiebung von 90° (Faktor j). Das Nahfeld enthält also vorwiegend **Blindleistung** in Form von Feldenergie, die zwischen dem Dipol und dem umgebenden Raum hin- und herpendelt. In einer vollen Periode $T = 1/f$ wechselt die Richtung des Energietransports viermal. Die Feldkomponenten des Nahfeldes (9.24) tragen im zeitlichen Mittel daher *nichts* zur Abstrahlung bei. In größerer Entfernung vom Dipol ($k_0 r \gg 1$) können hingegen in (9.22) die Glieder höherer Ordnung $1/r^3$ und $1/r^2$ gegenüber dem linearen Glied $1/r$ vernachlässigt werden. Dann erhalten wir das so genannte **Fernfeld**, das allein für die Übertragung über größere Entfernungen verantwortlich ist. Die Feldstärkekomponenten des Fernfeldes sind:

$$\begin{aligned} \underline{E}_r &= -2 j Z_0 \underline{H}_0 \cos \vartheta \frac{e^{-jk_0 r}}{(k_0 r)^2} \\ \underline{E}_\vartheta &= Z_0 \underline{H}_0 \sin \vartheta \frac{e^{-jk_0 r}}{k_0 r} = Z_0 \underline{H}_\varphi \\ \underline{H}_\varphi &= \underline{H}_0 \sin \vartheta \frac{e^{-jk_0 r}}{k_0 r} \end{aligned} \quad (9.25)$$

Man erkennt in (9.25) den typischen Wellenausbreitungsterm $e^{-jk_0 r}$ sowie die Phasengleichheit der transversalen Felder $\underline{E}_\vartheta$ und $\underline{H}_\varphi$, was einen radialen Wirkleistungstransport ermöglicht. Am so genannten **Grenzradius** $r_g = \lambda_0 / (2\pi)$ wird $k_0 r_g = 1$, d. h. Nah- und Fernfeld sind hier von gleicher Größenordnung (siehe Übung 12.2).

Übung 9.1: Nah- und Fernfeld

- Für $k_0 r \gg 1$ spricht man beim Hertzschen Dipol von der Fernfeldzone. Die Entfernung vom Dipol muss dort die Bedingung $r \geq 2\lambda_0$ erfüllen – siehe auch (8.79) und Tabelle 8.6. So liegen beispielsweise bei $f = 300 \text{ kHz}$ ($\lambda_0 = 1000 \text{ m}$) in einer Entfernung von $r = 100 \text{ m}$ noch Nahfeldverhältnisse vor, während sich bei $f = 3 \text{ GHz}$ ($\lambda_0 = 10 \text{ cm}$) in einem Abstand von $r = 20 \text{ cm}$ bereits Fernfeldbedingungen einstellen. $\square$

Im **Fernfeld** bei $k_0 r \gg 1$ gilt wegen (9.25):

$$\underline{E} = Z_0 \underline{H}_0 \left[\mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta - \mathbf{e}_r 2j \frac{\cos \vartheta}{k_0 r} \right] \frac{e^{-j k_0 r}}{k_0 r} \quad (9.26)$$

Die Komponente $\underline{E}_r$ kann mit Ausnahme der Bereiche um $\vartheta = 0$ bzw. $\vartheta = \pi$ stets gegenüber der Komponente $\underline{E}_\vartheta$ vernachlässigt werden. Wir brauchen sie allerdings, um zu zeigen, dass die **elektrischen Feldlinien** in sich geschlossene Kurven bilden. Die Feldlinien haben wegen $\underline{E}_\vartheta$ vorwiegend kreisförmigen Verlauf und werden durch $\underline{E}_r$ geschlossen, das wegen des Faktors $-j$ um $\lambda_0/4$ nacheilt.

Im Fernfeld haben die Feldlinien keine Verbindung mehr zum Dipol und entfernen sich immer weiter von der Quelle. Ursache dafür ist die Trägheit des Feldes, ausgedrückt durch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit c_0 . Dadurch wird eine Änderung des Feldzustandes an einer Stelle nicht sofort auch an anderen Stellen wirksam. Eine Feldlinie zwischen den Enden des Dipols erfährt nicht mehr „rechtzeitig“ von der Änderung des Ladungszustandes der Quelle und macht sich selbständig. Bei unendlich großer Fortpflanzungsgeschwindigkeit würde sich in jedem Moment im ganzen Raum das dem jeweiligen Ladungszustand entsprechende statische Feldbild sofort einstellen.

Der Vorgang des Abschnürens der elektrischen Feldlinien von der Quelle ist in Bild 9.4 in zeitlichen Abständen von einer sechzehntel Periode $T/16$ dargestellt [Kar84b, Kar90, Peu98]. Die Größe des dargestellten Bereichs beträgt sowohl horizontal als auch vertikal jeweils zwei Wellenlängen, d. h. $2\lambda_0$. Man kann sich die Felder in eine sich mit Lichtgeschwindigkeit ausdehnende „Grenzkugel“ eingeschlossen denken, die gestrichelt dargestellt ist.

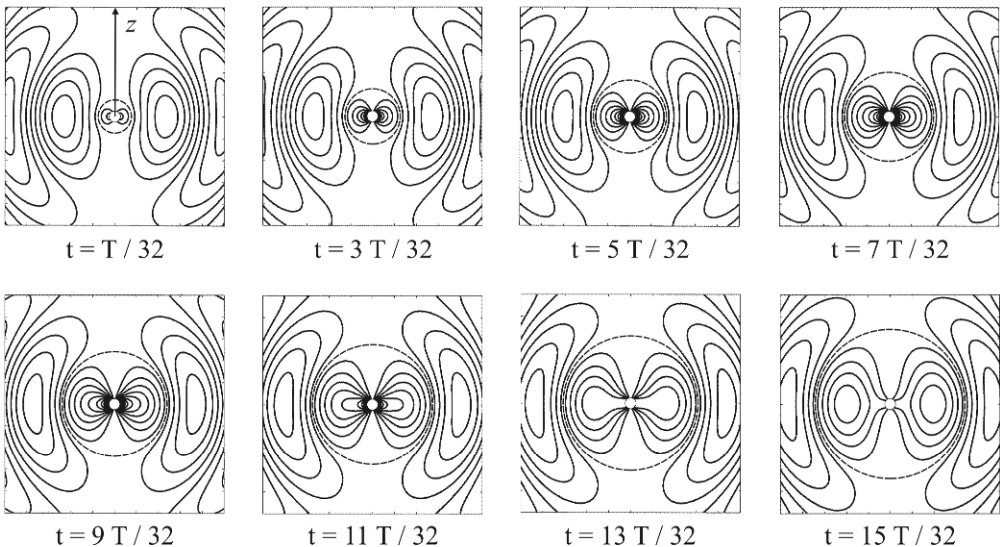


Bild 9.4 Darstellung der elektrischen Feldlinien des Hertzischen Dipols im Vertikalschnitt ($2\lambda_0 \times 2\lambda_0$). Der zeitliche Vorgang der Wellenablösung wird in konstanten Abständen von $\Delta t = T/16$ gezeigt. Die Singularität im Quellpunkt ist durch einen kleinen Kreis ausgeblendet. Die Quellphase beträgt $\varphi_0 = \pi/2$.

Die **elektrischen Feldlinien** schnüren sich ab und bilden im Fernfeld in sich geschlossene Kraftlinien. Damit sich eine Feldlinie vom Dipol lösen kann, muss sie eine Länge haben, die

mindestens einer halben Wellenlänge $\lambda_0/2$ entspricht. Die Länge der Feldlinien nimmt proportional zur Entfernung r zu. Da die gesamte Spannung längs einer Feldlinie konstant bleibt, nimmt auch die Feldstärke mit $1/r$ ab. Bild 9.5 zeigt das elektrische Momentanbild der Dipolwelle bei $t = 15T/32$ in einem größeren räumlichen Gebiet. Es ist nur der erste Quadrant dargestellt.

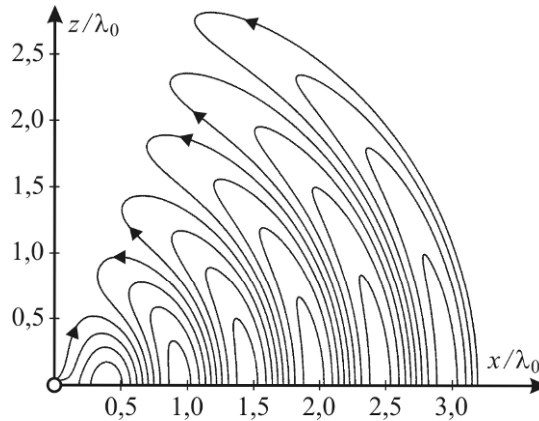


Bild 9.5 Elektrische Feldlinien des vertikalen Hertzschen Dipols (I. Quadrant)

Das elektrische Feldbild muss man sich noch um die mitwandernden magnetischen Felder $\underline{H}_\varphi$ ergänzt denken. Die **magnetischen Feldlinien** umgeben den Dipol als Kreise in Ebenen senkrecht zur Dipolachse.

Analog der Vorgehensweise beim Rechteck- und Rundhohlleiter (6.45) bzw. (6.64) können wir auch beim Hertzschen Dipol eine **Differenzialgleichung der Feldlinien** angeben [Kar90]:

$$\mathbf{E}(r, \vartheta, t) \times d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow E_\vartheta(r, \vartheta, t) dr = E_r(r, \vartheta, t) r d\vartheta. \quad (9.27)$$

Mit den Felddarstellungen (9.23) folgt daraus zunächst:

$$-\frac{\left(1 - \frac{1}{(k_0 r)^2}\right) \cos(\omega t - k_0 r + \varphi_0) + \frac{1}{k_0 r} \sin(\omega t - k_0 r + \varphi_0)}{\frac{\cos(\omega t - k_0 r + \varphi_0)}{k_0 r} - \sin(\omega t - k_0 r + \varphi_0)} d(k_0 r) = 2 \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} d\vartheta. \quad (9.28)$$

Beide Seiten können elementar integriert werden, da der Zähler jeweils gerade die Ableitung des Nenners darstellt [Möl58]. Die Quotienten können daher als logarithmische Ableitung [JEL66] geschrieben werden. Somit folgen die elektrischen Feldlinien des Hertzschen Dipols – wie auch schon bei Hohlleiterwellen – als **Höhenlinien** einer Potenzialfunktion (Einheit Volt):

$$\Phi = \frac{E_0}{k_0} \sin^2 \vartheta \left[\frac{\cos(\omega t - k_0 r + \varphi_0)}{k_0 r} - \sin(\omega t - k_0 r + \varphi_0) \right] \quad \text{mit} \quad E_0 = Z_0 H_0. \quad (9.29)$$

Diese **Potenzialfunktion** Φ hängt mit dem Magnetfeld H_φ zusammen [Lor95] – vgl. (6.49):

$$\Phi(r, \vartheta, t) = Z_0 r \sin \vartheta \frac{\partial H_\varphi(r, \vartheta, t)}{\partial(\omega t)} \quad \text{und es gilt:} \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{e}_\varphi \times \text{grad } \Phi}{k_0 r \sin \vartheta}. \quad (9.30)$$

Eine 3D-Darstellung von $\Phi(r, \vartheta)$ für $\omega t + \varphi_0 = 0$ mit zugehörigen Höhenlinien zeigt Bild 9.6.

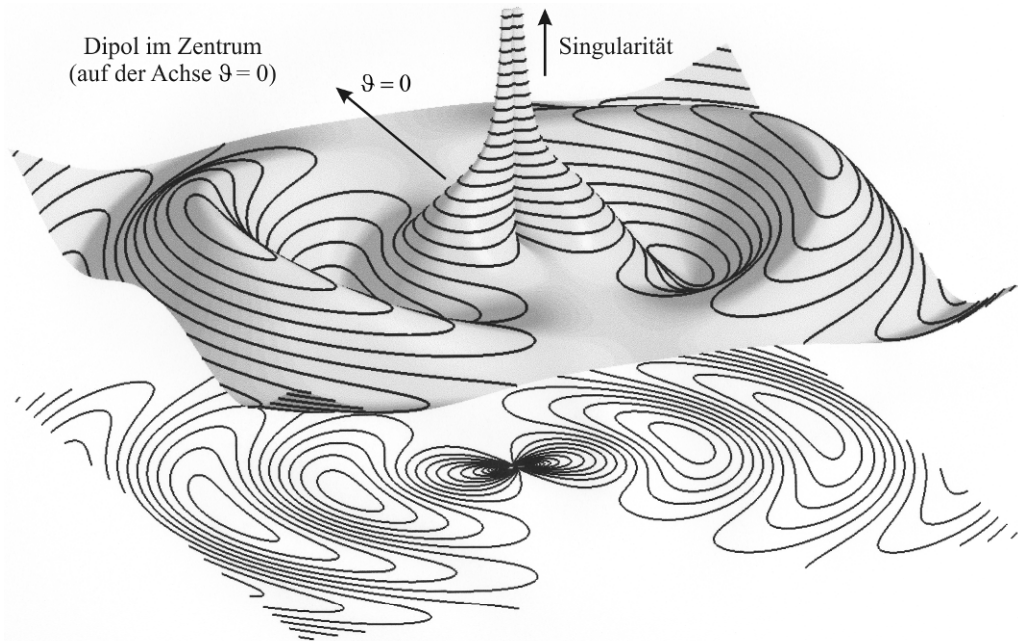


Bild 9.6 Elektrische Feldlinien des Hertzschen Dipols im Bereich $(3\lambda_0 \times 3\lambda_0)$ als Höhenlinien der Potenzialfunktion (9.29). Der dargestellte Zeitpunkt ist $t = 3T/4$ und die Quellphase beträgt $\varphi_0 = \pi/2$.

Der Hertzsche Dipol ist eine der wenigen Antennen, bei denen eine exakte Berechnung des Strahlungsfeldes in geschlossener Form überhaupt möglich ist. Bei den meisten anderen Antennen sind hingegen nur mehr oder weniger präzise Fernfeldnäherungen bekannt. Der Hertzsche Dipol eignet sich daher in hervorragender Weise zur Untersuchung des Nahfeldes von Sendantennen. Insbesondere interessiert uns der Vorgang des Ablösens der Feldlinien von der Antennenoberfläche, den wir im nächsten Abschnitt noch genauer betrachten wollen.

9.1.2 Wellengeschwindigkeiten und Nahfeldablösung

Wie in anderen Wellenleitern mit exponentiellem Ausbreitungsterm kann man auch bei den Kugelwellen des Freiraums eine komplexe Ausbreitungskonstante definieren. Nach [Bar39] findet man mit Hilfe der logarithmischen Ableitung die Darstellung:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = -\frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{E_{\vartheta}}{E_0} = -\frac{1}{E_{\vartheta}} \frac{\partial E_{\vartheta}}{\partial r}. \quad (9.31)$$

Dabei stellen die Dämpfungskonstante α und die Phasenkonstante β die logarithmische Amplitudenabnahme bzw. die Phasenänderung in Ausbreitungsrichtung bei der elektrischen Feldstärke E_{ϑ} dar. Eine analoge Rechnung – basierend auf dem magnetischen Transversalfeld $\underline{H}_{\varphi}$ – findet man im Übungsteil 9.4. Aus der elektrischen Feldstärke (9.22) mit $\underline{E}_0 = Z_0 \underline{H}_0$

$$\underline{E}_{\vartheta}(r, \vartheta) = \underline{E}_0 \sin \vartheta \frac{e^{-jk_0 r}}{k_0 r} \left(1 + \frac{1}{jk_0 r} + \frac{1}{(jk_0 r)^2} \right) \quad (9.32)$$

folgt also mit (9.31) nach Differenziation und Trennung von Real- und Imaginärteil

$$\alpha(r) = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{2 - (k_0 r)^2}{1 - (k_0 r)^2 + (k_0 r)^4} \right) \xrightarrow{k_0 r \gg 1} \frac{1}{r} \quad (9.33)$$

$$\beta(r) = \frac{2\pi}{\lambda(r)} = k_0 \left(1 - \frac{1 + (k_0 r)^2}{1 - (k_0 r)^2 + (k_0 r)^4} \right) \xrightarrow{k_0 r \gg 1} k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}. \quad (9.34)$$

Für große Abstände von der Strahlungsquelle stellen sich die bekannten Fernfeldeigenschaften ein. Im Nahfeld hingegen ist die Wellenlänge vom Ort abhängig. Aus (9.34) kann man nach (4.28) und (4.35) die **Phasen-** und die **Gruppengeschwindigkeit** [Peu98] des E-Feldes

$$v_p(r) = \frac{\omega}{\beta(r)} = c_0 \frac{k_0}{\beta(r)} = c_0 \left(1 + \frac{1 + (k_0 r)^2}{-2(k_0 r)^2 + (k_0 r)^4} \right) \quad (9.35)$$

$$v_g(r) = \frac{1}{\partial \beta(r) / \partial \omega} = c_0 \frac{1}{\partial \beta(r) / \partial k_0} = c_0 \left(1 + \frac{1 + 4(k_0 r)^2 - 4(k_0 r)^4 - (k_0 r)^6}{-6(k_0 r)^2 + 7(k_0 r)^4 - (k_0 r)^6 + (k_0 r)^8} \right) \quad (9.36)$$

als vom Ort abhängige Größen ermitteln. Sie streben für große Antennenabstände beide gegen die Lichtgeschwindigkeit. Mit (4.44) und der magnetischen Feldstärke eines Hertzschen Dipols

$$\underline{H}_\varphi(r, \vartheta) = \frac{E_0}{Z_0} \sin \vartheta \frac{e^{-j k_0 r}}{k_0 r} \left(1 + \frac{1}{j k_0 r} \right) \quad (9.37)$$

finden wir schließlich die radiale **Energiegeschwindigkeit** in der Äquatorebene ($\vartheta = \pi/2$):

$$v_E(r) = c_0 \frac{2 \operatorname{Re} \left\{ \underline{E}_\vartheta Z_0 \underline{H}_\varphi^* \right\}}{|\underline{E}_\vartheta|^2 + Z_0^2 |\underline{H}_\varphi|^2} = \frac{c_0}{1 + \frac{1}{2(k_0 r)^4}} \leq c_0. \quad (9.38)$$

Während Phasen- und Gruppengeschwindigkeit jeden beliebigen Wert annehmen können, steigt die Energiegeschwindigkeit mit zunehmendem Abstand $k_0 r$ monoton an und strebt asymptotisch gegen c_0 in völliger Übereinstimmung mit den Forderungen der speziellen Relativitätstheorie. Für $k_0 r = \sqrt{2}$ erkennen wir in Bild 9.7 einen Pol mit Vorzeichenwechsel bei der Phasengeschwindigkeit. Für kleinere Abstände ist die Phasengeschwindigkeit negativ, d. h. es muss dort Feldlinien geben, die sich nicht vom Strahler lösen können und schließlich wieder auf ihn zurückfallen, was man als **pulsierende Blindleistungsschwingung** interpretieren kann. Tatsächlich beobachtet man im Zeitintervall $T/4 < t < T/2$ (und auch für $3T/4 < t < T$ usw.) eine Rückströmung der Blindenergie zum Erreger. Davon werden nur die innersten Feldlinien erfasst, die sich in der Äquatorebene bei $\vartheta = \pi/2$ noch nicht sehr weit vom Dipol entfernt haben.

Die Bildsequenz 9.8 zeigt eine quadratische Zone der Kantenlänge $\lambda_0/2$, wo sich die innersten elektrischen Feldlinien im grau unterlegten Bereich rückläufig bewegen und dadurch den Dipol nicht verlassen können. Kurz nach dem Zeitpunkt $t = 12T/32$ (genauer bei $t = 0,37712T$ [Möl58]) findet erstmals eine Abschnürung der elektrischen Feldlinien statt und zwar gerade am Ort der Polstelle der Phasengeschwindigkeit bei $k_0 r = \sqrt{2}$, d. h. bei $r \approx 0,2251 \lambda_0$. Dort verschmelzen zwei gegenüberliegende Feldlinien und lösen somit ihre Verbindung zur Quelle, was letztendlich zur Abstrahlung führt. Die Abschnürzone mit Radius r_a wandert nach innen und ist in Bild 9.8 durch einen Kreis kenntlich gemacht.

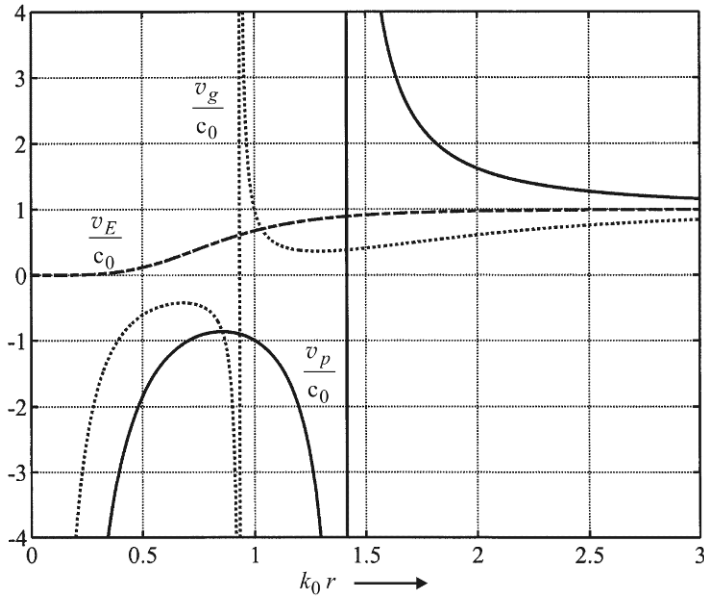


Bild 9.7 Phasen-, Gruppen- und Energiegeschwindigkeit des Hertzischen Dipols nach (9.35), (9.36) und (9.38). Nur die Energiegeschwindigkeit liegt im Intervall $0 \leq v_E \leq c_0$, während v_p und v_g negative oder sogar unendlich große Werte annehmen können. Man beobachtet Polstellen mit Vorzeichenwechsel an $k_0 r = 0,9333$ und an $k_0 r = \sqrt{2}$. Man beachte, dass v_p und v_g aus dem elektrischen Transversalfeld $\underline{E}_g$ abgeleitet wurden. Eine analoge Herleitung aus dem magnetischen Transversalfeld $\underline{H}_\varphi$ führt zu anderen Geschwindigkeiten [Möl58, Lang96], wie wir im Übungsteil 9.4 noch sehen werden.

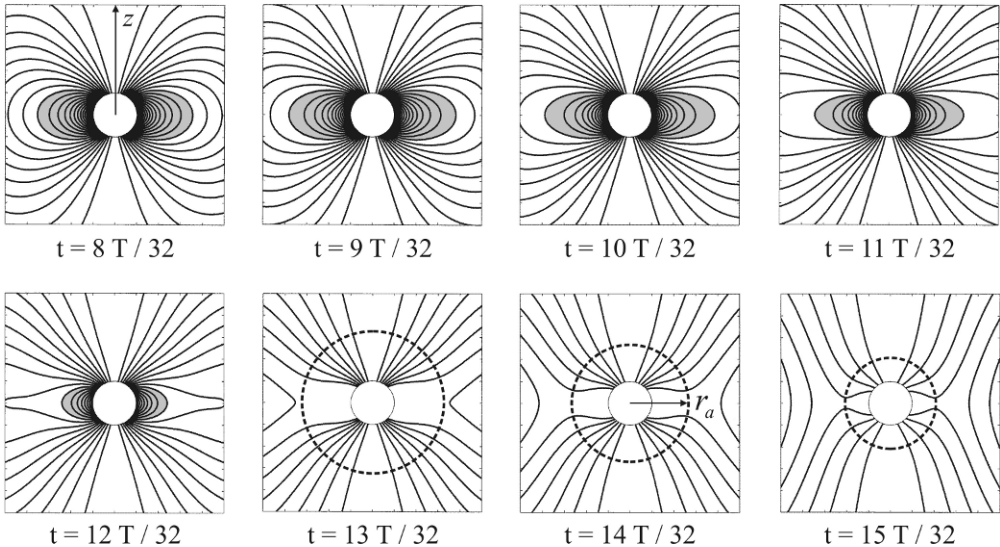


Bild 9.8 Vergrößerte Darstellung der elektrischen Feldlinien des Hertzischen Dipols im Vertikalschnitt $(0,5 \lambda_0 \times 0,5 \lambda_0)$. Der Rückfluss einzelner Feldlinien im unmittelbaren reaktiven Nahfeld wird in konstanten Abständen von $\Delta t = T/32$ gezeigt. Kurz nach dem Zeitpunkt $t = 12 T/32$ findet am Ort $r = 0,2251 \lambda_0$ erstmals eine Abschnürung der Feldlinien statt (vgl. Bild 9.4).

Den mit wachsender Zeit nach innen wandernden Abschnürradius erhält man nach (9.23) aus der Forderung $E_9(r=r_a)=0$. Wegen

$$E_9(r, \vartheta, t) = E_0 \frac{\sin \vartheta}{k_0 r} \sqrt{1 - \frac{1}{(k_0 r)^2} + \frac{1}{(k_0 r)^4}} \sin \left(\omega t - k_0 r + \varphi_0 + \arctan \left(k_0 r - \frac{1}{k_0 r} \right) \right) \quad (9.39)$$

und der Quellphase $\varphi_0 = \pi/2$ findet man Nullstellen der meridionalen Feldstärke (9.39) für

$$\omega t - k_0 r + \frac{\pi}{2} + \arctan \left(k_0 r - \frac{1}{k_0 r} \right) = n \pi. \quad (9.40)$$

Der *innerste* Wert mit $n = 1$ definiert den gesuchten **Abschnürradius** r_a :

$$\cot(\omega t - k_0 r_a) = k_0 r_a - \frac{1}{k_0 r_a} \quad (9.41)$$

als Funktion der Zeit. Nur für gewisse Zeitbereiche hat diese Gleichung eine positiv reelle Lösung r_a . So setzt die Abschnürung erstmals bei $\omega t = 2,36953$ ein, also zum Zeitpunkt $t = 0,37712 T$ und zwar bei $k_0 r_a = \sqrt{2}$ (der Polstelle der Phasengeschwindigkeit!). Mit fortschreitender Zeit wandert der Abschnürradius r_a nach innen, um schließlich für $t = T/2$ im Erregerzentrum zu verschwinden. Numerische Lösungen von (9.41) findet man in Bild 9.9.

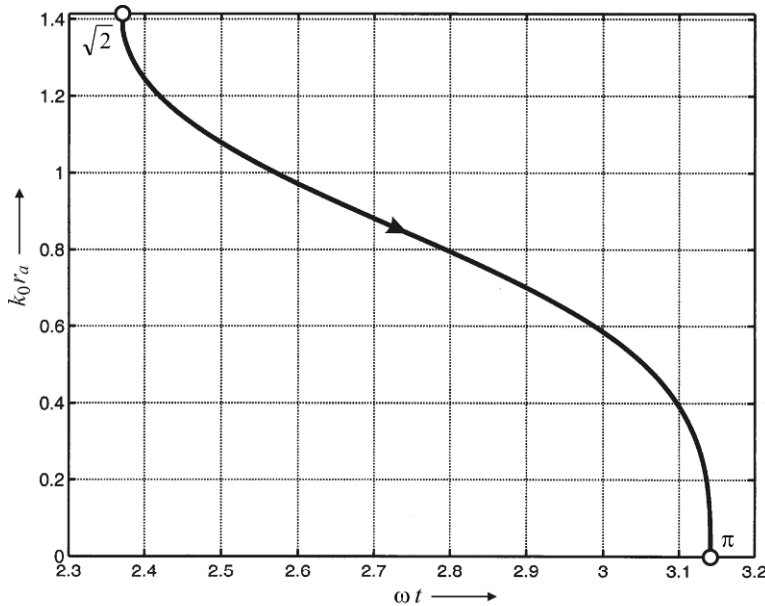


Bild 9.9 Der Radius r_a , an dem sich die Feldlinien erstmals abschnüren, wandert mit der Zeit nach innen.

Die Wellenzone, nicht nur des Hertzschen Dipols, sondern jeder Strahlungsquelle kann demnach nicht unmittelbar entstehen, sondern ist die Folge von notwendigen Feldzuständen in der nächsten Umgebung des Erregers. Ohne die Vorgänge im Nahfeld, einschließlich pulsierender Blindleistung, wäre eine Wirkleistungsabgabe an das Fernfeld undenkbar.

9.2 Magnetischer Elementarstrahler

Der in $\mathbf{e}_z$ -Richtung orientierte Hertzsche Dipol am Ort $\mathbf{r}_Q$ ist nach (9.3) durch eine eingeprägte elektrische Stromdichte

$$\underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') = \underline{I} l \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_Q) \mathbf{e}_z \quad (9.42)$$

entlang seiner infinitesimal kurzen Länge l gekennzeichnet. Setzt man anstelle des elektrischen Leitungsstroms $\underline{I}$ als duale Größe einen eingepprägten magnetischen Strom der komplexen Amplitude $\underline{I}_M$, der ebenfalls auf einer Länge l konstant sein soll, so erhält man formal den **magnetischen Elementarstrahler**. Dieser wird auch als **Fitzgeraldscher Dipol** bezeichnet (siehe die Darstellung in Bild 9.10 für $\mathbf{r}_Q = 0$).

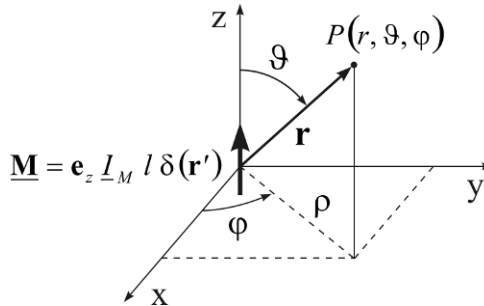


Bild 9.10 Infinitesimales, vertikales, magnetisches Stromelement $\underline{\mathbf{M}}$

Das Feld eines magnetischen Dipols ist dual zum Feld eines elektrischen Dipols, d. h. man kann beide mit Hilfe der **Fitzgeraldschen Transformation** (Abschnitt 8.2.2) ineinander überführen:

$$\begin{array}{llll} \underline{\mathbf{E}} & \Rightarrow & \underline{\mathbf{H}} & \Rightarrow & -\underline{\mathbf{E}} \\ \underline{\mathbf{J}} & \Rightarrow & \underline{\mathbf{M}} & \Rightarrow & -\underline{\mathbf{J}} \\ \underline{I} & \Rightarrow & \underline{I}_M & \Rightarrow & -\underline{I} \quad \text{sowie} \\ \underline{\mathbf{A}} & \Rightarrow & \underline{\mathbf{F}} & \Rightarrow & -\underline{\mathbf{A}} \end{array} \quad \begin{array}{ll} Z_0 & \Leftrightarrow Y_0 \\ \epsilon_0 & \Leftrightarrow \mu_0 \\ \kappa & \Leftrightarrow \kappa \end{array}$$

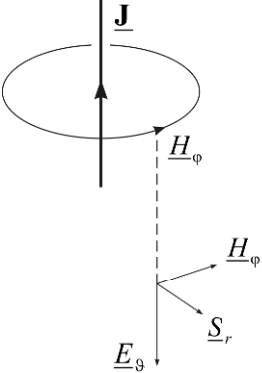
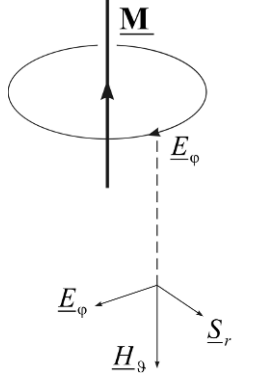
Nimmt man in den Feldern (9.22) des Hertzschen Dipols die entsprechenden Ersetzungen vor, so erhält man das duale Strahlungsfeld des Fitzgeraldschen Dipols:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{H}_r &= 2 Y_0 \underline{E}_0 \cos \vartheta \frac{e^{-j k_0 r}}{k_0 r} \left(\frac{1}{j k_0 r} + \frac{1}{(j k_0 r)^2} \right) \\ \underline{H}_\vartheta &= Y_0 \underline{E}_0 \sin \vartheta \frac{e^{-j k_0 r}}{k_0 r} \left(1 + \frac{1}{j k_0 r} + \frac{1}{(j k_0 r)^2} \right) \\ \underline{E}_\varphi &= -\underline{E}_0 \sin \vartheta \frac{e^{-j k_0 r}}{k_0 r} \left(1 + \frac{1}{j k_0 r} \right). \end{aligned}} \quad (9.43)$$

Dabei hat $\underline{E}_0 = j \pi \underline{I}_M l / \lambda_0^2$ die Einheit V/m und anstelle des Feldwellenwiderstand verwenden wir seinen Kehrwert $Y_0 = Z_0^{-1} = (\epsilon_0 / \mu_0)^{1/2} \approx 1/(376,73 \, \Omega)$. Beim magnetischen Elementarstrahler sind jetzt die elektrischen Feldlinien konzentrische Kreise um die Dipolachse (aber mit entgegengesetztem Umlaufsinn wie bei den magnetischen Feldlinien des Hertzschen

Dipols), während die magnetischen Feldlinien den elektrischen Feldlinien des Hertzschen Dipols direkt entsprechen. Zum Vergleich dient die Darstellung in Tabelle 9.1.

Tabelle 9.1 Vergleich der Feldkomponenten des elektrischen und des magnetischen Elementarstrahlers

Hertzscher Dipol	Fitzgeraldscher Dipol
	

Das Feld des vertikalen magnetischen Elementarstrahlers ist im Gegensatz zu dem des elektrischen Elementarstrahlers horizontal polarisiert. Die ausgestrahlten Wellen gehören dem **H-** oder **TE-Wellentyp** an, da jetzt die magnetische Feldstärke **H** eine Komponente in Ausbreitungsrichtung besitzt. Aus den allgemeinen Darstellungen des Strahlungsfeldes eines magnetischen Elementarstrahlers (9.43) kann man in gleicher Weise wie schon beim Hertzschen Dipol Näherungslösungen für das Nahfeld bzw. für das Fernfeld angeben. Insbesondere gilt in beiden Fällen $C = \sin \vartheta$ und $D = 3/2$. Aufgrund der beschriebenen Dualität beider Dipolfelder verzichten wir auf eine detailliertere Darstellung.

Während magnetische Ströme und Ladungen fiktive Hilfsgrößen sind, kann ein **magnetischer Dipol** realisiert werden. In der Praxis verwendet man eine elektrisch kleine Leiterschleife, die einen räumlich konstanten elektrischen Wechselstrom **I** führt und wie in Bild 9.11 orientiert ist. Wir betrachten N Windungen beliebiger (meist kreisförmiger) Randkontur der Fläche A .

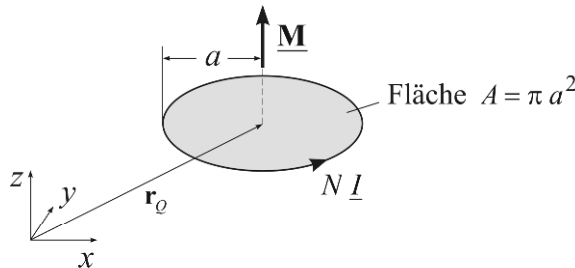


Bild 9.11 Nachbildung eines magnetischen Dipols mittels einer kreisförmigen, elektrisch kleinen Leiterschleife aus N Windungen des Umfangs $U = 2\pi a \ll \lambda_0/4$

Die Anordnung aus Bild 9.11 erzeugt in ihrem Zentrum eine magnetische Stromdichte [Bal05]

$$\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{r}') = j\omega\mu_0 N \underline{I} A \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_Q) \mathbf{e}_z = \underline{I}_M l \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_Q) \mathbf{e}_z, \quad (9.44)$$

aus der sofort $\underline{I}_M = j\omega\mu_0 N \underline{I} A / l$ und auch $\underline{E}_0 = -k_0^3 Z_0 N \underline{I} A / (4\pi)$ folgen, womit wir aus (9.43) das **Strahlungsfeld** der Leiterschleife berechnen können.

Da die Leiterschleife als elektrisch klein vorausgesetzt wurde ($U = 2\pi a \ll \lambda_0/4$), darf die Frequenz des Stroms $\underline{I}$ nicht zu hoch werden. Im **statischen Grenzfall** geht $k_0 \rightarrow 0$ und aus (9.43) folgt mit $\underline{E}_0 = -k_0^3 Z_0 N \underline{I} a^2/4$ natürlich $E_\varphi = 0$ und es gilt (siehe auch [Jac02]):

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{m \cos \vartheta}{2\pi r^3} & \text{mit dem magnetischen Dipolmoment } \mathbf{m} = m \mathbf{e}_z = N I \pi a^2 \mathbf{e}_z \\ H_\vartheta &= \frac{m \sin \vartheta}{4\pi r^3} & (\text{jeweils gültig für } r \gg a). \end{aligned} \quad (9.45)$$

Ein magnetischer Dipol kann also in Form einer elektrischen Stromschleife realisiert werden; man spricht dann auch von einer **Rahmenantenne**, die als **Ferritantenne** für den Frequenzbereich ($300 \text{ kHz} < f < 3 \text{ MHz}$) in vielen Rundfunkempfängern eine weite Verbreitung gefunden hat. Ihr **Strahlungswiderstand** ist ähnlich dem des Hertzschen Dipols (7.10) relativ klein, kann aber durch Füllung mit einem magnetischen Ferritkern und durch Erhöhen der Windungszahl N noch vergrößert werden:

$$\boxed{R_S = \frac{\pi}{6} Z_0 \left(\frac{U}{\lambda_0} \right)^4 \mu_{r,\text{eff}}^2 N^2} \quad \text{mit} \quad \frac{U}{\lambda_0} = k_0 a \ll \frac{1}{4}. \quad (9.46)$$

Zur Herleitung von R_S verweisen wir auf Übung 9.2. In (9.46) ist $\mu_{r,\text{eff}}$ die effektive, relative Permeabilität des zylindrischen Ferritkerns – mit Durchmesser d und Länge l – unter Berücksichtigung der Randstreuung am Spulenende. Nach [Bal05] gilt näherungsweise:

$$\mu_{r,\text{eff}} = \frac{\mu_{r,\text{Fe}}}{1 + \xi (\mu_{r,\text{Fe}} - 1)} \quad (9.47)$$

mit der relativen Permeabilität $\mu_{r,\text{Fe}}$ des Ferritmaterials und dem Streufaktor

$$\xi \approx \frac{1}{2} (d/l)^{\sqrt{2}}, \quad (9.48)$$

der vom Durchmesser-Längenverhältnis $0,01 < d/l < 0,5$ abhängt.

9.3 Kreisförmige Rahmenantenne beliebigen Umfangs

Falls der Umfang U einer Rahmenantenne nicht mehr als klein gegenüber einer Viertelwellenlänge betrachtet werden kann, muss bei der Bestimmung des Strahlungsfeldes die räumliche Variation des Stroms entlang der Leiterschleife berücksichtigt werden. Während in [Stu98a] ein quadratischer Rahmen aus vier gleichen, $\lambda_0/4$ langen Drahtstücken betrachtet wird, wollen wir hier die Abstrahlung eines Ringstroms entlang eines kreisförmigen dünnen Leiters des Umfangs $U = 2\pi a$ betrachten. Der Kreisring befinde sich in der x-y-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems, sein Mittelpunkt falle mit dem Ursprung zusammen und die Einspeisung erfolge bei $\varphi' = 0$ (Bild 9.12). Die Ausdehnung des Speiseschlitzes sei vernachlässigbar. Nach Tabelle 8.7 können wir für das **Vektorpotenzial** des Fernfeldes folgenden Ansatz machen:

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \int_{\varphi'=-\pi}^{\pi} \underline{I}(\varphi') \mathbf{e}_{\varphi'} e^{jk_0 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} a d\varphi', \quad (9.49)$$

wobei mit a der Radius des Kreisrings (dessen Dicke vernachlässigbar sei) bezeichnet wird.

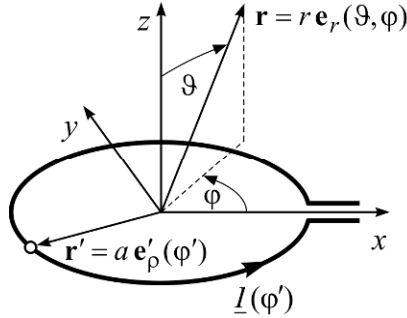


Bild 9.12 Kreisförmige, dünne Leiterschleife als Rahmenantenne mit Umfang $U = 2\pi a$

Zunächst gilt $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}' = a \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_{\rho'} = a (\sin \vartheta \cos \varphi \cos \varphi' + \sin \vartheta \sin \varphi \sin \varphi') = a \sin \vartheta \cos(\varphi' - \varphi)$ und $\mathbf{e}_{\varphi'} = -\mathbf{e}_x \sin \varphi' + \mathbf{e}_y \cos \varphi'$, wie wir mit Tabelle 2.5 bestätigen. Aus (9.49) folgt also

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} \underline{I}(\varphi') (-\mathbf{e}_x \sin \varphi' + \mathbf{e}_y \cos \varphi') e^{jk_0 a \sin \vartheta \cos(\varphi' - \varphi)} a d\varphi'. \quad (9.50)$$

9.3.1 Vektorpotenzial eines kreisförmigen Ringstroms

Für die weitere Berechnung wollen wir den bei $\varphi' = 0$ gespeisten Drahring näherungsweise durch ein einfaches Leitungsmodell beschreiben. Wir betrachten ihn nämlich als eine bei $\varphi' = \pi$ kurzgeschlossene Leitung, auf der sich eine stehende Welle mit der **Stromverteilung**

$$\underline{I}(\varphi') = \hat{I} \cos[k_0 a (\varphi' - \pi)] = \hat{I} [\cos(k_0 a \varphi') \cos(k_0 a \pi) + \sin(k_0 a \varphi') \sin(k_0 a \pi)] \quad (9.51)$$

einstellt. Die Randbedingung am kurzgeschlossenen Leitungsende bei $\varphi' = \pi$ erfordert, dass sich dort ein Strommaximum $\underline{I}(\pi) = \hat{I}$ ausbildet. Im Speisepunkt fließt dagegen – abhängig von der Länge der Leiterschleife – ein Strom von $\underline{I}_0 = \underline{I}(0) = \underline{I}(2\pi) = \hat{I} \cos(k_0 a \pi)$. Das Integral, das mit der Stromverteilung (9.51) aus (9.50) resultiert, ist für $U = n\lambda_0$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$ zwar geschlossen lösbar, erfordert allerdings eine etwas umständliche Umformung. Mit

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \hat{I} a \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \left[\cos(k_0 a \pi) (\underline{\zeta}_1 \mathbf{e}_x + \underline{\zeta}_2 \mathbf{e}_y) + \sin(k_0 a \pi) (\underline{\zeta}_3 \mathbf{e}_x + \underline{\zeta}_4 \mathbf{e}_y) \right] \quad (9.52)$$

führen wir zur besseren Übersicht vier Hilfsintegrale ein:

$$\begin{aligned} \underline{\zeta}_1 &= - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k_0 a \varphi') \sin \varphi' e^{jk_0 a \sin \vartheta \cos(\varphi' - \varphi)} d\varphi' \\ \underline{\zeta}_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k_0 a \varphi') \cos \varphi' e^{jk_0 a \sin \vartheta \cos(\varphi' - \varphi)} d\varphi' \\ \underline{\zeta}_3 &= - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k_0 a \varphi') \sin \varphi' e^{jk_0 a \sin \vartheta \cos(\varphi' - \varphi)} d\varphi' \\ \underline{\zeta}_4 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k_0 a \varphi') \cos \varphi' e^{jk_0 a \sin \vartheta \cos(\varphi' - \varphi)} d\varphi'. \end{aligned} \quad (9.53)$$

Zur Berechnung der Integrale (9.53) machen wir die Substitution $\phi' = \phi' - \phi$ und führen die bequemen Abkürzungen $p = k_0 a$ sowie $q = k_0 a \sin \vartheta$ ein, woraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \zeta_1 &= - \int_{-\pi}^{\pi} \cos[p(\phi' + \phi)] \sin(\phi' + \phi) e^{jq \cos \phi'} d\phi' \\
 \zeta_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos[p(\phi' + \phi)] \cos(\phi' + \phi) e^{jq \cos \phi'} d\phi' \\
 \zeta_3 &= - \int_{-\pi}^{\pi} \sin[p(\phi' + \phi)] \sin(\phi' + \phi) e^{jq \cos \phi'} d\phi' \\
 \zeta_4 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin[p(\phi' + \phi)] \cos(\phi' + \phi) e^{jq \cos \phi'} d\phi'.
 \end{aligned} \tag{9.54}$$

Da der Parameter ϕ die Berechnung der Integrale (9.54) erheblich erschwert, wollen wir durch eine geeignete Umformung versuchen, alle von ϕ abhängenden Terme vor die Integrale zu ziehen. Durch Ausnutzen der bekannten Beziehungen $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$, $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ und $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 2\zeta_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \{ \sin[(p-1)(\phi' + \phi)] - \sin[(p+1)(\phi' + \phi)] \} e^{jq \cos \phi'} d\phi' \\
 2\zeta_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \{ \cos[(p-1)(\phi' + \phi)] + \cos[(p+1)(\phi' + \phi)] \} e^{jq \cos \phi'} d\phi' \\
 2\zeta_3 &= \int_{-\pi}^{\pi} \{ -\cos[(p-1)(\phi' + \phi)] + \cos[(p+1)(\phi' + \phi)] \} e^{jq \cos \phi'} d\phi' \\
 2\zeta_4 &= \int_{-\pi}^{\pi} \{ \sin[(p-1)(\phi' + \phi)] + \sin[(p+1)(\phi' + \phi)] \} e^{jq \cos \phi'} d\phi'.
 \end{aligned} \tag{9.55}$$

Unser Ziel erreichen wir erst nach einer weiteren Umformung mit Hilfe der Beziehungen $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ bzw. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$:

$$\begin{aligned}
 2\zeta_1 &= \cos[(p-1)\phi] \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(p-1)\phi'] e^{jq \cos \phi'} d\phi' + \\
 &\quad + \sin[(p-1)\phi] \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(p-1)\phi'] e^{jq \cos \phi'} d\phi' - \\
 &\quad - \cos[(p+1)\phi] \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(p+1)\phi'] e^{jq \cos \phi'} d\phi' - \\
 &\quad - \sin[(p+1)\phi] \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(p+1)\phi'] e^{jq \cos \phi'} d\phi'
 \end{aligned} \tag{9.56}$$

$$\begin{aligned}
2\zeta_2 = & \cos[(p-1)\varphi] \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(p-1)\phi'] e^{jq \cos \phi'} d\phi' - \\
& - \sin[(p-1)\varphi] \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(p-1)\phi'] e^{jq \cos \phi'} d\phi' + \\
& + \cos[(p+1)\varphi] \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(p+1)\phi'] e^{jq \cos \phi'} d\phi' - \\
& - \sin[(p+1)\varphi] \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(p+1)\phi'] e^{jq \cos \phi'} d\phi'
\end{aligned} \tag{9.57}$$

$$\begin{aligned}
2\zeta_3 = & -\cos[(p-1)\varphi] \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(p-1)\phi'] e^{jq \cos \phi'} d\phi' + \\
& + \sin[(p-1)\varphi] \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(p-1)\phi'] e^{jq \cos \phi'} d\phi' + \\
& + \cos[(p+1)\varphi] \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(p+1)\phi'] e^{jq \cos \phi'} d\phi' - \\
& - \sin[(p+1)\varphi] \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(p+1)\phi'] e^{jq \cos \phi'} d\phi'
\end{aligned} \tag{9.58}$$

$$\begin{aligned}
2\zeta_4 = & \cos[(p-1)\varphi] \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(p-1)\phi'] e^{jq \cos \phi'} d\phi' + \\
& + \sin[(p-1)\varphi] \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(p-1)\phi'] e^{jq \cos \phi'} d\phi' + \\
& + \cos[(p+1)\varphi] \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(p+1)\phi'] e^{jq \cos \phi'} d\phi' + \\
& + \sin[(p+1)\varphi] \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(p+1)\phi'] e^{jq \cos \phi'} d\phi'
\end{aligned} \tag{9.59}$$

Alle Teilintegrale mit $\sin[(p \pm 1)\phi']$ verschwinden als Folge der ungeraden Symmetrie ihrer Integranden. Die verbleibenden Teilintegrale können bei ganzzahligem $m = p \pm 1$ wegen

$$J_m(q) = \frac{j^{-m}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\phi') e^{jq \cos \phi'} d\phi' \tag{9.60}$$

durch reelle **Besselfunktionen** ausgedrückt werden [Mag48]:

$$\Theta_{p \pm 1}(q) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(p \pm 1)\phi'] e^{jq \cos \phi'} d\phi' = \begin{cases} 2\pi j^{p \pm 1} J_{p \pm 1}(q) & \text{für } p = 1, 2, 3, \dots \\ \text{sonst **numerisch** integrieren !} \end{cases} \tag{9.61}$$

9.3.2 Kreisförmige Rahmenantenne mit Umfang $U = n \lambda_0$

Wir betrachten mit $n = 1, 2, 3, \dots$ zunächst den wichtigen **Sonderfall** $U = 2 \pi a = n \lambda_0$, d. h. der Umfang der Leiterschleife beträgt gerade ein ganzzahliges Vielfaches einer Wellenlänge. Dann wird $p = k_0 a = n$ ganzzahlig und aus (9.52) folgt:

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = (-1)^n \underline{\hat{\mathbf{I}}} \frac{n \lambda_0}{2 \pi} \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} \left(\zeta_1 \mathbf{e}_x + \zeta_2 \mathbf{e}_y \right) \quad (9.62)$$

Mit (9.61) erhalten wir dann aus (9.56) und (9.57) für $q = k_0 a \sin \vartheta = n \sin \vartheta$:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \pi j^{n-1} \left[\sin((n-1) \varphi) J_{n-1}(q) + \sin((n+1) \varphi) J_{n+1}(q) \right] \\ \zeta_2 &= \pi j^{n-1} \left[\cos((n-1) \varphi) J_{n-1}(q) - \cos((n+1) \varphi) J_{n+1}(q) \right], \end{aligned} \quad (9.63)$$

womit die x- und y-Komponenten des Vektorpotenzials bestimmt sind. Mit Hilfe von Tabelle 8.7 wandeln wir diese schließlich in die sphärischen Komponenten der **Fernfelder** um:

$$\begin{aligned} \underline{E}_\vartheta &= Z_0 \underline{H}_\varphi = -(-j)^n \underline{\hat{\mathbf{I}}} n Z_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{8 \pi r} \cos \vartheta \times \\ &\quad \left\{ \cos \varphi \left[\sin((n-1) \varphi) J_{n-1}(n \sin \vartheta) + \sin((n+1) \varphi) J_{n+1}(n \sin \vartheta) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sin \varphi \left[\cos((n-1) \varphi) J_{n-1}(n \sin \vartheta) - \cos((n+1) \varphi) J_{n+1}(n \sin \vartheta) \right] \right\} \end{aligned} \quad (9.64)$$

und

$$\begin{aligned} \underline{E}_\varphi &= -Z_0 \underline{H}_\vartheta = -(-j)^n \underline{\hat{\mathbf{I}}} n Z_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{8 \pi r} \times \\ &\quad \left\{ -\sin \varphi \left[\sin((n-1) \varphi) J_{n-1}(n \sin \vartheta) + \sin((n+1) \varphi) J_{n+1}(n \sin \vartheta) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \cos \varphi \left[\cos((n-1) \varphi) J_{n-1}(n \sin \vartheta) - \cos((n+1) \varphi) J_{n+1}(n \sin \vartheta) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.65)$$

Dabei haben wir $\omega \mu_0 \lambda_0 / (2 \pi) = Z_0$ gesetzt. Die etwas unhandlichen Felddarstellungen (9.60) und (9.65) lassen sich noch in eine wesentlich einfachere Form bringen, wenn man geeignete Additionstheoreme für trigonometrische und Besselfunktionen ausnutzt. Man findet – in Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus [Wer96] – folgende Darstellung:

$$\underline{E}_\vartheta = Z_0 \underline{H}_\varphi = -(-j)^n \underline{\hat{\mathbf{I}}} n Z_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} \cos \vartheta \sin(n \varphi) \frac{J_n(n \sin \vartheta)}{\sin \vartheta} \quad (9.66)$$

und

$$\underline{E}_\varphi = -Z_0 \underline{H}_\vartheta = -(-j)^n \underline{\hat{\mathbf{I}}} n Z_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} \cos(n \varphi) J'_n(n \sin \vartheta). \quad (9.67)$$

Im **Sonderfall** einer dünnen, kreisförmigen Rahmenantenne mit einem Umfang von einer Wellenlänge folgt ihr Fernfeld aus (9.66) und (9.67) für $n = k_0 a = 1$:

$$\begin{aligned}\underline{E}_\vartheta &= Z_0 \underline{H}_\varphi = j \hat{\underline{I}} Z_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \sin\varphi \cot\vartheta J_1(\sin\vartheta) \\ \underline{E}_\varphi &= -Z_0 \underline{H}_\vartheta = j \hat{\underline{I}} Z_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \cos\varphi J_1'(\sin\vartheta).\end{aligned}\quad (9.68)$$

Beide Feldstärken erreichen ihr Maximum bei $\vartheta = 0$. In der Äquatorebene bei $\vartheta = \pi/2$ verschwindet $\underline{E}_\vartheta$, während $\underline{E}_\varphi \propto \cos\varphi$ dort eine Achtercharakteristik mit Maxima bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ zeigt (siehe Bild 9.13). Dieses Verhalten unterscheidet sich stark vom magnetischen Elementarstrahler (Abschnitt 9.2), bei dem sich für $k_0 a \ll 1/4$ eine Querstrahlung mit azimuthaler Symmetrie und Nullstellen entlang der z-Achse einstellt. Die räumliche Verteilung der **Gesamtfeldstärke** bei $k_0 a = 1$ ergibt sich aus (9.68) unter Benutzung von (8.133)

$$C(\vartheta, \varphi) = 2\sqrt{[\sin\varphi \cot\vartheta J_1(\sin\vartheta)]^2 + [\cos\varphi J_1'(\sin\vartheta)]^2} \quad \text{für } U = \lambda_0. \quad (9.69)$$

Bei einem anderen Umfang $U = n\lambda_0$ kann die Richtcharakteristik aus (9.66) und (9.67) auf ähnliche Weise ermittelt werden. Allgemein findet man für $n = 1, 2, 3, \dots$ genau $2n$ Nullstellen in der Äquatorebene – ihre Richtungen korrespondieren mit den Knotenorten der stehenden Stromwelle. Für $n \geq 2$ strahlt die kreisförmige Rahmenantenne nicht mehr entlang der z-Achse.

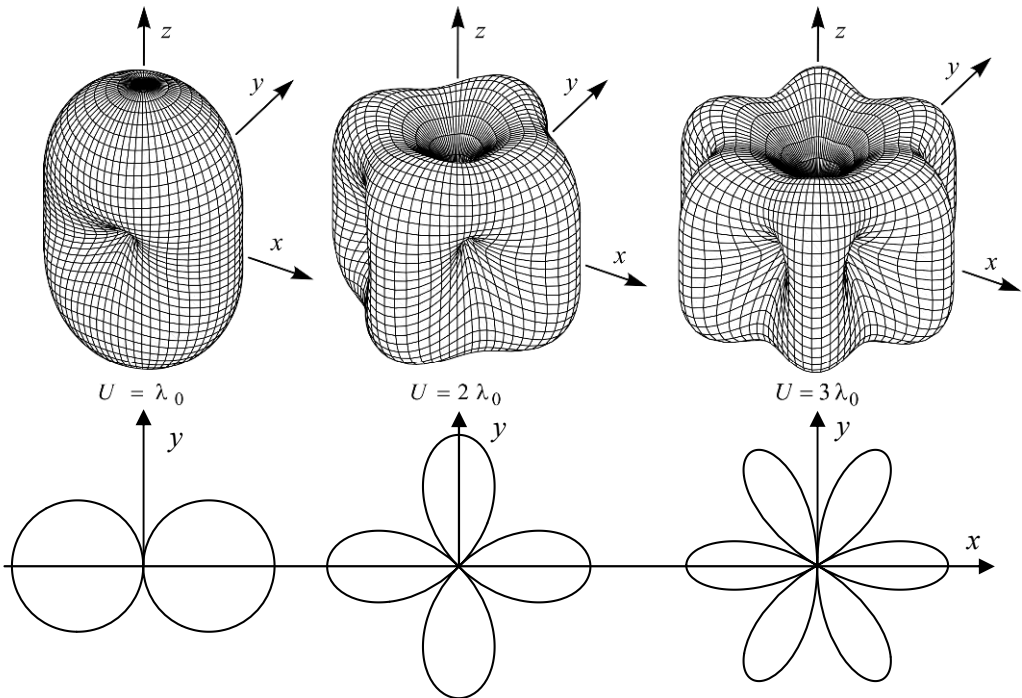


Bild 9.13 Richtcharakteristik der Gesamtfeldstärke $C(\vartheta, \varphi) \triangleq \sqrt{|\underline{E}_\vartheta|^2 + |\underline{E}_\varphi|^2}$ mit ihrem Horizontalschnitt $C_H(\varphi)$ bei $\vartheta = \pi/2$ für eine kreisförmige Leiterschleife ($U = n\lambda_0$)

Aus (9.69) können wir mit einer numerischen Quadratur nach (7.30) den **Richtfaktor** (in Richtung $\vartheta = 0$ bzw. $\vartheta = \pi$) einer kreisförmigen Rahmenantenne des Umfangs $U = \lambda_0$ berechnen:

$$D = \frac{4\pi}{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} C^2(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi} \approx 2,233 \triangleq 3,49 \text{ dBi}. \quad (9.70)$$

Damit hat der kreisförmige Rahmen erwartungsgemäß einen ähnlichen Richtfaktor wie der quadratische Rahmen, für den man – ebenfalls beim Umfang $U = \lambda_0$ – einen Wert von $D \approx 2,037 \triangleq 3,09 \text{ dBi}$ angeben kann [Stu98a]. Der gestreckte Ganzwellendipol, den wir in Abschnitt 10.2.5 behandeln werden, hat übrigens einen Richtfaktor von $D \approx 2,41 \triangleq 3,82 \text{ dBi}$. Für $n = U/\lambda_0 = k_0 a \gg 1$ geht der Flächenwirkungsgrad gegen $1/2$ und mit $A_{\text{geo}} = \pi a^2$ wird:

$$D \approx \frac{n}{2} (n+8) \approx \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2} (k_0 a)^2 = \frac{4\pi}{\lambda_0^2} \frac{\pi a^2}{2} = \frac{4\pi}{\lambda_0^2} q A_{\text{geo}}. \quad (9.71)$$

Im Bereich der Hauptkeule kann (9.69) für $\sin \vartheta \ll 1$ noch vereinfacht werden. Eine Taylor-Entwicklung in Potenzen von $\sin \vartheta$ liefert (bis zum quadratischen Glied)

$$C(\vartheta, \varphi) \approx 1 + \frac{1}{8} (-4 + \cos 2\varphi) \sin^2 \vartheta. \quad (9.72)$$

In den beiden vertikalen Hauptschnitten folgt aus (9.72)

$$C_V(\vartheta, \varphi = 0) \approx 1 - \frac{3}{8} \sin^2 \vartheta \quad \text{und} \quad C_V(\vartheta, \varphi = \pi/2) \approx 1 - \frac{5}{8} \sin^2 \vartheta. \quad (9.73)$$

Das ähnliche Verhalten in beiden Schnittebenen legt nahe, in erster Näherung die nur schwach ausgeprägte azimutale Abhängigkeit ganz zu vernachlässigen und die gesamte Richtcharakteristik in der Umgebung der Hauptkeule im Mittel wie

$$\boxed{C(\vartheta, \varphi) \approx 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \approx \cos \vartheta} \quad (\text{für } U = \lambda_0 \text{ und } \sin \vartheta \ll 1) \quad (9.74)$$

zu approximieren. Wir werden die Näherung $C \approx \cos \vartheta$ bei der Untersuchung von Wendelantennen in Abschnitt 17.3 noch benötigen.

9.3.3 Erweiterung auf beliebigen Umfang

Falls $p = k_0 a$ keine natürliche Zahl mehr ist, kann das Strahlungsfeld eines Kreisstroms mit Radius a nicht mehr in geschlossener Form angegeben werden. Mit Hilfe einer numerischen Quadratur der (vom Beobachterwinkel ϑ abhängigen) komplexen Integrale (9.61)

$$\underline{\Theta}_{p \pm 1}(\vartheta) = 2 \int_0^{\pi} \cos[(p \pm 1)\varphi'] e^{j p \sin \vartheta \cos \varphi'} d\varphi' \quad (9.75)$$

können die vier Hilfsintegrale (9.56) bis (9.59) wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} 2\underline{\zeta}_1(\vartheta, \varphi, p) &= \sin[(p-1)\varphi] \underline{\Theta}_{p-1}(\vartheta) - \sin[(p+1)\varphi] \underline{\Theta}_{p+1}(\vartheta) \\ 2\underline{\zeta}_2(\vartheta, \varphi, p) &= \cos[(p-1)\varphi] \underline{\Theta}_{p-1}(\vartheta) + \cos[(p+1)\varphi] \underline{\Theta}_{p+1}(\vartheta) \\ 2\underline{\zeta}_3(\vartheta, \varphi, p) &= -\cos[(p-1)\varphi] \underline{\Theta}_{p-1}(\vartheta) + \cos[(p+1)\varphi] \underline{\Theta}_{p+1}(\vartheta) \\ 2\underline{\zeta}_4(\vartheta, \varphi, p) &= \sin[(p-1)\varphi] \underline{\Theta}_{p-1}(\vartheta) + \sin[(p+1)\varphi] \underline{\Theta}_{p+1}(\vartheta). \end{aligned} \quad (9.76)$$

Aus (9.52) folgen mit (9.76) die kartesischen Komponenten des Vektorpotenzials:

$$\begin{aligned}\underline{A}_x &= \hat{I} a \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} (\zeta_1 \cos p\pi + \zeta_3 \sin p\pi) \\ \underline{A}_y &= \hat{I} a \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} (\zeta_2 \cos p\pi + \zeta_4 \sin p\pi),\end{aligned}\quad (9.77)$$

die wir nach Tabelle 8.7 in die sphärischen Komponenten des Fernfeldes umwandeln können:

$$\begin{aligned}\underline{E}_\vartheta &= Z_0 \underline{H}_\varphi = -j\omega\mu_0 (\underline{A}_x \cos\vartheta \cos\varphi + \underline{A}_y \cos\vartheta \sin\varphi) \\ \underline{E}_\varphi &= -Z_0 \underline{H}_\vartheta = -j\omega\mu_0 (-\underline{A}_x \sin\varphi + \underline{A}_y \cos\varphi).\end{aligned}\quad (9.78)$$

Im Hinblick auf die später zu behandelnde Wendelantenne (Kapitel 17.3) sind wir insbesondere an kreisförmigen Rahmenantennen mit Abmessungen $p = k_0 a = 1$ interessiert. Uns beschäftigt dabei die Frage, ob es im Bereich $0,5 < p < 1,5$ ein optimales p gibt, bei dem die Strahlungsdichte entlang der z-Achse **bei gegebener Stromstärke** $\hat{I}$ ein Maximum annimmt. Die radiale Strahlungsdichte bei $\vartheta = 0$ ermitteln wir nach (9.78) für beliebiges φ (z. B. für $\varphi = 0$) aus

$$S_r = \frac{1}{2Z_0} \left(|\underline{E}_\vartheta|^2 + |\underline{E}_\varphi|^2 \right) = \frac{(\omega\mu_0)^2}{2Z_0} \left(|\underline{A}_x|^2 + |\underline{A}_y|^2 \right). \quad (9.79)$$

Nach Einsetzen von (9.77) in (9.79) folgt:

$$S_r = \frac{(\omega\mu_0)^2}{2Z_0} \frac{|\hat{I}|^2 a^2}{(4\pi r)^2} \left(\left| \zeta_1 \cos p\pi + \zeta_3 \sin p\pi \right|^2 + \left| \zeta_2 \cos p\pi + \zeta_4 \sin p\pi \right|^2 \right). \quad (9.80)$$

Aus (9.76) ermitteln wir (für $\vartheta = \varphi = 0$) $\zeta_1 = \zeta_4 = 0$ und

$$\begin{aligned}2\zeta_2 &= \underline{\Theta}_{p-1}(0) + \underline{\Theta}_{p+1}(0) \\ 2\zeta_3 &= -\underline{\Theta}_{p-1}(0) + \underline{\Theta}_{p+1}(0)\end{aligned}\quad (9.81)$$

mit den Integralen (9.75)

$$\underline{\Theta}_{p\pm 1}(0) = 2 \int_0^\pi \cos[(p\pm 1)\phi'] d\phi' = 2 \left[\frac{\sin[(p\pm 1)\phi']}{p\pm 1} \right]_0^\pi = 2 \frac{\sin[(p\pm 1)\pi]}{p\pm 1}. \quad (9.82)$$

Aus (9.80) erhalten wir mit (9.81) und (9.82) schließlich:

$$\begin{aligned}S_r &= \frac{(\omega\mu_0)^2}{2Z_0} \frac{|\hat{I}|^2 a^2}{(4\pi r)^2} \left[\sin^2(p\pi) \left\{ -\frac{\sin[(p-1)\pi]}{p-1} + \frac{\sin[(p+1)\pi]}{p+1} \right\}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2(p\pi) \left\{ \frac{\sin[(p-1)\pi]}{p-1} + \frac{\sin[(p+1)\pi]}{p+1} \right\}^2 \right],\end{aligned}\quad (9.83)$$

was man noch trigonometrisch umformen kann:

$$S_r = \frac{(\omega \mu_0)^2}{2 Z_0} \frac{|\hat{I}|^2 a^2}{(4 \pi r)^2} \frac{p^2 \sin^2(p 2 \pi) + 4 \sin^4(p \pi)}{(p^2 - 1)^2}. \quad (9.84)$$

Mit $p = k_0 a$ wird $a = p \lambda_0 / (2 \pi)$ und wegen $\omega \mu_0 \lambda_0 / (2 \pi) = Z_0$ folgt aus (9.84) die **Strahlungsdichte** auf der z-Achse als Funktion des normierten Umfangs $p = k_0 a = U / \lambda_0$:

$$S_r = \frac{Z_0}{2} \frac{|\hat{I}|^2}{(4 \pi r)^2} p^2 \frac{p^2 \sin^2(p 2 \pi) + 4 \sin^4(p \pi)}{(p^2 - 1)^2}. \quad (9.85)$$

Die Hilfsfunktion

$$H(p) = p^2 \frac{p^2 \sin^2(p 2 \pi) + 4 \sin^4(p \pi)}{(p^2 - 1)^2} \quad (9.86)$$

ist in Bild 9.14 im Bereich $0 \leq p \leq 4$ dargestellt. Man erkennt ein ausgeprägtes Maximum, dessen genaue Lage man durch Nullsetzen der Ableitung von (9.86) findet. Es gilt demnach:

$$H_{\max}(1,1805) \approx 13,290. \quad (9.87)$$

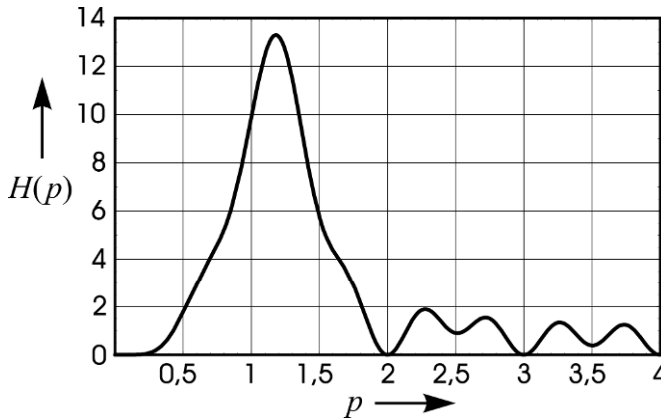


Bild 9.14 Hilfsfunktion $H(p)$ nach (9.86) zur Berechnung der Strahlungsdichte auf der z-Achse

Der Funktionsverlauf hat Nullstellen bei allen ganzzahligen p – mit Ausnahme von $p = 1$. Für große p gilt asymptotisch $H(p) \approx \sin^2(p 2 \pi)$. Im interessanten Bereich – mit starker Längsstrahlung entlang der z-Achse – hat die Rahmenantenne einen Umfang von einer Wellenlänge oder ein wenig darüber. Für einen Umfang von genau einer Wellenlänge ($p = 1$) stellt sich eine relative Strahlungsdichte von $H(1) = \pi^2 \approx 9,87$ ein, wie man aus (9.86) durch Grenzwertbetrachtung leicht herausfinden kann. Bei etwas größerem Umfang ($p = 1,1805$) kann die Strahlungsdichte hingegen um $(H_{\max} - H(1))/H(1) \approx 34,7\%$ gesteigert werden, das entspricht etwa 1,3 dB.

Die optimale Antenne ist aber keineswegs diejenige, die bei gegebener **Stromstärke** eine möglichst hohe Strahlungsdichte erzeugt, sondern wir müssen untersuchen, welche Abmessungen bei gegebener **Strahlungsleistung** zu einer maximalen Strahlungsdichte in einer gewünschten Richtung führen. Das bedeutet, dass wir in unserem Falle den Umfang der Rahmenantenne für größten Richtfaktor in z-Richtung optimieren müssen.

Wegen (7.19) betrachten wir daher den **Richtfaktor in z-Richtung**

$$D = 4\pi r^2 \frac{S_r(\vartheta=0, \varphi=0)}{P_S} \quad (9.88)$$

und setzen dabei die Strahlungsdichte in z-Richtung nach (9.85) und (9.86) ein:

$$D = \frac{\frac{Z_0}{8\pi} \left| \hat{\underline{I}} \right|^2 H(p)}{P_S}. \quad (9.89)$$

Die gesamte abgestrahlte Wirkleistung berechnen wir wie folgt:

$$P_S = \frac{1}{2Z_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left(\left| \underline{E}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \right|^2 + \left| \underline{E}_\varphi(\vartheta, \varphi) \right|^2 \right) r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (9.90)$$

Mit (9.78) erhalten wir aus (9.90):

$$P_S = \frac{(\omega \mu_0 r)^2}{2Z_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left(\left| \underline{A}_x \cos \vartheta \cos \varphi + \underline{A}_y \cos \vartheta \sin \varphi \right|^2 + \right. \\ \left. + \left| \underline{A}_x \sin \varphi - \underline{A}_y \cos \varphi \right|^2 \right) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \quad (9.91)$$

bzw. nach Einsetzen von (9.77) und mit $a = p\lambda_0/(2\pi)$ sowie $\omega \mu_0 \lambda_0/(2\pi) = Z_0$ wird

$$P_S = \frac{Z_0}{32\pi^2} \left| \hat{\underline{I}} \right|^2 p^2 Q(p). \quad (9.92)$$

Dabei müssen wir das Doppelintegral $Q(p)$ für verschiedene p numerisch auswerten:

$$Q(p) = \\ = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left[\left(\zeta_1 \cos p\pi + \zeta_3 \sin p\pi \right) \cos \vartheta \cos \varphi + \left(\zeta_2 \cos p\pi + \zeta_4 \sin p\pi \right) \cos \vartheta \sin \varphi \right]^2 + \\ + \left[\left(\zeta_1 \cos p\pi + \zeta_3 \sin p\pi \right) \sin \varphi - \left(\zeta_2 \cos p\pi + \zeta_4 \sin p\pi \right) \cos \varphi \right]^2 \right] \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (9.93)$$

Man beachte, dass nach (9.76) alle vier Funktionen $\zeta_i(\vartheta, \varphi, p)$ sowohl von der Beobachterichtung (ϑ, φ) als auch vom normierten Antennenumfang p abhängen und ihrerseits durch eine weitere numerische Quadratur (9.75) bestimmt werden müssen, was die Berechnung von $Q(p)$ äußerst aufwändig und auch anfällig für Rundungsfehler macht. Man muss daher bei den numerischen Rechnungen sehr sorgfältig vorgehen. Der Richtfaktor in z-Richtung, den wir optimieren wollen, folgt mit (9.86) und (9.92) schließlich aus (9.89):

$$D(p) = 4\pi \frac{p^2 \sin^2(p2\pi) + 4 \sin^4(p\pi)}{(p^2 - 1)^2} \frac{1}{Q(p)}. \quad (9.94)$$

Bevor wir (9.94) genauer untersuchen, wollen wir zur Überprüfung unserer Herleitung von $Q(p)$ den Grenzfall $p \ll 1/4$ betrachten. In diesem Falle müssten wir aus (9.92) wieder die bekannte Strahlungsleistung des magnetischen Elementardipols erhalten – siehe (9.46).

Übung 9.2: Strahlungsleistung des magnetischen Elementarstrahlers

- Untersuchen Sie mit $p = U/\lambda_0 \ll 1/4$ eine kreisförmige Rahmenantenne kleinen Umfangs. Zeigen Sie, dass sich wegen (9.46) die Strahlungsleistung (9.92) wie folgt schreiben lässt:

$$P_S = \frac{|\hat{I}|^2}{2} \frac{\pi}{6} Z_0 p^4. \quad (9.95)$$

- **Lösung:**

Die Strahlungsleistung einer beliebig langen kreisförmigen Rahmenantenne ist nach (9.92):

$$P_S = \frac{Z_0}{(4\pi)^2} \frac{|\hat{I}|^2}{2} p^2 Q(p). \quad (9.96)$$

Wir müssen beim Vergleich von (9.95) mit (9.96) also zeigen, dass für kleine p

$$\lim_{p \rightarrow 0} Q(p) = (4\pi)^2 \frac{\pi}{6} p^2 \quad (9.97)$$

gilt. Zu diesem Zweck entwickeln wir den Integranden von (9.75) in eine Taylorreihe:

$$2 \cos((p \pm 1)\phi') e^{j p \sin \vartheta \cos \phi'} d\phi' \approx 2 \cos \phi' (1 + j p \sin \vartheta \cos \phi') \mp 2 p \phi' \sin \phi' \quad (9.98)$$

und integrieren das Ergebnis über ϕ' im Bereich von 0 bis π :

$$\underline{Q}_{p \pm 1}(\vartheta) \approx p \pi (j \sin \vartheta \mp 2). \quad (9.99)$$

Mit (9.99) folgt dann aus (9.76) nach einigen trigonometrischen Umformungen:

$$\begin{aligned} \underline{\zeta}_1(\vartheta, \varphi, p) &\approx -j p \pi \sin \vartheta \sin \varphi \\ \underline{\zeta}_2(\vartheta, \varphi, p) &\approx j p \pi \sin \vartheta \cos \varphi \\ \underline{\zeta}_3(\vartheta, \varphi, p) &\approx -2 p \pi \cos \varphi \\ \underline{\zeta}_4(\vartheta, \varphi, p) &\approx -2 p \pi \sin \varphi. \end{aligned} \quad (9.100)$$

Mit $\cos p \pi \approx 1$ und $\sin p \pi \approx p \pi$ folgt schließlich aus (9.93):

$$\begin{aligned} Q(p) \approx (p \pi)^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left[\left| \underline{a}(\vartheta, \varphi, p) \cos \vartheta \cos \varphi + \underline{b}(\vartheta, \varphi, p) \cos \vartheta \sin \varphi \right|^2 + \right. \\ \left. + \left| \underline{a}(\vartheta, \varphi, p) \sin \varphi - \underline{b}(\vartheta, \varphi, p) \cos \varphi \right|^2 \right] \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \end{aligned} \quad (9.101)$$

wobei wir zur besseren Übersicht folgende Abkürzungen eingeführt haben:

$$\begin{aligned} \underline{a}(\vartheta, \varphi, p) &= -j \sin \vartheta \sin \varphi - 2 p \pi \cos \varphi \\ \underline{b}(\vartheta, \varphi, p) &= j \sin \vartheta \cos \varphi - 2 p \pi \sin \varphi. \end{aligned} \quad (9.102)$$

Das Integral (9.101) kann geschlossen ausgewertet werden – es folgt in niedrigster Ordnung von p erwartungsgemäß das korrekte Resultat:

$$Q(p) \approx \frac{8}{3} \pi^3 p^2 \quad (\text{für } p = U/\lambda_0 \ll 1/4). \quad \square \quad (9.103)$$

Mit dem Ergebnis (9.103) können wir den Richtfaktor in z-Richtung (9.94) für kleine $p = U/\lambda_0 \ll 1/4$ noch näher untersuchen. Eine Taylorentwicklung

$$D(p) \approx \frac{3}{2\pi^2} \frac{p^2 \sin^2(p 2\pi) + 4 \sin^4(p\pi)}{p^2(p^2 - 1)^2} \approx 6(1 + \pi^2) p^2 \quad (9.104)$$

zeigt, dass der Richtfaktor aus seiner Nullstelle heraus bei zunehmendem Antennenumfang nur recht langsam ansteigt.

Kehren wir zurück zur Diskussion des Ergebnisses (9.94). Insbesondere wollen wir denjenigen Umfang der kreisförmigen Rahmenantenne bestimmen, bei dem der Richtfaktor in z-Richtung maximal wird. Wir suchen also mit $Q(p)$ nach (9.93) ein Maximum der Funktion

$$D(p) = 4\pi \frac{p^2 \sin^2(p 2\pi) + 4 \sin^4(p\pi)}{(p^2 - 1)^2} \frac{1}{Q(p)}, \quad (9.105)$$

sodass die Strahlungsdichte entlang der z-Achse bei gegebener Strahlungsleistung möglichst hoch wird. Eine numerische Auswertung von (9.105) führt zu der Kurve in Bild 9.15.

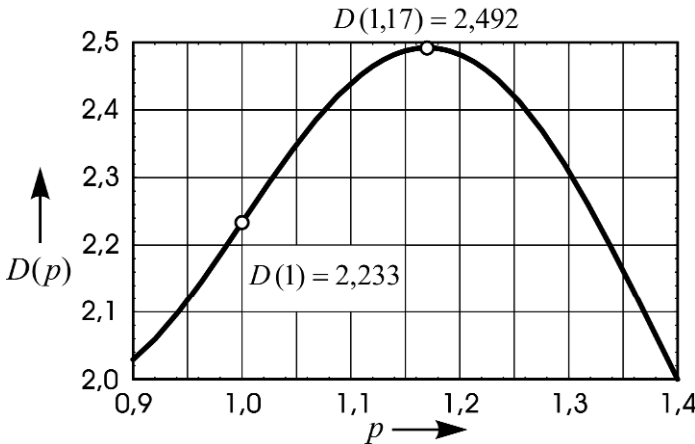


Bild 9.15 Richtfaktor in z-Richtung nach (9.105) als Funktion des normierten Umfangs $p = k_0 a = U/\lambda_0$

Aus Bild 9.15 lässt sich das Maximum grob ablesen, was man durch eine numerische Nachuntersuchung der in der Nähe liegenden Kurvenwerte noch genauer als

$$D_{\max}(1,170) \approx 2,492 \hat{=} 3,97 \text{ dBi} \quad (\text{vgl. (10.88) bei der Dipolantenne}) \quad (9.106)$$

bestimmen kann. Die **optimale kreisförmige Rahmenantenne** mit höchstem Richtfaktor in z-Richtung hat also einen Umfang von $U \approx 1,17\lambda_0$. Beim Vergleich mit dem Richtfaktor für $U = \lambda_0$, den wir in (9.70) schon als $D(1) \approx 2,233 \hat{=} 3,49 \text{ dBi}$ berechnet hatten, zeigt sich eine Verbesserung um 11,6 % oder um 0,48 dB. Bemerkenswert ist, dass die Forderung nach größtem Richtfaktor ($U \approx 1,17\lambda_0$) fast zum gleichen Design wie die Forderung nach größter Strahlungsdichte ($U \approx 1,18\lambda_0$) führt. Obwohl im Vergleich zur Antenne mit $U = \lambda_0$ die Strahlungsdichte um 1,3 dB gesteigert werden kann, fällt der mögliche Anstieg im Richtfaktor mit 0,48 dB geringer aus. Die gleiche Strahlungsleistung stellt sich bei größerem Antennenumfang nämlich schon bei einem kleineren Strom ein. Die Messdiagramme an Wendelantennen in [Kra88] und auch (17.64) machen deutlich, dass der Bereich um $U \approx 1,17\lambda_0$ optimal ist.

9.4 Übungen

- 9.4.1** In Abschnitt 9.1.2 haben wir für den Hertzschen Dipol zunächst die Dämpfungs- und Phasenkonstante des transversalen E-Feldes bestimmt und daraus Beziehungen für die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit hergeleitet. Führen Sie die gleiche Rechnung auf Basis des transversalen H-Feldes durch. Starten Sie analog (9.31) mit dem Ansatz

$$\underline{\gamma}^H = \alpha^H + j \beta^H = -\frac{1}{\underline{H}_\varphi} \frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial r} \quad \text{mit} \quad \underline{H}_\varphi = \underline{H}_0 \sin \vartheta \frac{1 + j k_0 r}{j (k_0 r)^2} e^{-j k_0 r}$$

und zeigen Sie, dass $v_p^H(r)$ erst im Fernfeld mit $v_p^E(r)$ nach (9.35) übereinstimmt. Im Nahfeld bewegen sich elektrische und magnetische Feldlinien daher verschieden schnell.

- 9.4.2** Eine kreisförmige Rahmenantenne vom Umfang $U = \lambda_0$ hat nach (9.69) die Richtcharakteristik

$$C(\vartheta, \varphi) = 2 \sqrt{[\sin \varphi \cot \vartheta J_1(\sin \vartheta)]^2 + [\cos \varphi J_1'(\sin \vartheta)]^2},$$

die man im Bereich der Hauptkeule, wo $\sin \vartheta \ll 1$ gilt, nach (9.72) in eine Taylor-Reihe entwickeln kann:

$$C(\vartheta, \varphi) \approx 1 + \frac{1}{8} (-4 + \cos 2\varphi) \sin^2 \vartheta.$$

Bestimmen Sie die Halbwertsbreiten der beiden vertikalen Hauptschnitte

$$C_V(\vartheta, \varphi = 0) \approx 1 - \frac{3}{8} \sin^2 \vartheta \quad \text{und} \quad C_V(\vartheta, \varphi = \pi/2) \approx 1 - \frac{5}{8} \sin^2 \vartheta.$$

Lösungen:

$$\mathbf{9.4.1} \quad \frac{v_p^H(r)}{c_0} = \frac{k_0}{\beta^H} = 1 + \frac{1}{(k_0 r)^2} \quad \text{und} \quad \frac{v_p^E(r)}{c_0} = \frac{k_0}{\beta^E} = 1 + \frac{1 + (k_0 r)^2}{-2(k_0 r)^2 + (k_0 r)^4}$$

- 9.4.2** Den Halbwertswinkel ϑ_1 im Vertikalschnitt $\varphi = 0$ erhalten wir aus

$$\vartheta_1 = \arcsin \sqrt{\frac{8}{3} (1 - 1/\sqrt{2})} \approx 62,1^\circ \quad \text{bzw.} \quad \Delta \vartheta_1 = 2 \vartheta_1 \approx 124,2^\circ.$$

Der Halbwertswinkel ϑ_2 im orthogonalen Vertikalschnitt $\varphi = \pi/2$ folgt aus

$$\vartheta_2 = \arcsin \sqrt{\frac{8}{5} (1 - 1/\sqrt{2})} \approx 43,2^\circ \quad \text{bzw.} \quad \Delta \vartheta_2 = 2 \vartheta_2 \approx 86,4^\circ.$$

Unsere einfachen Näherungsergebnisse stimmen mit den wahren Werten $\Delta \vartheta_1 = 130,9^\circ$ und $\Delta \vartheta_2 = 83,2^\circ$, die man aus einer aufwändigeren Untersuchung der exakten Richtcharakteristik (9.69) erhalten kann, recht gut überein.

10 Lineare Antennen

Wenn eine Antenne effektiv abstrahlen soll, dann muss sie gut an die Quellenimpedanz angepasst betrieben werden und ihre Länge muss in der Größenordnung von $\lambda_0/2$ liegen. Praktische Antennen für größere Wellenlängen $\lambda_0 > 100$ m (im Bereich der Mittel- und Langwellen) sind daher notwendigerweise von einfacher Form. Meist kommen dann lange gerade Drähte mit dünnem Querschnitt zur Anwendung. So ist die **Linearantenne** eine der gebräuchlichsten und ältesten Strahlerformen. Sie besteht in ihrer einfachsten Form aus einem geraden zylindrischen Leiter, der – wie in Bild 10.1 – an einer bestimmten Stelle meistens symmetrisch in der Mitte (**Dipol**) oder am Fußpunkt gegen Erde (**Monopol**) erregt wird. Die Breite des *Speisespalt* sei vernachlässigbar klein. Für $l = 2h$ haben beide Anordnungen – im oberen Halbraum – das gleiche Strahlungsdiagramm, da die Erdoberfläche in einer Symmetrieebene des elektrischen Feldes liegt. Der Monopol gibt – bei gleichem Quellstrom I_0 – nur die halbe Strahlungsleistung ab und besitzt daher den doppelten Gewinn der vergleichbaren Dipolantenne.

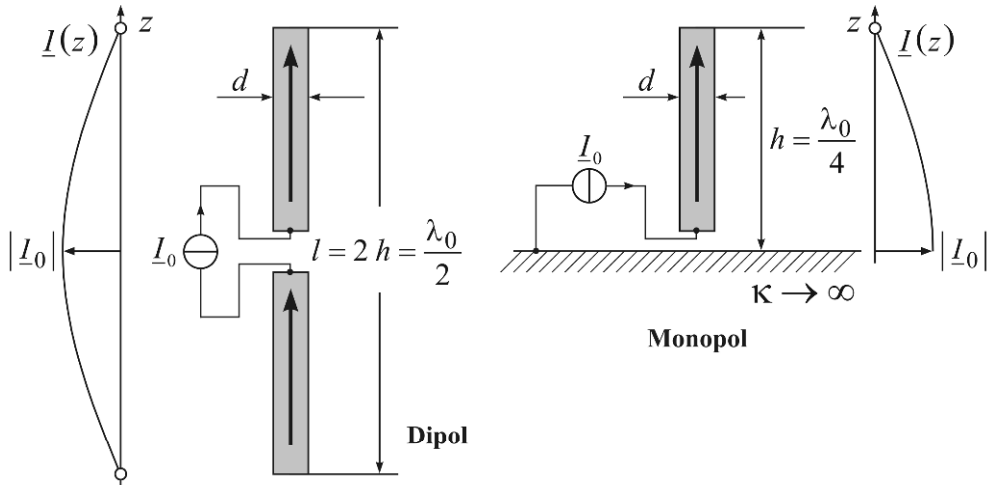


Bild 10.1 Dipol im Freiraum mit Mittelpunktspeisung und endgespeister Monopol über idealer Erde

Das Strahlungsfeld jeder metallischen Antenne kann aus der **Stromverteilung** auf ihrer Oberfläche eindeutig berechnet werden (siehe Kapitel 8). Die Feldstärke ergibt sich dann als Superposition aus den Feldbeiträgen der einzelnen Stromelemente unter Berücksichtigung ihrer Phasendifferenzen und der Entfernungsdifferenzen zwischen den Quellpunkten und dem Aufpunkt.

- Dies setzt aber die Kenntnis des Stromes an allen Stellen der Antenne nach Betrag und Phase voraus.
- Für die Berechnung der Richtcharakteristik und der Strahlungsleistung reichen bereits recht grobe Näherungen für die Stromverteilung aus, da das Fernfeld ziemlich unempfindlich gegenüber kleinen Änderungen der Stromverteilung ist.
- Die Berechnung der Eingangsimpedanz – insbesondere ihres Blindanteils, der die Energiespeicherung im Nahfeld beschreibt – erfordert jedoch eine genauere Kenntnis der Stromverteilung auf der Antenne. Eine umfassende Darstellung weitergehender Untersuchungen findet man z. B. in [Kin56, Wein03].

10.1 Zylinderantenne

Die Stromdichte $\underline{\mathbf{J}} = J \underline{\mathbf{e}}_z$ einer Zylinderantenne kann auf der gesamten Länge parallel zu ihrer Längsachse – d. h. in z -Richtung orientiert – angenommen werden (Bild 10.2).

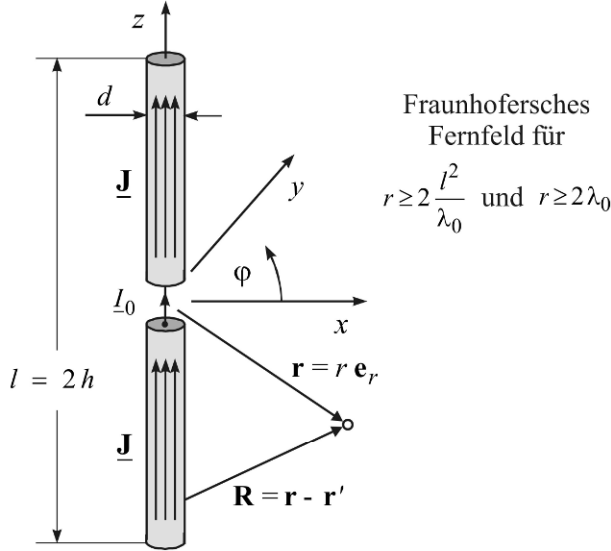


Bild 10.2 Zentralgespeiste zylindrische Linearantenne mit rotationssymmetrischer Strombelegung

Im Sendefall ist die Stromdichte $\underline{\mathbf{J}}$ rotationssymmetrisch über den kreisrunden Drahtquerschnitt verteilt ($\partial/\partial\varphi = 0$) und infolge des Skineffektes auf einer dünnen Schicht der Dicke $\delta \ll d$ an der Leiteroberfläche zusammengedrängt. Für die Feldberechnung kann man also anstelle der Volumenstromdichte $\underline{\mathbf{J}}$ eine rotationssymmetrische Oberflächenstromdichte $\underline{\mathbf{J}}_F$ als Quellverteilung ansetzen. Nach dem **Huygensschen Prinzip** (siehe Kapitel 8.6) kann nun die metallische Linearantenne mit ihren tatsächlich fließenden Oberflächenströmen $\underline{\mathbf{J}}_F$ durch eine äquivalente Anordnung, die aus den gleichen eingepägten Flächenströmen $\underline{\mathbf{J}}_F$ im freien Raum besteht, ersetzt werden. Das Strahlungsfeld einer Zylinderantenne kann somit bei Kenntnis der Stromverteilung $\underline{\mathbf{J}}_F$ entlang ihrer Antennenoberfläche A mit Hilfe des magnetischen Vektorpotenzials $\underline{\mathbf{A}}$ berechnet werden. Da nur eingepägte elektrische Ströme fließen, gilt $\underline{\mathbf{M}}_F = 0$ und aus (8.115) erhalten wir mit $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ den Ansatz:

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{A'} \underline{\mathbf{J}}_F(\mathbf{r}') \frac{e^{-j k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA' \quad \xrightarrow{\text{Fernfeld}} \quad \frac{e^{-j k_0 r}}{4\pi r} \iint_{A'} \underline{\mathbf{J}}_F(\mathbf{r}') e^{j k_0 \underline{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{r}'} dA'. \quad (10.1)$$

Im Fernfeld – auf das wir uns im Folgenden beschränken werden – erhalten wir die transversalen Feldstärken innerhalb des die Antenne umgebenden quellenfreien Raumes nach (8.116):

$$\underline{\mathbf{H}} = -j k_0 \underline{\mathbf{e}}_r \times \underline{\mathbf{A}} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{E}} = -\underline{\mathbf{e}}_r \times Z_0 \underline{\mathbf{H}}. \quad (10.2)$$

Im Freiraum gilt $k_0 = \omega/c_0$ sowie $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ und damit wird

$$Z_0 \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = -j \omega \mu_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{4\pi r} \underline{\mathbf{e}}_r \times \iint_{A'} \underline{\mathbf{J}}_F(\mathbf{r}') e^{j k_0 \underline{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{r}'} dA'. \quad (10.3)$$

10.2 Dünne Linearantenne

10.2.1 Strahlungsfelder

In (10.3) muss man eine aufwändige Integration über die Hüllfläche A' des Zylinders vornehmen. Die Integration wird *eindimensional*, wenn wir uns auf den für die Praxis besonders wichtigen Fall eines „dünnen“ Zylinders beschränken. Man spricht von einer dünnen Linearantenne, wenn für ihren **Schlankheitsgrad** s und ihren Durchmesser d folgende Beziehungen gelten:

$$s = \frac{l}{d} = \frac{2h}{d} \geq 75 \quad \text{und} \quad d \leq \frac{\lambda_0}{50}. \quad (10.4)$$

Dabei ist l die gesamte Antennenlänge und d der Stabdurchmesser. Bei dünnen Antennen kann man sich den Strom in der Antennenachse konzentriert denken. Die magnetische Feldstärke eines solchen **Stromfadens** mit Strombeiträgen an Orten $\mathbf{r}' = z' \mathbf{e}_z$ folgt aus (10.3):

$$Z_0 \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = -j \omega \mu_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z) \int_{-h}^h \underline{I}(z') e^{j k_0 z' (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z)} dz'. \quad (10.5)$$

Mit $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta$ (siehe Tabelle 2.5) erhält man zunächst:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta) = -\mathbf{e}_\varphi \sin \vartheta \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta) = \cos \vartheta \end{aligned} \quad (10.6)$$

Damit folgt schließlich aus (10.5):

$$Z_0 \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\varphi j \omega \mu_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} \sin \vartheta \int_{-h}^h \underline{I}(z') e^{j k_0 z' \cos \vartheta} dz'. \quad (10.7)$$

Das **Fernfeld** hat also nur eine H_φ - und eine E_ϑ -Komponente. Bei symmetrischer Mittelpunktseisung weist die Stromverteilung eine gerade Symmetrie $\underline{I}(-z') = \underline{I}(z')$ auf und es gilt:

$$\underline{E}_\vartheta = Z_0 \underline{H}_\varphi = j \omega \mu_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{2 \pi r} \sin \vartheta \int_0^h \underline{I}(z') \cos(k_0 z' \cos \vartheta) dz'. \quad (10.8)$$

Man kann sich die Integration (10.8) als Superposition unendlich vieler infinitesimaler Hertz-scher Dipole vorstellen, die entlang der z -Achse im Bereich $-h \leq z' \leq h$ angeordnet sind. Den Grenzfall eines infinitesimal kurzen Dipols erhalten wir aus (10.8) mit $l = 2h \rightarrow 0$:

$$\underline{E}_\vartheta = Z_0 \underline{H}_\varphi = j \omega \mu_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{2 \pi r} \sin \vartheta \underline{I} h, \quad (10.9)$$

was völlig mit dem Fernfeldanteil aus (9.21) übereinstimmt. Die Felder im Fernfeld sind – wie man an der Schreibweise (10.7) mit komplexem Integranden gut erkennen kann – proportional der Fourier-Transformierten der Stromverteilung $\underline{I}(z')$. Da nun weder die Stromverteilung $\underline{I}(z')$ noch die Felder $\underline{E}_\vartheta$ bzw. $\underline{H}_\varphi$ bekannt sind, stellt der Zusammenhang (10.8) keine triviale Quadraturaufgabe, sondern eine komplizierte **Integralgleichung** dar. Für eine plausible Näherungslösung dieser Integralgleichung kann man wie folgt vorgehen:

- Der Strom im Speisepunkt muss nach Voraussetzung $\underline{I}(z'=0) = \underline{I}_0$ sein, während an den offenen Antennenenden der Leitungsstrom in z -Richtung verschwinden muss, d. h. dort muss gelten: $\underline{I}(z' = \pm h) = 0$. Das bedeutet, die Stromverteilung $\underline{I}(z')$ auf der Antenne kann nicht konstant sein.
- Durch praktische Messungen und durch weitergehende theoretische Untersuchungen hat sich gezeigt, dass die symmetrische Stromverteilung mit $\underline{I}(-z') = \underline{I}(z')$ sehr gut durch eine **stehende Sinuswelle** angenähert werden kann. Darum macht man den Ansatz:

$$\underline{I}(z') = \hat{\underline{I}} \sin[k_0(h - |z'|)] \quad (10.10)$$

Dieser Ansatz realisiert bereits die Stromknoten an den Enden der Zylinderantenne. Die unbekannte Amplitude $\hat{\underline{I}}$ der stehenden Welle ergibt sich dann aus dem Speisestrom $\underline{I}_0$ und der normierten Antennenhöhe $k_0 h$ nach folgender Beziehung $\hat{\underline{I}} = \underline{I}_0 / \sin(k_0 h)$. Dabei ist zu beachten, dass man auf diese Weise nur für Antennenhöhen $k_0 h \neq n\pi$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$ das Strommaximum $\hat{\underline{I}}$ aus dem Speisestrom $\underline{I}_0$ bestimmen kann. Für Antennenlängen $l = 2h = n\lambda_0$ wird der Quotient nämlich zu einem unbestimmten Ausdruck der Form $0/0$. Für sehr kurze Antennen $k_0 h \ll 1$ geht (10.10) in die **Dreiecksbelegung** über, wie man durch Entwicklung in eine Taylor-Reihe leicht sieht:

$$\underline{I}(z') = \hat{\underline{I}} [k_0(h - |z'|)] \quad (10.11)$$

Der Ansatz einer sinusförmigen Stromverteilung lässt sich auf anschauliche Weise rechtfertigen. Man betrachtet dazu die Dipolantenne als **leer laufende Zweidrahtleitung**, die zu einem Dipol aufgespreizt wurde. Die stehenden Wellen einer solchen Leitung bleiben beim „Aufbiegen“ nahezu sinusförmig, wie in Bild 10.3 für den Fall $\lambda_0/2 < l = 2h < \lambda_0$ angedeutet wird.

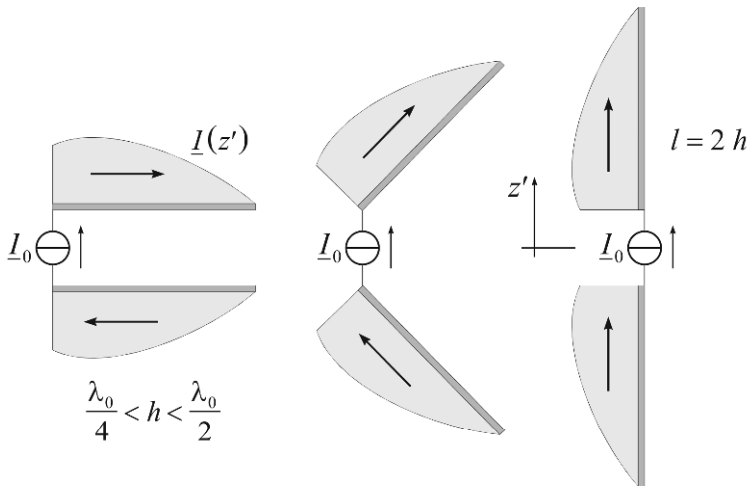


Bild 10.3 Übergang von der symmetrischen Zweidrahtleitung zur gestreckten Dipolantenne nach [Ung94]

Die sinusförmige Stromverteilung auf dünnen Dipolantennen wird experimentell gut bestätigt. Sie berücksichtigt allerdings nicht die **Dämpfung** der Leitungswelle durch die Abstrahlung in den freien Raum, was insbesondere bei längeren Antennen etwa mit $l > 4\lambda_0$ zu einer spürbaren Störung der sinusförmigen Stromverteilung führt. In diesen – für die meisten Anwendungen allerdings weniger wichtigen Fällen – muss der lineare Strahler als Randwertproblem mit strengen Lösungsverfahren der Feldtheorie behandelt werden.

Die Annahme eines sinusförmigen Stromverlaufs erlaubt mit guter Genauigkeit die Berechnung des Strahlungsfeldes einer dünnen Linearantenne (Übung 10.1). Die Eingangsimpedanz als typische Nahfeldgröße kann auf diese Weise aber nicht gefunden werden.

Übung 10.1: Strahlungsfeld einer dünnen Linearantenne

- Berechnen Sie unter Annahme eines sinusförmigen Stromverlaufs

$$\underline{I}(z') = \hat{I} \sin [k_0 (h - |z'|)] \quad (10.12)$$

das Strahlungsfeld einer dünnen Linearantenne der Länge $l = 2h$ mit Mittelpunktsteuung.

- **Lösung:**

Nach Einsetzen des Stroms (10.12) in das Quellintegral (10.8) folgt:

$$\underline{E}_\vartheta = Z_0 \underline{H}_\varphi = \hat{I} j \omega \mu_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{2 \pi r} \sin \vartheta \int_0^h \sin [k_0 (h - z')] \cos (k_0 z' \cos \vartheta) dz'. \quad (10.13)$$

Der Integrand in (10.13) kann mittels eines Additionstheorems umgeformt werden:

$$\begin{aligned} & -2 \sin [k_0 (h - z')] \cos (k_0 z' \cos \vartheta) = \\ & = \sin (k_0 (1 + \cos \vartheta) z' - k_0 h) + \sin (k_0 (1 - \cos \vartheta) z' - k_0 h), \end{aligned} \quad (10.14)$$

wodurch eine Integration sofort möglich wird:

$$\begin{aligned} \underline{E}_\vartheta = \hat{I} j \frac{\omega \mu_0}{k_0} \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} \sin \vartheta & \left\{ \frac{\cos (k_0 (1 + \cos \vartheta) z' - k_0 h)}{1 + \cos \vartheta} + \right. \\ & \left. + \frac{\cos (k_0 (1 - \cos \vartheta) z' - k_0 h)}{1 - \cos \vartheta} \right\} \Bigg|_{z'=0}^h. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Nach Einsetzen der Grenzen folgt zunächst:

$$\begin{aligned} \underline{E}_\vartheta = \hat{I} j Z_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} \sin \vartheta & \left\{ \frac{\cos (k_0 h \cos \vartheta) - \cos (k_0 h)}{1 + \cos \vartheta} + \right. \\ & \left. + \frac{\cos (k_0 h \cos \vartheta) - \cos (k_0 h)}{1 - \cos \vartheta} \right\}, \end{aligned} \quad (10.16)$$

und durch Zusammenfassen wird:

$$\underline{E}_\vartheta = \hat{I} j Z_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} \sin \vartheta \frac{[\cos (k_0 h \cos \vartheta) - \cos (k_0 h)] (1 - \cos \vartheta + 1 + \cos \vartheta)}{1 - \cos^2 \vartheta}. \quad (10.17)$$

Schließlich erhält man mit $1 - \cos^2 \vartheta = \sin^2 \vartheta$ das gesuchte Strahlungsfeld:

$$\boxed{\underline{E}_\vartheta = Z_0 \underline{H}_\varphi = j Z_0 \hat{I} \frac{e^{-j k_0 r}}{2 \pi r} \frac{\cos (k_0 h \cos \vartheta) - \cos (k_0 h)}{\sin \vartheta}}. \quad \square \quad (10.18)$$

Aus Übung (10.1) wird ersichtlich, dass die schlanke Dipolantenne ein rotationssymmetrisches Feld abstrahlt, das nicht vom Umfangswinkel φ abhängt. Ihre – allerdings noch nicht auf das Maximum normierte – **Richtcharakteristik** entnimmt man der elektrischen Fernfeldkomponente E_ϑ aus (10.18). Es gilt im gesamten Bereich $0 \leq \vartheta \leq \pi$:

$$C(\vartheta) \triangleq \frac{|\cos(k_0 h \cos \vartheta) - \cos(k_0 h)|}{\sin \vartheta}. \quad (10.19)$$

In den Richtungen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ hat die Richtcharakteristik $C(\vartheta)$ für jede beliebige Antennenlänge $l = 2h$ eine Nullstelle, wie man durch Grenzwertbetrachtung nach l'Hospital leicht zeigen kann. Wir wollen einige wichtige Sonderfälle von (10.19) betrachten.

● **Kurze lineare Antenne**

Für kurze lineare Antennen gilt $k_0 h \ll 1$ und mit der nach dem quadratischen Glied abgebrochenen Taylorreihe für die Kosinusfunktion $\cos x \approx 1 - x^2/2$ erhält man aus (10.19):

$$C(\vartheta) \triangleq \frac{1}{\sin \vartheta} \left| 1 - \frac{(k_0 h \cos \vartheta)^2}{2} - 1 + \frac{(k_0 h)^2}{2} \right| = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{(k_0 h)^2}{2} (1 - \cos^2 \vartheta). \quad (10.20)$$

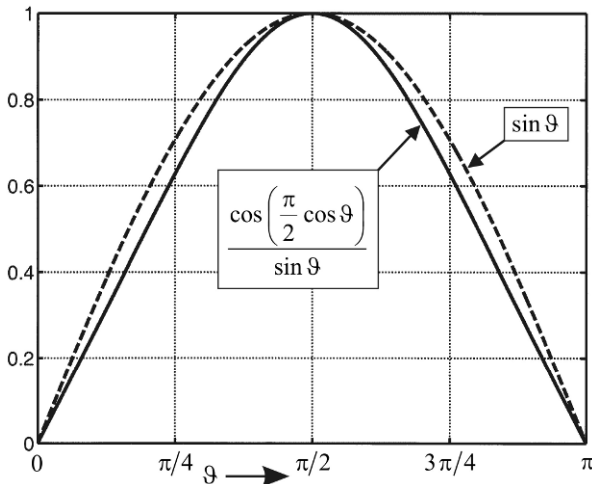
Daraus folgt die Richtcharakteristik einer kurzen Linearantenne (mit Dreiecksbelegung), die sich praktisch wie ein Hertzscher Dipol (mit konstantem Strombelag) verhält (vgl. (7.14)):

$$C(\vartheta) = \sin \vartheta. \quad (10.21)$$

● **Halbwellendipol**

Bei einer Antennenlänge von $l = \lambda_0/2$ spricht man von einem Halbwellendipol. Seine halbe Länge ist $h = \lambda_0/4$, d. h. $k_0 h = \pi/2$. Die normierte Richtcharakteristik (10.19) wird damit:

$$C(\vartheta) = \frac{\left| \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right|}{\sin \vartheta}, \quad (10.22)$$



also gilt:

$$C(\vartheta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}. \quad (10.23)$$

Der Vergleich in Bild 10.4 zeigt, dass das Strahlungsdiagramm eines Halbwellendipols eine etwas stärkere Bündelung als dasjenige eines Hertzschen Dipols aufweist. Die Halbwertsbreite ist nicht mehr 90° , sondern nur noch etwa 78° , was auch zu einem etwas höheren Gewinn des Halbwellendipols führt.

Bild 10.4 Vergleich der Richtdiagramme in der E-Ebene von Hertzischem Dipol und Halbwellendipol

● Ganzwellendipol

Der Ganzwellendipol hat eine Länge von $l = \lambda_0$. Für nur eine Dipolhälfte gilt daher $h = \lambda_0/2$, d. h. $k_0 h = \pi$. Die noch unnormierte Richtcharakteristik wird damit nach (10.19):

$$C(\vartheta) \triangleq \frac{|\cos(\pi \cos \vartheta) - \cos \pi|}{\sin \vartheta} = \frac{\cos(\pi \cos \vartheta) + 1}{\sin \vartheta}. \quad (10.24)$$

Aus $1 + \cos x = 2 \cos^2(x/2)$ folgt der auf das Maximum bei $\vartheta = \pi/2$ normierte Wert:

$$C(\vartheta) = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}. \quad (10.25)$$

Beim Vergleich von (10.25) mit (10.23) fällt auf, dass der Ganzwellendipol die gleichen Diagrammnullstellen wie der Halbwellendipol besitzt. Er ist weiterhin ein Querstrahler mit einer Hauptkeule bei $\vartheta = \pi/2$, die aber wegen des $\cos^2$ -Terms deutlich schmäler sein muss – tatsächlich ergibt sich eine Halbwertsbreite von nur etwa $47,8^\circ$. Grundsätzlich gilt die **Regel**, dass mit $n = 1, 2, 3, \dots$ ein Dipol der Länge $l = (2n-1)\lambda_0$ immer die gleichen Nullrichtungen besitzt wie sein halb so langer „Verwandter“ der Länge $l = (2n-1)\lambda_0/2$. Die sich in beiden Fällen einstellenden Richtdiagramme sind daher sehr ähnlich (siehe Tabelle 10.1).

● Doppelwellendipol

Es gilt $l = 2\lambda_0$, d. h. $h = \lambda_0$ und $k_0 h = 2\pi$. Die unnormierte Richtcharakteristik wird damit:

$$C(\vartheta) \triangleq \frac{|\cos(2\pi \cos \vartheta) - \cos(2\pi)|}{\sin \vartheta} = -\frac{\cos(2\pi \cos \vartheta) - 1}{\sin \vartheta}. \quad (10.26)$$

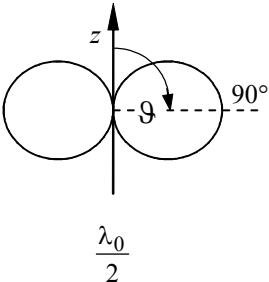
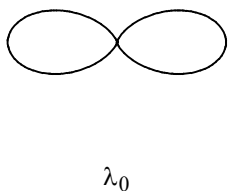
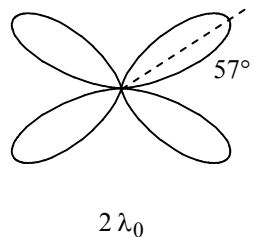
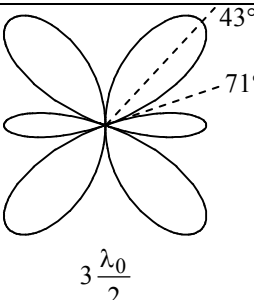
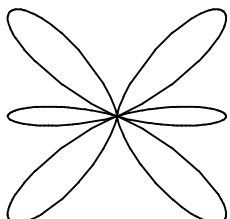
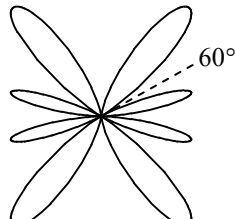
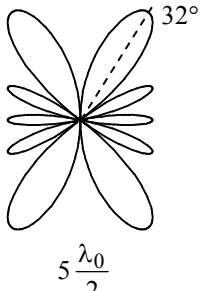
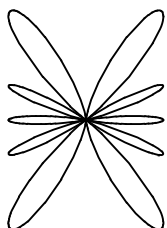
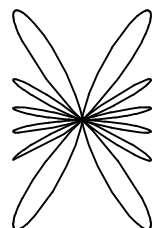
Aus $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$ erhält man den unnormierten Wert:

$$C(\vartheta) \triangleq \frac{\sin^2(\pi \cos \vartheta)}{\sin \vartheta}. \quad (10.27)$$

Der Doppelwellendipol verhält sich völlig anders als die vorher diskutierten Spezialfälle. Er ist nämlich kein Querstrahler mehr, denn sein Richtdiagramm – mit einer Halbwertsbreite von etwa $26,7^\circ$ – weist zwei symmetrisch zur Äquatorialebene gelegene Hauptkeulen auf, die unter einem Winkel von ca. $57,4^\circ$ schräg zur Dipolachse orientiert sind (Tabelle 10.1).

Zur Verdeutlichung des sich mit der Dipollänge l ändernden Strahlungsverhaltens sind die jeweiligen Richtcharakteristiken $C(\vartheta)$ in ihrem **Vertikalschnitt** in Tabelle 10.1 übersichtlich zusammengestellt. Die Diagramme sind rotationssymmetrisch um die Antennenachse (z -Achse) und symmetrisch zu $\vartheta = \pi/2$. Die Symmetrie zur Äquatorialebene ist eine direkte Folge der symmetrischen Stromverteilung $I(-z') = I(z')$. Die zugehörigen Horizontalschnitte der Richtcharakteristik bilden Kreise und sind nicht dargestellt. Für $l > \lambda_0$ treten neben der Hauptkeule weitere Nebenkeulen auf, weil sich nicht nur in Hauptstrahlungsrichtung – sondern auch für andere Winkel ϑ – Beiträge von Elementarstrahlern phasenrichtig im Fernfeld überlagern. Richtdiagramme sind physikalisch nichts anderes als **Interferenzfiguren** – vergleichbar denen aus der Optik – mit Verstärkung und Auslöschung. Etwa für $l > 4\lambda_0$ wird die sinusförmige Stromverteilung auf dem Dipol durch Abstrahlung vermehrt bedämpft, sodass die Diagramme der längeren Dipole die Realität nicht mehr ganz korrekt wiedergeben.

Tabelle 10.1 Diagrammschnitte in der E-Ebene von vertikalen Linearstrahlern der Länge $l = 2 h$

	ungerade Halbwellenzahl	gerade Halbwellenzahl	
	$l = (2n-1) \frac{\lambda_0}{2}$ $\Downarrow$ $C(\vartheta) \triangleq \frac{\cos\left(\frac{2n-1}{2} \pi \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}$	$l = (2n-1) \lambda_0$ $\Downarrow$ $C(\vartheta) \triangleq \frac{\cos^2\left(\frac{2n-1}{2} \pi \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}$	$l = 2n \lambda_0$ $\Downarrow$ $C(\vartheta) \triangleq \frac{\sin^2(n \pi \cos \vartheta)}{\sin \vartheta}$
$n = 1$	 $\frac{\lambda_0}{2}$	 λ_0	 $2 \lambda_0$
$n = 2$	 $3 \frac{\lambda_0}{2}$	 $3 \lambda_0$	 $4 \lambda_0$
$n = 3$	 $5 \frac{\lambda_0}{2}$	 $5 \lambda_0$	 $6 \lambda_0$
	$(2n-1)$ Maxima mit <i>Maximum</i> für $\vartheta = \pi/2$	$(2n-1)$ Maxima mit <i>Maximum</i> für $\vartheta = \pi/2$	$(2n)$ Maxima mit <i>Nullstelle</i> für $\vartheta = \pi/2$

Für den $3\lambda_0/2$ – Dipol ist in Bild 10.5 die dreidimensionale Richtcharakteristik dargestellt. Man erkennt deutlich die beiden konischen Hauptkeule und die scheibenförmige Nebenkeule.

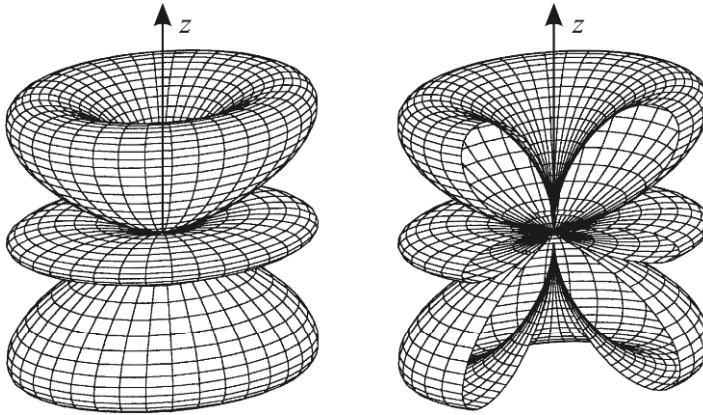


Bild 10.5 Richtcharakteristik eines vertikalen $3\lambda_0/2$ -Dipols (geschlossen und aufgebrochen)

Zur näheren Diskussion der gezeigten Richtdiagramme wollen wir im Folgenden die Lage der Nullstellen und Maxima angeben. Einige dieser Werte sind in Tabelle 10.1 bereits markiert. In Tabelle 10.2 finden wir mit $n = 1, 2, 3, \dots$ zunächst die Lage der **Nullstellen**.

Tabelle 10.2 Diagramm-Nullstellen beim vertikalen Linearstrahler der Länge $l = 2h$

$l = (2n-1)\frac{\lambda_0}{2}$	$l = (2n-1)\lambda_0$	$l = 2n\lambda_0$
$\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi\cos\vartheta\right) = 0$ $\Rightarrow$ ungerade Vielfache von $\pi/2$		$\sin(n\pi\cos\vartheta) = 0$ $\Rightarrow$ Vielfache von π
$(2n)$ Nullstellen an $\cos\vartheta = \frac{\pm 1}{2n-1}, \frac{\pm 3}{2n-1}, \frac{\pm 5}{2n-1}, \dots, \pm 1$		$(2n+1)$ Nullstellen an $\cos\vartheta = 0, \frac{\pm 1}{n}, \frac{\pm 2}{n}, \frac{\pm 3}{n}, \dots, \pm 1$

Die Berechnung der Maxima gestaltet sich schwieriger. Es muss die Bedingung $dC(\vartheta)/d\vartheta = 0$ erfüllt werden. Grundsätzlich wird ein Maximum immer durch zwei Nullstellen eingeschlossen. Tabelle 10.3 enthält die transzendenten Gleichungen, aus denen die **Maxima** bestimmbar sind.

Tabelle 10.3 Diagramm-Maxima beim vertikalen Linearstrahler der Länge $l = 2h$

$l = (2n-1)\frac{\lambda_0}{2}$	$l = (2n-1)\lambda_0$	$l = 2n\lambda_0$
$(2n-1)$ Maxima an $x = \cos\vartheta$ für $a \tan(ax) = \frac{x}{1-x^2}$ mit $a = k_0 h = \frac{(2n-1)\pi}{2}$	$(2n-1)$ Maxima an $x = \cos\vartheta$ für $a \tan(ax/2) = \frac{x}{1-x^2}$ mit $a = k_0 h = (2n-1)\pi$	$(2n)$ Maxima an $x = \cos\vartheta$ für $a \cot(ax/2) = -\frac{x}{1-x^2}$ mit $a = k_0 h = 2n\pi$

Für Dipole mit ungerader Halbwellenzahl, d. h. $l = (2n-1)\lambda_0/2$, wird die Lage der Nullstellen und Maxima – siehe die Tabellen 10.2 und 10.3 – nachträglich in Übung 10.2 hergeleitet.

Übung 10.2: Diagramm-Nullstellen und -Maxima bei Dipolantennen

- Es soll das vertikale Richtdiagramm einer vertikal orientierten Dipolantenne mit ungerader Halbwellenzahl, d. h. $l = (2n-1)\lambda_0/2$, untersucht werden. Leiten Sie die Orte ϑ der Nullstellen und Maxima her, wenn das unnormierte Richtdiagramm mit $n=1, 2, 3, \dots$ durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$C(\vartheta) \doteq \frac{\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}. \quad (10.28)$$

• Lösung:

Die Nullstellen des Richtdiagramms im Bereich $0 \leq \vartheta \leq \pi$ erhält man aus:

$$\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi \cos \vartheta\right) \stackrel{!}{=} 0, \quad (10.29)$$

d. h. das Argument der Kosinusfunktion in (10.29) ist ein ungerades Vielfaches von $\pi/2$:

$$\frac{2n-1}{2}\pi \cos \vartheta = \pm (2m-1)\frac{\pi}{2} \quad (10.30)$$

mit der Abkürzung $(m=1, 2, 3, \dots, n)$, weil der Kosinus nur Werte annehmen kann, die dem Betrage nach ≤ 1 sind. Man findet also die Diagramm-Nullstellen aus:

$$\boxed{\cos \vartheta = \pm \frac{2m-1}{2n-1}} \quad (10.31)$$

mit $m \leq n$. Es gibt somit n Nullstellen in der oberen Diagrammhälfte und weitere n Nullstellen, die spiegelbildlich zu den ersten in der unteren Diagrammhälfte liegen.

Die Haupt- und Nebenkeulen des Richtdiagramms im Bereich $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ergeben sich aus der Extremwertforderung:

$$\frac{dC(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{d}{d\vartheta} \frac{\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} \stackrel{!}{=} 0. \quad (10.32)$$

Man erhält mit der Quotientenregel unter Berücksichtigung der inneren Ableitung:

$$\frac{2n-1}{2}\pi \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi \cos \vartheta\right) \sin^2 \vartheta - \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi \cos \vartheta\right) \cos \vartheta = 0. \quad (10.33)$$

Durch Zusammenfassung ergibt sich schließlich aus (10.33):

$$\boxed{\frac{2n-1}{2}\pi \tan\left(\frac{2n-1}{2}\pi \cos \vartheta\right) = \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}}, \quad (10.34)$$

woraus die transzendente Gleichung aus Tabelle 10.3 direkt folgt. Aus (10.34) findet man sowohl die Lage der Hauptkeule als auch die Lage der Nebenkeulen. $\square$

Die Auflösung der nichtlinearen Gleichungen aus Tabelle 10.3 nach $x = \cos \vartheta$ kann nur mit numerischen Verfahren – in der Regel durch Iteration – erfolgen. Für ungerade Halbwellenzahl, d. h. $l = (2n-1)\lambda_0/2$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$, findet man in [Ber40] eine erstaunlich genaue Näherungslösung von (10.34) für die Lage der Hauptkeule:

$$\cos \vartheta_{\max} \approx \frac{2n-2}{2n-1} \left[1 + \frac{4}{(4n-3)\pi^2} \right] \quad (10.35)$$

Die Funktionskurve $\vartheta_{\max}$ nach (10.35), die natürlich nur an diskreten Stellen $n = 1, 2, 3, \dots$, d. h. für $l/\lambda_0 = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, \dots$ auszuwerten ist, stellen wir gemeinsam mit den durch Iteration von (10.34) exakt berechneten – durch Punkte markierten – Werten von $\vartheta_{\max}$ in Bild 10.6 dar.

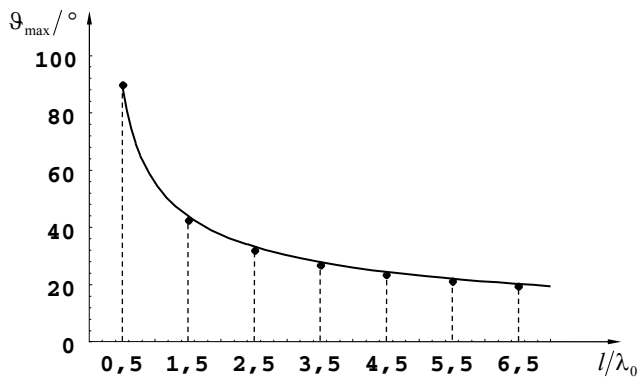


Bild 10.6 Lagewinkel der oberen Hauptkeule eines Dipols mit ungerader Halbwellenzahl

Man sieht, wie gut die Näherungskurve die exakten Wertepunkte wiedergibt. Die eine Hauptkeule, die beim Halbwellendipol noch bei $\vartheta_{\max} = 90^\circ$ lag, spaltet sich für $l/\lambda_0 = 3/2, 5/2, 7/2, \dots$ in zwei symmetrisch zur Äquatorialebene liegende Hauptkeulen auf, die mit zunehmender Dipollänge immer mehr zur z-Achse hin wandern. Während der Halbwellendipol ein so genannter Querstrahler ist, hat ein längerer Dipol zunehmend die Charakteristik eines Schrägstrahlers.

In diesem Abschnitt untersuchten wir die Abstrahlung von Dipolen, die in ihren Eigenschwingungen auf Resonanz erregt wurden. Dabei wurden Antennenlängen $l = n\lambda_0/2$ mit $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ betrachtet. Bild 10.7 zeigt abschließend einige Beispiele der in ihren Grund- bzw. Oberschwingungen erregten Antennen mit ihren symmetrischen Stromverteilungen.

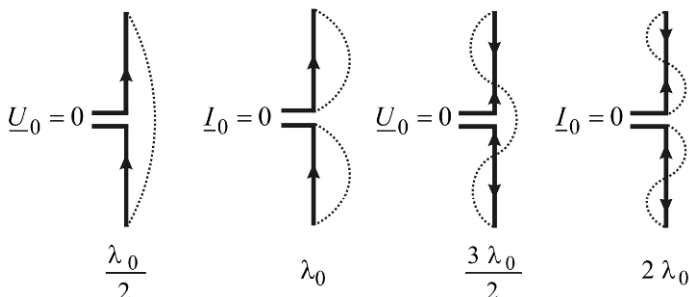


Bild 10.7 Symmetrische Stromverteilung bei zentralgespeisten Dipolantennen in Resonanzlänge

10.2.2 Wanderwellenantenne (Langdrahtantenne)

Bisher haben wir zentralgespeiste Dipolantennen mit symmetrischer Stromverteilung $I(-z') = I(z')$ untersucht. Wie bei einer leer laufenden Leitung stellen sich hier – aufgrund der stehenden Welle – Stromknoten an beiden Dipolenden ein. Die Verhältnisse ändern sich völlig, wenn man den Dipol stattdessen von einem Ende her speist und das andere Ende reflexionsfrei abschließt. Dadurch erhalten wir nur noch eine vorwärts laufende Wanderwelle (Bild 10.8).

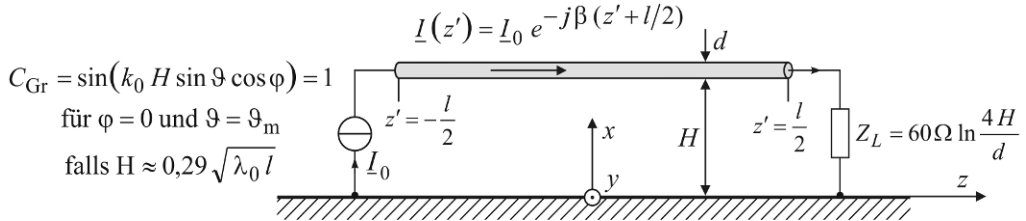


Bild 10.8 Endgespeiste Wanderwellenantenne über Erde ($0,2 \leq H/\lambda_0 \leq 0,7$), reflexionsfreier Abschluss

Die Einflüsse des Erdbodens können nach Abschnitt 11.4 durch ein gegenphasiges Spiegelbild und eine **Gruppencharakteristik** $C_{Gr} = \sin(k_0 H \sin \Theta \cos \varphi)$ berücksichtigt werden. Bei geeigneter Wahl der Antennenhöhe H wird in Hauptstrahlungsrichtung der Elementcharakteristik $C_{Gr} = 1$ und wir können uns auf die Untersuchung der Langdrahtantenne (Beverage-Antenne) im freien Raum beschränken [Sti84]. Mit $z' = 0$ in Antennenmitte erhalten wir – unter Vernachlässigung der Dämpfung – die Stromverteilung einer nach rechts fortschreitenden Welle:

$$\boxed{I(z') = I_0 e^{-j\beta(z' + l/2)}} \quad (10.36)$$

Langdrahtantennen haben in der Regel eine Ausdehnung in der Größenordnung von einer halben bis zu sechs Wellenlängen, d. h. $\lambda_L/2 \leq l \leq 6\lambda_L$. Man beachte, dass die Leitungswelle im Allgemeinen eine kleinere Wellenlänge als das von ihr erzeugte Strahlungsfeld aufweist:

$$\lambda_L < \lambda_0 \Leftrightarrow \beta = \frac{2\pi}{\lambda_L} > k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (10.37)$$

Da die Stromverteilung (10.36) im Gegensatz zu derjenigen des zentralgespeisten Dipols (10.10) nicht mehr symmetrisch ist, verwenden wir (10.7):

$$\underline{E}_\Theta = Z_0 \underline{H}_\varphi = j\omega\mu_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \sin \Theta \int_{-h}^h I(z') e^{jk_0 z' \cos \Theta} dz' \quad (10.38)$$

und erhalten mit $l = 2h$:

$$\begin{aligned} \underline{E}_\Theta &= j\omega\mu_0 I_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \sin \Theta \int_{-h}^h e^{-j\beta(z' + h)} e^{jk_0 z' \cos \Theta} dz' = \\ &= j\omega\mu_0 I_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \sin \Theta e^{-j\beta h} \int_{-h}^h e^{j k_0 z' (\cos \Theta - \beta/k_0)} dz'. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Die Integration bereitet keine Schwierigkeiten und es folgt nach kurzer Zwischenrechnung:

$$\boxed{\underline{E}_\Theta = j\omega\mu_0 I_0 l \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} e^{-j\beta h} \sin \Theta \operatorname{si}[k_0 h (\cos \Theta - \beta/k_0)]} \quad (10.40)$$

Die in (10.40) auftretende Funktion $\text{si}(x) = \sin x/x$ wird **si-Funktion** oder Spaltfunktion genannt, weil sie bei der Beugung an einem geraden Lichtspalt eine Rolle spielt. Der Verlauf der si-Funktion, die in der Antennentechnik öfter benötigt wird, ist in Bild 10.9 wiedergegeben. Die si-Funktion ist gerade und hat zwei globale Minima vom Wert $-0,217234$ bei $|x| \approx 4,493409$, deren Pegel 13,26 dB unter dem Hauptmaximum liegen. Insbesondere gilt mit $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\text{si}(0) = 1, \quad \text{si}(\pm 1,391557) \approx 1/\sqrt{2}, \quad \text{si}(n\pi) = 0 \quad \text{und} \quad \text{si}(-x) = \text{si}(x). \quad (10.41)$$

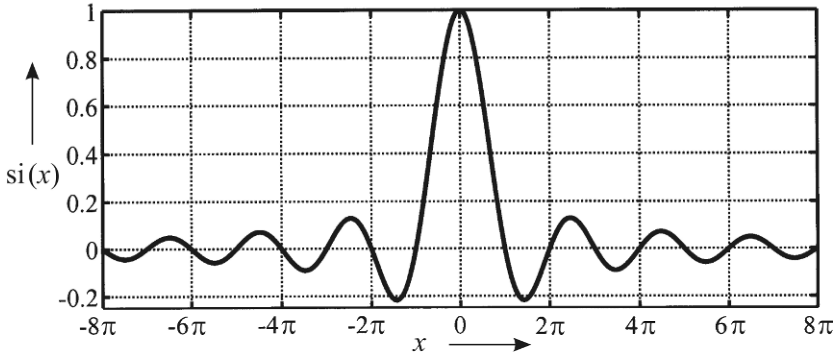


Bild 10.9 Darstellung der si-Funktion mit gerader Symmetrie und einem Hauptmaximum bei $x = 0$

Die unnormierte **Richtcharakteristik** der Wanderwellenantenne erhalten wir aus (10.40):

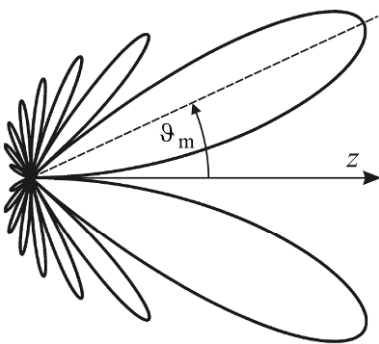
$$C(\vartheta) \triangleq \sin \vartheta \left| \text{si} \left[k_0 h (\cos \vartheta - \beta/k_0) \right] \right|. \quad (10.42)$$

Unter der Annahme $\beta \approx k_0$ folgt aus (10.42) für $l = 4\lambda_0$, d. h. $k_0 h = 4\pi$ (mit $H \approx 0,58\lambda_0$):

$$C(\vartheta) \triangleq \sin \vartheta \left| \text{si} \left[4\pi (1 - \cos \vartheta) \right] \right| = \sin \vartheta \left| \text{si} \left[8\pi \sin^2(\vartheta/2) \right] \right|, \quad (10.43)$$

wovon der Diagrammschnitt in der E-Ebene in Bild 10.10 dargestellt ist. Wanderwellenantennen sind recht breitbandig (2:1) und haben einen reellen Eingangswiderstand Z_L . Ihr **Richtfaktor** liegt für $\lambda_0/2 \leq l \leq 6\lambda_0$ zwischen 3,1 und 11,3 dBi und folgt näherungsweise aus:

$$D \approx \left(9,1 \frac{l}{\lambda_0} - 1,7 \right) \left(2,1 + \ln \frac{l}{\lambda_0} \right)^{-1} \quad (\text{aus [Stu98a] und weiter umgeformt}). \quad (10.44)$$



Mit Übung 10.3 erhält man die Lage der **Hauptkeule** aus:

$$\vartheta_m \approx 0,861 \sqrt{\frac{\lambda_0}{l}} \quad \text{mit} \quad l = 2h. \quad (10.45)$$

Die Leistung, die ein zentralgespeister Dipol über seine Rückwärtskeule abstrahlt, setzt die Langdrahtantenne in ihrem Lastwiderstand um. Ihre Nachteile – z. B. geringer Gewinn und hohe Nebenkeulen – können durch Array-Anordnungen wie **V- oder Rhombus-Antennen** für Mittel- und Kurzwellenbereich ausgeglichen werden.

Bild 10.10 Richtdiagramm einer Langdrahtantenne ($l = 4\lambda_0$) im Freiraum mit $D \approx 9,95$ und $\vartheta_m \approx 24,7^\circ$

Übung 10.3: Hauptkeule einer Wanderwellenantenne

- Bestimmen Sie die Lage der Hauptkeule einer endgespeisten und reflexionsfrei abgeschlossenen Wanderwellenantenne im Freiraum. Nehmen Sie an, dass $\beta \cong k_0$ gilt.

- **Lösung:**

Zum Auffinden des Maximums müssen wir die Richtcharakteristik (10.42) nach ϑ differenzieren und das Ergebnis null setzen:

$$\frac{dC(\vartheta)}{d\vartheta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\vartheta} \frac{\sin \vartheta \sin[k_0 h(1 - \cos \vartheta)]}{1 - \cos \vartheta} = 0. \quad (10.46)$$

Mit $1 - \cos \vartheta = 2 \sin^2(\vartheta/2)$ sowie $\sin \vartheta = 2 \sin(\vartheta/2) \cos(\vartheta/2)$ schreiben wir (10.46):

$$\frac{d}{d\vartheta} \frac{\cos(\vartheta/2) \sin[k_0 l \sin^2(\vartheta/2)]}{\sin(\vartheta/2)} = \frac{d}{d\vartheta} \left(\cot(\vartheta/2) \sin[k_0 l \sin^2(\vartheta/2)] \right) = 0. \quad (10.47)$$

Dabei haben wir $l = 2h$ gesetzt. Aus (10.47) folgt zunächst:

$$\begin{aligned} & \frac{1/2}{\sin^2(\vartheta/2)} \sin[k_0 l \sin^2(\vartheta/2)] = \\ & = k_0 l \cot(\vartheta/2) \cos[k_0 l \sin^2(\vartheta/2)] 2 \sin(\vartheta/2) \cos(\vartheta/2) \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (10.48)$$

woraus wir mit der Abkürzung $\zeta = k_0 l \sin^2(\vartheta/2)$ und $\cos^2(\vartheta/2) = 1 - \sin^2(\vartheta/2)$ endgültig folgende – von der Antennenlänge abhängige – Gleichung erhalten:

$$\boxed{\frac{\tan \zeta}{2 \zeta} = 1 - \frac{\zeta}{k_0 l}}. \quad (10.49)$$

Wir können für $k_0 l \gg 1$, d. h. etwa für $l \geq \lambda_0$, eine Näherungslösung von (10.49) erhalten, indem wir stattdessen eine Lösung von $\tan \zeta_0 = 2 \zeta_0$ suchen, die man mit geeigneten numerischen Nullstellenverfahren schnell als $\zeta_0 \approx 1,16556$ ermittelt. Mit diesem Wert weicht die rechte Seite von (10.49) für $k_0 l \gg 1$ tatsächlich nur wenig von eins ab. Durch Iteration kann im Bedarfsfall eine bessere Näherung ζ_1 wie folgt gefunden werden:

$$\tan \zeta_1 = 2 \zeta_0 \left(1 - \frac{\zeta_0}{k_0 l} \right). \quad (10.50)$$

Für $k_0 l \geq 4\pi$ (d. h. $l \geq 2\lambda_0$) wird der relative Fehler $(\zeta_0 - \zeta)/\zeta \leq 4,8\%$, während $(\zeta_1 - \zeta)/\zeta \leq 6,5\%$ bereits bei $k_0 l \geq \pi$ (d. h. $l \geq \lambda_0/2$) erreicht wird. Wir begnügen uns daher mit der Näherung $\zeta_0 \approx 1,16556$, woraus schließlich der Winkel der Hauptstrahlungskeule der Wanderwellenantenne aus $\zeta_0 = k_0 l \sin^2(\vartheta_0/2)$ folgt. Man findet nach kurzer Umformung und mit der Taylor-Entwicklung $\arccos(1-x) \approx \sqrt{2x} (1 + x/12 + \dots)$

$$\boxed{\vartheta_0 = \arccos \left(1 - \frac{\zeta_0/\pi}{l/\lambda_0} \right) = \arccos \left(1 - \frac{0,371}{l/\lambda_0} \right) \approx 0,861 \sqrt{\frac{\lambda_0}{l}}}. \quad (10.51)$$

Für das Beispiel $l = 4\lambda_0$ erhalten wir aus (10.51) die Näherungslösung $\vartheta_0 \approx 24,7^\circ$, während der exakte Wert $\vartheta \approx 24,6^\circ$ beträgt. $\square$

10.2.3 Strahlungswiderstand

Nach der Behandlung von endgespeisten Langdrahtantennen wollen wir zur Dipolantenne mit Mittelpunktsspeisung zurückkehren. Dazu hatten wir in Abschnitt 10.2.1 die Fernfeldkomponenten (10.18) einer dünnen zentralgespeisten Linearantenne der Länge $l = 2h$ als

$$\underline{E}_\vartheta = Z_0 \underline{H}_\varphi = j Z_0 \hat{I} \frac{e^{-j k_0 r}}{2 \pi r} \frac{\cos(k_0 h \cos \vartheta) - \cos(k_0 h)}{\sin \vartheta} \quad (10.52)$$

bestimmt. Dies gibt uns zunächst die Möglichkeit, die abgestrahlte Leistung P_S zu berechnen, aus der wir dann den Strahlungswiderstand R_S einfach ableiten können. Die Strahlungsleistung wollen wir in Übung 10.4 ermitteln. Dazu benötigen wir nach (4.106) den Betrag des Poyntingschen Vektors im Fernfeld:

$$S_r = \frac{1}{2} \mathbf{e}_r \cdot \operatorname{Re} \left\{ \underline{E}_\vartheta \times \underline{H}_\varphi^* \right\} = \frac{1}{2 Z_0} |\underline{E}_\vartheta|^2. \quad (10.53)$$

Mit den Werten (10.46) der Feldkomponenten folgt:

$$\begin{aligned} S_r &= \frac{1}{2 Z_0} \left| j Z_0 \hat{I} \frac{e^{-j k_0 r}}{2 \pi r} \frac{\cos(k_0 h \cos \vartheta) - \cos(k_0 h)}{\sin \vartheta} \right|^2 = \\ &= \frac{Z_0 |\hat{I}|^2}{8 \pi^2 r^2} \frac{[\cos(k_0 h \cos \vartheta) - \cos(k_0 h)]^2}{\sin^2 \vartheta}. \end{aligned} \quad (10.54)$$

Übung 10.4: Strahlungsleistung

- Man bestimme die gesamte, von einer dünnen Linearantenne abgestrahlte Wirkleistung P_S . Nehmen Sie entlang der Dipolantenne einen sinusförmigen Stromverlauf an.

- **Lösung:**

In den ihn umgebenden kugelförmigen Raumbereich mit dem Flächenelement $d\mathbf{A} = \mathbf{e}_r r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ entsendet der Dipol die Wirkleistung

$$P_S = \frac{|\hat{I}|^2}{2} R_S = \operatorname{Re} \left\{ \oint_A \underline{S} \cdot d\mathbf{A} \right\} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} S_r r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (10.55)$$

die sich als Integral der Leistungsdichte über die Oberfläche A einer Kugel um den Ursprung im Abstand r darstellen lässt. Im Fernfeld gilt mit (10.54):

$$\begin{aligned} P_S &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{Z_0 |\hat{I}|^2}{8 \pi^2 r^2} \frac{[\cos(k_0 h \cos \vartheta) - \cos(k_0 h)]^2}{\sin^2 \vartheta} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ &= \frac{Z_0 |\hat{I}|^2}{4 \pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{[\cos(k_0 h \cos \vartheta) - \cos(k_0 h)]^2}{\sin \vartheta} d\vartheta. \quad \square \end{aligned} \quad (10.56)$$

Das Integral in (10.56) kann *nicht* durch elementare Funktionen ausgedrückt werden. Seine genauere Auswertung liefert uns den **Strahlungswiderstand** einer Dipolantenne [Zuh53]:

$$\frac{4\pi R_s}{Z_0} = 2 \left[C + \ln(2k_0 h) - \text{Ci}(2k_0 h) \right] + \sin(2k_0 h) \left[\text{Si}(4k_0 h) - 2\text{Si}(2k_0 h) \right] + \cos(2k_0 h) \left[C + \ln(k_0 h) + \text{Ci}(4k_0 h) - 2\text{Ci}(2k_0 h) \right], \quad (10.57)$$

wobei $C = \ln \gamma = 0,577\,215\,664\,901\,532\,9\dots$ die Euler-Mascheronische Konstante ist, während der **Integralsinus** Si und der **Integralkosinus** Ci durch

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du \quad \text{bzw.} \quad \text{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos u}{u} du \quad (10.58)$$

gegeben sind [Weit03]. Für den Integralkosinus existiert neben (10.58) noch eine zweite – oft sehr nützliche – Darstellung:

$$\text{Ci}(x) = C + \ln x - \int_0^x \frac{1 - \cos u}{u} du. \quad (10.59)$$

$\text{Si}(x)$ und $\text{Ci}(x)$ sind in mathematischen Tafelwerken tabelliert oder können numerisch berechnet werden. Wir stellen beide Funktionen in Bild 10.11 im Bereich $0 \leq x \leq 14$ dar.

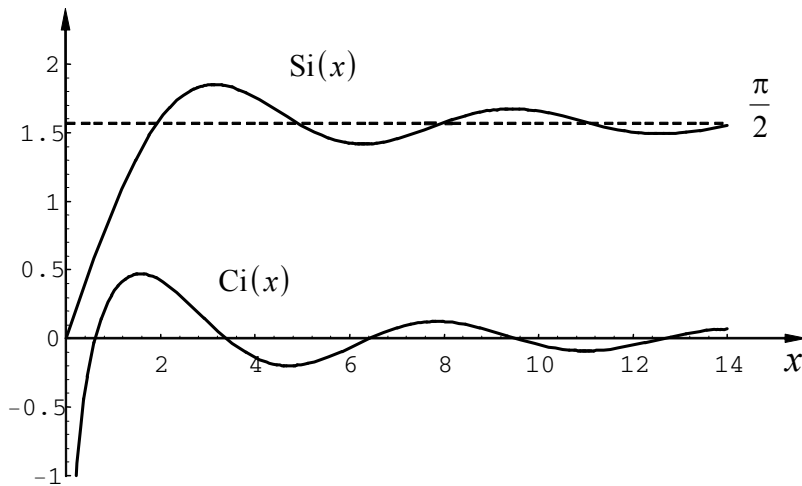


Bild 10.11 Darstellung der Integralsinus- und der Integralkosinus-Funktion

Für *große* Argumente ($x \gg 1$) gelten die aus asymptotischen Entwicklungen abgeleiteten Näherungen [Abr72]:

$$\text{Si}(x) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \quad \text{und} \quad \text{Ci}(x) \approx \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} - 2 \frac{\sin x}{x^3}. \quad (10.60)$$

Für *kleine* Argumente ($x \ll 1$) lauten die führenden Glieder einer Potenzreihenentwicklung:

$$\text{Si}(x) \approx x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} \quad \text{und} \quad \text{Ci}(x) \approx C + \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{96} - \frac{x^6}{4320}. \quad (10.61)$$

Ein Wechsel zwischen den Darstellungen (10.60) und (10.61) empfiehlt sich bei $x = 2, 4$. Die Integralsinusfunktion hat auch Anwendungen in der Nachrichtentechnik. Dort beschreibt man

mit ihr z. B. die Sprungantwort eines idealen rechteckförmigen Tiefpassfilters. Wie aus Bild 10.11 ersichtlich, zeigt sich nach einem steilen Anstieg zunächst ein deutliches Überspringen bevor der asymptotische Endwert von $\pi/2$ erreicht wird. Dabei ist der erste Überspringer der stärkste und schlägt über den Endwert um etwa 8,949 % der Sprunghöhe hinaus [Arf85]. Das Maximum des Integralsinus ist daher $\pi/2 + 0,08949 \cdot \pi \approx 1,852$. Es wird beim Argument $x = \pi$ erreicht, weil dort nach (10.58) der Integrand sein Vorzeichen wechselt. Dieses charakteristische Überspringen wird als **Gibbssches Phänomen** auch bei Fourier-Reihen beobachtet.

Die abgestrahlte Wirkleistung ist nach (10.55) also proportional dem Strahlungswiderstand R_S . Die dünne Linearantenne strahlt daher umso wirkungsvoller, je größer der Wert von R_S nach (10.57) ist. In Bild 10.12 ist R_S als Funktion von l/λ_0 mit $k_0 h = \pi l/\lambda_0$ dargestellt.

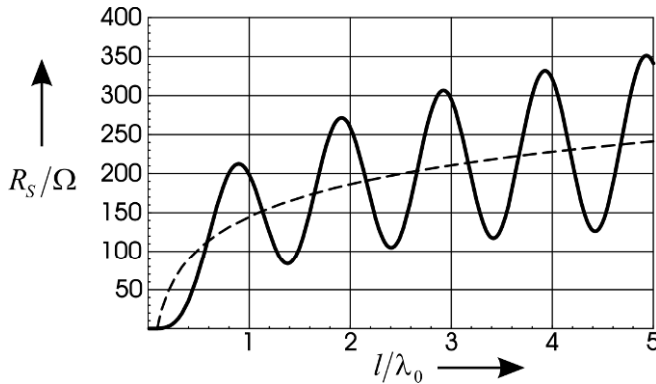


Bild 10.12 Strahlungswiderstand einer dünnen Linearantenne mit Mittelpunktspeisung nach (10.57)

Der **Strahlungswiderstand** R_S steigt mit wachsender Antennenlänge l/λ_0 zunächst monoton dann wellenförmig an. Er schwankt mit logarithmisch zunehmender Amplitude um den gestrichelten Mittelwert $60 \Omega (C + \ln(2k_0 h))$. Bei einem **kurzen Dipol** mit $k_0 h < \pi/2$ erreicht die Stromverteilung an keiner Stelle den Wert $\hat{I}$, weswegen wir hier den Strahlungswiderstand sinnvoller über $P_S = R_S |\underline{I}_{\max}|^2 / 2$ definieren wollen. Der Maximalwert der Strombelegung stellt sich bei $k_0 h < \pi/2$ im zentralen Speisepunkt bei $z' = 0$ ein. Dort gilt nach (10.10) $\underline{I}_{\max} = \underline{I}_0 = \hat{I} \sin(k_0 h)$. Den **Strahlungswiderstand eines kurzen Dipols** erhält man somit aus (10.57) nach Division durch einen Faktor $\sin^2(k_0 h)$. Seine Taylor-Entwicklung führt auf

$$R_S \approx 197,3 \Omega (l/\lambda_0)^2 \left(1 + 1,316 (l/\lambda_0)^2 + 1,701 (l/\lambda_0)^4 + \dots \right). \quad \text{(kurzer Dipol) (10.62)}$$

Man beachte, dass der Strahlungswiderstand eines kurzen Dipols für $l \rightarrow 0$ nicht in den Wert $R_S \approx 789 \Omega (l/\lambda_0)^2$ eines Hertzschen Dipols (7.10) übergeht, sondern viermal kleiner ist. Der Unterschied ist durch die jeweilige Strombelegung erklärbar, die beim kurzen Dipol sinusförmig (d. h. praktisch dreieckförmig) und beim Hertzschen Dipol konstant verläuft (**Tabelle C.1**).

Mit $n = 1, 2, 3, \dots$ liegen in Bild 10.12 die **Maxima** des Strahlungswiderstandes – und damit der abgestrahlten Leistung – etwas *vor* den Spannungsresonanzen bei $l = n \lambda_0$; während die **Minima** etwas *vor* den Stromresonanzen bei $l = (2n + 1) \lambda_0 / 2$ auftreten. Dipole in Spannungsresonanz sind bevorzugte Strahler, da sie hohe Strahlungsleistung bei geringer Frequenzabhängigkeit an den umgebenden Raum abgeben können.¹ Wenn nicht ein vertikaler Dipol-

¹ Eine breitbandige Leistungsabstrahlung muss nicht bedeuten, dass auch gleichzeitig eine breitbandige Anpassung vorliegt.

strahler der Länge l , sondern ein über der Erde im Abstand null, vertikal angebrachter Monopol der Höhe $h = l/2$ verwendet wird, ergibt sich nur die *halbe* Strahlungsleistung und die Werte für den Strahlungswiderstand R_S sind auch zu halbieren.

Übung 10.5: Antennenwirkungsgrad

- Man bestimme im Bereich $0 \leq l/\lambda_0 \leq 6$ den durch Ohmsche Verluste bedingten Antennenwirkungsgrad η_κ einer schlanken Linearantenne mit Durchmesser $d = 2a = 4$ mm bei der festen Frequenz $f = 10$ MHz. Mit $\lambda_0 = 30$ m variiert die Antennenlänge dann im Bereich $0 \leq l \leq 180$ m. Der Dipol bestehe aus Aluminium mit $\kappa = 36 \cdot 10^6$ S/m.

Lösung:

Mit $P_S = |\hat{I}|^2 R_S / 2$ drücken wir nach (10.55) die Strahlungsleistung über den Strahlungswiderstand aus und machen mit $P_V = |\hat{I}|^2 R_V / 2$ für die Verlustleistung einen analogen Ansatz. Aus (7.20) folgt dann:

$$\eta_\kappa = \frac{P_S}{P_S + P_V} = \frac{R_S}{R_S + R_V} = \frac{1}{1 + R_V/R_S}. \quad (10.63)$$

Den von ihrer Länge $k_0 h = \pi l/\lambda_0$ abhängigen Strahlungswiderstand R_S einer Dipolantenne entnehmen wir (10.57) und den Ohmschen Verlustwiderstand erhalten wir aus folgender Überlegung. Nach (4.59) kann der Hochfrequenzwiderstand von kreiszylindrischen Drähten, deren Radius mit $a \gg \delta = 1/\sqrt{\pi f \mu_0 \kappa}$ viel größer als die Eindringtiefe ist, wie folgt ausgedrückt werden:

$$R_V = \frac{a}{2\delta} R_0 = \frac{a \sqrt{\pi f \mu_0 \kappa}}{2} R_0 \quad \text{mit} \quad R_0 = \frac{l}{\kappa \pi a^2}. \quad (10.64)$$

Setzt man in (10.64) alle gegebenen Zahlenwerte ein, so erhält man:

$$R_V = \frac{l}{2a} \sqrt{\frac{f \mu_0}{\pi \kappa}} = \frac{k_0 h}{2\pi a} \sqrt{\frac{Z_0 \lambda_0}{\pi \kappa}} = 0,7955 \Omega \cdot k_0 h. \quad (10.65)$$

Die Kurve des Wirkungsgrads η_κ ist in Bild 10.13 als Funktion von l/λ_0 dargestellt.

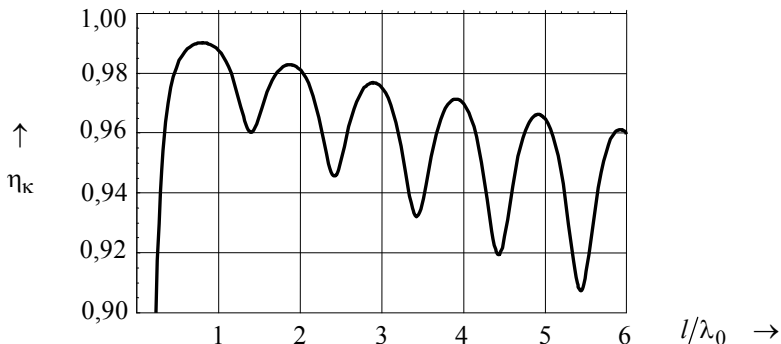


Bild 10.13 Ohmscher Wirkungsgrad (10.63) von Aluminiumdipolen bei 10 MHz für $a = 2$ mm

Der Strahlungswiderstand wächst im Mittel nur mit dem Logarithmus der Antennenlänge, während der Verlustwiderstand (bei fester Frequenz) direkt proportional der Antennenlänge ist. Darum zeigt Bild 10.13 eine im Mittel fallende Kurve. Einzelne Werte sind $\eta_\kappa(l = \lambda_0/4) = 91,5\%$, $\eta_\kappa(l = \lambda_0/2) = 98,3\%$ und $\eta_\kappa(l = \lambda_0) = 98,8\%$. $\square$

Neben der Wirkleistung P_S , die bis in das Fernfeld gelangt, existiert nur in der Nahfeldumgebung der Dipolantenne eine zusätzliche Blindleistungsschwingung Q_S . Beide kann man in üblicher Weise zu einer **komplexen Strahlungsleistung**

$$P_S + j Q_S = \frac{|\hat{I}|^2}{2} (R_S + j X_S) = \frac{|\hat{I}|^2}{2} Z_S \quad (10.66)$$

kombinieren, womit gleichzeitig auch die **Strahlungsreaktanz** X_S eingeführt ist. Zu ihrer Berechnung reicht die einfache Leitungstheorie, die wir noch erfolgreich zur Bestimmung von R_S einsetzen konnten, nicht mehr aus. Bei Berücksichtigung der Energiespeicherung im Nahfeld kann für X_S aber folgende Näherung gefunden werden [Zuh53]:

$$\frac{4\pi X_S}{Z_0} = 2 \operatorname{Si}(2 k_0 h) + \cos(2 k_0 h) [2 \operatorname{Si}(2 k_0 h) - \operatorname{Si}(4 k_0 h)] + \sin(2 k_0 h) \left[C + \ln \frac{(k_0 a)^2}{k_0 h} + \operatorname{Ci}(4 k_0 h) - 2 \operatorname{Ci}(2 k_0 h) \right]. \quad (10.67)$$

Dabei wird – wie im unmittelbaren Nahfeld nicht anders zu erwarten – der Drahtdurchmesser $d = 2a$ einen Einfluss auf den Blindwiderstand X_S haben. Für die wichtigen Resonanzlängen $l = n \lambda_0 / 2$ vereinfachen sich (10.57) und (10.67) und wir können die komplexe **Strahlungsimpedanz** wie folgt ausdrücken (mit Zahlenwerten für $n = 1, 2$ und 4 wie in Tabelle 10.4):

$$\frac{4\pi Z_S}{Z_0} = C + \ln(2n\pi) - \operatorname{Ci}(2n\pi) + j \operatorname{Si}(2n\pi) \quad \text{für } n = 1, 3, 5, \dots \quad (10.68)$$

$$\frac{4\pi Z_S}{Z_0} = 3C - \ln 2 + 3 \ln(n\pi) + \operatorname{Ci}(2n\pi) - 4 \operatorname{Ci}(n\pi) + j [4 \operatorname{Si}(n\pi) - \operatorname{Si}(2n\pi)] \quad \text{für } n = 2, 4, 6, \dots \quad (10.69)$$

Tabelle 10.4 Strahlungsimpedanz einzelner Dipole mit Mittelpunktsspeisung

	Halbwellendipol	Ganzwellendipol	Doppelwellendipol
l	$\lambda_0 / 2$	λ_0	$2 \lambda_0$
$Z_S = R_S + j X_S$	$(73,1 + j 42,5) \Omega$	$(199 + j 125) \Omega$	$(259 + j 133) \Omega$

Die Strahlungsimpedanz ist nach (10.66) das Verhältnis aus der komplexen Strahlungsleistung und dem Quadrat des Effektivwertes $I_{\text{eff}} = |\hat{I}| / \sqrt{2}$. Sie ist damit eine reine Rechengröße und kein Widerstand im eigentlichen Sinne, der physikalisch zwischen zwei bestimmten Anschlusspunkten messbar wäre. An den Eingangsklemmen einer jeden Sendeantenne lässt sich dagegen mit dem Verhältnis aus Spannung und Strom eine – im Allgemeinen komplexe – Eingangsimpedanz definieren. Diese Eingangsimpedanz ist von Bedeutung, wenn die Antenne direkt oder über eine Antennenleitung an einen Sender angeschlossen wird. Um die verfügbare Sendeleistung auszunutzen, muss die Antenne an den Wellenwiderstand der Leitung oder den Innenwiderstand des Senders möglichst gut und zwar *konjugiert komplex* angepasst werden. Aufgrund der Reziprozität gilt entsprechendes für Empfangsantennen. Die zwischen den Antennenklemmen liegende **Eingangsimpedanz** ist wegen der angenommenen Verlustfreiheit der Antenne

das Verhältnis aus der komplexen Strahlungsleistung und dem halben Betragsquadrat des Eingangsstroms:

$$\underline{Z}_E = R_E + j X_E = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} = \frac{\frac{1}{2} \underline{U}_0 \underline{I}_0^*}{\frac{1}{2} \underline{I}_0 \underline{I}_0^*} = \frac{P_S + j Q_S}{|\underline{I}_0|^2 / 2} . \quad (10.70)$$

Da der Klemmenstrom am Antenneneingang sich nach (10.10) als

$$\underline{I}_0 = \underline{I}(z' = 0) = \hat{I} \sin(k_0 h) \quad (10.71)$$

berechnen lässt, wird die Eingangsimpedanz nach der Leitungstheorie der Dipolantenne

$$\underline{Z}_E = \frac{P_S + j Q_S}{|\underline{I}_0|^2 / 2} = \underline{Z}_S \frac{|\hat{I}|^2}{|\underline{I}_0|^2} , \quad (10.72)$$

d. h. mit (10.71) erhalten wir aus (10.72):

$$\boxed{\underline{Z}_E = \frac{\underline{Z}_S}{\sin^2(k_0 h)}} . \quad (10.73)$$

Die **Eingangsimpedanz** lässt sich somit aus der Strahlungsimpedanz berechnen. Für die Stromresonanzen mit einem Strombauch im Speisepunkt und $l = (2n-1)\lambda_0/2$, d. h. $k_0 h = (2n-1)\pi/2$, stimmt der Eingangswiderstand mit dem Strahlungswiderstand überein. Insbesondere hat der schlanke Halbwellendipol nach Tabelle 10.4 eine Eingangsimpedanz von $\underline{Z}_E = \underline{Z}_S = (73,1 + j 42,5) \Omega$. Für die Spannungsresonanzen mit einem Stromknoten im Speisepunkt und $l = n\lambda_0$, d. h. $k_0 h = n\pi$, wird der Eingangswiderstand scheinbar unendlich groß. Diese Singularitäten rühren aus dem Stromansatz (10.10) der einfachen Leitungstheorie her und verschwinden für technisch reale Dipole mit *endlicher* Dicke $d > 0$ und bei Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung (Näheres findet man in [Borg55]). Der Realteil der Eingangsimpedanz $R_E = R_S / \sin^2(k_0 h)$ ist in Bild 10.14 als Funktion von l/λ_0 dargestellt.

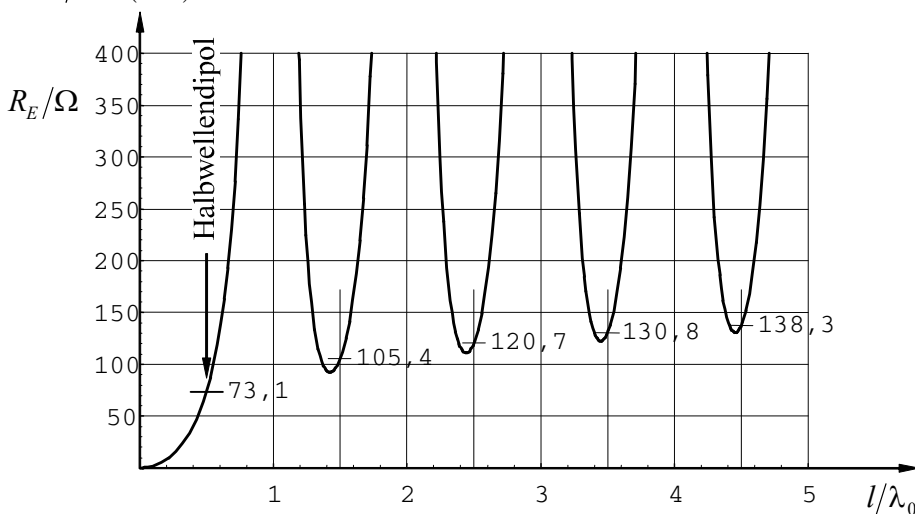
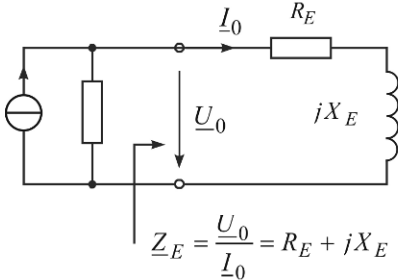


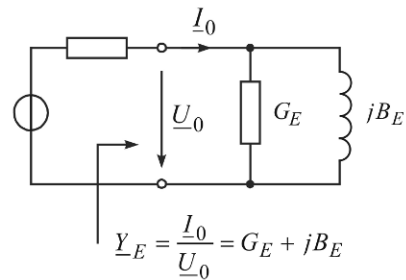
Bild 10.14 Eingangswiderstand R_E einer zentralgespeisten Dipolantenne im Speisepunkt (Fußpunkt)

Der Eingangswiderstand weist für Dipollängen $l = n\lambda_0$ **Polstellen** auf, da dann der Speisestrom $\underline{I}_0$ verschwindet. Ein Ganzwellendipol muss daher mit einer Spannungsquelle und nicht mit einer Stromquelle gespeist werden. Geeignete Ersatzschaltungen findet man in Bild 10.15. In der Praxis findet vor allem der **Halbwellendipol** mit $l = \lambda_0/2$ Verwendung, da er eine Eingangsimpedanz besitzt, die sehr nahe am Wellenwiderstand üblicher Leitungen liegt. Dadurch ist eine **Leistungsanpassung** auf einfache Weise möglich.



Halbwellendipol mit Stromspeisung

$$\underline{Z}_E = \underline{Z}_S = (73,1 + j 42,5) \Omega$$



Ganzwellendipol mit Spannungspeisung

$$\underline{Y}_E = 0 \quad \text{bei } d = 0$$

$$\underline{Y}_E \neq 0 \quad \text{bei } d > 0$$

Bild 10.15 Ersatzschaltungen für nieder- und hochohmige Speisepunkte bei Halb- und Ganzwellendipol

Die Eingangsimpedanz $\underline{Z}_E(\omega) = R_E(\omega) + jX_E(\omega)$ eines kausalen Systems ist eine analytische Funktion der Kreisfrequenz $\omega = k_0 c_0$. Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion sind bekanntermaßen durch die so genannte **Hilbert-Transformation**² miteinander verknüpft:

$$\boxed{R_E(\omega) = R_E(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_E(\eta)}{\omega - \eta} d\eta} \quad \text{und} \quad \boxed{X_E(\omega) = X_E(\infty) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_E(\eta)}{\omega - \eta} d\eta} \quad (10.74)$$

Das bedeutet aber, dass man aus dem Realteil $R_E(\omega)$ offenbar den Imaginärteil $X_E(\omega)$ bis auf eine Konstante $X_E(\infty)$ bestimmen kann. Die Umkehrung dieses Satzes gilt entsprechend. Die Integrale der Hilbert-Transformation sind als Cauchysche Hauptwerte³ zu verstehen, d. h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_E(\eta)}{\omega - \eta} d\eta = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ Y \rightarrow \infty}} \left[\int_{-Y}^{\omega - \varepsilon} \frac{R_E(\eta)}{\omega - \eta} d\eta + \int_{\omega + \varepsilon}^Y \frac{R_E(\eta)}{\omega - \eta} d\eta \right]. \quad (10.75)$$

Man kann zeigen, dass $R_E(\omega)$ eine *gerade* Funktion und $X_E(\omega)$ eine *ungerade* Funktion von ω ist und dass gilt: $X_E(\infty) = 0$. Damit kann (10.74) noch umgeformt werden:

$$\boxed{R_E(\omega) = R_E(\infty) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\eta X_E(\eta)}{\omega^2 - \eta^2} d\eta} \quad \text{und} \quad \boxed{X_E(\omega) = -\frac{2}{\pi} \omega \int_0^{\infty} \frac{R_E(\eta)}{\omega^2 - \eta^2} d\eta} \quad (10.76)$$

² David **Hilbert** (1862-1943): dt. Mathematiker (Invariantentheorie, algebraische Zahlenkörper, Integralgleichungen, euklidische Geometrie, mathematische Physik)

³ Augustin Louis Baron **Cauchy** (1789-1857): frz. Mathematiker, Ingenieur und Astronom (Infinitesimalrechnung, Theorie komplexwertiger Funktionen, Elastizitätstheorie, Optik, Himmelsmechanik)

10.2.4 Verkürzungsfaktor

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde nicht zwischen elektrischer und mechanischer Länge eines Dipolstrahlers unterschieden. Tatsächlich sind elektrische und mechanische Länge einer Antenne nur dann gleich, wenn der Antennenleiter unendlich dünn ist und die Antenne sich im freien Raum befindet. Die Phasengeschwindigkeit v_p elektromagnetischer Wellen auf einem Antennenleiter endlicher Dicke ist aber geringer als die einer Welle im freien Raum, d. h.

$$V_1 = \frac{v_p}{c_0} = \frac{f \lambda_L}{f \lambda_0} = \frac{\lambda_L}{\lambda_0} < 1. \quad (10.77)$$

Das Verhältnis V_1 gibt an, auf welchen Anteil sich die Leitungswellenlänge λ_L gegenüber der Freiraumwellenlänge λ_0 verkürzt hat. Es hat somit den Anschein, als müsse die mechanische Resonanzlänge $l_m = n \lambda_L / 2$ eines Dipols gegenüber der Freiraumresonanzlänge $l = n \lambda_0 / 2$ verkürzt werden. Mit

$$0 < V_1 = \frac{l_m}{l} < 1 \quad (10.78)$$

führt man daher den so genannten **Verkürzungsfaktor** ein, der angibt auf wie viel man die für Resonanz erforderliche mechanische Länge l_m gegenüber der gewünschten elektrischen Länge l verkürzen muss. Der Verkürzungsfaktor V_1 wird vom Verhältnis der Freiraumwellenlänge zum Durchmesser λ_0/d bestimmt.

Die Tatsache, dass die elektrisch wirksame Länge eines Dipols größer als seine mechanische Baulänge l_m ist, hat neben dem Dickeneffekt noch eine andere physikalische Ursache. Die Enden eines Dipolstrahlers werden miteinander durch elektrische Feldlinien verbunden. Als Folge des nicht vernachlässigbaren Leitungsdurchmessers stellen die Stirnflächen der Dipolenenden End- oder Dachkapazitäten dar. Dadurch entsteht eine kapazitive Endbelastung des Dipols. Am Beispiel eines Halbwellendipols soll der Effekt erläutert werden.

Eine Dipolhälfte habe die mechanische Baulänge $\lambda_L / 4 = V_1 \lambda_0 / 4$. Wegen der kapazitiven Endbelastung sinkt der Strom am Leitungsende jedoch nicht auf null ab, sondern behält einen endlichen Wert $\underline{I}(z' = \pm h_m) \neq 0$. Entsprechend der Queradmittanz $\underline{Y} = j \omega C$ wächst der Endeffekt mit zunehmender Frequenz. In Bild 10.16 ist dieser Sachverhalt am Leitungersatzbild verdeutlicht.

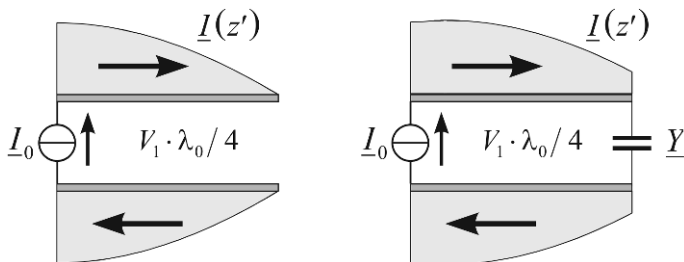


Bild 10.16 Vergleich zwischen einer leer laufenden und einer kapazitiv belasteten Leitung

Die kapazitive Endbelastung kann man sich durch ein zusätzliches leer laufendes kurzes Leitungsstück der Länge $\Delta h < \lambda_L / 4$ äquivalent ersetzt denken. Man erhält somit die in Bild 10.17 dargestellte Ersatzschaltung.

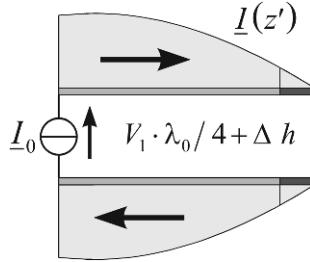


Bild 10.17 Verlängernde Wirkung Δh einer Dachkapazität, dargestellt im Leitungsersatzbild

Die scheinbare Verlängerung Δh kann mit Hilfe des Leitungsmodells berechnet werden:

$$\frac{1}{j \omega C} = -j Z_L \cot \frac{2 \pi \Delta h}{\lambda_L}, \quad (10.79)$$

wobei für die Kapazität C und den Leitungswellenwiderstand Z_L geeignete Annahmen zu treffen sind. Offenbar ist der Dipol nun länger als eine halbe Leitungswellenlänge. Seine mechanische Länge muss darum um einen Faktor $0 < V_2 < 1$ nochmals verkürzt werden. Mit $\lambda_L/4 = V_1 \lambda_0/4$ fordert man daher:

$$V_2 \frac{\lambda_L}{4} + \Delta h = \frac{\lambda_L}{4}, \quad (10.80)$$

woraus der zusätzliche Verkürzungsfaktor – unter Beachtung von (10.79) – folgt:

$$V_2 = 1 - \frac{\Delta h}{\lambda_L/4} = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan(Z_L \omega C). \quad (10.81)$$

Der **Endeffekt** wird durch den Schlankheitsgrad $s = l/d$ des Antennenleiters beeinflusst, denn eine zunehmende Drahtdicke macht sich dann auch als verstärkte kapazitive Endbelastung bemerkbar.

- Wir sprechen von einem Halbwellendipol, wenn die mechanische Baulänge $l_m = 2 h_m = V_1 V_2 \lambda_0/2 = V \lambda_0/2$ zusammen mit dem Effekt der Streukapazität C so bemessen wird, dass die elektrische Länge $l = 2 h = 2 (h_m + \Delta h) = \lambda_L/2$ beträgt.
- Die für Resonanz erforderliche mechanische Länge muss gegenüber der gewünschten elektrischen Länge verkürzt werden.
- Die Verkürzung wird umso größer je kleiner der Schlankheitsgrad $s = l/d$ des Antennenleiters ist.
- Ein dicker Strahler muss demnach bei gleicher Resonanzfrequenz kürzer sein als ein schlanker Strahler.

Für den in der Praxis besonders wichtigen Halbwellendipol mit $l = \lambda_0/2$ findet man in Bild 10.18 den **Verkürzungsfaktor** $V = l_m/l$ als Funktion des Verhältnisses λ_0/d , berechnet mit einem numerischen Simulationsprogramm [CST]. Bei dickeren Dipolen besteht eine sichtbare Abhängigkeit von der Breite g des Speisespaltes. Die unteren Kurven stellen den Gesamtverkürzungsfaktor des Ganzwellendipols mit $l = \lambda_0$ dar. Die Kurven des Ganzwellendipols liegen deutlich tiefer – bei Spannungsresonanz muss demnach stärker als bei Stromresonanz verkürzt werden. Die Kurven für den Verkürzungsfaktor V können nach [Sche52b] aus einer *strengen* Berechnung der zylindrischen Linearantenne gewonnen werden – siehe auch [Mei68].

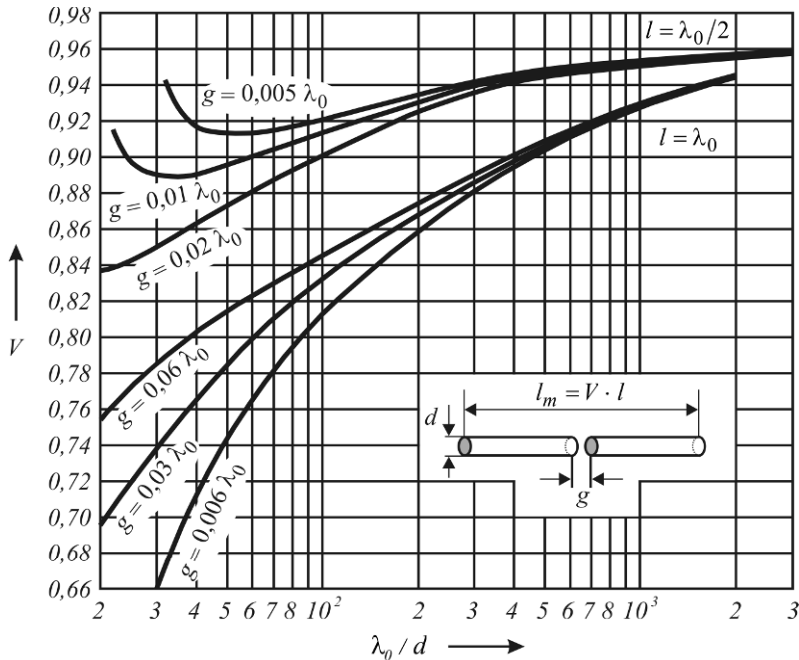


Bild 10.18 Gesamtverkürzungsfaktor $V = V_1 \cdot V_2$ bei Halb- und Ganzwellendipol berechnet mit [CST]

Es gibt noch weitere Effekte, die sich quantitativ meist nur schwer angeben lassen, aber deutlich spürbaren Einfluss auf die elektrische Länge einer Dipolantenne haben. So befindet sich die Antenne im Allgemeinen nicht im Freiraum, sondern in endlicher Entfernung von der Erdoberfläche und anderen Objekten. Insbesondere muss sie mechanisch durch Halteelemente in ihrer Lage fixiert werden. Aufwändige Berechnungen des Verkürzungsfaktors bringen daher kaum praktischen Nutzen. Man wird eher eine *experimentelle* Baulängenoptimierung anstreben.

Übung 10.6: Verkürzungsfaktor beim Halbwellendipol

- Bestimmen Sie die mechanische Baulänge l_m eines Halbwellendipols der Dicke $d = 1$ cm bei der Frequenz $f = 300$ MHz. Betrachten Sie mit $g = 0,5$ cm, $g = 1$ cm und $g = 2$ cm drei verschiedene Breiten des Speisespaltes.

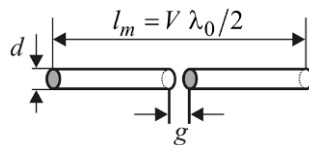


Bild 10.19 Zum Verkürzungsfaktor eines Halbwellendipols mit Speisespalt

• Lösung:

Mit $\lambda_0 = c_0/f = 100$ cm wird $\lambda_0/d = 100$. Die drei oberen Kurven in Bild 10.18 entsprechen genau den drei zu untersuchenden Spaltbreiten. Bei kleinem Speisespalt liest man $V = 0,921$ ab, bei mittlerer Spaltbreite wird $V = 0,914$ und für den größten Wert $g/\lambda_0 = 0,02$ finden wir $V = 0,901$.

Die gesuchten mechanischen Dipollängen l_m betragen somit 46,1 cm bzw. 45,7 cm und 45,1 cm. Sie sind also spürbar von der Größe des Speisespaltes abhängig. □

10.2.5 Richtfaktor und Gewinn

Zur Beschreibung der Richtwirkung einer Dipolantenne wollen wir in Ergänzung der Ausführungen in Abschnitt 7.3.2 den richtungsabhängigen Richtfaktor $D(\vartheta, \varphi)$ einführen als:

$$D(\vartheta, \varphi) = C^2(\vartheta, \varphi) D_{\max} = \frac{S_r(\vartheta, \varphi)}{\langle S_r(\vartheta, \varphi) \rangle} = 4 \pi r^2 \frac{S_r(\vartheta, \varphi)}{P_S}. \quad (10.82)$$

Dabei ist $D_{\max}$ der Richtfaktor in Hauptstrahlungsrichtung und $\langle S_r(\vartheta, \varphi) \rangle$ die mittlere Strahlungsdichte im Fernfeld bei Mittelung über die ganze Kugeloberfläche $4 \pi r^2$, was gleichzeitig auch die Strahlungsdichte eines isotropen Strahlers ist. Der Richtfaktor nach (10.82) gibt daher an, um wie viel stärker die betrachtete Antenne in einer gewissen Raumrichtung (ϑ, φ) abstrahlt als ein Kugelstrahler gleicher Strahlungsleistung P_S . Hierbei wird jeweils gleiche Polarisation zugrunde gelegt. In Übung 10.7 wollen wir den richtungsabhängigen Richtfaktor einer dünnen Linearantenne berechnen. Wir wollen einen verlustfreien Dipol voraussetzen; damit wird der Richtfaktor identisch zum **Antennengewinn**, d. h. $D = G$.

Übung 10.7: Richtwirkung in der Symmetrieebene einer Dipolantenne

- Bestimmen Sie den Richtfaktor $D(\vartheta = \pi/2)$ einer dünnen Linearantenne in Richtung ihrer Symmetrieebene $\vartheta = \pi/2$. Der Dipol habe die Länge $l = 2h$.
- **Lösung:**

Aus früheren Berechnungen (10.54) entnehmen wir die Strahlungsdichte im Fernfeld

$$S_r = \frac{Z_0 |\hat{I}|^2}{8 \pi^2 r^2} \frac{[\cos(k_0 h \cos \vartheta) - \cos(k_0 h)]^2}{\sin^2 \vartheta} \quad (10.83)$$

und die gesamte abgestrahlte Leistung (10.55)

$$P_S = \frac{1}{2} |\hat{I}|^2 R_S \quad (10.84)$$

mit dem Strahlungswiderstand R_S aus (10.57). Mit (10.82) folgt dann der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} D(\vartheta) &= 4 \pi r^2 \frac{\frac{Z_0 |\hat{I}|^2}{8 \pi^2 r^2} \frac{[\cos(k_0 h \cos \vartheta) - \cos(k_0 h)]^2}{\sin^2 \vartheta}}{\frac{1}{2} |\hat{I}|^2 R_S} = \\ &= \frac{Z_0}{\pi R_S} \frac{[\cos(k_0 h \cos \vartheta) - \cos(k_0 h)]^2}{\sin^2 \vartheta}. \end{aligned} \quad (10.85)$$

In Richtung der Symmetrieebene $\vartheta = \pi/2$ erhalten wir schließlich:

$$D(\vartheta = \pi/2) = \frac{Z_0}{\pi R_S} [1 - \cos(k_0 h)]^2 = \frac{4 Z_0}{\pi R_S} \sin^4 \frac{k_0 h}{2}. \quad \square \quad (10.86)$$

Mit $k_0 h = \pi l / \lambda_0$ ist der **Richtfaktor** (10.86) in Richtung quer zur Dipolachse – die für längere Dipole nicht mehr die Hauptstrahlungsrichtung darstellt – als Funktion der normierten Dipollänge l / λ_0 in Bild 10.20 dargestellt.

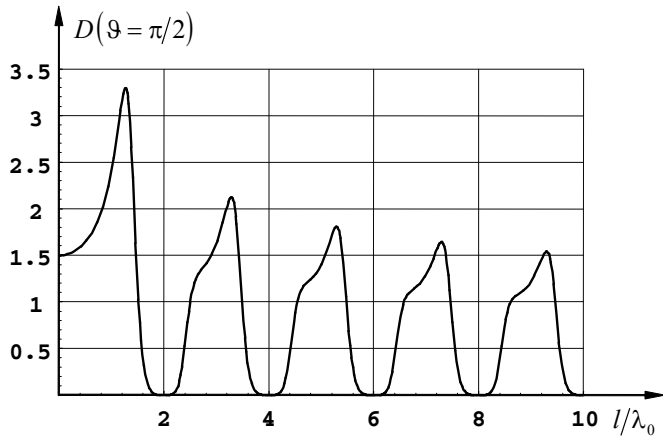


Bild 10.20 Richtfaktor (10.86) in der Äquatorebene einer zentralgespeisten Dipolantenne

Es wechseln sich monoton fallende Maxima mit Nullstellen ab. Die **Nullstellen** des Richtfaktors treten bei Antennenlängen $l = 2n\lambda_0$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$ auf und korrespondieren mit den dann gleichfalls vorhandenen Nullstellen des Richtdiagramms in der Symmetrieebene bei $\vartheta = \pi/2$ (siehe Tabelle 10.1). Für die praktisch interessierenden Dipolantennen mit Längen bis etwa $l = 4\lambda_0/3$ wird in Bild 10.21 der vordere Kurvenanteil nochmals *vergrößert* dargestellt.

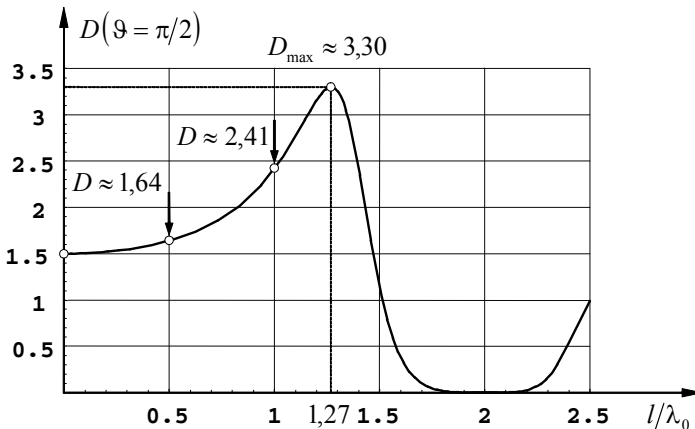


Bild 10.21 Vergrößerung von Bild 10.20 – bei $l \approx 1,27\lambda_0$ erhalten wir den Dipol mit Maximalgewinn.

Für den **Halbwellendipol** und den **Ganzwellendipol** erhält man aus Bild 10.21 die Werte:

$$D(\vartheta = \pi/2) \Big|_{l=\lambda_0/2} \approx 1,64 \quad \text{bzw.} \quad D(\vartheta = \pi/2) \Big|_{l=\lambda_0} \approx 2,41. \quad (10.87)$$

Der Gewinn des Halbwellendipols entspricht etwa dem des Hertzschen Dipols ($D = 1,5$), da sich beide nach Bild 10.4 auch kaum in ihrem Richtdiagramm unterscheiden. Den **Maximalgewinn** erhält man für $l \approx 1,27\lambda_0$ und sein Wert beträgt:

$$\boxed{D(\vartheta = \pi/2) \Big|_{l \approx 1,27\lambda_0} \approx 3,30}. \quad (10.88)$$

Bei einem typischen Verkürzungsfaktor von $V = 0,92$ muss eine Dipolantenne mit Maximalge-

winn also eine mechanische Baulänge von $l_m = V l$, d. h. $l_m \approx 0,92 \cdot 1,27 \lambda_0 \approx 1,17 \lambda_0$ aufweisen.⁴ Der Dipolstrahler mit Maximalgewinn wird auch als $5 \lambda/4$ -Dipol bezeichnet. Er wird als $5 \lambda/8$ -Monopol sowohl aufgrund seines hohen Gewinns von

$$D(\vartheta = \pi/2) \Big|_{h \approx 0,635 \lambda_0} \approx 6,60 \quad (10.89)$$

als auch seines günstigen Eingangswiderstandes von $R_E \approx 89 \Omega$ häufig verwendet. In Bild 10.22 sind die vertikalen Diagrammschnitte $C(\vartheta)$ der technisch wichtigsten Dipolformen gemeinsam dargestellt. Der Dipol hat jeweils vertikale Orientierung und liegt in der z -Achse.

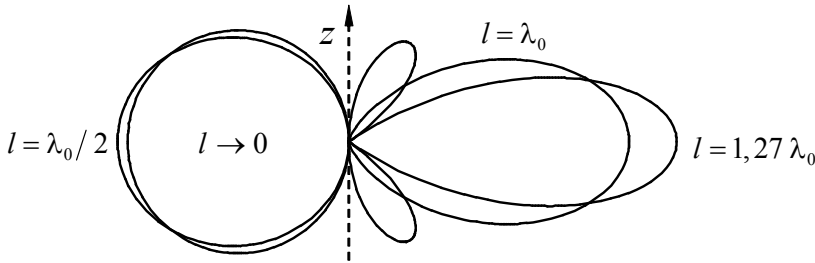


Bild 10.22 Vergleich der Vertikalschnitte von vier Dipolantennen verschiedener Länge

Im linken Diagrammteil sind der Hertzsche Dipol ($l \rightarrow 0$) und der Halbwellendipol dargestellt; rechts sieht man den Ganzwellendipol und den Dipol mit Länge $l = 1,27 \lambda_0$. Die dargestellten vier Diagramme muss man sich rotationssymmetrisch um die z -Achse vorstellen. Bis zu einer Antennenlänge von $l = \lambda_0$ haben die Diagramme noch keine Nebenkeulen. Der Dipol mit $l = 1,27 \lambda_0$ erreicht den maximal möglichen Gewinn und besitzt zwei Nebenkeulen.

Wir haben den **Gewinn** G bisher definiert als Maß für die Richtwirkung einer Antenne im Vergleich mit dem isotropen Strahler. Zuweilen ist es günstig, den Gewinn in Bezug auf den Hertzschen Dipol oder auch in Bezug auf den Halbwellendipol anzugeben. Es gelten folgende Umrechnungen (siehe Tabelle 10.5):

$$G_H = G/1,5 \quad \text{und} \quad G_D = G/1,64. \quad (10.90)$$

Tabelle 10.5 Umrechnung verschiedener Gewinnwerte

	G	$G_H = G/1,5$	$G_D = G/1,64$
Kugelstrahler	1	0,667	0,610
Hertzscher Dipol	1,5	1	0,915
Halbwellendipol	1,64	1,09	1
Ganzwellendipol	2,41	1,61	1,47
$1,27 \lambda_0$ – Dipol	3,30	2,20	2,01

Der Gewinn ist leistungsbezogen und damit eine quadratische Größe. Im Vergleich zum Hertzschen Dipol (siehe graue Felder in Tabelle 10.5) haben die Feldstärke-Diagramme in Bild 10.22 eine Hauptkeule, die beim Halbwellendipol um $\sqrt{1,09} - 1 \approx 4,56 \%$, beim Ganzwellendipol um $\sqrt{1,61} - 1 \approx 26,8 \%$ und beim Dipol mit Maximalgewinn um $\sqrt{2,20} - 1 \approx 48,3 \%$ größer ist, was man leicht nachmessen kann.

⁴ Der kreisförmige **Rahmen** mit Maximalgewinn hat nach (9.106) einen Umfang von ebenfalls $1,17 \lambda_0$.

10.3 Übungen

10.3.1 Die Richtcharakteristik eines Halbwellendipols in z-Richtung ist

$$C(\vartheta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}.$$

Berechnen Sie mit (7.31) zunächst den äquivalenten Raumwinkel Ω und daraus den Richtfaktor des Halbwellendipols. Hinweis: benutzen Sie die Substitution $u = \cos \vartheta$ und

$$\int_{u=0}^1 \frac{\cos^2(u \pi/2)}{1-u^2} du = 0,609413.$$

10.3.2 Es soll bei der Frequenz $f = 100$ MHz ein Halbwellendipol aufgebaut werden. Dazu steht ein Kupferdraht der Dicke $d = 6$ mm zur Verfügung.

Wie groß ist der Verkürzungsfaktor und welche mechanische Baulänge muss der Halbwellendipol daher haben, falls die Breite seines Speisespaltes $g = 1,5$ cm beträgt? Welchen Verkürzungsfaktor – bei gleicher Frequenz – und welche mechanische Baulänge hätte ein Ganzwellendipol, der mit $g = 1,8$ cm aus dem gleichen Draht aufgebaut wird?

10.3.3 Welche normierte Baulänge l/λ_0 muss eine endgespeiste Wanderwellenantenne mit reflexionsfreiem Abschluss aufweisen, damit ihr Strahlungsmaximum bei $\vartheta_m = \pi/8$ zu liegen kommt? Welchen Richtfaktor weist diese Antenne dann auf?

10.3.4 Zeigen Sie, dass die Nullwertbreite einer endgespeisten Wanderwellenantenne mit reflexionsfreiem Abschluss wie folgt abgeschätzt werden kann:

$$\Delta\vartheta_0 = \arccos\left(1 - \frac{1}{l/\lambda_0}\right).$$

Welche Nullwertbreite ergibt sich für die Antenne der vorherigen Aufgabe 10.3.3?

Lösungen:

10.3.1 $\Omega = 7,658$ sr und $D = 4 \pi / \Omega = 1,64$

10.3.2 $V(\lambda_0/2) = 0,948 \Rightarrow l_m = 142$ cm ; $V(\lambda_0) = 0,904 \Rightarrow l_m = 271$ cm

10.3.3 $\cos \vartheta_m = 1 - \frac{0,371}{l/\lambda_0} \Rightarrow l/\lambda_0 = 4,874$ mit $D = 11,6$

10.3.4 Mit $C(\vartheta) \hat{=} \sin \vartheta \left| \operatorname{si}[k_0 h (1 - \cos \vartheta)] \right|$ wird die Hauptkeule bei $\vartheta = 0$ von einer Nullstelle begrenzt. Diese Nullrichtung liegt auf der z-Achse und stimmt mit der Antennenachse überein. Sie wird durch das Verschwinden des Faktors $\sin \vartheta$ festgelegt. Die zweite Nullstelle, die auf der anderen Seite der Hauptkeule liegt, folgt aus dem Verschwinden der si-Funktion, also aus der Bedingung $k_0 h (1 - \cos \vartheta) = \pi$.

Bei $l/\lambda_0 = 4,874$ folgt daher $\Delta\vartheta_0 = 0,652 \hat{=} 37,4^\circ$.

11 Gruppenantennen

Der einzelne Monopol oder Dipol ist ein **Rundstrahler**, da die Strahlung in der Ebene senkrecht zur Antennenachse keine bevorzugte Richtung aufweist. Die Strahlungscharakteristik ist daher rotationssymmetrisch. Bei Punkt-zu-Punkt Verbindungen möchte man jedoch eine **Richtwirkung** erhalten, da sich hierdurch die Reichweite der Antenne bei unveränderter Energiezufuhr erheblich vergrößern lässt.

- Der Störabstand verbessert sich, da mögliche Störquellen durch die Richtcharakteristik zum Teil ausgeblendet werden.
- Der Einfluss von Reflexionen an Hindernissen und dem Erdboden kann vermieden und die Flächenüberlappung mehrerer gleichfrequenter Sender kann unterdrückt werden.
- Peilung und Ortung – z. B. in der Flugsicherung – werden ermöglicht.

Durch Kombination zweier oder mehrerer Dipole kann man mittels **Interferenz** der Feldstärken eine gewünschte Richtwirkung erzeugen. Die folgenden Betrachtungen basieren auf dem linearen **Superpositionsprinzip**, also der ungestörten Überlagerung der Strahlungsbeiträge aller Teilstrahler. Das resultierende Fernfeld ist dort maximal, wo die Felder der Einzelstrahler phasengleich schwingen. Außerhalb der Hauptstrahlungsrichtung(en) löschen sich die Felder der Einzelstrahler gegenseitig mehr oder weniger aus. Einfluss auf die Richtwirkung haben:

- ⇒ die Anzahl der Strahler,
- ⇒ die Anordnung der Strahler,
- ⇒ die Stromamplituden der einzelnen Strahler und
- ⇒ die Phasenverschiebung der Strahlerströme.

Für die Nachrichtenübertragung und die Funkortung haben sich – wie in Bild 11.1 dargestellt – unterschiedliche Formen von Gruppen aus Dipolantennen bewährt:

- **Dipolreihen, Dipolflächen und Kreisgruppen** mit Dipolen.

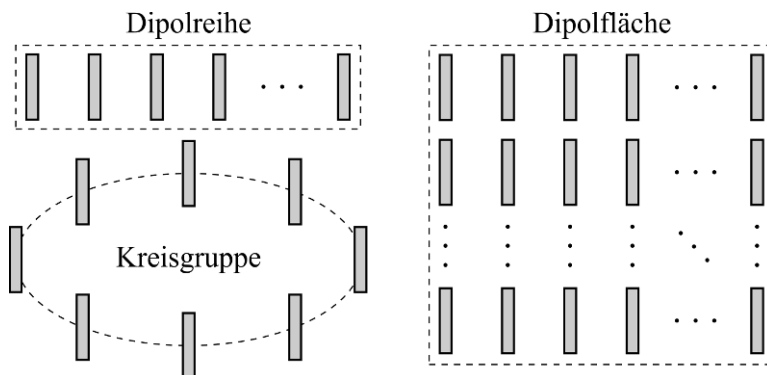


Bild 11.1 Anordnung von Einzelstrahlern zu einer Antennengruppe

In den nachfolgenden Abschnitten wird zwar das Richtverhalten anhand von Dipolanordnungen behandelt, grundsätzlich gelten diese Überlegungen aber für jede Form des Einzelstrahlers.

Wir wollen uns hier vor allem mit Strahlergruppen befassen, die aus bauartgleichen Teilantennen in gleicher räumlicher Ausrichtung bestehen. Für diese wollen wir zunächst zeigen, dass sich das Fernfeld als Produkt von zwei Faktoren schreiben lässt.

- Der eine Faktor beschreibt das Fernfeld des einzelnen Antennenelementes, die **Einzelcharakteristik** C_E .
- Der zweite Faktor – die **Gruppencharakteristik** C_{Gr} – ist unabhängig von der Art des Einzelstrahlers und beschreibt das Zusammenwirken der Strahler.

Ist die Entfernung r des Aufpunktes im Fernfeld groß gegen die räumlichen Abmessungen des Antennensystems aus mehreren Einzelstrahlern und groß gegen die Wellenlänge λ_0 , so gilt das **multiplikative Gesetz**:

Die Gesamtcharakteristik des Systems ist gleich der Charakteristik des Einzelstrahlers, multipliziert mit der Charakteristik der Gruppe:

$$\boxed{C_{\text{ges}} = C_E C_{Gr}} \quad (11.1)$$

Als Beispiel betrachten wir zwei Halbwellendipole mit ihrer Einzelcharakteristik nach (10.23), die entlang der z -Achse im Abstand von einer Wellenlänge angeordnet sind. Falls die Speiseströme beider Dipole amplituden- und phasengleich sind, kann die Gruppencharakteristik aus (11.12) und (11.28) mit $\delta = 0$ und $b = \lambda_0$ berechnet werden.

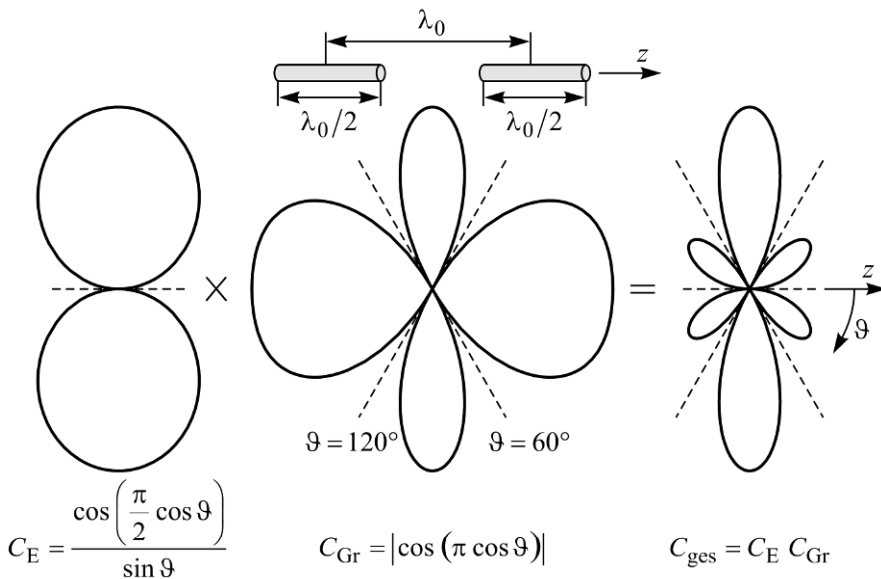


Bild 11.2 Multiplikatives Gesetz bei zwei identisch gespeisten Halbwellendipolen im Abstand von λ_0

Bei komplizierten Richtantennen kann man die Antenne in mehrere **Obergruppen** bzw. **Untergruppen** zerlegen und die einzelnen Gruppencharakteristiken bestimmen. Die Gesamtcharakteristik ist dann das Produkt aller Gruppencharakteristiken mit der des Strahlerelements:

$$\boxed{C_{\text{ges}} = C_E C_{Gr1} C_{Gr2} C_{Gr3} \cdots} \quad (11.2)$$

Dabei finden sich alle Nullstellen der einzelnen Faktoren in der Gesamtcharakteristik wieder. In dieser leichten Überschaubarkeit liegt der Hauptvorteil des multiplikativen Gesetzes.

11.1 Gruppenfaktor bei räumlicher Anordnung

Bild 11.3 zeigt eine beliebige, räumlich dreidimensionale Anordnung paralleler Dipole. Alle N Einzelstrahler sollen gleiche Strahlungscharakteristik C_E und Polarisation besitzen.

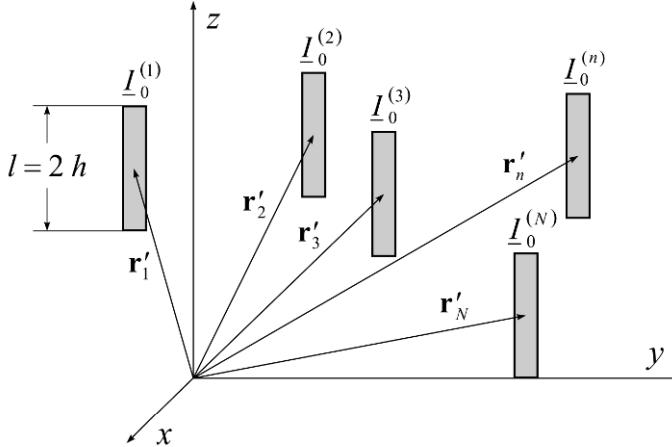


Bild 11.3 Anordnung von N baugleichen Einzelstrahlern zu einer räumlich dreidimensionalen Gruppe. Jede Einzelantenne hat mit $I_0^{(n)}$ einen unabhängigen, eigenen Speisestrom.

Die Lage der Einzelstrahler wird durch die Ortsvektoren $\mathbf{r}'_n$ mit $n=1, 2, 3, \dots, N$ gekennzeichnet und die Speiseströme der Einzelantennen werden durch ihre Phasen $I_0^{(n)} = I_0^{(n)} e^{j\delta_n}$ beschrieben. Man bezeichnet die von einem im Ursprung (für $\mathbf{r}'_n = 0$) lokalisierten Einzeldipol der Länge $l = 2h$ erzeugte Fernfeldstärke mit

$$\underline{E}_E = \mathbf{e}_\vartheta \underline{E}_E = \mathbf{e}_\vartheta j Z_0 \hat{I} \frac{e^{-j k_0 r}}{2 \pi r} \frac{\cos(k_0 h \cos \vartheta) - \cos(k_0 h)}{\sin \vartheta}. \quad (11.3)$$

Dabei ist für Dipollängen $l \neq m \cdot \lambda_0$ der Speisestrom I_0 mit dem Strommaximum $\hat{I}$ auf der Antenne in eindeutiger Weise verknüpft:

$$I_0 = \hat{I} \sin(k_0 h). \quad (11.4)$$

Deshalb kann man unter Einführung des Dipolfaktors $\underline{F}_E(\vartheta)$ eines einzelnen Strahlers auch schreiben:

$$\underline{E}_E = j Z_0 I_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{2 \pi r} \frac{\cos(k_0 h \cos \vartheta) - \cos(k_0 h)}{\sin(k_0 h) \sin \vartheta} = I_0 \underline{F}_E(\vartheta). \quad (11.5)$$

Bei einer Verschiebung um $\mathbf{r}'_n$ aus dem Koordinatenursprung heraus tritt im Fernfeld der Fraunhofersche Phasenfaktor $e^{j k_0 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'_n}$ hinzu. Bei nur einem einzigen Strahler ist diese Verschiebung für $r'_n \ll r$ bedeutungslos; betrachten wir aber die Überlagerung mehrerer Strahlerelemente nach

$$\underline{E}_\vartheta = \sum_{n=1}^N \left[I_0^{(n)} \underline{F}_E(\vartheta) e^{j k_0 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'_n} \right] = \underline{F}_E(\vartheta) \sum_{n=1}^N \left[I_0^{(n)} e^{j k_0 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'_n} \right], \quad (11.6)$$

so können wir die Gesamtfeldstärke im Fernfeld als Produkt

$$\underline{E}_g = \underline{E}_E \underline{E}_{Gr} \quad (11.7)$$

schreiben. Mit dem Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'_n &= (\mathbf{e}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \vartheta) \cdot (x'_n \mathbf{e}_x + y'_n \mathbf{e}_y + z'_n \mathbf{e}_z) = \\ &= x'_n \sin \vartheta \cos \varphi + y'_n \sin \vartheta \sin \varphi + z'_n \cos \vartheta \end{aligned} \quad (11.8)$$

erhalten wir für den **Gruppenfaktor**:

$$\underline{E}_{Gr}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=1}^N \left[I_0^{(n)} e^{j \delta_n} e^{j k_0 (x'_n \sin \vartheta \cos \varphi + y'_n \sin \vartheta \sin \varphi + z'_n \cos \vartheta)} \right], \quad (11.9)$$

der für beliebige räumliche Anordnung der Elemente gültig ist (z. B. Linie, Kreis, dreidimensional). Wir erkennen, dass die räumliche Anordnung der Gruppe und die Speiseströme die Winkelverteilung der Abstrahlung beeinflussen. Mit (11.7) haben wir das **multiplikative Gesetz** bewiesen. Zu seiner Herleitung gingen wir vom linearen *Superpositionsprinzip* bei N Elementarstrahlern aus (additives Gesetz).

Voraussetzung:

Die ungestörte Überlagerung und Interferenz der Strahlungsfelder der Teilantennen ist nur eine Näherung für die tatsächlichen Vorgänge innerhalb einer Gruppenantenne. Bislang haben wir nämlich die **Strahlungskopplung** zwischen den Teilantennen vernachlässigt; sie kann aber durch numerische Rechenverfahren durchaus noch ermittelt werden. Eventuell wäre auch eine experimentelle Nachoptimierung der Antennengruppe in Erwägung zu ziehen. Nur durch Berücksichtigung der Kopplung können z. B. so wichtige Effekte wie „*blinde Winkel*“ und „*Energiewirbel*“ bei phasengesteuerten Gruppenantennen gefunden werden [Frü75]. Für achsenparallele Dipolstrahler können die Koppelkoeffizienten in geschlossener Form angegeben werden [Zuh53]. Wir werden darauf in Abschnitt 11.5 noch näher eingehen.

11.2 Lineare Gruppen

11.2.1 Gruppencharakteristik

Die beiden wichtigsten Formen linearer Gruppenstrahler sind die **Dipolzeile** (Bild 11.4), bei der die Dipole *senkrecht* zur Standlinie (hier y -Achse) angeordnet sind,

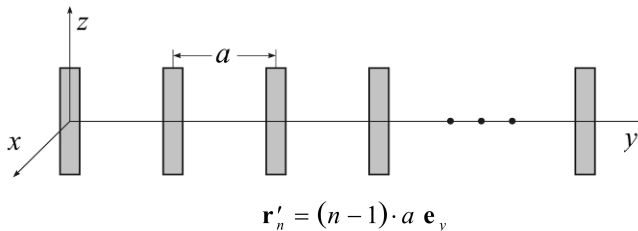


Bild 11.4 Horizontale Dipolzeile aus baugleichen, äquidistanten Einzelstrahlern

und die **Dipollinie** (Bild 11.5), bei der die Dipolachsen *innerhalb* der Standlinie liegen (hier z -Achse).

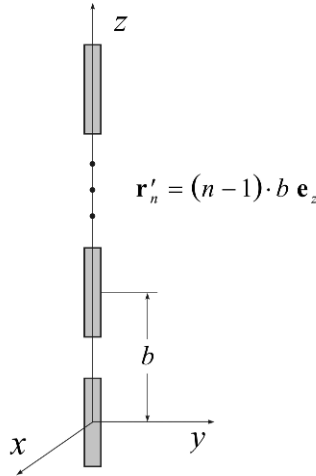


Bild 11.5 Vertikale Dipollinie aus baugleichen, äquidistanten Einzelstrahlern

Der **Gruppenfaktor** einer Dipolzeile bzw. einer Dipollinie lässt sich in *geschlossener* Form angeben, wenn gilt:

- Die Amplituden der Speiseströme sind in sämtlichen Strahlern gleich groß, d. h. $I_0^{(n)} = I_0$.
- Benachbarte Strahler haben den gleichen Abstand.
- Die Speiseströme benachbarter Strahler haben die gleiche Phasendifferenz δ gegeneinander, sodass sich die Phase von Strahler zu Strahler gleichmäßig ändert.

Sämtliche Bedingungen werden von den meisten praktisch benutzten Dipolgruppen erfüllt. Bei *äquidistanten* Dipolabständen a bzw. b zeigt Tabelle 11.1 für die Dipolzeile und die Dipollinie (dargestellt in den Bildern 11.4 und 11.5) die Ortsvektoren und Phasen der Dipolelemente.

Tabelle 11.1 Ortsvektoren und Phasen der Einzelstrahler

y - Dipolzeile	z - Dipollinie
$\mathbf{r}'_n = (n-1) a \mathbf{e}_y = y'_n \mathbf{e}_y$	$\mathbf{r}'_n = (n-1) b \mathbf{e}_z = z'_n \mathbf{e}_z$
$\delta_n = \delta_1 + (n-1) \delta$	

Damit vereinfacht sich in beiden Sonderfällen der allgemeine Ausdruck (11.9) für den Gruppenfaktor:

$$\underline{F}_{\text{Gr}}^{\text{Zeile}}(\vartheta, \varphi) = I_0 e^{j\delta_1} \sum_{n=1}^N \left[e^{j(n-1)\delta} e^{j k_0 a (n-1) \sin \vartheta \sin \varphi} \right] \quad (11.10)$$

$$\underline{F}_{\text{Gr}}^{\text{Linie}}(\vartheta, \varphi) = I_0 e^{j\delta_1} \sum_{n=1}^N \left[e^{j(n-1)\delta} e^{j k_0 b (n-1) \cos \vartheta} \right]. \quad (11.11)$$

Führt man die Abkürzung

$$u = \begin{cases} \delta + k_0 a \sin \vartheta \sin \varphi & \text{für die y-Dipolzeile} \\ \delta + k_0 b \cos \vartheta & \text{für die z-Dipollinie} \end{cases} \quad (11.12)$$

ein, dann kann man mit $\underline{I}_0 = I_0 e^{j\delta_1}$ für Zeile und Linie gleichermaßen schreiben:

$$\underline{F}_{\text{Gr}}(\vartheta, \varphi) = \underline{I}_0 \sum_{n=1}^N e^{j(n-1)u} = \underline{I}_0 \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn u} \quad (11.13)$$

Die Summe (11.13) stellt eine geometrische Reihe dar und hat die geschlossene Darstellung

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jn u} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j u} \right)^n = \frac{1 - \left(e^{j u} \right)^N}{1 - e^{j u}} \quad (11.14)$$

Damit können wir für den Gruppenfaktor (11.13) auch schreiben:

$$\underline{F}_{\text{Gr}}(\vartheta, \varphi) = \underline{I}_0 \frac{e^{j N u} - 1}{e^{j u} - 1} = \underline{I}_0 \frac{e^{j N u/2}}{e^{j u/2}} \frac{e^{j N u/2} - e^{-j N u/2}}{e^{j u/2} - e^{-j u/2}} \quad (11.15)$$

bzw.

$$\underline{F}_{\text{Gr}}(\vartheta, \varphi) = \underline{I}_0 e^{j(N-1)u/2} \frac{\sin(N u/2)}{\sin(u/2)} \quad (11.16)$$

Der auf sein Maximum normierte Ausdruck

$$0 \leq C_{\text{Gr}}(\vartheta, \varphi) = \left| \frac{\sin(N u/2)}{N \sin(u/2)} \right| = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn u} \right| \leq 1 \quad (11.17)$$

wird als **Gruppencharakteristik** der Strahlergruppe bezeichnet und entspricht der Strahlungscharakteristik einer Gruppe, die aus einzelnen Kugelstrahlern besteht. Die Gruppencharakteristik ist von der Art des Einzelstrahlers unabhängig. Die **Gesamtcharakteristik** $C_{\text{ges}}(\vartheta, \varphi)$ ist dagegen das Produkt aus Charakteristik des Einzelstrahlers und Gruppencharakteristik:

$$C_{\text{ges}}(\vartheta, \varphi) = C_{\text{E}}(\vartheta, \varphi) C_{\text{Gr}}(\vartheta, \varphi) \quad (11.18)$$

Ist das Einzelelement ein Dipolstrahler, so gilt mit der Abkürzung u nach (11.12):

$$C_{\text{ges}}(\vartheta, \varphi) \triangleq \left| \frac{\cos(k_0 h \cos \vartheta) - \cos(k_0 h)}{\sin \vartheta} \right| \left| \frac{\sin(N u/2)}{N \sin(u/2)} \right| \quad (11.19)$$

Normalerweise haben die Einzelelemente innerhalb einer Strahlergruppe keine hohe Richtwirkung. Die Richtwirkung der gesamten Gruppe wird daher überwiegend durch die Gruppencharakteristik $C_{\text{Gr}}(\vartheta, \varphi)$ bestimmt, weswegen wir uns im Weiteren nur noch mit ihr beschäftigen wollen. In Bild 11.6 ist die Gruppencharakteristik

$$C_{\text{Gr}} = \left| \frac{\sin(N u/2)}{N \sin(u/2)} \right| \quad (11.20)$$

für ungerade $N = 1, 3, 5, 7$ und für gerade $N = 2, 4, 6$ als Funktion von u dargestellt. Wegen der 2π -Periodizität der betrachteten Funktion genügt eine Darstellung im Bereich $0 \leq u \leq 2\pi$.

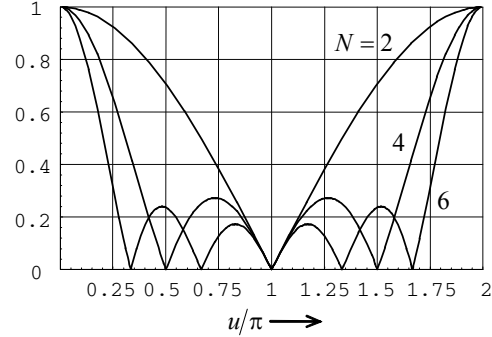
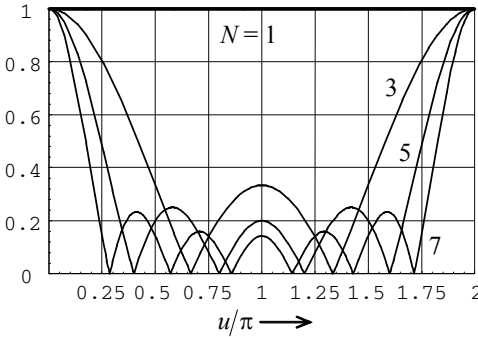


Bild 11.6 Charakteristik (11.20) einer äquidistanten Antennengruppe mit uniformer Amplitude und linearem Phasengang der Speiseströme für verschiedene Anzahl N der Teilstrahler

Die Kurven haben ihren **Maximalwert** 1 bei $u = 0$ und $u = \pm 2\pi m$. Dazwischen enthalten sie $N - 2$ allmählich kleiner werdende **Nebenmaxima**. Der Wert des ersten Nebenmaximums – also die erste Nebenkeule – liegt relativ unabhängig von der Strahleranzahl etwa bei 0,22 (d. h. ca. 13 dB unter dem Hauptmaximum). In Bild 11.7 ist die Gruppencharakteristik

$$C_{Gr}(\vartheta, \varphi) = \left| \frac{\sin(Nu/2)}{N \sin(u/2)} \right| \quad (11.21)$$

für $N = 7$ Einzelelemente in einem größeren Bereich $-3\pi \leq u \leq 3\pi$ dargestellt; die 2π -Periodizität ist gut zu erkennen. Mit der Abkürzung

$$u = \begin{cases} \delta + k_0 a \sin \vartheta \sin \varphi & \text{für die y-Dipolzeile} \\ \delta + k_0 b \cos \vartheta & \text{für die z-Dipollinie} \end{cases} \quad (11.22)$$

beschränkt sich der mögliche Wertebereich der Abszisse auf:

$$\begin{aligned} \delta - k_0 a &\leq u \leq \delta + k_0 a & \text{für die y-Dipolzeile} \\ \delta - k_0 b &\leq u \leq \delta + k_0 b & \text{für die z-Dipollinie} \end{aligned} \quad (11.23)$$

Der „**sichtbare Bereich**“ der Gruppencharakteristik ist in Bild 11.7 hervorgehoben.

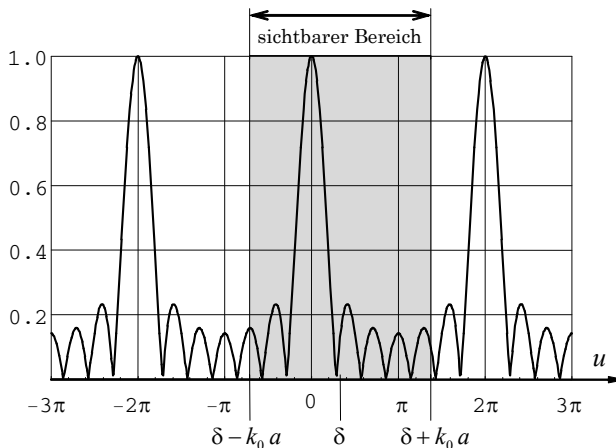


Bild 11.7 Gruppencharakteristik (11.21) für $N = 7$ Teilstrahler. Zur physikalisch sichtbaren Abstrahlung trägt wegen des Phasengangs und des Elementabstandes nur der grau unterlegte Bereich bei.

Im Falle $k_0 a \geq \pi$ können im sichtbaren Bereich – abhängig von der Phasendifferenz δ – zwei oder mehr gleich große Hauptkeulenmaxima liegen. In der Praxis ist das Auftreten weiterer Hauptkeulen meist unerwünscht; der Elementabstand a innerhalb der Gruppe darf daher nicht zu groß werden. Mit den einschränkenden Bedingungen aus Tabelle 11.2 für den Elementabstand a innerhalb der Gruppe lassen sich diese parasitären Hauptkeulen, die in der Literatur als „grating lobes“ bezeichnet werden, vermeiden.

Tabelle 11.2 Elementabstand a in Abhängigkeit vom Phasengang δ , ab dem sich mindestens eine weitere, so genannte parasitäre Hauptkeule voll ausgebildet hat

Phasendifferenz zweier benachbarter Strahlerelemente	Elementabstand für eine voll entwickelte zweite Hauptkeule
$\delta = 0$	$k_0 a = 2 \pi \Leftrightarrow a = \lambda_0$
$\delta = \pi$	$k_0 a = \pi \Leftrightarrow a = \lambda_0 / 2$
$\delta = 2 \pi$	$k_0 a = 2 \pi \Leftrightarrow a = \lambda_0$

Für $\delta = 0$ und $\delta = 2 \pi$ werden alle Teilstrahler gleichphasig erregt und es stellt sich – unabhängig vom Abstand a – konstruktive Interferenz senkrecht zur Gruppenachse ein. Zusätzlich zu dieser einen Hauptkeule wandern für $a \geq \lambda_0$ weitere Hauptkeulen in den sichtbaren Bereich der Gruppencharakteristik ein. Für $\delta = \pi$ liegt ein alternierender Phasengang vor, der bei $a = \lambda_0 / 2$ zu Längsstrahlung in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung der Gruppenachse führt, womit bereits eine zweifache Hauptstrahlungsrichtung gegeben ist.

Offensichtlich kann in Abhängigkeit vom Phasengang δ die Richtung der Hauptstrahlung beeinflusst werden. Auf diesem Prinzip basieren phasengesteuerte Gruppenantennen, bei denen sich nach (11.69) die Hauptkeule aus der Querlage um folgenden Winkel schwenken lässt:

$$\varphi_S = \arcsin \frac{\delta}{k_0 a}. \quad (11.24)$$

Will man eine um φ_S gekippte Hauptkeule erzeugen, kann man eine allgemeine Bedingung für den höchstens zulässigen Elementabstand aufstellen [Peh88]:

$$\frac{a}{\lambda_0} \leq \frac{1}{1 + |\sin \varphi_S|}. \quad (11.25)$$

Man beachte, dass beim Gleichheitszeichen die zweite Hauptkeule bereits voll ausgebildet ist. Entweder man unterdrückt sie durch die Charakteristik des Einzelelements oder man bleibt vom Grenzwert in (11.25) etwas entfernt. So wird durch folgende Bedingung erreicht, dass die letzte Nullstelle vor dem grating lobe genau auf den Rand des sichtbaren Bereichs zu liegen kommt:

$$\frac{a}{\lambda_0} = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{1}{1 + |\sin \varphi_S|}. \quad (11.26)$$

Die Bedingung (11.26) verschiebt den grating lobe aus dem sichtbaren Bereich der Gruppencharakteristik hinaus – dadurch verbessert sich auch der Gewinn der Gruppenantenne.

11.2.2 Querstrahler

Werden alle Einzelstrahler einer linearen Gruppe gleichphasig erregt ($\delta = 0$), dann sind in der Mittelsenkrechten zur Gruppenachse ihre sämtlichen Feldanteile in Phase. Ist dazu noch der Elementabstand $a < \lambda_0$, dann wird der Hauptanteil der Energie senkrecht zur Gruppenachse in einen scheibenförmigen Sektor ausgestrahlt und weitere Hauptkeulen können nicht auftreten. Man spricht daher bei einer solchen Anordnung von einem **Querstrahler**. Seine Gruppencharakteristik ist rotationssymmetrisch zur Gruppenachse. Eine gute Querabstrahlung bei kleinen Nebenkeulen und einfacher Speisung erhält man, wenn der Dipolabstand etwa $a = \lambda_0/2$ beträgt, wie wir anhand von Übung 11.1 zeigen werden.

Übung 11.1: Gruppencharakteristik einer querstrahlenden Dipolzeile

- Bestimmen Sie die Gruppencharakteristik C_{Gr} einer Gruppe aus zwei Einzelstrahlern, die entlang einer horizontalen Zeile gleichphasig gespeist werden.

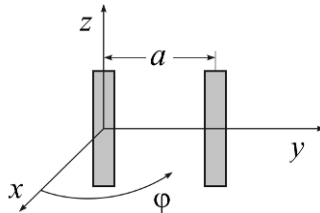


Bild 11.8 Antennengruppe aus zwei baugleichen Einzelstrahlern entlang der y-Achse (Querstrahler)

• Lösung:

Für zwei Strahlerelemente erhält man mit $N = 2$ aus der allgemeinen Darstellung der **Gruppencharakteristik** einer linearen Gruppe:

$$C_{Gr}(\vartheta, \varphi) = \left| \frac{\sin(N u/2)}{N \sin(u/2)} \right| = \left| \frac{\sin(u)}{2 \sin(u/2)} \right|. \quad (11.27)$$

Mit Hilfe des Theorems $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ folgt vereinfachend:

$$C_{Gr}(\vartheta, \varphi) = \left| \frac{2 \sin(u/2) \cos(u/2)}{2 \sin(u/2)} \right| = \left| \cos \frac{u}{2} \right|. \quad (11.28)$$

Für eine äquidistante Dipolzeile entlang der y-Achse gilt bekanntermaßen:

$$u = \delta + k_0 a \sin \vartheta \sin \varphi, \quad (11.29)$$

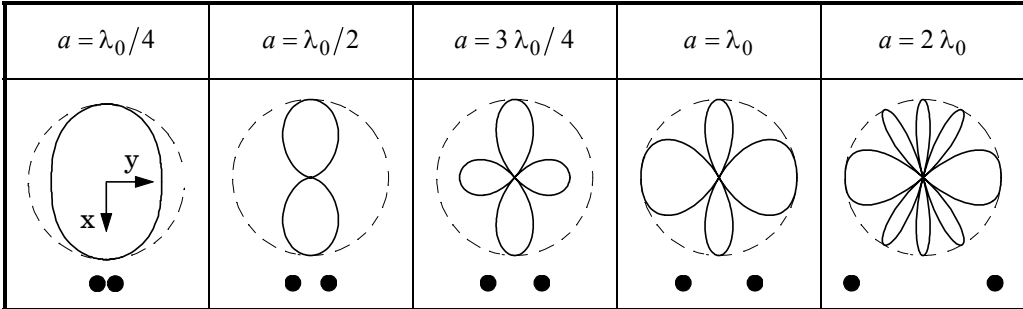
wobei für gleichphasige Anregung $\delta = 0$ gesetzt werden muss. Daraus folgt:

$$C_{Gr}(\vartheta, \varphi) = \left| \cos \left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \sin \varphi \right) \right|. \quad (11.30)$$

Das **horizontale Richtdiagramm** erhält man für $\vartheta = \pi/2$, d. h. es wird:

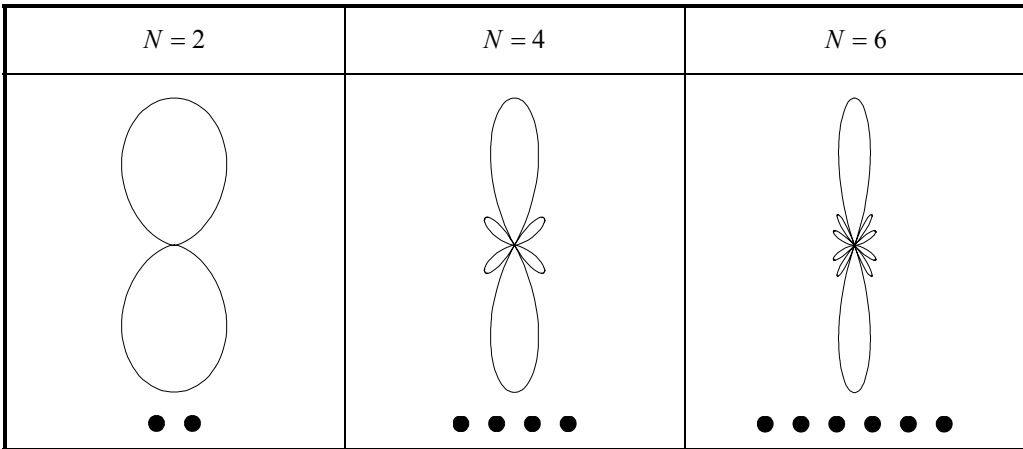
$$C_{Gr}^H(\varphi) = \left| \cos \left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \varphi \right) \right|. \quad \square \quad (11.31)$$

Tabelle 11.3 Horizontaldiagramme (11.31) einer gleichphasigen Dipolzeile mit $N = 2$ bei Variation des Elementabstands



Das Horizontaldiagramm $C_{\text{Gr}}^{\text{H}}(\varphi)$ obiger Übungsaufgabe wird in Tabelle 11.3 für verschiedene Elementabstände a grafisch dargestellt. Für $a = \lambda_0/2$ erhält man die gewünschte Charakteristik eines Querstrahlers, deren Bündelung man durch Vergrößern der Elementanzahl bei Bedarf erhöhen kann. In Tabelle 11.4 sind die Horizontaldiagramme einer gleichphasigen Dipolzeile mit $N = 2$, $N = 4$ und $N = 6$ nebeneinander dargestellt. Es wurde in allen drei Fällen ein Strahlerabstand von $a = \lambda_0/2$ vorausgesetzt.

Tabelle 11.4 Horizontaldiagramme einer gleichphasigen Dipolzeile mit $a = \lambda_0/2$ bei Variation der Strahleranzahl



Die Breite der Hauptkeule nimmt mit wachsender Zahl der Strahler ab. Die erste Diagrammnullstelle im Horizontalschnitt liegt mit $\sin(Nu/2) = 0$ allgemein bei $Nu/2 = \pi$. Mit $u = k_0 a \sin \varphi$ erhält man daraus eine Gleichung für den **Nullwertswinkel** φ_0 :

$$\sin \varphi_0 = \frac{\lambda_0}{Na}. \quad (11.32)$$

Die Hauptkeule hat dann eine **Nullwertsbreite** von:

$$\Delta \varphi_0 = 2\varphi_0 = 2 \arcsin \left(\frac{\lambda_0}{Na} \right). \quad (11.33)$$

Für $\lambda_0/(Na) \ll 1$, d. h. bei einer Zeilenlänge $L = (N-1)a$, die groß gegen die Wellenlänge ist, gilt für die Nullwertbreite mit guter Näherung:

$$\Delta\varphi_0 \approx \frac{2\lambda_0}{Na}. \quad (11.34)$$

Gilt zudem $N \gg 1$, so kann man (11.34) noch weiter vereinfachen:

$$\Delta\varphi_0 \approx \frac{N-1}{N} \frac{2\lambda_0}{(N-1)a} = \frac{N-1}{N} 2 \frac{\lambda_0}{L} \approx 2 \cdot \frac{\text{Wellenlänge}}{\text{Zeilenlänge}}. \quad (11.35)$$

Im Gradmaß ergibt sich die Näherung (vgl. (13.30) bei einer homogen belegten Apertur):

$$\Delta\varphi_0 \approx 2 \frac{\lambda_0}{L} \triangleq 114,6^\circ \cdot \frac{\lambda_0}{L}. \quad (11.36)$$

Für die Halbwertsbreite $\Delta\varphi$ fordert man bei $N \gg 1$:

$$\frac{\sin(Nu/2)}{N \sin(u/2)} \approx \frac{\sin(Nu/2)}{Nu/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (11.37)$$

Mit $\text{si}(1,391557) \approx 1/\sqrt{2}$ gilt für $u = k_0 a \sin\varphi$ näherungsweise der Zusammenhang:

$$\Delta\varphi = 2 \arcsin\left(\frac{\lambda_0}{Na} \frac{1,392}{\pi}\right) \approx 0,886 \frac{\lambda_0}{Na} \approx 0,886 \frac{\lambda_0}{L} \triangleq 50,8^\circ \cdot \frac{\lambda_0}{L}. \quad (11.38)$$

11.2.3 Längsstrahler

Macht man die Phasendifferenz zweier benachbarter Strahlerelemente gleich

$$\delta = k_0 a = 2\pi \frac{a}{\lambda_0}, \quad (11.39)$$

dann kann man in Richtung der negativen Gruppenachse gerade den Gangunterschied zum Nachelement kompensieren; dort tritt nämlich konstruktive Interferenz auf. Man nennt eine solche Anordnung Längsstrahler, da ihre Hauptstrahlungsrichtung – wie in Bild 11.9 angedeutet – mit der Gruppenachse zusammenfällt.

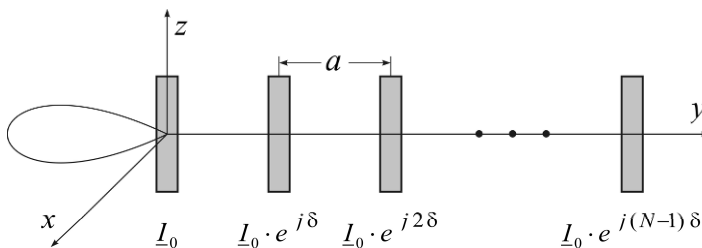


Bild 11.9 Lineare Antennengruppe aus N baugleichen Einzelstrahlern entlang der y -Achse mit linearem Phasengang

Den einfachsten Fall einer Gruppe aus zwei vertikal orientierten Dipolen, die in gegenseitigem Abstand von a entlang der y -Achse angeordnet sind, wollen wir in Übung 11.2 behandeln.

Übung 11.2: Gruppencharakteristik einer längsstrahlenden Dipolzeile

- Bestimmen Sie die Gruppencharakteristik C_{Gr} einer Gruppe aus zwei Einzelstrahlern, die entlang einer horizontalen Zeile mit Phasendifferenz $\delta = k_0 a$ gespeist werden.

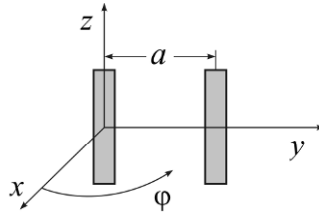


Bild 11.10 Antennengruppe aus zwei gleichen Einzelstrahlern entlang der y-Achse (Längsstrahler)

Lösung:

Für zwei Strahlerelemente erhält man mit $N = 2$ aus der allgemeinen Darstellung der **Gruppencharakteristik** einer linearen Gruppe (analog zu Übung 11.1):

$$C_{Gr}(\vartheta, \varphi) = \left| \frac{\sin(N u/2)}{N \sin(u/2)} \right| = \left| \frac{\sin(u)}{2 \sin(u/2)} \right| = \left| \cos \frac{u}{2} \right|. \quad (11.40)$$

Für eine äquidistante Dipolzeile entlang der y-Achse gilt wiederum

$$u = \delta + k_0 a \sin \vartheta \sin \varphi, \quad (11.41)$$

wobei für die Phasendifferenz jetzt $\delta = k_0 a$ gesetzt werden soll. Daraus folgt

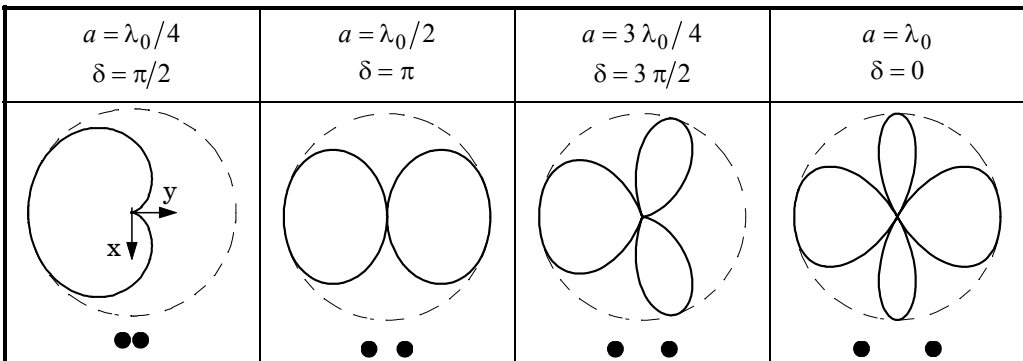
$$C_{Gr}(\vartheta, \varphi) = \left| \cos \left[\frac{k_0 a}{2} (1 + \sin \vartheta \sin \varphi) \right] \right|. \quad (11.42)$$

Das **horizontale Richtdiagramm** erhält man für $\vartheta = \pi/2$, d. h. es gilt:

$$C_{Gr}^H(\varphi) = \left| \cos \left[\frac{\pi a}{\lambda_0} (1 + \sin \varphi) \right] \right|. \quad \square \quad (11.43)$$

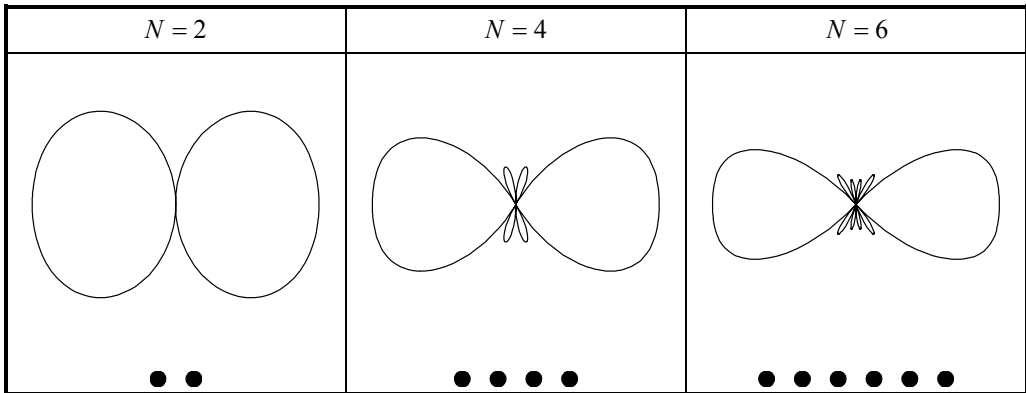
Das Horizontaldiagramm $C_{Gr}^H(\varphi)$ obiger Übungsaufgabe wird in Tabelle 11.5 für verschiedene Elementabstände a und jeweilige Phasenverschiebungen $\delta = k_0 a$ grafisch dargestellt.

Tabelle 11.5 Horizontaldiagramme (11.43) einer längsstrahlenden Dipolzeile mit $N = 2$ bei Variation des Elementabstands



In Richtung der negativen y-Achse ist stets ein Strahlungsmaximum anzutreffen. Je nach Phasenlage treten weitere Maxima – auch in Querrichtung – hinzu. Die herzförmige Charakteristik (Kardioide) für $a = \lambda_0/4$ bestrahlt überwiegend den *linken* Halbraum. Die Antennengruppe wirkt als **Reflektorstrahler**. Die näherungsweise Achter-Charakteristik für $a = \lambda_0/2$ wirkt als **Längsstrahler** entlang der Gruppenachse, dessen Bündelung man durch Vergrößern der Elementanzahl noch erhöhen kann. In Tabelle 11.6 sind die Horizontaldiagramme einer längsstrahlenden Dipolzeile mit $a = \lambda_0/2$ für $N = 2$, $N = 4$ und $N = 6$ nebeneinander dargestellt.

Tabelle 11.6 Horizontalschnitte einer längsstrahlenden Dipolzeile mit $a = \lambda_0/2$ und $\delta = \pi$ bei Variation der Strahleranzahl



Die Breite der Hauptkeule nimmt auch beim Längsstrahler mit wachsender Zahl der Elemente ab. Sie ist nicht so schmal wie beim vergleichbaren Querstrahler mit gleicher Elementanzahl, allerdings erfolgt jetzt eine Bündelung in zwei Ebenen. Die **Nullwertsbreite** und die **Halbwertsbreite** einer querstrahlenden Gruppe hatten wir in (11.33) und (11.38) berechnet; die entsprechenden Werte der längsstrahlenden Gruppe entnehmen wir z. B. [LoLe88]:

$$\Delta\varphi_0 = 2 \arccos\left(1 - \frac{\lambda_0}{N a}\right) \quad \text{und} \quad \Delta\varphi = 2 \arccos\left(1 - \frac{\lambda_0}{N a} \frac{1,392}{\pi}\right). \quad (11.44)$$

Längsstrahler können aufgrund der Phasenbedingung $\delta = k_0 a$ auf sehr einfache Weise angeregt werden. Die **Kardioidecharakteristik** im Horizontalschnitt des um $\pi/2$ phasenverschoben Strahlerpaars im gegenseitigen Abstand $a = \lambda_0/4$ erreicht man durch Speisung mit einer durchgehenden Leitung (Bild 11.11).

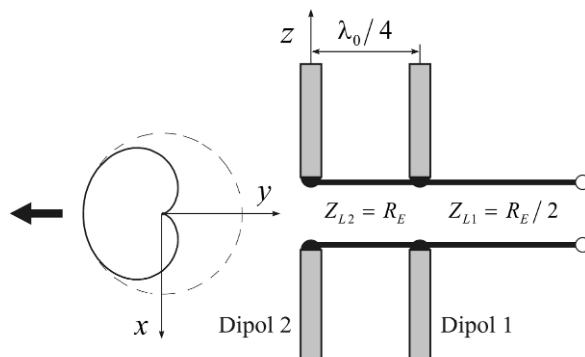


Bild 11.11 Anregung einer längsstrahlenden Gruppe mit einer durchgehenden Speiseleitung

Die Leitung 2 wirkt als Dualwandler der Länge $a = \lambda/4 + n\lambda$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ und $\lambda = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_r}$. Bild 11.12 zeigt die Ersatzschaltung.

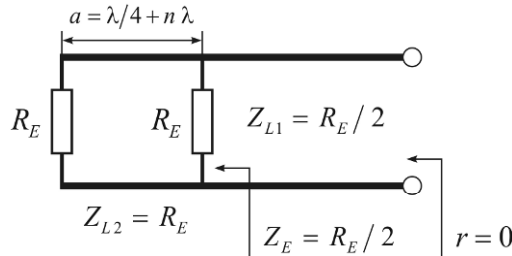


Bild 11.12 Ersatzschaltung der längsstrahlenden Gruppe aus Bild 11.11. Durch den sich ändernden Leitungswellenwiderstand der Speiseleitung wird eine reflexionsfreie Anpassung ermöglicht.

Der Eingangswiderstand am Speisepunkt des Dipols 1 beträgt

$$Z_E = \frac{1}{\frac{1}{R_E} + \frac{1}{Z_{L2}^2/R_E}} = \frac{R_E}{2}. \quad (11.45)$$

Dadurch ist mit $Z_{L1} = R_E/2 = Z_E$ eine angepasste Speisung gewährleistet. Durch die Bemessung der Leitungslänge als $a = \lambda/4 + n\lambda$ wird der Dipol 2 automatisch um 90° in der Phase nacheilend angeregt. Statt beide Dipole direkt anzuregen, braucht man nur den Dipol 1 zu speisen. Durch Strahlungskopplung wird im Dipol 2 (in der Mitte kurzgeschlossen) eine sinusförmige Stromverteilung angeregt, deren Stärke und Phase vom Abstand und der Länge des zweiten Dipols abhängen. So wirkt beispielsweise ein kurzgeschlossener, etwas verlängerter Halbwellendipol, der im Abstand von etwa $\lambda_0/4$ hinter einem gespeisten Halbwellendipol montiert wird, wie ein Reflektor. Er wirft die vom primären Dipol angeregte Welle zurück, sodass nach der anderen Seite gestrahlt wird. Die Anordnung ist in Bild 11.13 dargestellt.

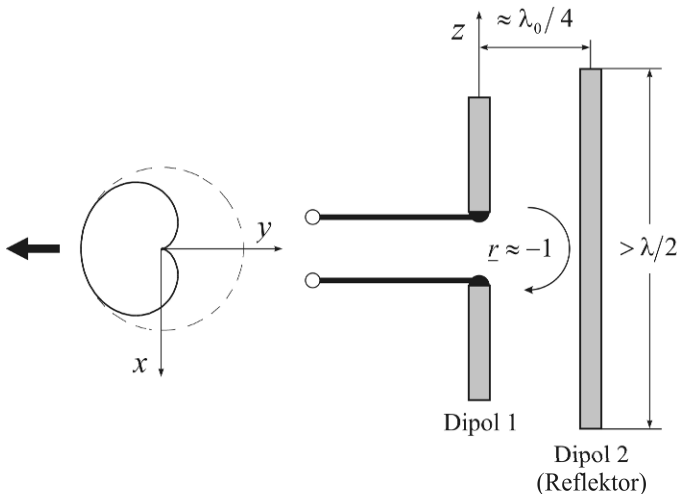


Bild 11.13 Aktiv gespeister Dipol 1, der durch Strahlungskopplung einen zweiten zum Mitschwingen anregt. Bei einem Reflexionsfaktor von -1 und einem Gangunterschied von $2 \cdot \lambda_0/4$ ergibt sich konstruktive Interferenz in Richtung der negativen y-Achse.

Eine ähnliche Wirkung erzielt man mit einem „**Strahlungsdirektor**“. Bei diesem handelt es sich um einen kurzgeschlossenen, etwas *verkürzten* Halbwellendipol, der sich etwa im Abstand $\lambda_0/3$ vor dem gespeisten Halbwellendipol befindet (Bild 11.14).

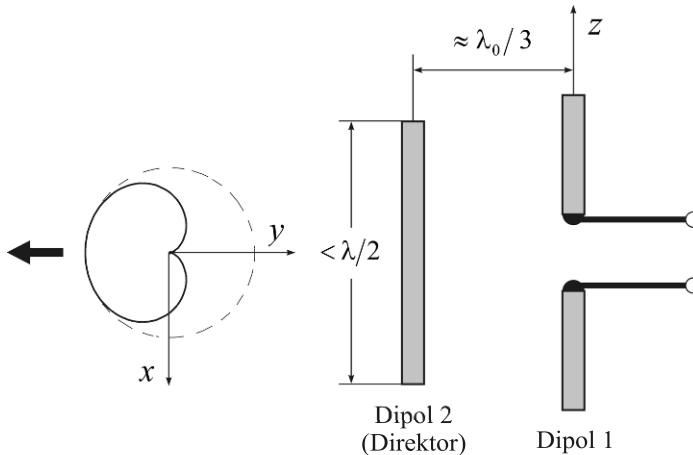


Bild 11.14 Aktiv gespeister Dipol 1, der durch Strahlungskopplung einen zweiten Dipol zum Mitschwingen anregt. Die Geometrie der Anordnung bewirkt, dass Dipol 2 die Strahlung in Richtung der negativen y-Achse zieht (dirigiert).

11.2.4 Richtfaktor linearer Gruppen

Die Gruppencharakteristik einer äquidistanten, linearen Gruppe aus N identischen Teilstrahlern mit uniformer Amplitude und linearem Phasengang ist nach (11.17):

$$C_{\text{Gr}} = \left| \frac{\sin(Nu/2)}{N \sin(u/2)} \right| = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{jnu} \right|. \quad (11.46)$$

Werden als Einzelelemente isotrope Strahler verwendet, dann folgt $C = C_{\text{Gr}}$ und wir können aus $D = 4\pi/\Omega$ mit dem äquivalenten Raumwinkel – siehe (7.31) –

$$\Omega = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} C^2(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \quad (11.47)$$

den Richtfaktor D der Strahlergruppe in ihrer Hauptstrahlungsrichtung errechnen. Somit folgt:

$$\Omega = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{1}{N^2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{jnu} \right|^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (11.48)$$

Da unsere Gruppe aus isotropen Strahlern bestehen soll, strahlen y-Zeile und z-Linie prinzipiell gleich. Wegen der einfacheren Integration entscheiden wir uns mit $u = \delta + k_0 b \cos \vartheta$ für die vom Winkel φ unabhängige z-Linie und erhalten mit $du/d\vartheta = -k_0 b \sin \vartheta$:

$$\Omega = \frac{-2\pi}{k_0 b N^2} \int_{u=\delta+k_0 b}^{\delta-k_0 b} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} e^{j n u} \right\} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j m u} \right\} du. \quad (11.49)$$

Die Reihen müssen gliedweise multipliziert werden. Da das Ergebnis Ω offensichtlich *reell* ist, müssen sich alle imaginären Beiträge wegheben und wegen $e^{j x} = \cos x + j \sin x$ wird

$$\Omega = \frac{2\pi}{k_0 b N^2} \int_{u=\delta-k_0 b}^{\delta+k_0 b} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \cos[(n-m)u] \right\} du, \quad (11.50)$$

was sehr einfach integriert werden kann:

$$\Omega = \frac{2\pi}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\sin[(n-m)(\delta+k_0 b)] - \sin[(n-m)(\delta-k_0 b)]}{(n-m)k_0 b}. \quad (11.51)$$

Mit dem Additionstheorem $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$ findet man:

$$\Omega = \frac{4\pi}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\cos[(n-m)\delta] \sin[(n-m)k_0 b]}{(n-m)k_0 b}. \quad (11.52)$$

Sämtliche Summenbeiträge mit gleicher Differenz $(n-m)$ sind identisch. Die Differenz null tritt gerade N -mal auf – hier werden alle Summanden gleich eins. Alle anderen positiven bzw. negativen Differenzen $n-m = \pm p$ mit $p = 1, 2, \dots, N-1$ kommen je $(N-p)$ -mal vor und können paarweise zusammengefasst werden:

$$\Omega = \frac{4\pi}{N^2} \left[N \cdot 1 + 2 \sum_{p=1}^{N-1} (N-p) \cos(p\delta) \frac{\sin(p k_0 b)}{p k_0 b} \right]. \quad (11.53)$$

Damit folgt schließlich der gesuchte Richtfaktor einer linearen Gruppe aus im Abstand b äquidistant angeordneten N isotropen Strahlern mit konstantem Phaseninkrement δ :

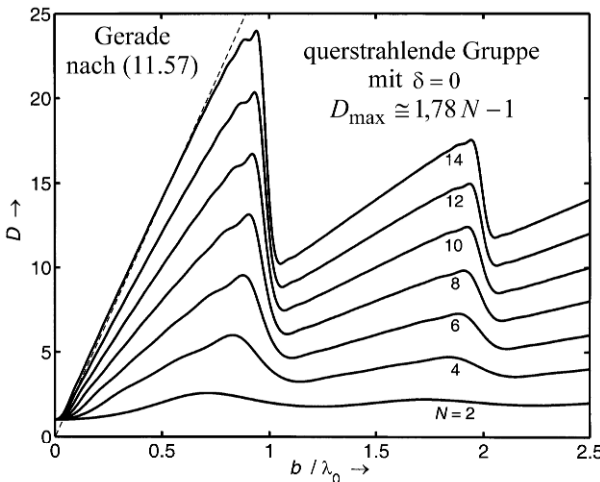
$$D = \frac{N}{1 + \frac{2}{N} \sum_{p=1}^{N-1} (N-p) \cos(p\delta) \frac{\sin(p k_0 b)}{p k_0 b}}. \quad (11.54)$$

Für $k_0 b = \pi$ – also für Elementabstände von $\lambda_0/2$ – vereinfacht sich das Ergebnis erheblich und es wird $D = N$. Für die beiden wichtigen Sonderfälle einer querstrahlenden Gruppe ($\delta = 0$) und einer längsstrahlenden Gruppe ($\delta = k_0 b$) gilt:

$$D(\delta = 0) = \frac{N}{1 + \frac{2}{N} \sum_{p=1}^{N-1} (N-p) \frac{\sin(p k_0 b)}{p k_0 b}}. \quad (11.55)$$

$$D(\delta = k_0 b) = \frac{N}{1 + \frac{2}{N} \sum_{p=1}^{N-1} (N-p) \frac{\sin(2 p k_0 b)}{2 p k_0 b}}. \quad (11.56)$$

Für identische Strahlerzahl N erreicht also der Längsstrahler denselben Richtfaktor wie der Querstrahler bereits bei halbem Elementabstand, d. h. bei halber Gruppenlänge. In Bild 11.15 ist der Richtfaktor D einer querstrahlenden Gruppe nach (11.55) als Funktion des normierten Elementabstands b/λ_0 für verschiedene Strahlerzahlen N dargestellt. Alle Kurven erreichen ihr Maximum etwa bei $b \approx \lambda_0 (1 - 0,5/N)$ und oszillieren um ihren Mittelwert N . Der praktisch lineare Anstieg unterhalb des ersten Maximums kann durch $D \approx 2N b/\lambda_0$ angenähert werden. Der steile Abfall aller Kurven bei Abständen $b = \lambda_0$ und $2\lambda_0$ wird durch das Einwandern von grating lobes in den sichtbaren Bereich der Charakteristik verursacht.



Die kleinen Welligkeiten in unmittelbarer Umgebung der Steilflanken – vor allem bei großen N – sind keine numerischen Ungenauigkeiten, sondern eine Folge des **Gibbsschen Phänomens**, das bei Fourier-Reihen stets in der Umgebung von Steilflanken auftritt [Kar98a]. Die Summe in (11.53) ist – von ihrer Form her – einer Fourier-Reihe über Sinusharmonische sehr ähnlich und unterliegt daher den gleichen Gesetzmäßigkeiten.

Bild 11.15 Richtfaktor D einer gleichphasigen, äquidistanten, linearen Gruppe aus N Kugelstrahlern

Solange noch keine grating lobes auftreten können wir anstelle von (11.55) und (11.56) eine einfache aber recht genaue lineare Näherung angeben:

$$D(\delta = 0) \approx 2N \frac{b}{\lambda_0} \quad \text{für} \quad b \leq \lambda_0 \left(1 - \frac{1}{2N}\right) \quad (\text{Querstrahler}) \quad (11.57)$$

$$D(\delta = k_0 b) \approx 4N \frac{b}{\lambda_0} \quad \text{für} \quad b \leq \frac{\lambda_0}{2} \left(1 - \frac{1}{2N}\right) \quad (\text{Längsstrahler}). \quad (11.58)$$

Der Richtfaktor längsstrahlender Gruppen kann sogar noch verbessert werden. Die Hauptkeule wird nämlich schmaler, wenn wir das Phaseninkrement $\delta = k_0 b$ ein wenig erhöhen [Bal05]:

$$\delta = k_0 b + \frac{\pi}{N}. \quad (11.59)$$

Diese Bedingung wurde bereits 1938 von **Hansen und Woodward** angegeben [Han38]. Eine Verbesserung der Richtwirkung stellt sich aber nur dann ein, wenn die Elementabstände wie

$$b = \frac{\lambda_0}{4} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \quad (11.60)$$

gewählt werden. Wenn beide Bedingungen (11.59) und (11.60) gemeinsam erfüllt werden, wird das Maximum der Hauptkeule ein kleines Stück aus dem sichtbaren Bereich der Gruppencharakteristik geschoben (Bild 11.7), wodurch die Hauptkeule zwar niedriger, aber auch schmaler wird. Der günstige Effekt kleinerer Keulenbreite überwiegt die Verschlechterung beim Maximalwert und so kann der Richtfaktor tatsächlich ansteigen [Stu98a, Bal05]:

$$D(\delta = k_0 b + \pi/N) \approx 7,3 N \frac{b}{\lambda_0} \quad \text{für} \quad b = \frac{\lambda_0}{4} (1 - 1/N). \quad (11.61)$$

Nach Einsetzen des Elementabstands erhalten wir aus (11.61)

$$D\left(\delta = \frac{\pi}{2} (1 + 1/N)\right) \approx 1,83(N-1) \quad (\text{Hansen-Woodyard}). \quad (11.62)$$

Bei gleicher Baulänge ist der Richtfaktor einer nach Hansen-Woodyard optimierten längsstrahlenden Gruppe etwa um einen Faktor 1,83 höher als beim normalen Längsstrahler (11.58). Liegt die Gruppenachse in z-Richtung, so gilt $u = \delta + k_0 b \cos \vartheta = k_0 b (1 + \cos \vartheta) + \pi/N$. Da die Hauptkeule in Richtung der negativen Gruppenachse bei $\vartheta = \pi$ liegt, muss dort $u = \pi/N$ gelten, woraus wir den Normierungsfaktor der Gruppencharakteristik ermitteln können – es gilt:

$$C_{\text{Gr}} = \left| \frac{\sin(N u/2)}{\sin(u/2)} \right| \cdot \sin \frac{\pi}{2N}. \quad (11.63)$$

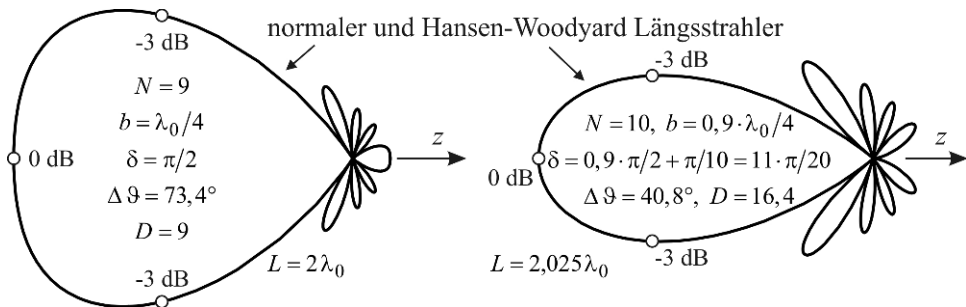
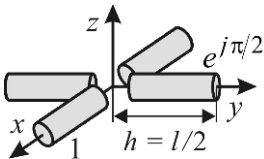


Bild 11.16 Gruppencharakteristik längsstrahlender Gruppen mit verschiedenem Phasengang

11.2.5 Kreuzdipol

Zur Erzeugung eines Kreisdiagramms in der Horizontalebene kann man zwei orthogonale Dipole verwenden, die amplitudengleich – aber mit 90° Phasenverschiebung – gespeist werden.



Die Anordnung nach Bild 11.16 wird auch als **Drehkreuzantenne** (engl. *turnstile*) bezeichnet und strahlt entlang der z-Achse mit Zirkularpolarisation, in der horizontalen Ebene mit Linearpolarisation. Die Speisung erfolgt durch eine $\lambda/4$ lange Umwegleitung.

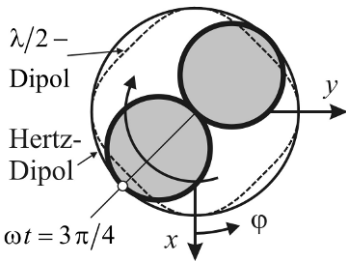
Bild 11.17 Kreuzdipol mit 90° phasenverschobener Mittelpunktspeisung (Dipollänge $l = 2h$)

Bei Verwendung zweier Hertzscher Dipole ($l \rightarrow 0$) in x- und y-Richtung hat die Drehkreuzantenne folgende elektrische Fernfeldkomponenten (y-Dipol 90° voreilend gespeist):

$$\begin{aligned} \underline{E}_\vartheta &= -Z_0 \underline{H}_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{k_0 r} \cos \vartheta (\cos \varphi + j \sin \varphi) \\ \underline{E}_\varphi &= Z_0 \underline{H}_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{k_0 r} (\sin \varphi - j \cos \varphi), \end{aligned} \quad (11.64)$$

wie aus Übung 8.5 folgt. Das Gesamtfeld wird daher:

$$\underline{\mathbf{E}} = -Z_0 \underline{\mathbf{H}}_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{k_0 r} (\mathbf{e}_\vartheta \cos \vartheta + j \mathbf{e}_\varphi) e^{j \varphi} \quad (11.65)$$



In der **Horizontalebene** (für $\vartheta = \pi/2$) strahlt der Dipol nur mit einer $\underline{E}_\varphi$ -Komponente und ist daher linear polarisiert. Es stellt sich die **Achter-Charakteristik** eines einzelnen Hertzschen Dipols ein, die nun aber mit der Zeit um die z-Achse rotiert; ein Maximum liegt bei $\varphi = \pi/2 - \omega t$:

$$C_H(\varphi, t) = |\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t| = |\sin(\varphi + \omega t)|.$$

Im **zeitlichen Mittel** erhält man ein Rundstrahlendiagramm.

Bild 11.18 Rotierendes Horizontaldiagramm einer Drehkreuzantenne aus 2 Hertzschen Dipolen

Im **Vertikalschnitt** des Gesamtfeldes – berechnet nach (8.133) –

$$C_V(\vartheta) = \sqrt{(1 + \cos^2 \vartheta)/2} \quad (\text{LHC bei } \vartheta = 0 \text{ und RHC bei } \vartheta = \pi) \quad (11.66)$$

finden wir für $(\vartheta = 0, \pi)$ die zirkular polarisierten Hauptstrahlungsrichtungen des Kreuzdipols. Ersetzt man die Hertzschen Dipole durch zwei Halbwellendipole ($l = \lambda_0/2$) – mit ein wenig mehr Richtwirkung – dann ist das Horizontaldiagramm nicht mehr ganz rotationssymmetrisch:

$$C_H(\varphi, t) = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \varphi\right)}{\sin \varphi} \cos \omega t + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \varphi\right)}{\cos \varphi} \sin \omega t \right|. \quad (11.67)$$

Die Abweichung vom Rundstrahlverhalten zeigt die gestrichelte Kurve in Bild 11.18. Es stellt sich eine Art Quadrat mit abgerundeten Ecken ein, bei dem $C_{H, \min}/C_{H, \max} \approx 0,888$ gilt.

11.2.6 Yagi-Uda-Antenne

Man kann nun zur Erhöhung der Richtwirkung sowohl Reflektor- als auch Direktordipole an einem primär erregten Dipol anbringen. Dabei benutzt man oft sogar eine ganze Reihe von **Direktoren**, bis zu 20 an der Zahl, während man sich meist auf einen **Reflektor** beschränkt und diesen zur Minderung der unerwünschten Rückstrahlung höchstens noch mit weiteren Stäben zu einer reflektierenden Wand ausbaut. Ein typisches Beispiel ist die **Yagi-Uda-Antenne**, die klassische Antenne für den Fernsehrundfunkempfang (VHF und UHF im Bereich einiger 100 MHz), deren Aufbau in Bild 11.19 dargestellt ist. Als Einzelstrahler werden Dipole mit einer Länge von etwa $\lambda/2$ verwendet. Eine Yagi-Uda-Antenne, die meist eine Längenausdehnung von einer bis zwei Wellenlängen aufweist, kann man in drei Wirkungszonen aufteilen:

- Im **Erregerzentrum**, das wesentlich die Bandbreite und den Eingangswiderstand der ganzen Antenne bestimmt, befindet sich meist ein Faltdipol, der gegenüber einem „gestreckten“ $\lambda/2$ -Dipol den Vorteil größerer Breitbandigkeit und etwa viermal höheren Eingangswiderstandes aufweist [Rot01]. An den Faltdipol wird als Speiseleitung eine Flachband-Leitung mit $Z_L \approx 240 \Omega$ angeschlossen. Zum Erregerzentrum gehört auch der Reflektor, der durch zusätzliche Stäbe zu einer reflektierenden Wand erweitert wird.
- Die **Übergangszone** besteht aus mehreren Direktoren, die zur optimalen Anpassung der Strahlung des Erregerzentrums an das folgende Wellenleitersystem dienen.

- Das aus zahlreichen Direktoren bestehende **Wellenleitersystem** bestimmt wesentlich die Strahlungscharakteristik der Antenne.

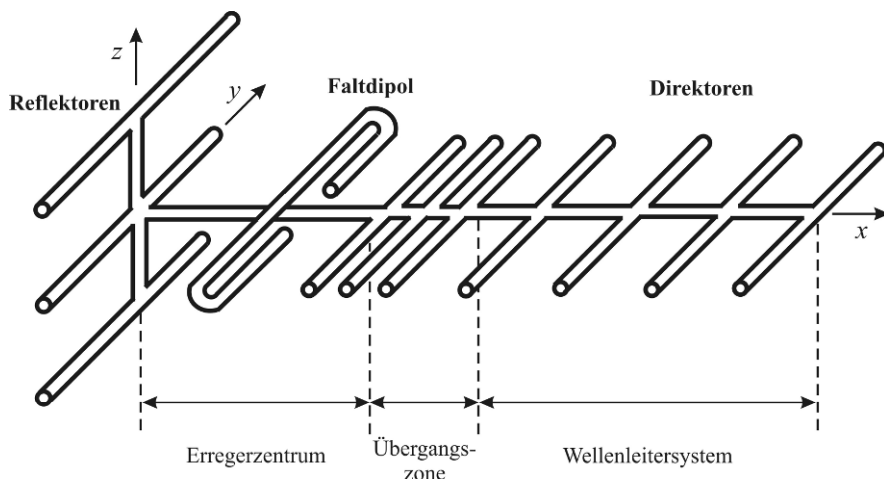
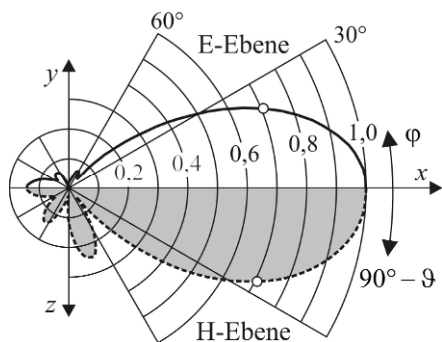


Bild 11.19 Yagi-Uda-Antenne aus einem aktiv gespeisten Faltdipol und parasitären Strahlerelementen für reflektierende und dirigierende Wirkung

Als Reflektoren werden in der Praxis meist Halbwellendipole verwendet, während man den aktiv gespeisten Dipol etwa 6 % kürzer ausführt [Hock82]. In der Direktorreihe macht man jeden Nachfolger ca. 1 % kürzer als seinen Vorgänger – die Elementabstände liegen um $0,3\lambda$. Alle Strahler sind in ihrer Mitte – also am Ort des Spannungsknotens – auf einem Trägerstab befestigt. Durch **Strahlungskopplung**, die mit zunehmendem Abstand immer schwächer wird, werden die passiven Dipole zum Mitschwingen angeregt. Weiter vom aktiven Dipol entfernte Elemente tragen somit auch weniger zur Abstrahlung bei. Der erzielbare **Gewinn** einer Yagi-Uda-Antenne ist daher beschränkt – bei Verdopplung der Antennenlänge L auf einen Wert im Bereich $0,5 \leq L/\lambda_0 \leq 7$ steigt der Gewinn nur um 2,2 dB [Rot01] und nicht um 3 dB wie in Abschnitt 11.2.4. Bild 11.20 zeigt die unlogarithmierten Diagrammschnitte einer optimierten 6-Element-Yagi-Uda-Antenne mit einem Reflektor- und vier Direktordipolen. Bei $f = 142$ MHz arbeitet die Antenne im 2-m-Band, wo sie einen Gewinn von 12,1 dBi erzielt. Die Hauptkeule ist in der E-Ebene schmäler als in der H-Ebene, was durch die Charakteristik der etwa $\lambda/2$ langen Einzelstrahler bedingt ist. Die größte Nebenkeule findet man in der H-Ebene.



$$f = 142 \text{ MHz}$$

$$g = 12,1 \text{ dBi}$$

E-Ebene	H-Ebene
SLL _E = -16,9 dB	SLL _H = -12,2 dB
$\Delta\varphi = 44,4^\circ$	$\Delta\vartheta = 51,9^\circ$

Bild 11.20 Richtdiagramme einer 6-Element-Yagi-Uda-Antenne (Länge in x-Richtung: $L = 1,26\lambda_0$) mit Angabe der Nebenkeulenniveaus und der 3-dB-Breiten in beiden Hauptschnitten

Wegen der starken Strahlungskopplung können Yagi-Uda-Antennen nicht mehr durch Superposition von Einzelstrahlern berechnet werden. Die Ergebnisse aus Bild 11.20 wurden mit einem numerischen Berechnungsverfahren, der Momentenmethode, gewonnen; siehe [Han90, Zim00].

11.2.7 Phasengesteuerte Gruppenantennen

Wir haben in den vergangenen Abschnitten dieses Kapitels gesehen, wie man bei linearen Antennengruppen die Richtung(en) der Hauptstrahlung durch geeignete Wahl der Phasenverschiebung δ benachbarter Elemente zwischen Querstrahlung und Längsstrahlung einstellen kann. In Tabelle 11.7 ist der Einfluss der Phasenverschiebung auf die Hauptstrahlungsrichtung einer Zweier-, Vierer- und Achter-Gruppe mit jeweils gleichem Elementabstand $a = \lambda_0/2$ übersichtlich dargestellt. Ist die Phasendifferenz δ durch steuerbare Phasenschieber oder durch Variation der Frequenz gezielt veränderbar, lässt sich damit die Richtcharakteristik einer Gruppenantenne auch elektronisch schwenken.

- Dabei tritt allerdings nicht nur eine Diagrammschwenkung, sondern stets auch eine Verzerrung der Haupt- und Nebenkeulen ein.
- Abhilfe kann hier eine inhomogene Amplitudenbelegung oder eine nichtäquidistante Elementanordnung schaffen, wodurch man gewisse Diagrammverzerrungen aufgrund der Phasensteuerung kompensieren kann.
- Durch Strahlungskopplung zwischen den einzelnen Strahlerelementen können im Antennen-nahfeld Energiewirbel entstehen, die blinde Winkel verursachen, d. h. Raumrichtungen, in die nicht geschwenkt werden kann.

Den Mechanismus der Strahlschwenkung wollen wir mit Bild 11.21 erläutern, in dem wir eine Gruppe aus zwei Teilantennen betrachten. Wir nehmen dabei an, dass die aufgrund der Phasenverschiebung δ sich einstellende Hauptstrahlungsrichtung durch φ_S gegeben sei.

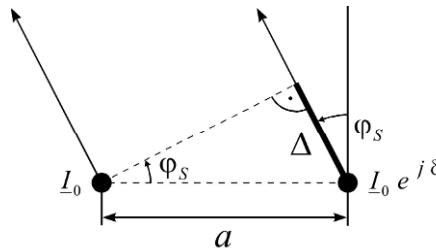


Bild 11.21 Schwenkwinkel φ_S einer Zweiergruppe in Abhängigkeit vom Phasengang δ

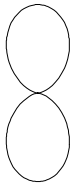
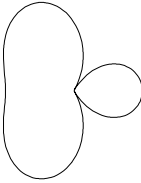
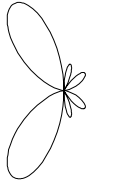
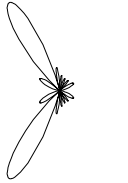
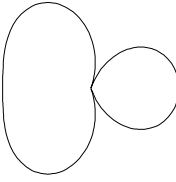
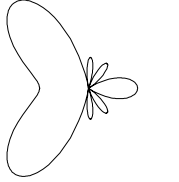
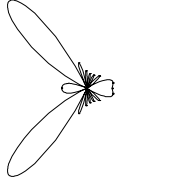
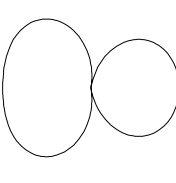
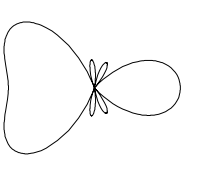
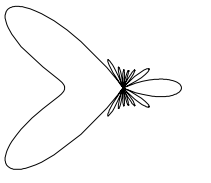
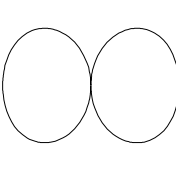
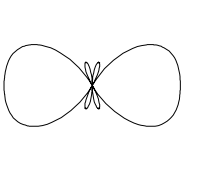
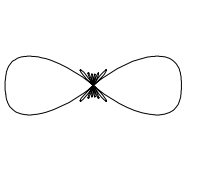
Aufgrund der um δ phasenverschobenen Anregung ergibt sich in Hauptstrahlungsrichtung φ_S ein Gangunterschied

$$\Delta = a \sin \varphi_S. \quad (11.68)$$

Dieser Gangunterschied Δ bewirkt für die rechte Antenne eine nachteilende Phasenverschiebung $k_0 \Delta$, die gerade durch eine mit δ phasenvoreilende Speisung kompensiert werden muss, um in Richtung φ_S tatsächlich konstruktive Interferenz zu erzwingen, wie es in Hauptstrahlungsrichtung sein muss. Der sich einstellende Schwenkwinkel ist somit wegen der Forderung $\delta = k_0 \Delta = k_0 a \sin \varphi_S$ gegeben durch:

$$\boxed{\varphi_S = \arcsin \frac{\delta}{k_0 a}}. \quad (11.69)$$

Tabelle 11.7 Horizontaldiagramme einer Dipolzeile mit Elementabstand $a = \lambda_0/2$ bei Variation der Strahleranzahl N und des Phasengangs δ

	$N = 2$ ● ●	$N = 4$ ● ● ● ●	$N = 8$ ● ● ● ● ● ● ● ●
$\delta = 0$			
$\delta = \pi/3 \hat{=} 60^\circ$			
$\delta = \pi/2 \hat{=} 90^\circ$			
$\delta = 2 \cdot \pi/3 \hat{=} 120^\circ$			
$\delta = 5 \cdot \pi/6 \hat{=} 150^\circ$			
$\delta = \pi \hat{=} 180^\circ$			

Für $\delta=0$ erhält man nach (11.69) einen *Querstrahler*, während für $\delta=\pm k_0 a$ sich ein Schwenkwinkel von $\pm 90^\circ$ und damit *Längsstrahlung* einstellt. Der Übergang zwischen diesen beiden Extremen erfolgt bei kleinen Schwenkwinkeln φ_S zunächst fließend, weshalb man dort tatsächlich von einer **Keulenschwenkung** reden kann. Bei größeren Schwenkwinkeln kollabiert allerdings das Diagramm, damit sich die Keulen in Längsrichtung bilden können. In Tabelle 11.7 wurde ein Elementabstand von $a=\lambda_0/2$ angenommen, woraus $\varphi_S = \arcsin(\delta/\pi)$ folgt. Im Bereich $|\delta| \leq \pi/2$ kann man näherungsweise von einem linearen Zusammenhang $\varphi_S \approx \delta/\pi \approx \delta/3$ ausgehen, wobei δ und φ_S jeweils beide im Bogenmaß oder beide im Gradmaß einzusetzen sind. In Bild 11.22 ist der Zusammenhang (11.69) zwischen Phasenverschiebung δ und Schwenkwinkel φ_S im sinnvollen Wertebereich $-1 \leq \delta/(k_0 a) \leq 1$ aufgetragen.

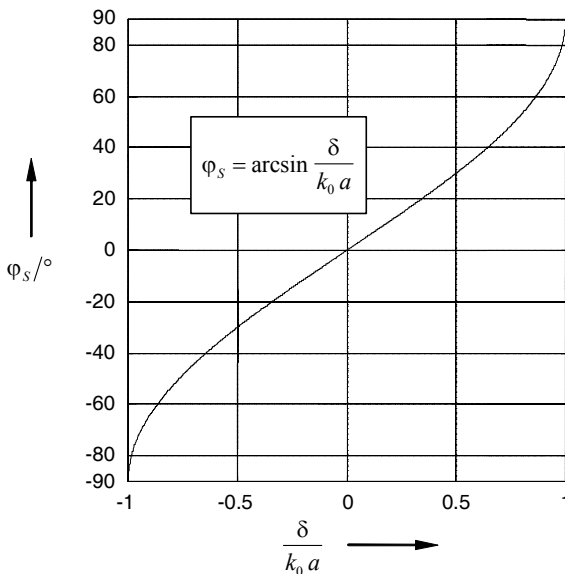


Bild 11.22 Schwenkwinkel φ_S in Abhängigkeit vom normierten Phasengang nach (11.69). Im Bereich $|\delta/(k_0 a)| < 0.5$ verläuft die Kurve näherungsweise linear.

Von „phasengesteuerten Gruppenantennen“ (**phased array antennas**), die heute durch kleiner gewordene Funktionsbausteine realisierbar sind, erwartet man wegen der hohen Strahlschwenkgeschwindigkeit wesentliche Fortschritte gegenüber mechanisch träge geführten Systemen. Eine Hauptanwendung liegt vor allem in der **Radartechnik** bei der Suche und gleichzeitigen Verfolgung eines oder mehrerer Radarziele. Phased-Array-Antennen haben aufgrund ihrer technischen Komplexität allerdings hohe Systemkosten zur Folge. Die erweiterten Möglichkeiten können nur mit einer aufwändigen rechnergestützten Signalverarbeitung hinter der Antenne genutzt werden.

11.2.8 Inhomogene Amplitudenbelegung

Wir haben bislang die grundsätzliche Berechnung und die Möglichkeit der elektrischen Schwenkung der Strahlungsrichtung einer Antennengruppe betrachtet. Mit Hilfe eines **linearen Phasengangs** $\delta_n = \delta_1 + (n-1)\delta$ konnte die Hauptstrahlrichtung in gewissen Grenzen ohne allzu große Keulendeformation geschwenkt werden. Es bieten sich aber noch weitere Freiheitsgrade zur **Diagrammsynthese** an:

In Tabelle 11.7 ist erkennbar, dass die Schwenkung einer Richtcharakteristik stets mit der Verbreiterung ihrer Hauptkeule verbunden ist. Für nicht allzu große Schwenkwinkel φ_S , kann die **Halbwertsbreite** durch eine Modifikation von (11.38) gewonnen werden [Rud86]:

$$\Delta\varphi \approx \frac{0,886 \lambda_0}{N a \cos \varphi_S} \quad (11.70)$$

Diese Beziehung setzt ebenso wie (11.38) eine Elementanzahl $N \gg 1$ sowie uniforme Amplitudenbelegung voraus. Bei sich aufweitender Hauptkeule sinkt nach (7.38) der **Gewinn**, der sich dann etwa wie $D(\varphi_S) \approx D(\varphi_S=0) \cos \varphi_S$ verhält.

- Einstellung der *Amplituden* der Speiseströme und
- ungleichmäßige *Elementabstände*.

Wir wollen hier einen konstanten Elementabstand voraussetzen und betrachten nur eine **inhomogene Amplitudenbelegung**. Nach früheren Überlegungen in diesem Kapitel erhalten wir für den Gruppenfaktor einer linearen Gruppe aus N Elementen:

$$\underline{F}_{\text{Gr}}(\vartheta, \varphi) = e^{j\delta_1} \sum_{n=1}^N \left[I_0^{(n)} e^{j(n-1)u} \right] \quad (11.71)$$

mit der Abkürzung:

$$u = \begin{cases} \delta + k_0 a \sin \vartheta \sin \varphi & \text{für die y-Dipolzeile} \\ \delta + k_0 b \cos \vartheta & \text{für die z-Dipollinie.} \end{cases} \quad (11.72)$$

Mit $\underline{Z} = e^{ju}$ ergibt sich die noch nicht auf ihr Maximum normierte Gruppencharakteristik:

$$C_{\text{Gr}}(\vartheta, \varphi) = \left| \sum_{n=1}^N \left[I_0^{(n)} \underline{Z}^{n-1} \right] \right|. \quad (11.73)$$

Betrachtet man keine Gruppe aus N Elementen, sondern eine aus $N+1$ und ändert dann die Nummerierung der Elemente wie in Bild 11.23, so erhält man eine Darstellung in Form des so genannten **Gruppenpolynoms** [Sche52b, Sil49]:

$$C_{\text{Gr}}(\vartheta, \varphi) = \left| \sum_{n=0}^N \left[I_0^{(n)} \underline{Z}^n \right] \right|. \quad (11.74)$$

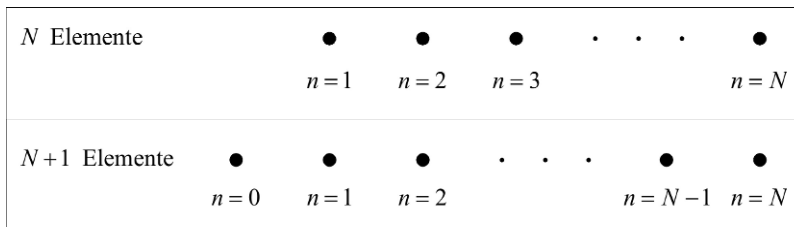


Bild 11.23 Nummerierung der Elemente einer äquidistanten, linearen Antennengruppe zur Herleitung des Gruppenpolynoms (11.74)

Die Koeffizienten des Polynoms sind die Speiseströme $I_0^{(n)}$ der einzelnen Strahlerelemente. Ein Polynom N -ten Grades hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau N Nullstellen, womit auch stets folgende Darstellung möglich ist:

$$C_{\text{Gr}}(\vartheta, \varphi) = \left| I_0^{(N)} (\underline{Z} - \underline{Z}_1)(\underline{Z} - \underline{Z}_2) \cdots (\underline{Z} - \underline{Z}_N) \right|. \quad (11.75)$$

Man interpretiert die Darstellung wie folgt:

- Jeder Faktor $(\underline{Z} - \underline{Z}_i)$ kann als Teilcharakteristik einer Zweiergruppe gedeutet werden.
- Die Gesamtcharakteristik einer Gruppe aus $N+1$ Elementen ergibt sich nach dem multiplikativen Gesetz aus N Faktoren.
- Die Diagrammnullstellen werden durch die Polynomnullstellen $\underline{Z}_i = e^{ju_i}$ bestimmt mit $i = 1, 2, \dots, N$.

Es ergibt sich folgender einfacher **Sonderfall**:

Alle Polynomnullstellen sind identisch und gleich -1 :

$$\underline{Z}_i = e^{ju_i} = -1, \quad (11.76)$$

d. h. $u_i = \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$ Bei einer dergestalt minimierten Anzahl von Nullstellen kann es daher nur eine Hauptkeule geben und keine Nebenkeulen. Für die y-Dipolzeile mit $u = \delta + k_0 a \sin \vartheta \sin \varphi$ erhält man bei gleichphasiger Belegung mit $\delta = 0$ und identischen Elementabständen $a = \lambda_0/2$ im Horizontalschnitt bei $\vartheta = \pi/2$ dann die Diagrammnullstellen aus folgender Beziehung:

$$u = \delta + k_0 a \sin \vartheta \sin \varphi = \pi \sin \varphi = \pm \pi, \quad (11.77)$$

d. h. es gibt genau zwei Nullstellen bei $\varphi = \pm \pi/2$. Wir haben es damit offenbar mit einem Querstrahler zu tun, was wegen der homogenen Phasenbelegung auch zu erwarten war. Das Gruppenpolynom nimmt für diese Nullstellenverteilung schließlich folgende Form an:

$$C_{Gr}(\vartheta, \varphi) = \left| I_0^{(N)} (\underline{Z} + 1)^N \right|. \quad (11.78)$$

Wir können mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes die Potenz entwickeln:

$$C_{Gr}(\vartheta, \varphi) = \left| I_0^{(N)} \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \underline{Z}^n \right|. \quad (11.79)$$

Die Binomialkoeffizienten können mit Hilfe dreier Fakultäten berechnet werden:

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}. \quad (11.80)$$

Dabei setzen wir $0! = 1! = 1$ und es gilt die Rekursionsbeziehung $(n+1)! = (n+1)n!$. Die Binomialkoeffizienten kann man – wie in Tabelle 11.8 – im **Pascalschen Dreieck**¹ anordnen.

Mit (11.79) haben wir die Binomialbelegung gefunden, deren Speiseamplituden zu beiden Rändern der linearen Antennengruppe jeweils kleiner werden.

Im uniformen Grenzfall, wenn alle Speiseströme identisch sind, gilt im Gegensatz zu (11.79):

$$C_{Gr}(\vartheta, \varphi) = \left| I_0^{(N)} \sum_{n=0}^N \underline{Z}^n \right| = \left| I_0^{(N)} (1 + \underline{Z} + \underline{Z}^2 + \dots + \underline{Z}^N) \right|. \quad (11.81)$$

¹ Blaise **Pascal** (1623-1662): frz. Philosoph, Mathematiker und Physiker (Kegelschnitte, Rechenmaschine, Barometer, Druck, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Geometrie)

Tabelle 11.8 Binomialkoeffizienten (11.80) im Pascalschen Dreieck

N	$n = 0, 1, \dots, N$						
0	1						
1	1			1			
2	1		2		1		
3	1		3		1		
4	1		4		1		
5	1		5		1		
6	1		6		1		
7	1		7		1		

- Die **uniforme** Amplituden- und Phasenbelegung (11.81) liefert zwar die schmalste Hauptkeule, die Nebenmaxima sind aber recht hoch (für große N ca. 13,26 dB unter dem Hauptmaximum).
- Werden die Amplituden der Speiseströme entsprechend den **Binomialkoeffizienten** wie in (11.80) gewählt und die Phase uniform, dann ist die Hauptkeule breiter, es treten aber für $a = \lambda_0/2$ keine Nebenmaxima auf.
- Als Kompromiss bezüglich Breite der Hauptkeule bei maximal zulässiger Höhe der Nebenmaxima stellt die **Tschebyscheff-Belegung** [Col69] eine optimale Wahl dar (Tabelle 11.9):

Für eine äquidistante Dipolzeile mit fünf Elementen entlang der y-Achse ($N=4$) und $a = \lambda_0/2$ sind – bei Normierung auf die *Randstrahler* – die Amplituden der Speiseströme bei uniformer Phase in allen genannten Fällen in Tabelle 11.9 dargestellt.

Tabelle 11.9 Speisestromamplituden in einer linearen, äquidistanten, gleichphasigen Fünfergruppe

	$I_0^{(0)}$	$I_0^{(1)}$	$I_0^{(2)}$	$I_0^{(3)}$	$I_0^{(4)}$
uniform	1	1	1	1	1
Tschebyscheff mit Nebenkeulen bei -20 dB	1	1,61	1,93	1,61	1
Tschebyscheff mit Nebenkeulen bei -30 dB	1	2,41	3,14	2,41	1
binomial	1	4	6	4	1

Die Horizontaldiagramme der Gruppencharakteristik einer y-Dipolzeile aus 5 phasengleichen Einzelstrahlern mit uniformer, binomialer und Tschebyscheff-Belegung wurden mit den Amplituden der Speiseströme aus Tabelle 11.9 berechnet und sind in Tabelle 11.10 im linearen Maßstab als Polardiagramme in der x-y-Ebene über dem Winkel φ aufgetragen. Es wurde jeweils ein Elementabstand von $a = \lambda_0/2$ angenommen, d. h. die **Gruppencharakteristik** lautet

$$C_{\text{Gr}}^{\text{H}}(\varphi) = \left| \sum_{n=0}^4 \left[I_0^{(n)} e^{j n \pi \sin \varphi} \right] \right|. \quad (11.82)$$

Zum einfacheren Vergleich der Belegungen wurden in den Darstellungen die Amplituden jeweils auf den Zentralstrahler normiert. Die unterschiedliche Richtwirkung ist durch die angegebenen Halbwertsbreiten $\Delta\varphi$ erkennbar. Man folgert aus Tabelle 11.10:

- Die uniforme Belegung liefert die schmalste Hauptkeule – aber auch die höchsten Nebenkeulen.
- Die beste Bündelung in Hauptstrahlungsrichtung für ein vorgeschriebenes maximales Nebenkeulenniveau (z. B. 20 dB oder 30 dB unter der Hauptkeule) liefert die Tschebyscheff-Belegung.
- Die Tschebyscheff-Belegung mit verschwindenden Nebenkeulen ist identisch zur Binomialbelegung.

Eine **Amplitudentaperung** mit – in Richtung der äußeren Gruppenelemente – kleiner werdenden Speiseströmen bewirkt also eine Reduktion der Nebenkeulen und eine Verbreiterung der Hauptkeule. Wenn die Ströme zum Rand hin ansteigen, tritt gerade das Gegenteil ein. Falls die jeweils höchsten Speiseströme gleich sind, ist die abgestrahlte **Leistung** bei getaperter Strombelegung geringer als bei uniformer Strombelegung. Jedoch mit einem angepassten Verteilnetzwerk, welches dem stärksten Strahler einen entsprechend höherer Quellstrom zuführt, würde jede Antennengruppe – ob nun getapert oder uniform – die gleiche Leistung abstrahlen.

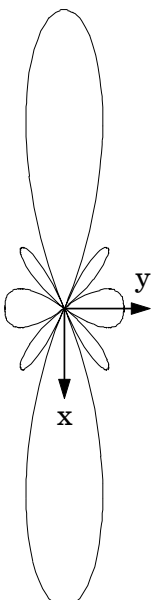
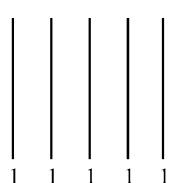
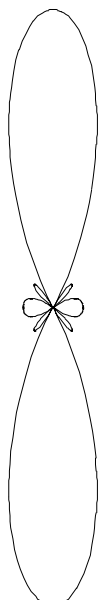
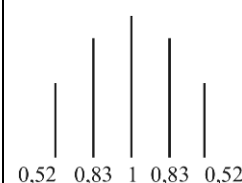
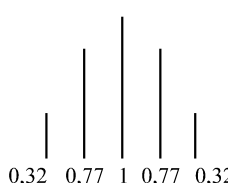
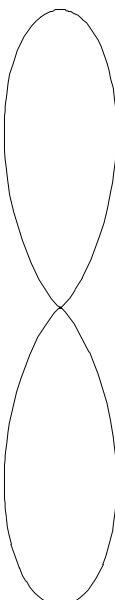
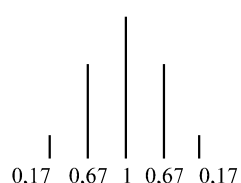
11.2.9 Verdünnte Gruppen

Eine spezielle inhomogene Amplitudenbelegung ist die, dass man in einer uniform angeregten Antennenzeile aus $N + 1$ Elementen eine – oder mehrere – der inneren Teilantennen weglässt. Die gesamte Länge der Antennenstandlinie bleibt dadurch unverändert. Der Einfluss der **Wegnahme** bzw. des **Funktionsausfalls** von ein, zwei oder drei inneren Antennenelementen einer Zeile aus $N + 1 = 5$ Teilstrahlern soll im Folgenden untersucht werden. Dazu werden die Horizontaldiagramme der Gruppencharakteristik einer y-Dipolzeile aus 5 phasengleichen Einzelstrahlern mit uniformer Belegung in Tabelle 11.11 im linearen Maßstab als Polardiagramme in der x-y-Ebene über dem Winkel φ aufgetragen. Es wurde jeweils ein Elementabstand von $a = \lambda_0/2$ angenommen, d. h. die Gruppencharakteristik lautet wie in (11.82)

$$C_{\text{Gr}}^{\text{H}}(\varphi) = \left| \sum_{n=0}^4 \left[I_0^{(n)} e^{j n \pi \sin \varphi} \right] \right|. \quad (11.83)$$

Dabei werden der Reihe nach einzelne Speiseströme $I_0^{(n)} = 0$ gesetzt. Die nicht strahlenden Elemente sind symbolisch weiß dargestellt.

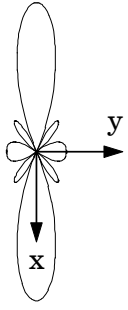
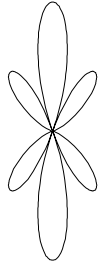
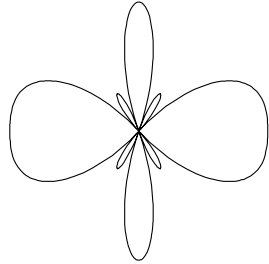
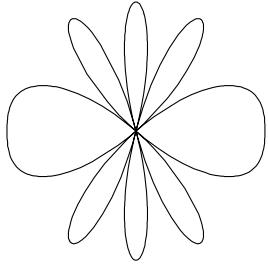
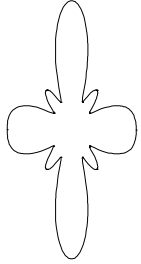
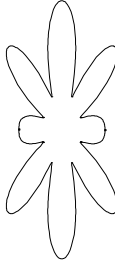
Tabelle 11.10 Horizontaldiagramme $C_{Gr}^H(\varphi)$ nach (11.82) und Halbwertsbreiten einer gleichphasigen Fünfergruppe (y-Zeile) bei verschiedenen Amplitudenbelegungen (Elementabstand $a = \lambda_0/2$). Die Diagramme sind im linearen Maßstab skaliert (nicht logarithmisch).

Uniforme Belegung mit Nebenkeulen bei -12 dB	Tschebyscheff-Bele- gung mit Nebenkeu- len bei -20 dB	Tschebyscheff-Bele- gung mit Nebenkeu- len bei -30 dB	Binomialbelegung ohne Nebenkeulen
$\Delta\varphi = 20,8^\circ$  	$\Delta\varphi = 23,7^\circ$  	$\Delta\varphi = 26,4^\circ$  	$\Delta\varphi = 30,3^\circ$  

Ergebnis der Gruppenausdünnung (Tabelle 11.11):

Bei symmetrischer Verdünnung erhält man aufgrund des dann größeren Elementabstandes eine schmalere Hauptkeule mit schärferer Bündelung. Es kommt allerdings zur Bildung von „grating lobes“, weil immer mehr Hauptkeulen in den sichtbaren Bereich hineinwandern. Bei einem scharf bündelnden Einzelstrahler kann der Effekt solcher parasitärer Hauptkeulen stark gemildert werden. Das Prinzip verdünnter Gruppen mit großen Elementabständen in Verbindung mit Hochgewinnantennen wird z. B. in der Radioastronomie bei der Konstruktion von Interferometersystemen ausgenutzt [Woh73]. Die unsymmetrische Verdünnung liefert Diagramme mit aufgefüllten Nullstellen und ist deshalb für die Praxis kaum von Bedeutung.

Tabelle 11.11 Horizontaldiagramme $C_{\text{Gr}}^{\text{H}}(\varphi)$ nach (11.83) einer gleichphasigen Fünfergruppe (y-Zeile) mit Elementabstand $a = \lambda_0/2$ bei Ausfall einzelner Antennenelemente.

Ausfall <u>keines</u> Strahlers  ● ● ● ● ● 1 1 1 1 1		
Ausfall <u>eines</u> Strahlers	Ausfall <u>zweier</u> Strahler	Ausfall <u>dreier</u> Strahler
 ● ● ○ ● ● 1 1 0 1 1	 ● ○ ● ○ ● 1 0 1 0 1	 ● ○ ○ ○ ● 1 0 0 0 1
 ● ○ ● ● ● 1 0 1 1 1 ● ● ● ○ ● 1 1 1 0 1	 ● ○ ○ ● ● 1 0 0 1 1 ● ● ○ ○ ● 1 1 0 0 1	

11.3 Ebene Gruppen

Die bisher betrachteten linearen Gruppenstrahler bündeln die Energie nur in einer Ebene, während in der anderen die Bündelung durch die Charakteristik des Einzelementes bestimmt wird. Betreibt man mehrere lineare Gruppen so nebeneinander, dass sie – wie in Bild 11.24 – eine ebene Fläche aufspannen, dann erhält man eine in zwei Ebenen gebündelte Gruppencharakteristik. Die Erweiterung auf räumliche Gruppen ergibt sich auf ähnliche Weise. Bei beliebig räumlicher Anordnung kann der Gruppenfaktor wieder mit (11.9) berechnet werden.

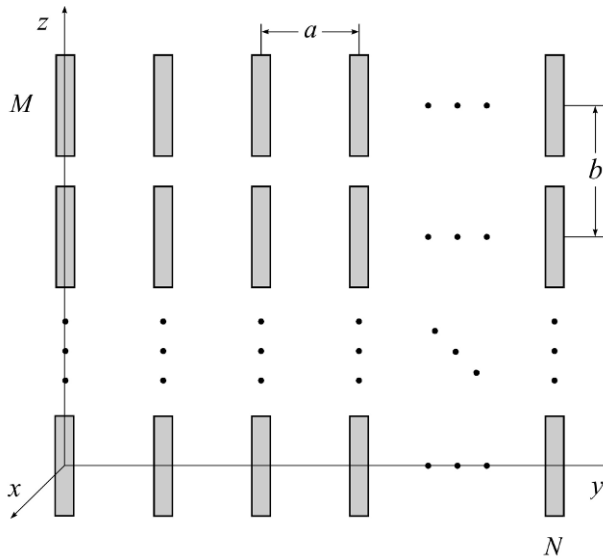


Bild 11.24 Zweidimensionale, bi-äquidistante Antennengruppe aus identischen Teilstrahlern mit horizontalem Elementabstand a und vertikalem Elementabstand b

Durch Multiplikation zweier linearer Gruppencharakteristiken erhält man die Charakteristik der ebenen Gruppe (**multiplikatives Gesetz** für Untergruppen²). Ist M die Anzahl der in z -Richtung und N die Anzahl der in y -Richtung angeordneten Einzelemente, so wird die Charakteristik der ebenen Gruppe bei gleicher Amplitude der Speiseströme aller $M \cdot N$ Elemente:

$$C_{Gr}(\vartheta, \varphi) = \left| \frac{\sin(N u/2)}{N \sin(u/2)} \right| \cdot \left| \frac{\sin(M v/2)}{M \sin(v/2)} \right| \quad (11.84)$$

mit den Abkürzungen

$$u = \delta_y + k_0 a \sin \vartheta \sin \varphi \quad \text{und} \quad v = \delta_z + k_0 b \cos \vartheta. \quad (11.85)$$

Durch Wahl der Breite $(N-1)a$ und der Höhe $(M-1)b$ einer ebenen Gruppe können Horizontal- und Vertikaldiagramm unabhängig voneinander festgelegt werden. Mit den Phasenverschiebungen δ_y innerhalb einer Zeile und δ_z zwischen den Zeilen kann weiterhin die Raumrichtung der Abstrahlung eingestellt werden. So strahlt eine ebene Gruppe quer zu ihrer y - z -Ebene (mit einer Hauptkeule in der positiven und einer weiteren in der negativen x -Richtung), wenn alle Elemente phasengleich angeregt werden (z. B. mit $\delta_y = \delta_z = 0$). Dann gilt:

² **Räumliche Gruppen** haben noch einen dritten Faktor, in dem $w = \delta_x + k_0 c \sin \vartheta \cos \varphi$ vorkommt.

$$C_{\text{Gr}}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{MN} \left| \frac{\sin\left(N \frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \vartheta \sin \varphi\right) \sin\left(M \frac{\pi b}{\lambda_0} \cos \vartheta\right)}{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \vartheta \sin \varphi\right) \sin\left(\frac{\pi b}{\lambda_0} \cos \vartheta\right)} \right|. \quad (11.86)$$

Der Flächenwirkungsgrad großer, querstrahlender Gruppen mit $N, M \gg 1$ und $\delta_y = \delta_z = 0$ ist für $a, b < \lambda_0$ gleich 1, wenn wir die zweite Hauptkeule durch einen Reflektor unterdrücken. Die Wirkfläche wird daher $A_W = A_{\text{geo}} \cong MNab$. Mit $D = 4\pi A_W / \lambda_0^2$ erhalten wir daraus:

$$D = 4\pi MNab / \lambda_0^2 \quad (\text{für uniforme ebene Gruppe mit Reflektor}). \quad (11.87)$$

Mit den Halbwertsbreiten aus (11.38) folgt außerdem $D \Delta \varphi \Delta \vartheta \cong 32376$.

11.4 Antennen über Erde

Bisher wurde die Abstrahlung elektromagnetischer Wellen im unbegrenzten homogenen Raum betrachtet. Häufig wird zur Erhöhung der Richtwirkung in unmittelbarer Antennennähe ein ebener metallischer **Reflektor** angebracht. Bei Antennen, die sich auf der Erde befinden, wirkt die leitende **Erdoberfläche** in ähnlicher Weise. Mit guter Näherung kann man nämlich die Erde als einen unendlich guten Leiter ansehen. Man kann nun das aus der Elektrostatik bekannte **Spiegelungsprinzip** [Sim93] auch auf Antennen anwenden, die sich über einer ebenen, ideal leitenden Grenzfläche befinden. Es genügt, die Gesetzmäßigkeiten für elektrische und magnetische Elementarströme $\underline{\mathbf{J}}$ bzw. $\underline{\mathbf{M}}$ zu betrachten. Die Spiegelungsgesetze nach Tabelle 11.12 können sofort auf ausgedehnte Strahler übertragen werden.

Tabelle 11.12 Spiegelung von elektrischen und magnetischen Stromelementen an idealen elektrischen bzw. magnetischen Leitern

	<u>elektrischer</u> Strom $\underline{\mathbf{J}}$	<u>magnetischer</u> Strom $\underline{\mathbf{M}}$
Spiegelung an <u>elektrisch</u> ideal leitender Ebene mit $\text{Im}\{\underline{\epsilon}\} \rightarrow -\infty$, d. h. $[\underline{\mathbf{E}}_{\text{tan}} = \mathbf{n} \times \underline{\mathbf{E}} = 0]$		
Spiegelung an <u>magnetisch</u> ideal leitender Ebene mit $\text{Im}\{\underline{\mu}\} \rightarrow -\infty$, d. h. $[\underline{\mathbf{H}}_{\text{tan}} = \mathbf{n} \times \underline{\mathbf{H}} = 0]$		

Aus Symmetriegründen ergibt die Kombination des ursprünglichen Stromelementes mit seinem Spiegelbild nur eine senkrecht auf der Trennfläche stehende Feldkomponente. Für den häufigsten Fall eines elektrischen Dipols $\underline{J}$ über einer elektrisch ideal leitenden Ebene ist in Bild 11.25 die Überlagerung der Teilfelder deutlich gemacht.

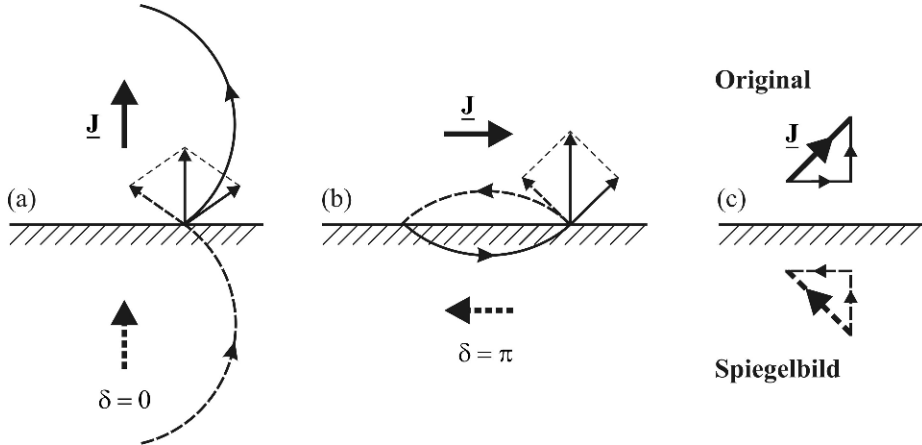


Bild 11.25 Spiegelung von elektrischen Stromelementen über ideal leitender Erde nach [Sim93]. Die Überlagerung der elektrischen Feldvektoren von Original und Spiegelbild sichert die Erfüllung der Randbedingung $\underline{E}_{\text{tan}} = 0$.

- Im Spiegelbild eines vertikalen Dipols fließt der Strom in *gleicher Phase* ($\delta = 0$).
- Im Spiegelbild eines horizontalen Dipols fließt der Strom in *Gegenphase* ($\delta = \pi$).
- Ein schräger Dipol muss in vertikale und horizontale *Anteile* zerlegt werden.

In der fiktiven Ersatzanordnung mit Bildquellen ist der Raum wieder unbegrenzt homogen. Die Strahlungsfelder können damit unter Einbeziehung der Bildquellen als Gruppenstrahler berechnet werden. Das resultierende Feld beider Dipole ergibt nur in der Luft, also oberhalb der Grenzfläche, die wirkliche Feldstärke. Im Inneren des Leiters – also in der Erde – sind die sich ergebenden Feldstärken fiktiver Natur, da das Innere eines idealen Leiters wegen des Skin-Effekts stets feldfrei ist.

Übung 11.3: Vertikaler Dipol über der Erde

- Bestimmen Sie die Strahlungscharakteristik eines vertikalen Halbwellendipols über der Erde (Bild 11.26) in Abhängigkeit seines Abstandes h_E von der Erdoberfläche (x-y-Ebene).
- Lösung:**

Die Strahlungscharakteristik eines vertikalen Halbwellendipols ist:

$$C_E(\vartheta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}. \quad (11.88)$$

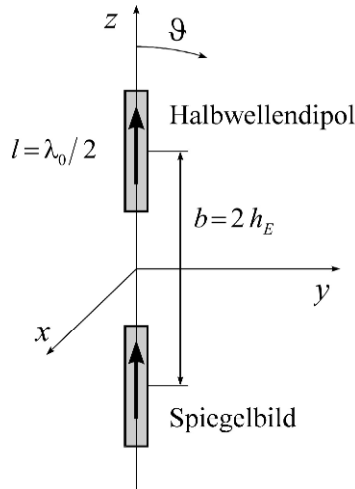


Bild 11.26 Gleichphasige Spiegelung eines vertikalen Halbwellendipols über ideal leitender Erde

Der Dipol und sein gleichphasiges Spiegelbild bilden eine Dipollinie entlang der z-Achse. Ihre Gruppencharakteristik kann wegen (11.17) wie folgt angegeben werden:

$$C_{Gr}(\vartheta) = \left| \frac{\sin(N u/2)}{N \sin(u/2)} \right| \quad (11.89)$$

mit $N = 2$ und $u = \delta + k_0 b \cos \vartheta$. Bei Phasengleichheit gilt $\delta = 0$ und es wird:

$$C_{Gr}(\vartheta) = \left| \frac{\sin(k_0 b \cos \vartheta)}{2 \sin\left(\frac{k_0 b}{2} \cos \vartheta\right)} \right| = \left| \cos\left(\frac{k_0 b}{2} \cos \vartheta\right) \right|. \quad (11.90)$$

Die Charakteristik der gesamten Anordnung erhält man nun mit Hilfe des multiplikativen Gesetzes zu:

$$C_{VD}(\vartheta) = C_E(\vartheta) C_{Gr}(\vartheta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} \left| \cos(k_0 h_E \cos \vartheta) \right|. \quad (11.91)$$

• **Bemerkung:**

Aus geometrischen Gründen ist bei einem vertikalen Halbwellendipol mit $l = \lambda_0/2$ eine Mindesthöhe über Grund von $h_E = \lambda_0/4$ erforderlich. Für diesen Grenzfall erhalten wir aus (11.91) eine Gesamtcharakteristik von:

$$C_{VD}(\vartheta) = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}, \quad (11.92)$$

die genau der Charakteristik eines Ganzwellendipols ($l = \lambda_0$) im freien Raum entspricht.

• **Allgemein gilt der Zusammenhang:**

Ein vertikaler Dipol mit ungerader Halbwellenzahl $l = (2n-1)\lambda_0/2$, der sich im Abstand $h_E = (2n-1)\lambda_0/4$ über ideal leitender Erde befindet, verhält sich – zusammen mit seinem gleichphasigen Spiegelbild – wie ein doppelt so langer Dipol im freien Raum. Die gesamte Anordnung hat dann eine scheinbare Länge von $l = (2n-1)\lambda_0$ und daher die Charakteristik

$$C_{VD}(\vartheta) = \frac{\cos^2\left(\frac{2n-1}{2}\pi \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}. \quad \square \quad (11.93)$$

Auf analoge Weise erhält man die Strahlungscharakteristik eines horizontalen Halbwellendipols über der Erde. Die geometrischen Verhältnisse sind in Bild 11.27 dargestellt.

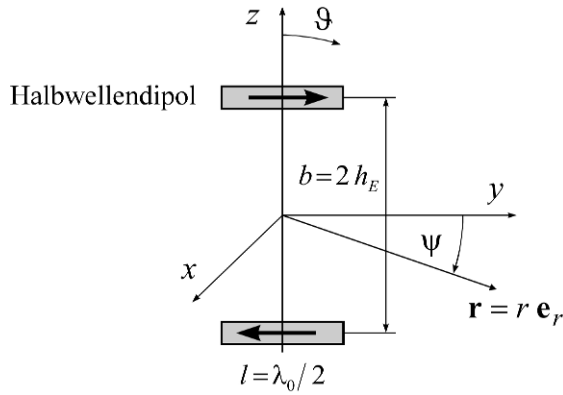


Bild 11.27 Gegenphasige Spiegelung eines horizontalen Halbwellendipols über ideal leitender Erde

Die Elementcharakteristik erhalten wir analog zu (11.88), nun aber mit dem Winkel ψ :

$$C_E(\psi) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \psi\right)}{\sin \psi}. \quad (11.94)$$

Um den Winkel ψ mit $0 \leq \psi \leq \pi$, der von der positiven y-Achse in Richtung des Aufpunktvektors $\mathbf{r}$ gemessen wird, zu bestimmen, bildet man das Skalarprodukt

$$\cos \psi = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_y \cdot (\mathbf{e}_x \sin \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \vartheta) = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad (11.95)$$

woraus auch folgt (siehe auch Tabelle 7.1):

$$\sin \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}. \quad (11.96)$$

Damit wird die Elementcharakteristik eines horizontalen Halbwellendipols:

$$C_E(\vartheta, \varphi) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \vartheta \sin \varphi\right)}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}}. \quad (11.97)$$

Die Gruppencharakteristik des Dipols mit seinem gegenphasigen Spiegelbild erhält man aus:

$$C_{Gr}(\vartheta) = \left| \frac{\sin(N u/2)}{N \sin(u/2)} \right| \quad (11.98)$$

mit $N = 2$ und $u = \delta + k_0 b \cos \vartheta$ sowie $\delta = \pi$, d. h. es gilt:

$$C_{Gr}(\vartheta) = \left| \frac{\sin(\pi + k_0 b \cos \vartheta)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k_0 b}{2} \cos \vartheta\right)} \right| = \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k_0 b}{2} \cos \vartheta\right) \right| = \left| \sin\left(\frac{k_0 b}{2} \cos \vartheta\right) \right|. \quad (11.99)$$

Die Charakteristik der gesamten Anordnung erhält man wieder mit Hilfe des multiplikativen Gesetzes zu:

$$C_{HD}(\vartheta, \varphi) = C_E(\vartheta, \varphi) C_{Gr}(\vartheta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \vartheta \sin \varphi\right)}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}} \left| \sin(k_0 h_E \cos \vartheta) \right|. \quad (11.100)$$

Für eine Höhe über Grund von $h_E = 0$ wird der elektrische Strom wegen $\kappa \rightarrow \infty$ kurzgeschlossen, d. h. Original und gegenphasiges Spiegelbild heben sich gegenseitig auf und bleiben daher wirkungslos. Die Abstrahlung wird dann zu null.

In Tabelle 11.13 sind für verschiedene Höhen h_E eines vertikalen bzw. horizontalen Halbwellendipols über dem ideal leitenden Erdboden die Strahlungsdiagramme im Vertikalschnitt nach folgenden Formeln aufgetragen:

$$C_{VD}^V(\vartheta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} \left| \cos(k_0 h_E \cos \vartheta) \right| \quad (11.101)$$

$$C_{HD}^V(\vartheta, \varphi = 0) = C_{Gr} = \left| \sin(k_0 h_E \cos \vartheta) \right| \quad (11.102)$$

$$C_{HD}^V(\vartheta, \varphi = \pi/2) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \vartheta\right)}{|\cos \vartheta|} \left| \sin(k_0 h_E \cos \vartheta) \right|. \quad (11.103)$$

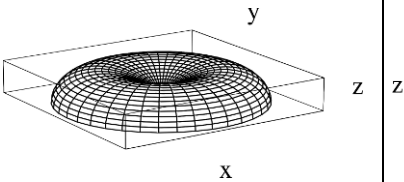
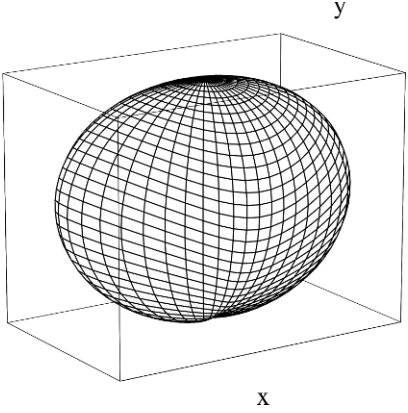
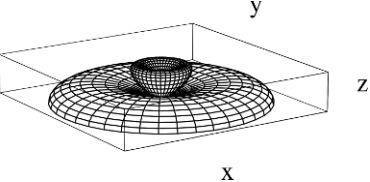
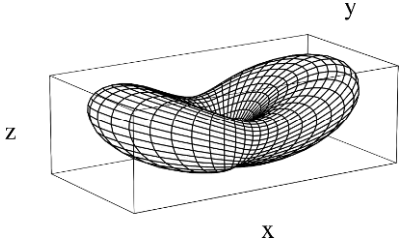
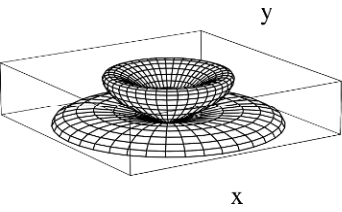
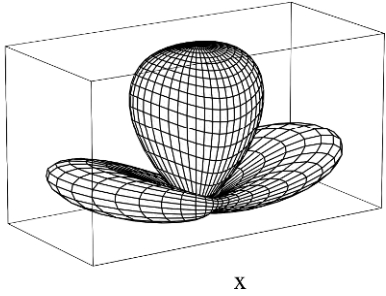
Für den **Kurzwellenbereich** sind vertikale Dipole mit Höhen $h_E \approx \lambda_0/2$ oder $h_E \geq 4 \cdot \lambda_0$ zweckmäßig. Im zweiten Fall ist das Diagramm sehr vielzipfelig, sodass die unerwünschten Bereiche mit Nullstrahlung – auch in Horizontnähe – ausreichend schmal sind. Für $h_E = \lambda_0/4$ strahlt der horizontale Halbwellendipol senkrecht zur reflektierenden Ebene, was gerne zum Bau einfacher **Richtantennen** ausgenutzt wird.

Tabelle 11.13 Vertikale Diagrammschnitte von Halbwellendipolen über idealer Erde

	Vertikaler Dipol ↑	Horizontaler Dipol → $\varphi = 0$ (H-Ebene) $\varphi = \pi/2$ (E-Ebene)	
$h_E = \lambda_0/8$	fiktiv 		
$h_E = \lambda_0/4$			
$h_E = 3\lambda_0/8$			
$h_E = \lambda_0/2$			
$h_E = 5\lambda_0/8$			
$h_E = 3\lambda_0/4$			
$h_E = 7\lambda_0/8$			
$h_E = \lambda_0$			
$h_E = 4\lambda_0$			

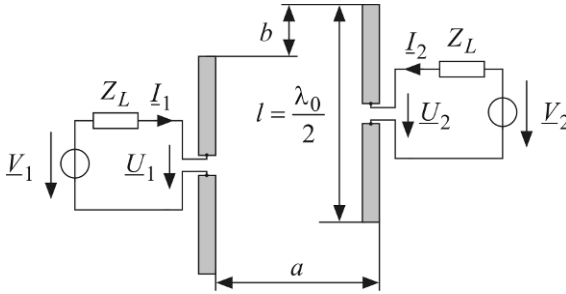
Die Strahlungscharakteristik eines horizontalen Halbwellendipols über der ideal leitenden Erde ist nicht rotationssymmetrisch, sondern hängt vom Azimutwinkel φ ab. Zur Verdeutlichung obiger Diagrammschnitte zeigt Tabelle 11.14 eine dreidimensionale Darstellung für einige Erdbstände h_E .

Tabelle 11.14 Dreidimensionale Strahlungscharakteristik von Halbwellendipolen über idealer Erde

	vertikaler Dipol ↑ (rotationssymmetrisch)	horizontaler Dipol → (nicht rotationssymmetrisch)
$h_E = \lambda_0/4$		
$h_E = \lambda_0/2$		
$h_E = 3\lambda_0/4$		

11.5 Strahlungskopplung in ebenen Dipolgruppen

Bei der linearen Superposition (11.6) der Strahlungsfelder mehrerer Teilantennen haben wir bisher die gegenseitige Kopplung der Antennen vernachlässigt. Wir beschränken uns im Folgenden auf **ebene Gruppen**, die aus N gleichartigen, dünnen **Halbwellendipolen** mit zueinander parallelen Längsachsen und jeweils angepassten Generatoren aufgebaut sind (Bild 11.28).



Es gilt in jedem Speiseweig:

$$\underline{V}_n = Z_L \underline{I}_n + \underline{U}_n \quad (11.104)$$

oder in Vektorschreibweise:

$$\underline{\mathbf{V}} = Z_L \underline{\mathbf{I}} + \underline{\mathbf{U}}. \quad (11.105)$$

Wir machen für die Spannungen im Speisepunkt einen linearen Ansatz:

$$\underline{\mathbf{U}} = [\underline{\mathbf{Z}}] \underline{\mathbf{I}}. \quad (11.106)$$

Bild 11.28 Zwei mittengespeiste Halbwellendipole mit horizontalem und vertikalem Versatz a und b

In (11.106) berücksichtigen wir die Verkopplung der Dipole durch eine symmetrische **Impedanzmatrix**, deren Hauptdiagonalelemente alle gleich der (passiven) Eingangsimpedanz des unkoppelten Halbwellendipols $Z_{nn} \equiv (73,1 + j42,5) \Omega$ sind [Kra88, Bal05, LoLe88, Isk92]:

$$[\underline{\mathbf{Z}}] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdot & \cdot & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_{N1} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{NN} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_N \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_N \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_N \end{pmatrix}. \quad (11.107)$$

Nach Einsetzen von (11.106) in (11.105) erhalten wir die tatsächlichen **Speiseströme** aus einer Matrixinversion, wobei wir mit $[\underline{\mathbf{E}}]$ die $(N \times N)$ – Einheitsmatrix bezeichnen:

$$\underline{\mathbf{I}} = [Z_L [\underline{\mathbf{E}}] + [\underline{\mathbf{Z}}]]^{-1} \underline{\mathbf{V}}. \quad (11.108)$$

Die (aktiven) **Eingangsimpedanzen** der verkoppelten Teilantennen folgen aus (11.106):

$$\underline{Z}_n = \frac{\underline{U}_n}{\underline{I}_n} = \sum_{m=1}^N \underline{Z}_{nm} \frac{\underline{I}_m}{\underline{I}_n} = \underline{Z}_{nn} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \underline{Z}_{nm} \frac{\underline{I}_m}{\underline{I}_n} \quad \text{mit} \quad \underline{Z}_{nm} = R_{nm} + j X_{nm} \quad \text{und} \quad (11.109)$$

$$\frac{8\pi R_{nm}}{Z_0} = -\cos(k_0 b) [-2\text{Ci}(A) - 2\text{Ci}(A') + \text{Ci}(B) + \text{Ci}(B') + \text{Ci}(C) + \text{Ci}(C')] + \sin(k_0 b) [2\text{Si}(A) - 2\text{Si}(A') - \text{Si}(B) + \text{Si}(B') - \text{Si}(C) + \text{Si}(C')] \quad (11.110)$$

$$\frac{8\pi X_{nm}}{Z_0} = -\cos(k_0 b) [2\text{Si}(A) + 2\text{Si}(A') - \text{Si}(B) - \text{Si}(B') - \text{Si}(C) - \text{Si}(C')] + \sin(k_0 b) [2\text{Ci}(A) - 2\text{Ci}(A') - \text{Ci}(B) + \text{Ci}(B') - \text{Ci}(C) + \text{Ci}(C')] \quad (11.111)$$

$$\begin{aligned}
 A &= k_0 \left(\sqrt{a^2 + b^2} + b \right) & A' &= k_0 \left(\sqrt{a^2 + b^2} - b \right) \\
 \text{mit } B &= k_0 \left[\sqrt{a^2 + (b-l)^2} + (b-l) \right] & B' &= k_0 \left[\sqrt{a^2 + (b-l)^2} - (b-l) \right] \\
 C &= k_0 \left[\sqrt{a^2 + (b+l)^2} + (b+l) \right] & C' &= k_0 \left[\sqrt{a^2 + (b+l)^2} - (b+l) \right].
 \end{aligned} \quad (11.112)$$

Die Funktionen Integralsinus und Integralkosinus sind in Bild 10.11 dargestellt. Für $a=0$ treten in (11.110) und (11.111) jeweils drei singuläre Integralkosinus-Funktionen auf, die sich aber gegenseitig wegheben. Der Wirk- und der Blindanteil der Koppelimpedanz $Z_{nm} = R_{nm} + jX_{nm}$ sind in Bild 11.29 als Funktion der Abstände a und b dargestellt.

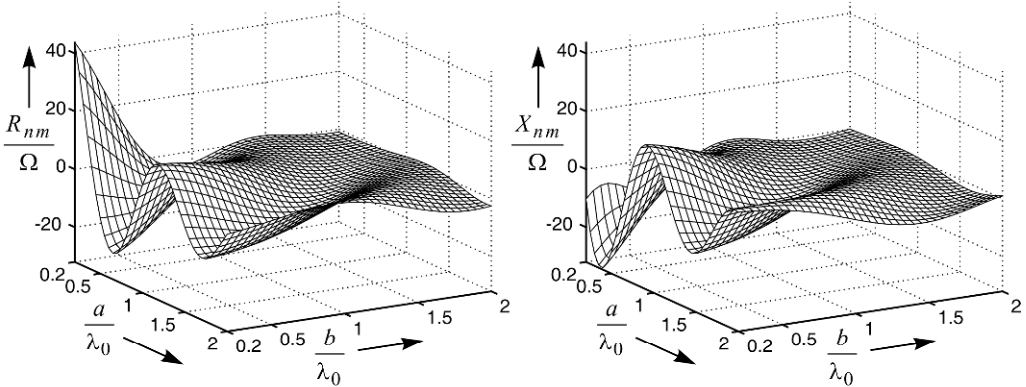


Bild 11.29 Real- und Imaginärteil der Koppelimpedanz zweier paralleler Halbwellendipole als Funktion der horizontalen und vertikalen Abstände a und b (siehe Bild 11.28); jeweils im Bereich $0,2\lambda_0$ bis $2\lambda_0$

Als **Beispiel** betrachten wir eine äquidistante Dipolzeile mit Elementabständen von jeweils $\lambda_0/2$ aus $N=4$ Halbwellendipolen. Wir berechnen mit (11.108) die tatsächlichen Quellströme $\underline{\mathbf{I}}$, die sich für $Z_L = 75 \Omega$ bei einer uniformen Spannungsbelegung $\underline{\mathbf{V}}$ einstellen:

$$\underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \\ \zeta_2 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_3 & \zeta_2 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ \zeta_4 & \zeta_3 & \zeta_2 & \zeta_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \text{ V} \\ 1 \text{ V} \\ 1 \text{ V} \\ 1 \text{ V} \end{pmatrix} = 7,89 \text{ mA} \begin{pmatrix} 0,911 e^{-j6,61^\circ} \\ 1,000 e^{-j1,05^\circ} \\ 1,000 e^{-j1,05^\circ} \\ 0,911 e^{-j6,61^\circ} \end{pmatrix} \quad (11.113)$$

mit den Werten $\zeta_1 = (148,1 + j42,5) \Omega$; $\zeta_2 = (-12,5 - j29,9) \Omega$; $\zeta_3 = (4,0 + j17,7) \Omega$ und $\zeta_4 = (-1,9 - j12,3) \Omega$. Die Strombelegung $\underline{\mathbf{I}}$ ist daher nicht uniform, was Auswirkungen auf die Richtcharakteristik (Bild 11.30) und die Eingangsimpedanzen hat. Aus (11.109) folgt:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= Z_4 = (63,2 + j16,0) \Omega \\
 Z_2 &= Z_3 = (51,8 + j2,3) \Omega.
 \end{aligned} \quad (11.114)$$

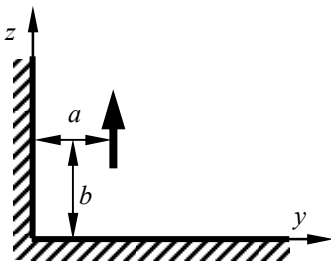
Durch die zum Gruppenrand abfallende Belegung verbreitert sich die Hauptkeule und die Nebenzipfel sinken (gestrichelte Kurve). Man vergleiche das Diagramm ohne Kopplung.

Bild 11.30 Horizontaldiagramme einer y-Zeile aus 4 vertikalen $\lambda/2$ -Dipolen mit bzw. ohne Kopplung

11.6 Übungen

11.6.1 Gegeben sei eine lineare äquidistante Antennengruppe entlang der y-Achse, die aus N amplitudengleich erregten, identischen Teilantennen im gegenseitigen Abstand $a = \lambda_0/2$ besteht. Geben Sie für linearen Phasengang δ die Gruppencharakteristik C_{Gr} der Anordnung an. Wie viele Teilantennen N sind mindestens notwendig, damit die Horizontalcharakteristik der Gruppe im Betrieb als Querstrahler eine Nullwertbreite $\Delta\varphi_0$ von höchstens 21° aufweist? Welche gleichmäßige Phasendifferenz müssen die Speiseströme der N Teilantennen aufweisen, damit eine Hauptkeulenschwenkung φ_S um 30° aus der Querstrahlungsrichtung eintritt?

11.6.2 Ein vertikaler Hertzscher Dipol befinde sich im Abstand a vor einem großen, ebenen, vertikalen Reflektor. Der Abstand des Dipols zur horizontalen Erde betrage b .



Berechnen Sie mit Hilfe der Spiegelungsmethode die Gesamtcharakteristik der Anordnung durch mehrfache Anwendung des multiplikativen Gesetzes.

In welche Raumrichtung (ϑ, φ) zeigt die Hauptkeule, falls $a = b = \lambda_0/4$ gilt?

Wie lautet für $a = b = \lambda_0/4$ das horizontale und das vertikale Richtdiagramm?

11.6.3 Eine lineare äquidistante Antennengruppe entlang der y-Achse bestehe aus $N+1$ identischen Teilstrahlern im gegenseitigen Abstand $a = \lambda_0/2$. Die Speiseströme seien gleichphasig und ihre Amplituden mit $n = 0, 1, 2, \dots, N$ binomialverteilt: $I_0^{(n)} = \binom{N}{n} I_0$. Finden Sie mit Hilfe des additiven Gesetzes die Gruppencharakteristik der Anordnung. Formen Sie das Ergebnis mit dem binomischen Lehrsatz in eine geschlossene Darstellung um. Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Formeln, dass $C_{Gr} = \cos^N\left(\frac{\pi}{2} \sin \vartheta \sin \varphi\right)$ gilt. Wie lautet dann das horizontale Richtdiagramm $C_{Gr}^H(\varphi)$? Zeigen Sie, dass für die Halbwertsbreite von $C_{Gr}^H(\varphi)$ gilt:

$$\Delta\varphi = 2 \arcsin \left[\frac{2}{\pi} \arccos \left(0,5^{1/(2N)} \right) \right].$$

Lösungen:

$$\mathbf{11.6.1} \quad C_{Gr} = \left| \frac{\sin \left[N (\delta + \pi \sin \vartheta \sin \varphi) / 2 \right]}{N \cdot \sin \left[(\delta + \pi \sin \vartheta \sin \varphi) / 2 \right]} \right|, \quad N = \frac{2}{\sin(\Delta\varphi_0/2)} = 11 \quad \text{und} \quad \delta = \pi \sin \varphi_S = \pi/2$$

$$\mathbf{11.6.2} \quad C_{ges} = \sin \vartheta \cdot \left| \sin(k_0 a \sin \vartheta \sin \varphi) \right| \cdot \left| \cos(k_0 b \cos \vartheta) \right| \quad \text{mit Maximum bei} \quad \vartheta = \varphi = \pi/2$$

$$C_H(\varphi) = \left| \sin \left(\frac{\pi}{2} \sin \varphi \right) \right| \quad \text{und} \quad C_V(\vartheta) = \sin \vartheta \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} \sin \vartheta \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right)$$

$$\mathbf{11.6.3} \quad C_{Gr} \hat{=} \left| I_0 \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} e^{j n \pi \sin \vartheta \sin \varphi} \right| = \left| I_0 \left(1 + e^{j \pi \sin \vartheta \sin \varphi} \right)^N \right| \quad \text{und} \quad C_{Gr}^H = \cos^N \left(\frac{\pi}{2} \sin \varphi \right)$$

12 Breitbandantennen

In der Praxis bevorzugt man Antennen, deren elektrische Eigenschaften innerhalb eines gewissen Frequenzbandes konstant bleiben oder sich nur um ein geringes Maß verändern. Die notwendige Bandbreite ist durch das Fourier-Spektrum der zu übertragenden Signale vorgegeben. Insbesondere ist man an solchen Antennen interessiert, bei denen sowohl Richtcharakteristik und Gewinn als auch die Eingangsimpedanz breitbandiges Verhalten zeigen. Zusätzlich kann auch ein definiert festliegendes Phasenzentrum oder der Erhalt der Polarisation in einem gewünschten Frequenzbereich gefordert werden. Bei gleichzeitigem Betrieb einer Funkübertragungsstrecke auf mehreren Trägerfrequenzen (Frequenzmultiplex) ist zuweilen ein extrem breitbandiges Verhalten erforderlich, was die Entwicklung spezieller Breitbandantennen notwendig macht. An solche Antennen können folgende **Forderungen** gestellt werden:

- Die Ausdehnung der aktiv strahlenden Zone muss sich proportional zur Wellenlänge ändern.
- Die Winkelbeziehungen, welche die Antennenform bestimmen, müssen erhalten bleiben.

So kann man einzelne Teilstrahler verschiedener Länge verwenden oder Antennen als selbstähnliche Strukturen aufbauen. Eine andere Möglichkeit besteht darin, dass sich die Bauform der Antenne nur durch Winkel und nicht durch Streckenlängen definiert. Jede endlich große Antenne besitzt dennoch eine begrenzte Bandbreite, deren Ausweitung meist zu Lasten von Gewinn und Wirkungsgrad geht. Die untere Frequenzgrenze f_u wird durch ihre Maximalabmessung l bestimmt, wenn l in der Größenordnung etwa einer halben Wellenlänge liegt:

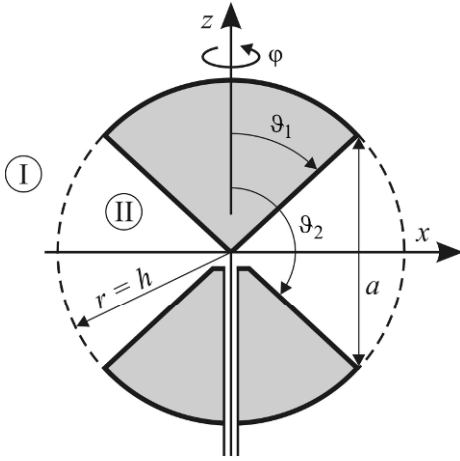
$$f_u \gtrsim \frac{c_0}{2l} \quad (12.1)$$

während die obere Frequenzgrenze f_o durch die minimale Antennenabmessung (meist die Umgebung des Speisepunkts) festgelegt ist. Im Folgenden wollen wir von einer Breitbandantenne sprechen, wenn $B = f_o/f_u \geq 2$ gilt. Es ist üblich, eine relative Bandbreite zu definieren:

$$B_r = \frac{f_o - f_u}{f_m} \quad \text{mit der Mittenfrequenz} \quad f_m = \frac{f_o + f_u}{2}. \quad (12.2)$$

12.1 Doppelkonusantenne

Die Doppelkonusantenne nach Bild 12.1 ist wegen ihres einfachen Aufbaus und ihrer guten Breitbandeigenschaften eine oft verwendete Rundstrahlantenne. Da ihre geometrischen Ränder als Koordinatenflächen des Kugelkoordinatensystems darstellbar sind, ist mit Hilfe der Methode der Orthogonalentwicklung (siehe Abschnitt 6.2.2) eine exakte Feldlösung möglich [Sche43, Sche52a]. Die Doppelkonusantenne besteht aus zwei achsengleichen kegelförmigen Hälften, die sich mit ihrer Spitze am Speisepunkt berühren. Die Wellenausbreitung erfolgt zwischen den Kegelhälften in radialer Richtung. Abgesehen von ihrer Länge $l = 2h$, die nach (12.1) das untere Bandende markiert, wird die Geometrie der Leitung nur durch die beiden Winkel ϑ_1 und ϑ_2 bestimmt. Praktische Realisierungen verwenden häufig die symmetrische Lage $\vartheta_2 = \pi - \vartheta_1$. Nach Bild 12.1 ist der Doppelkonus rotationssymmetrisch um die z-Achse. Er sei elektrisch ideal leitend und befinde sich im Vakuum.



Im Ursprung des Kugelkoordinatensystems werde mit einer entlang der z-Achse verlaufenden coaxialen Leitung eine TEM-Welle eingekoppelt. Die Abweichung von der konischen Geometrie in der Umgebung des Speisepunkts soll vernachlässigt werden. Außerdem liegt die Speiseleitung – wie wir später noch sehen werden – in einer Nullrichtung der Antennenstrahlung und muss daher nicht in die Modellbildung mit einbezogen werden.

Bild 12.1 Symmetrischer Doppelkonus ($\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi$) mit Konuslänge h und Apertur $a = 2h \cos \vartheta_1$

12.1.1 Unendlich lange symmetrische Doppelkonusleitung

Der Doppelkonus ist ein Zweileitersystem und kann daher – wie auch seine coaxiale Speiseleitung – eine TEM-Welle führen. Auf der unendlich langen symmetrischen Doppelkonusleitung lauten die Feldkomponenten einer nach außen laufenden TEM-Welle¹ [Stu98a]:

$$\underline{E}_\vartheta = Z_0 \underline{H}_\varphi = \frac{\underline{E}_0}{k_0 r \sin \vartheta} e^{-jk_0 r} . \quad (12.3)$$

Da beide Konusse Äquipotenzialflächen darstellen, erhält man für die Spannung dazwischen:

$$\begin{aligned} \underline{U}(r) &= \int_{\vartheta=\vartheta_1}^{\pi-\vartheta_1} \underline{E}_\vartheta r d\vartheta = \frac{\underline{E}_0}{k_0} e^{-jk_0 r} \int_{\vartheta=\vartheta_1}^{\pi-\vartheta_1} \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} = \\ &= \frac{\underline{E}_0}{k_0} e^{-jk_0 r} \ln \left(\tan \frac{\vartheta}{2} \right) \Bigg|_{\vartheta_1}^{\pi-\vartheta_1} = \frac{2\underline{E}_0}{k_0} e^{-jk_0 r} \ln \left(\cot \frac{\vartheta_1}{2} \right) \end{aligned} \quad (12.4)$$

und für den radialen Gesamtstrom entlang einer Konushälfte:

$$\underline{I}(r) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \underline{H}_\varphi r \sin \vartheta d\varphi = \frac{2\pi \underline{E}_0 / Z_0}{k_0} e^{-jk_0 r} . \quad (12.5)$$

Aus dem Quotienten von (12.4) und (12.5) kann der Leitungswellenwiderstand einer unendlich langen Doppelkonusleitung berechnet werden, der gleichzeitig auch ihr Eingangswiderstand ist, da eine unendlich lange homogene Leitung stets reflexionsfrei ist. Die Taylor-Entwicklung in (12.6) gewährleistet für $\vartheta_1 \leq 1$ einen Betrag des Restfehlers kleiner als 1 %:

$$Z_L = \frac{\underline{U}(r)}{\underline{I}(r)} = \frac{Z_0}{\pi} \ln \left(\cot \frac{\vartheta_1}{2} \right) \approx 120 \Omega \left[\ln \left(\frac{2}{\vartheta_1} \right) - \frac{\vartheta_1^2}{12} \right] \quad \text{mit } 0 < \vartheta_1 < \pi/2 . \quad (12.6)$$

¹ Für eine nach innen laufende TEM-Welle muss $e^{-jk_0 r}$ durch $e^{jk_0 r}$ ersetzt werden.

Bei einem schlanken Doppelkonus mit dem Öffnungswinkel $\vartheta_1 = 0,1 \hat{=} 5,73^\circ$ wird $Z_L = 359 \Omega$, während eine dickere Leitung mit $\vartheta_1 = 1$ auf $Z_L = 72,5 \Omega$ führt. Aus dem Produkt von Spannung und Strom berechnen wir die transportierte **Wirkleistung** der TEM-Welle:

$$P_S = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \underline{U} \underline{I}^* \right\} = \frac{2\pi |\underline{E}_0|^2}{Z_0 k_0^2} \ln \left(\cot \frac{\vartheta_1}{2} \right) \quad (12.7)$$

Mit ihrer Strahlungsdichte

$$\underline{S}_r = \frac{1}{2} (\underline{E}_\vartheta \times \underline{H}_\varphi^*) \cdot \underline{e}_r = \frac{|\underline{E}_0|^2}{2 Z_0 k_0^2} \frac{1}{(r \sin \vartheta)^2} = S_r, \quad (12.8)$$

die an den Konuswänden bei $\vartheta = \vartheta_1$ und $\vartheta = \pi - \vartheta_1$ am größten ist, folgt nach (10.82) schließlich der richtungsabhängige **Richtfaktor** einer unendlich langen Doppelkonusleitung:

$$D(\vartheta) = C^2(\vartheta) D_{\max} = 4\pi r^2 \frac{S_r}{P_s} = 4\pi r^2 \frac{\frac{|\underline{E}_0|^2}{2 Z_0 k_0^2} \frac{1}{(r \sin \vartheta)^2}}{\frac{2\pi |\underline{E}_0|^2}{Z_0 k_0^2} \ln \left(\cot \frac{\vartheta_1}{2} \right)} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta \ln \left(\cot \frac{\vartheta_1}{2} \right)}, \quad (12.9)$$

deren größter Wert am Konusrand ($\vartheta = \vartheta_1$) auftritt:

$$D_{\max} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta_1 \ln \left(\cot \frac{\vartheta_1}{2} \right)}. \quad (12.10)$$

Nach Ableiten und Nullsetzen von (12.10) folgt die Bedingung für höchsten Richtfaktor

$$2 \cos \vartheta_1 \ln \left(\cot \frac{\vartheta_1}{2} \right) = 1, \quad (12.11)$$

aus der man numerisch $\vartheta_1 = 0,866 \hat{=} 49,6^\circ$ ermittelt. Mit (12.10) wird also der maximale Richtfaktor einer unendlich langen Doppelkonusleitung $D_{\max} = 2,233 \hat{=} 3,49 \text{ dBi}$. Aus (12.9) und (12.10) können wir schließlich noch die **Richtcharakteristik** bestimmen (mit $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \pi - \vartheta_1$):

$$C(\vartheta) = \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta}. \quad (12.12)$$

Eine unendlich lange Antenne kann natürlich nicht realisiert werden. Sobald man zu Doppelkonusantennen endlicher Länge übergeht, ändern sich die Verhältnisse vollständig, weil dann durch Reflexionen in der Apertur höhere Wellentypen auf der Leitung angeregt werden, die sich der TEM-Welle überlagern. Das Strahlungsfeld im Freiraum können wir dann nach Art einer Fourier-Reihe durch die Überlagerung von Kugelwellen darstellen – wie wir im nächsten Abschnitt noch sehen werden.

12.1.2 Symmetrische Doppelkonusantenne endlicher Länge

Bricht man wie in Bild 12.1 eine symmetrische Doppelkonusleitung ($\vartheta_2 = \pi - \vartheta_1$) nach der radialen Länge $r = h$ ab, so entsteht eine Diskontinuität, an der die einfallende TEM-Welle reflektiert wird. Durch Beugungseffekte werden in der sphärisch gekrümmten Apertur auch

höhere Wellentypen angeregt, die alle ausbreitungsfähig sind, weil es im Doppelkonus keine Grenzfrequenz gibt. Wegen der Rotationssymmetrie der Anordnung ($\partial/\partial\varphi = 0$) können ausschließlich rotationssymmetrische Eigenwellen entstehen. Tatsächlich werden nur E-Wellen angeregt, die ein Feldstärkemaximum in Aperturmitte bei $\vartheta = \pi/2$ aufweisen. Es kommen daher im Freiraum (Raumteil I mit $r \geq h$) nur E_{0n} -Wellen mit ungeradem $n = 1, 3, 5, \dots$ in Betracht, während im Konusinnenraum (Raumteil II mit $r \leq h$) nur E_{0i} -Wellen mit geradem $i = 2, 4, 6, \dots$ angeregt werden [Dil90].

Die Doppelkonusleitung sei bezüglich der TEM-Welle, die man als E_{00} -Welle ansehen kann, reflexionsfrei an die koaxiale Speiseleitung angepasst – und zwar für auslaufende wie auch für einlaufende TEM-Wellen. Alle höheren E_{0i} -Wellen, die nach innen auf den Speisepunkt zulaufen, werden dort total reflektiert, da sie in der Speiseleitung nicht ausbreitungsfähig sind. So folgt nach [Kar84a] mit ungeradem $n = 1, 3, 5, \dots$ der vollständige Feldansatz für den Freiraum (Raumteil I) und mit geradem $i = 2, 4, 6, \dots$ für den Konusinnenraum (Raumteil II):

$$\begin{aligned} \frac{E_r^I}{E_0} &= j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(k_0 r)^2} a_n P_n(\cos \vartheta) \hat{H}_n^{(2)}(k_0 r) \\ \frac{E_{\vartheta}^I}{E_0} &= j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{k_0 r} \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \frac{\partial \hat{H}_n^{(2)}(k_0 r)}{\partial (k_0 r)} \\ \frac{Z_0 H_{\varphi}^I}{E_0} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{k_0 r} \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \hat{H}_n^{(2)}(k_0 r) \\ \frac{E_r^{II}}{E_0} &= j \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\mu_i(\mu_i+1)}{(k_0 r)^2} b_i \left[P_{\mu_i}(\cos \vartheta) + c_i Q_{\mu_i}(\cos \vartheta) \right] \hat{J}_{\mu_i}(k_0 r) \\ \frac{E_{\vartheta}^{II}}{E_0} &= \frac{a_0 e^{-j k_0 r} + b_0 e^{j k_0 r}}{k_0 r \sin \vartheta} + j \sum_{i=2}^{\infty} \frac{b_i}{k_0 r} \left[\frac{\partial P_{\mu_i}(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} + c_i \frac{\partial Q_{\mu_i}(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \right] \frac{\partial \hat{J}_{\mu_i}(k_0 r)}{\partial (k_0 r)} \\ \frac{Z_0 H_{\varphi}^{II}}{E_0} &= \frac{a_0 e^{-j k_0 r} - b_0 e^{j k_0 r}}{k_0 r \sin \vartheta} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{b_i}{k_0 r} \left[\frac{\partial P_{\mu_i}(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} + c_i \frac{\partial Q_{\mu_i}(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \right] \hat{J}_{\mu_i}(k_0 r). \end{aligned} \quad (12.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_r^{II}}{E_0} &= \frac{a_0 e^{-j k_0 r} + b_0 e^{j k_0 r}}{k_0 r \sin \vartheta} + j \sum_{i=2}^{\infty} \frac{b_i}{k_0 r} \left[\frac{\partial P_{\mu_i}(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} + c_i \frac{\partial Q_{\mu_i}(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \right] \frac{\partial \hat{J}_{\mu_i}(k_0 r)}{\partial (k_0 r)} \\ \frac{Z_0 H_{\varphi}^{II}}{E_0} &= \frac{a_0 e^{-j k_0 r} - b_0 e^{j k_0 r}}{k_0 r \sin \vartheta} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{b_i}{k_0 r} \left[\frac{\partial P_{\mu_i}(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} + c_i \frac{\partial Q_{\mu_i}(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \right] \hat{J}_{\mu_i}(k_0 r). \end{aligned} \quad (12.14)$$

Zunächst wollen wir die in (12.13) und (12.14) auftretenden speziellen Funktionen erläutern. Mit $P_n(\cos \vartheta)$ bei $n = 1, 3, 5, \dots$ bezeichnen wir die Legendre²-Polynome [JEL66]:

$$\begin{aligned} P_1(\cos \vartheta) &= \cos \vartheta \\ P_3(\cos \vartheta) &= (3 \cos \vartheta + 5 \cos 3\vartheta)/8 \\ P_5(\cos \vartheta) &= (30 \cos \vartheta + 35 \cos 3\vartheta + 63 \cos 5\vartheta)/128, \end{aligned} \quad (12.15)$$

während bei nicht ganzzahligem Index mit $P_{\mu_i}(\cos \vartheta)$ und $Q_{\mu_i}(\cos \vartheta)$ die Kugelfunktionen erster bzw. zweiter Art gemeint sind. Da $Q_n(\cos \vartheta)$ auf der z-Achse, also für $\vartheta = 0$ bzw. $\vartheta = \pi$ eine Singularität aufweist, werden im Freiraum nur Kugelfunktionen der ersten Art angesetzt,

² Adrien-Marie **Legendre** (1752-1833): frz. Mathematiker (Kugelfunktionen, Ausgleichsrechnung, Zahlentheorie)

die bei ganzzahligem $\mu = n$ in die Legendre-Polynome $P_n(\cos \vartheta)$ übergehen. Außerdem sind $\hat{J}_{\mu_i}(k_0 r)$ und $\hat{H}_n^{(2)}(k_0 r)$ die Riccati³-Besselfunktionen bzw. die Riccati-Hankelfunktionen⁴ zweiter Art, mit denen der radiale Wellenausbreitungsterm beschrieben wird. Die Riccati-Besselfunktionen können durch gewöhnliche Besselfunktionen ausgedrückt werden [Abr72]:

$$\hat{J}_{\mu_i}(k_0 r) = \sqrt{\pi k_0 r / 2} J_{\mu_i + 1/2}(k_0 r). \quad (12.16)$$

Für Werte $k_0 r \ll \mu_i + 1/2$ folgt aus (12.16) mit Hilfe der Gammafunktion⁵ [Pie77]

$$\Gamma(x > 0) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{mit} \quad \Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{und} \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad (12.17)$$

eine Darstellung für *kleine* Argumente:

$$\hat{J}_{\mu_i}(k_0 r) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\mu_i + 3/2)} \left(\frac{k_0 r}{2}\right)^{\mu_i + 1} \left[1 - \frac{(k_0 r)^2}{2(2\mu_i + 3)} + \frac{(k_0 r)^4}{8(2\mu_i + 3)(2\mu_i + 5)}\right], \quad (12.18)$$

während für *große* Argumente $k_0 r \gg \mu_i + 1/2$ folgende asymptotische Entwicklung gilt:

$$\hat{J}_{\mu_i}(k_0 r) \approx \sin(k_0 r - \mu_i \pi / 2) - \frac{1 - 4(\mu_i + 1/2)^2}{8k_0 r} \cos(k_0 r - \mu_i \pi / 2). \quad (12.19)$$

Die Riccati-Hankelfunktionen zweiter Art können auf trigonometrische Funktionen zurückgeführt werden, z. B. gilt für $n = 1, 3, 5, \dots$ [Mor53, Arf85]:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1^{(2)}(k_0 r) &= \left[-1 + \frac{j}{k_0 r}\right] e^{-j k_0 r} \\ \hat{H}_3^{(2)}(k_0 r) &= \left[1 - \frac{6j}{k_0 r} - \frac{15}{(k_0 r)^2} + \frac{15j}{(k_0 r)^3}\right] e^{-j k_0 r} \\ \hat{H}_5^{(2)}(k_0 r) &= \left[-1 + \frac{15j}{k_0 r} + \frac{105}{(k_0 r)^2} - \frac{420j}{(k_0 r)^3} - \frac{945}{(k_0 r)^4} + \frac{945j}{(k_0 r)^5}\right] e^{-j k_0 r}. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Die Eigenwerte μ_i und die Konstanten c_i sind durch die Randbedingungen im Doppelkonus $\underline{E}_r^{II}(\vartheta = \vartheta_1) = 0$ und $\underline{E}_r^{II}(\vartheta = \vartheta_2) = 0$ mit $\vartheta_2 = \pi - \vartheta_1$ eindeutig festgelegt. Mit Hilfe von (12.14) folgen die Eigenwertgleichungen:

$$P_{\mu_i}(\cos \vartheta_1) Q_{\mu_i}(\cos \vartheta_2) - P_{\mu_i}(\cos \vartheta_2) Q_{\mu_i}(\cos \vartheta_1) = 0 \quad \text{und} \quad c_i = -\frac{P_{\mu_i}(\cos \vartheta_1)}{Q_{\mu_i}(\cos \vartheta_1)}. \quad (12.21)$$

³ Iacopo Francesco Graf **Riccati** (1676-1754): ital. Privatgelehrter (Geometrie, Astronomie, Differenzialgleichungen)

⁴ Hermann **Hankel** (1839-1873): dt. Mathematiker (Zahlen- u. Funktionentheorie, Zylinderfunktionen)

⁵ Die **Stirlingsche Formel** gibt für $x \gg 1$ eine asymptotische Darstellung der Gammafunktion [Lösch51]

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi/x} x^x \exp\left(-x + \frac{1 - 1/(30x^2)}{12x}\right) \approx \sqrt{2\pi/x} x^x e^{-x} \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \dots\right)$$

James **Stirling** (1692-1770): engl. Mathematiker (Differenzialrechnung, unendliche Reihen)

Die ersten sechs Lösungen von (12.21) wurden numerisch bestimmt und diejenigen mit gerader Nummerierung – also μ_2, μ_4 und μ_6 – sind als Funktion des oberen Konuswinkels ϑ_1 in Bild 12.2 dargestellt. Zum besseren Ablesen wurden zwei verschiedene Skalierungen verwendet.

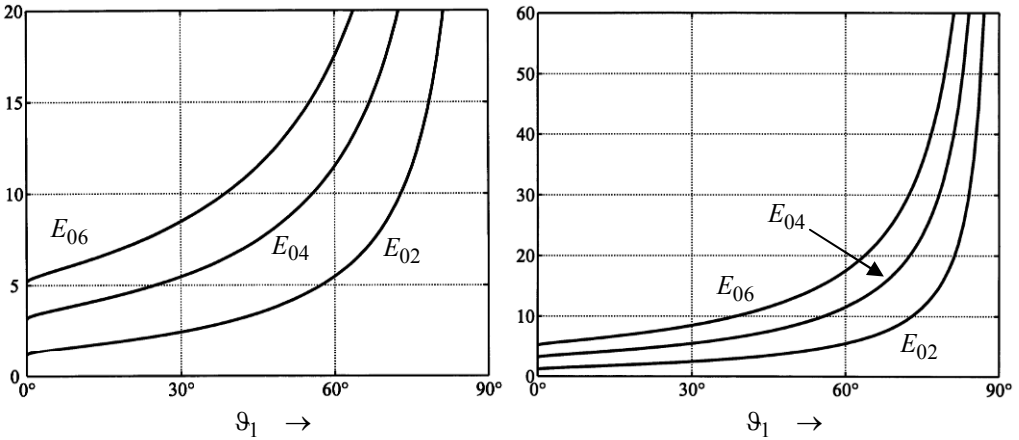


Bild 12.2 Eigenwerte μ_2, μ_4 und μ_6 der ersten drei geraden E_{0i} -Wellen im symmetrischen Doppelkonus

Für große Aperturen (also kleine Öffnungswinkel $\vartheta_1 \ll 1$) streben die Eigenwerte gegen das ganzzahlige (ungerade) Eigenwertspektrum des Freiraums:

$$\lim_{\vartheta_1 \rightarrow 0} \mu_i = i - 1 = 1, 3, 5, \dots \quad (12.22)$$

Die E_{02} -Welle im Doppelkonus hat dann ungefähr den Eigenwert $\mu_2 = 1$. Bei kleinen Aperturen (also für $\pi/2 - \vartheta_1 \ll 1$, im Bogenmaß!) ist nach [Pie77] folgende Näherung möglich:

$$\mu_i \approx \frac{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2i\pi}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \right)^2}}{2} \quad \text{mit } i = 2, 4, 6, \dots \quad (12.23)$$

Den größten Fehler zeigt dabei der erste Eigenwert μ_2 . Für $\vartheta_1 > \pi/6$ liefert (12.23) Schätzwerte für μ_2 mit einem Fehler von höchstens 4,2 %. Alle weiteren Eigenwerte ($\mu_4, \mu_6, \mu_8 \dots$) werden durch (12.23) erheblich genauer wiedergegeben.

Die Koeffizienten $\underline{a}_n$, $\underline{b}_0$ und $\underline{b}_i$ sind in (12.13) und (12.14) die komplexen Amplituden der angeregten Eigenmoden in den Raumteilen I und II, die durch die Methode der **Orthogonalentwicklung** bestimmt werden müssen, während $\underline{a}_0$ die Amplitude der anregenden TEM-Welle ist und z. B. mit $\underline{a}_0 = 1$ vorgegeben wird. Aus der Forderung der Stetigkeit aller Feldstärken in der Apertur bei $r = h$ gewinnt man nach Gleichsetzen der Reihen (12.13) und (12.14) und nach Ausnutzen der Orthogonalität der Eigenfunktionen ein unendlich großes Gleichungssystem für die unendlich vielen unbekannten Wellenamplituden. Zur numerischen Auswertung müssen die Reihen nach einer gewissen Anzahl von Termen abgebrochen werden. Wenn man im Doppelkonus die höchste Ordnung der E_{0i} -Wellen mit einer geraden Zahl i_E bezeichnet und im Freiraum die höchste Ordnung der E_{0n} -Wellen mit der ungeraden Zahl n_E benennt, dann erhält man numerisch verlässliche Ergebnisse, falls ungefähr

$$\frac{1 + i_E}{n_E} \approx \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\pi} \rightarrow i_E \approx \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\pi} n_E - 1 \quad (12.24)$$

gilt – vgl. (6.42). Unter der Voraussetzung (12.24) stimmen nämlich die Abstände der Nullstellen in ϑ -Richtung der jeweils höchsten noch mitgenommenen Eigenwelle beiderseits der Trennfläche bei $r = h$ ungefähr überein. Der Approximationsfehler nimmt natürlich mit steigender Modenanzahl ab, was durch eine Konvergenzstudie während der numerischen Auswertung überprüft werden muss. Zu beachten ist außerdem das **Gibbssche Phänomen** (siehe auch die Abschnitte 6.2.2, 10.2.3 und 11.2.4), das aufgrund der Singularität der zur Aperturkante quer liegenden Feldkomponente $\underline{E}_\vartheta$ auftritt und zu unphysikalischen Oszillationen der Orthogonalreihen an der Raumteilgrenze bei $r = h$ führen kann. Diese mathematischen Überschwinger können durch eine nachträgliche Wichtung (spektrale Taperung) der auszuwertenden Fourier-Reihen praktisch vollständig beseitigt werden, ohne die physikalische Korrektheit der Ergebnisse zu beeinflussen [Kar98a].

Übung 12.1: Hertzscher Dipol und E_{01} -Kugelwelle

- Zeigen Sie, dass die E_{01} -Kugelwelle des Freiraums mit dem Strahlungsfeld des Hertzschen Dipols exakt übereinstimmt.

• Lösung:

Wenn wir in (12.13) nur den ersten Reihenterm mit $n = 1$ betrachten, dann folgt unter Berücksichtigung von (12.15) und (12.20) mit $a_1 = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{\underline{E}_r^I}{\underline{E}_0} &= \frac{2j}{(k_0 r)^2} P_1(\cos \vartheta) \hat{H}_1^{(2)}(k_0 r) = \frac{2j \cos \vartheta}{(k_0 r)^2} \left(-1 + \frac{j}{k_0 r} \right) e^{-jk_0 r} \\ \frac{\underline{E}_\vartheta^I}{\underline{E}_0} &= \frac{j}{k_0 r} \frac{dP_1(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \frac{d\hat{H}_1^{(2)}(k_0 r)}{d(k_0 r)} = \frac{-j \sin \vartheta}{k_0 r} \frac{d}{d(k_0 r)} \left[\left(-1 + \frac{j}{k_0 r} \right) e^{-jk_0 r} \right] \\ \frac{Z_0 \underline{H}_\varphi^I}{\underline{E}_0} &= \frac{1}{k_0 r} \frac{dP_1(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \hat{H}_1^{(2)}(k_0 r) = -\frac{\sin \vartheta}{k_0 r} \left(-1 + \frac{j}{k_0 r} \right) e^{-jk_0 r}.\end{aligned}\quad (12.25)$$

Man sieht leicht, dass (12.25) für $\underline{E}_0 = Z_0 \underline{H}_0$ völlig mit (9.22) übereinstimmt. $\square$

Nach (12.13) gilt für die Transversalfelder der n -ten Harmonischen des Freiraums:

$$\underline{E}_\vartheta^{(n)} \propto \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \quad \text{und} \quad \underline{H}_\varphi^{(n)} \propto \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta}.\quad (12.26)$$

Der aus beiden Komponenten zu bildende Poyntingvektor weist auf der z -Achse bei $\vartheta = 0$ und bei $\vartheta = \pi$ jeweils eine Nullstelle auf, da dort die Ableitung der Legendre-Polynome verschwindet. Die Doppelkonusanterenne strahlt daher – wie auch die kreiszylindrische Linearantenne – nicht entlang ihrer Rotationsachse. Insbesondere für kleine Öffnungswinkel ϑ_1 stimmen die Strahlungsfelder der schlanken symmetrischen Doppelkonusanterenne mit denen der schlanken Dipolantenne (Kapitel 10) sogar gut überein. Zur Berechnung der Fernfeld-Richtdiagramme benutzen wir (12.20) und finden für $k_0 r \rightarrow \infty$ aus (12.13) die Darstellung:

$$\underline{E}_\vartheta^I = Z_0 \underline{H}_\varphi^I = \underline{E}_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{k_0 r} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m a_{2m-1} \frac{\partial P_{2m-1}(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta}.\quad (12.27)$$

Die Hankelfunktionen haben im Fernfeld ein alternierendes Vorzeichen, was mit $m = 1, 2, 3, \dots$ als $(-1)^m$ realisiert wird. Tatsächlich wird in (12.27) mit $n = 2m - 1 = 1, 3, 5, \dots$ nur über die ungeraden Kugelwellen des Freiraums summiert, wie es bei symmetrischer Antenne sein muss.

Aus der Fernfelddarstellung (12.27) gewinnt man schließlich die noch nicht auf ihr Maximum normierte **Richtcharakteristik** der endlich langen Doppelkonusantenne:

$$C(\vartheta) \triangleq \left| \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m a_{2m-1} \frac{\partial P_{2m-1}(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \right|. \quad (12.28)$$

Die ersten drei Terme dieser Reihenentwicklung lauten unter Berücksichtigung von (12.15):

$$\begin{aligned} C(\vartheta) \triangleq & \left| -a_1 \frac{\partial P_1(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} + a_3 \frac{\partial P_3(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} - a_5 \frac{\partial P_5(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \right| = \\ & \left| a_1 \sin \vartheta - \frac{3a_3}{8} (\sin \vartheta + 5 \sin 3\vartheta) + \frac{15a_5}{128} (2 \sin \vartheta + 7 \sin 3\vartheta + 21 \sin 5\vartheta) \right|. \end{aligned} \quad (12.29)$$

Man erkennt jetzt sehr leicht die Nullstellen in Achsenrichtung bei $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ sowie die Formung der Charakteristik durch Überlagerung verschiedener **Multipole**⁶ ungerader Ordnung: Bei $n=1$ spricht man von der Dipolstrahlung, während der Beitrag mit $n=3$ Oktupolstrahlung genannt wird. Allgemein spricht man von einem 2^n -Pol.

Als **Beispiel** betrachten wir in Bild 12.3 die Richtcharakteristik (12.28) einer symmetrischen Doppelkonusantenne der radialen Ausdehnung $h = 4,8 \lambda_0$ mit dem Konuswinkel $\vartheta_1 = 70^\circ$. Der höchste Modenindex im Freiraum ist $n_E = 59$, womit nach (12.24) $i_E = 12$ folgt.

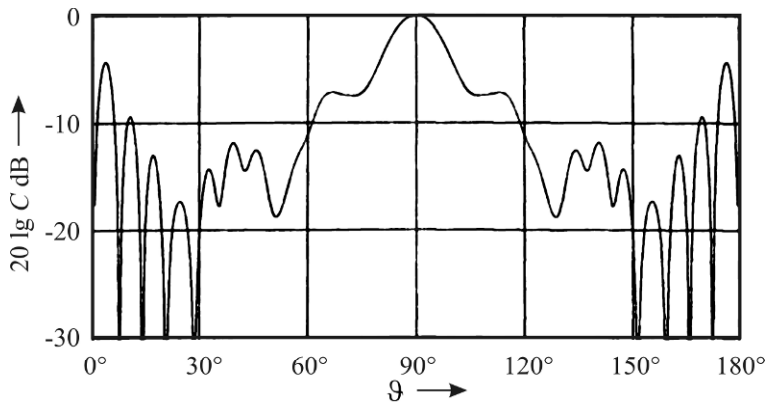


Bild 12.3 Symmetrischer Doppelkonus ($h = 4,8 \lambda_0$, $\vartheta_1 = 70^\circ$), gespeist mit einer TEM-Welle [Kar84a]

Man findet in Bild 12.3 eine Halbwertsbreite von etwa $16,5^\circ$, einen Gewinn von 6,9 dBi und relativ hohe Nebenkeulen. Die Ablösung der elektrischen Feldlinien von einer kürzeren Doppelkonusantenne mit $h = \lambda_0$ (aber mit gleichen Öffnungswinkeln) zeigt Bild 12.4. Im Inneren dominiert die TEM-Welle, während bei der recht kleinen Apertur das Freiraumfeld sehr der bekannten Dipolstrahlung ähnelt (vgl. Kapitel 9.1). Man beachte den stetigen Felddurchgang durch die Apertur. Die Fourier-Reihen wurden im Außenraum mit $n_E = 35$ und innen mit $i_E = 8$ ausgewertet.

⁶ Ursprünglich steht der Begriff Multipol für eine bestimmte räumliche Anordnung elektrostatischer Punktladungen: Monopol $\triangleq 1$ Ladung, Dipol $\triangleq 2$ Ladungen, Quadrupol $\triangleq 4$ Ladungen, Oktupol $\triangleq 8$ Ladungen, Hexadekupol $\triangleq 16$ Ladungen, usw.

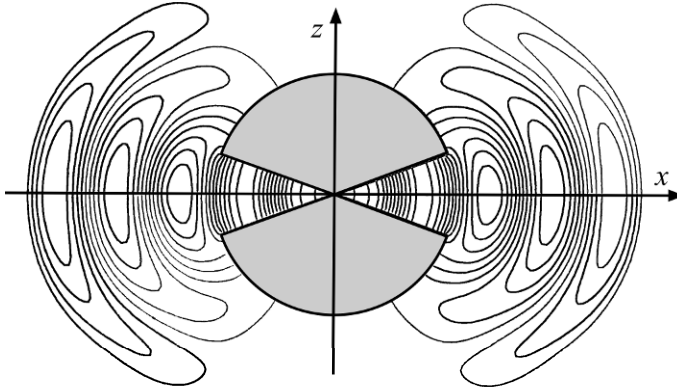


Bild 12.4 Symmetrischer Doppelkonus ($h = \lambda_0$, $\vartheta_1 = 70^\circ$), gespeist mit einer TEM-Welle [Kar84b]

Die Ausbreitung von Kugelwellen erfolgt ohne abrupte Grenzfrequenz. Man kann eher einen gleitenden Übergang vom Sperr- in den Durchlassbereich feststellen. Dazu wird in [Ung81] ein Grenzradius definiert, den wir in Übung 12.2 näher untersuchen wollen.

Übung 12.2: Wellenimpedanzen und Grenzradius

- Untersuchen Sie die Feldwellenimpedanzen der E_{0n} – Wellen des freien Raumes.
- **Lösung:**

Aus (12.13) entnehmen wir die transversalen Felder und bilden den Quotienten, woraus wir sofort die **Feldwellenimpedanzen** der E_{0n} – Freiraumwellen ableiten können:

$$\underline{Z}_F^{E_{0n}} = \frac{\underline{E}_9^{(n)}}{\underline{H}_\varphi^{(n)}} = j Z_0 \frac{\frac{\partial \hat{H}_n^{(2)}(k_0 r)}{\partial (k_0 r)}}{\hat{H}_n^{(2)}(k_0 r)} = j Z_0 \left(\frac{\hat{H}_{n-1}^{(2)}(k_0 r)}{\hat{H}_n^{(2)}(k_0 r)} - \frac{n}{k_0 r} \right). \quad (12.30)$$

Wir geben das Ergebnis von (12.30) für $n = 1$ und $n = 3$ explizit an:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{E}_9^{(1)}}{\underline{H}_\varphi^{(1)}} &= Z_0 \left[1 + \frac{1}{j k_0 r - (k_0 r)^2} \right] \\ \frac{\underline{E}_9^{(3)}}{\underline{H}_\varphi^{(3)}} &= Z_0 \left[1 + \frac{45 + 30 j k_0 r - 6 (k_0 r)^2}{15 j k_0 r - 15 (k_0 r)^2 - 6 j (k_0 r)^3 + (k_0 r)^4} \right]. \end{aligned} \quad (12.31)$$

In Tabelle 12.1 ist derjenige normierte Radius $k_0 r_g$ angegeben, an dem Real- und Imaginärteil der Klammerausdrücke in (12.31) betragsgleich werden.

Tabelle 12.1 Normierter Grenzradius $k_0 r_g \approx n$ der ersten E_{0n} – Kugelwellen des freien Raumes

n	1	2	3	4	5	6	7
$k_0 r_g$	1	1,96956	2,94077	3,91468	4,89093	5,86912	6,84889

Für $k_0 r < n$ überwiegt der Blindanteil der Feldwellenimpedanz (12.30), während für $k_0 r > n$ ihr Wirkanteil dominiert. Der **Grenzradius** trennt den Bereich der Blindenergie-

speicherung im Nahfeld von der die Antenne verlassenden Wirkenergie, die in das Fernfeld abgestrahlt wird. Für $n=1$ erhält man den Grenzradius der Dipolstrahlung $k_0 r_g = 1$, den wir übrigens schon in Abschnitt 9.1 bestimmt hatten. In Bild 12.5 sehen wir – getrennt nach Betrag und Phase – die Kurven der normierten Feldwellenimpedanzen der ersten sieben E_{0n} – Freiraumwellen ($n=1,2,\dots,7$).

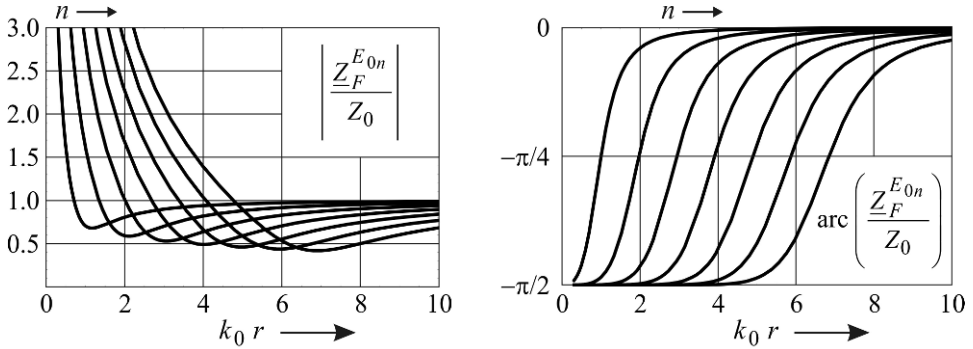


Bild 12.5 Darstellung von Betrag und Phase der normierten Feldwellenimpedanzen der E_{0n} – Freiraumwellen (12.30) für $n=1,2,\dots,7$ als Funktion des normierten Abstandes $k_0 r$ von der Antenne

Die Betragskurven zeigen am Grenzradius bei $k_0 r_g \approx n$ eine scharfe Biegung und steigen bei kleineren Abständen steil an. Die Feldstärken des Nahfeldes münden für $k_0 r \rightarrow 0$ in eine Singularität, wie die Entwicklung von (12.30) in eine Taylor-Reihe zeigt:

$$\frac{Z_F^{E_{0n}}}{j Z_0} = \frac{\hat{H}_{n-1}^{(2)}(k_0 r)}{\hat{H}_n^{(2)}(k_0 r)} - \frac{n}{k_0 r} \approx \frac{k_0 r}{2n-1} - \frac{n}{k_0 r}. \quad (12.32)$$

E- und H-Feld sind im Nahfeld nahezu um $\pi/2$ phasenverschoben, tragen praktisch nur zur Blindleistung bei und verursachen an der Antennenoberfläche spürbare Wärmeverluste. Am Grenzradius werden die Phasenwinkel gleich $-\pi/4$, während sie für größere Abstände gegen null gehen. Im Fernfeld kommt also nur noch Wirkleistung an. $\square$

12.1.3 Näherungslösung bei kleinem Reflexionsfaktor

Für nicht zu kurze Konuslängen h dürfen wir annehmen, dass im Konusinnenraum die radiale elektrische Feldkomponente $\underline{E}_r^{II}$ im Vergleich zum Transversalfeld $\underline{E}_9^{II}$ nur einen unbedeutenden Beitrag liefert [Borg55]. Wenn wir daher im Konusinnenraum nur die TEM-Grundwelle berücksichtigen und alle höheren E_{0i} – Wellen vernachlässigen, können wir in der Trennfläche zwischen Raumteil I und Raumteil II (Bild 12.1) auch nur noch die Stetigkeit der transversalen Felder fordern. Aus (12.13) und (12.14) folgt daher für das elektrische Feld bei $r=h$ im Bereich der Aperturöffnung $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \pi - \vartheta_1$:

$$\frac{a_0 e^{-j k_0 h} + b_0 e^{j k_0 h}}{\sin \vartheta} = j \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \frac{\partial \hat{H}_n^{(2)}(k_0 h)}{\partial (k_0 h)}, \quad (12.33)$$

während auf den äußeren Kugelschalen bei $\vartheta \leq \vartheta_1$ und $\vartheta \geq \pi - \vartheta_1$ das dort tangential E-Feld verschwinden muss – wie in diesem Winkelbereich natürlich auch im Inneren der Antenne:

$$0 = j \sum_{n=1}^{\infty} \underline{a}_n \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \frac{\partial \hat{H}_n^{(2)}(k_0 h)}{\partial(k_0 h)}. \quad (12.34)$$

Für das **magnetische Feld** stellen wir im Bereich der Apertur $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \pi - \vartheta_1$ auch eine Stetigkeitsforderung:

$$\frac{\underline{a}_0 e^{-j k_0 h} - \underline{b}_0 e^{j k_0 h}}{\sin \vartheta} = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{a}_n \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \hat{H}_n^{(2)}(k_0 h). \quad (12.35)$$

Wir multiplizieren (12.33) und (12.34) mit $\sin \vartheta \partial P_m(\cos \vartheta) / \partial \vartheta$ und integrieren über alle ϑ :

$$\begin{aligned} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta_1} 0 d\vartheta + \left(\underline{a}_0 e^{-j k_0 h} + \underline{b}_0 e^{j k_0 h} \right) \int_{\vartheta=\vartheta_1}^{\pi-\vartheta_1} \frac{\partial P_m(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} d\vartheta + \int_{\vartheta=\pi-\vartheta_1}^{\pi} 0 d\vartheta = \\ = j \sum_{n=1}^{\infty} \underline{a}_n \frac{\partial \hat{H}_n^{(2)}(k_0 h)}{\partial(k_0 h)} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{\partial P_m(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \quad (12.36)$$

Die **Orthogonalitätsrelation** der Ableitungen der Legendre-Polynome [JEL66] lautet unter Verwendung des Kronecker-Symbols δ_{mn} , das für $m = n$ den Wert eins annimmt und ansonsten gleich null wird:

$$\int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{\partial P_m(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = \delta_{mn} \frac{2n(n+1)}{2n+1} = \begin{cases} \frac{2n(n+1)}{2n+1} & \text{für } m = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (12.37)$$

Mit $P_n(-\cos \vartheta_1) - P_n(\cos \vartheta_1) = -2 P_n(\cos \vartheta_1)$, falls $n = 1, 3, 5, \dots$ ungerade ist [Hei70], erhalten wir aus (12.36) folgende Beziehung für die gesuchten $\underline{a}_n$:

$$\left(\underline{a}_0 e^{-j k_0 h} + \underline{b}_0 e^{j k_0 h} \right) P_n(\cos \vartheta_1) = -j \underline{a}_n \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{\partial \hat{H}_n^{(2)}(k_0 h)}{\partial(k_0 h)}. \quad (12.38)$$

Die Magnetfeldgleichung (12.35) integrieren wir direkt – und zwar im Bereich $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \pi - \vartheta_1$:

$$\left(\underline{a}_0 e^{-j k_0 h} - \underline{b}_0 e^{j k_0 h} \right) \int_{\vartheta=\vartheta_1}^{\pi-\vartheta_1} \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{a}_n \hat{H}_n^{(2)}(k_0 h) \int_{\vartheta=\vartheta_1}^{\pi-\vartheta_1} \frac{\partial P_n(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta} d\vartheta, \quad (12.39)$$

woraus wir wieder für $n = 1, 3, 5, \dots$ neben (12.38) eine zweite Bestimmungsgleichung erhalten:

$$\left(\underline{a}_0 e^{-j k_0 h} - \underline{b}_0 e^{j k_0 h} \right) Z_L = -\frac{Z_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \underline{a}_n \hat{H}_n^{(2)}(k_0 h) P_n(\cos \vartheta_1). \quad (12.40)$$

Dabei haben wir als Abkürzung den Leitungswellenwiderstand (12.6) der TEM-Welle

$$Z_L = \frac{Z_0}{\pi} \ln \left(\cot \frac{\vartheta_1}{2} \right) \quad (12.41)$$

eingesetzt. Wir lösen nun (12.38) nach $\underline{a}_n$ auf und setzen das Ergebnis in (12.40) ein:

$$\frac{a_0 - b_0 e^{2jk_0 h}}{a_0 + b_0 e^{2jk_0 h}} Z_L = -j \frac{Z_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{\hat{H}_n^{(2)}(k_0 h)}{\frac{\partial \hat{H}_n^{(2)}(k_0 h)}{\partial (k_0 h)}} [P_n(\cos \vartheta_1)]^2. \quad (12.42)$$

Mit bekannten Mitteln der Leitungstheorie [Ung80] können wir mit dem Reflexionsfaktor im Speisepunkt $\underline{r}_E = b_0/a_0$ – wie in Bild 12.6 veranschaulicht – die linke Seite von (12.42) noch weiter umformen:

$$\frac{1 - \underline{r}_E e^{2jk_0 h}}{1 + \underline{r}_E e^{2jk_0 h}} = \frac{1 - \underline{r}_A}{1 + \underline{r}_A} = \frac{Z_L}{Z_A}. \quad (12.43)$$

Dabei ist $\underline{r}_A$ der Aperturreflexionsfaktor und Z_A symbolisiert die Wirkung des freien Raums als Abschlussimpedanz der Konusleitung. Der Aperturreflexionsfaktor $\underline{r}_A$ drückt die Fehlanpassung des freien Raums an den Leitungswellenwiderstand Z_L der Doppelkonusleitung aus.

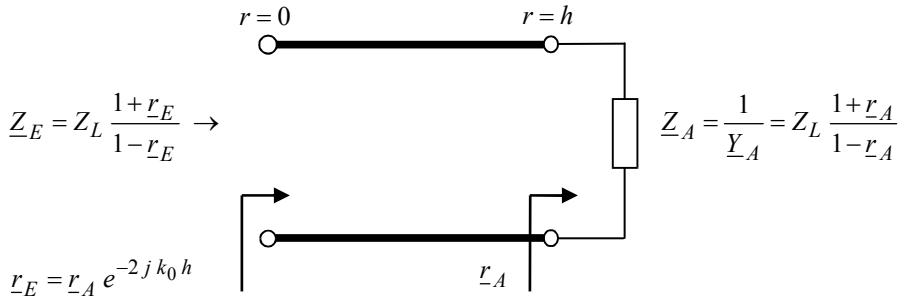


Bild 12.6 Transformation von Impedanzen und Reflexionsfaktoren auf der Doppelkonusleitung

Mit (12.43) erhalten wir aus (12.42) die **Abschlussadmittanz** in der Apertur bei $r = h$:

$$\underline{Y}_A = -j \frac{Z_0}{\pi Z_L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{\hat{H}_n^{(2)}(k_0 h)}{\frac{\partial \hat{H}_n^{(2)}(k_0 h)}{\partial (k_0 h)}} [P_n(\cos \vartheta_1)]^2. \quad (12.44)$$

Mit (12.30) können wir für (12.44) auch

$$\underline{Y}_A = \frac{Z_0^2}{\pi Z_L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \underline{Y}_F^{E_{0n}}(k_0 h) [P_n(\cos \vartheta_1)]^2 \quad (12.45)$$

schreiben. Die Abschlussadmittanz der Doppelkonusleitung entsteht nach (12.45) aus einer gewichteten Summe der Feldwellenadmittanzen aller E_{0n} – Freiraumwellen, also aus einer Art Parallelschaltung. Man beachte dazu die Darstellung des Verlaufs von $\underline{Z}_F^{E_{0n}}(k_0 r)$ in Bild 12.5 und die Darstellung für kleine Argumente (12.32), woraus man erkennt, dass für sehr kurze Leitungen die Reihe (12.45) etwa quadratisch konvergiert $\propto 1/n^2$, während für längere Leitungen nur noch lineare Konvergenz $\propto 1/n$ zu erwarten ist. Aus (12.43) folgt der **TEM-Reflexionsfaktor** $\underline{r}_E$ im Speisepunkt:

$$\underline{r}_E = \underline{r}_A e^{-2jk_0 h} = \frac{1 - Z_L \underline{Y}_A}{1 + Z_L \underline{Y}_A} e^{-2jk_0 h} \quad (12.46)$$

Mit $\underline{Y}_A$ nach (12.44) und $\underline{r}_E$ aus (12.46) sind wegen (12.38) dann auch alle **Anregungskoeffizienten** der E_{0n} -Freiraumwellen bekannt, wenn wir uns die Generatoramplitude z. B. mit $\underline{a}_0 = 1$ vorgeben:

$$\underline{a}_n = j \frac{2n+1}{n(n+1)} \underline{a}_0 \frac{e^{-jk_0 h} + \underline{r}_E e^{jk_0 h}}{\frac{\partial \hat{H}_n^{(2)}(k_0 h)}{\partial (k_0 h)}} P_n(\cos \vartheta_1) \quad (12.47)$$

womit das Feldproblem – zumindest im Rahmen unserer Näherung – geschlossen gelöst wurde. Im **Fernfeld** bei $k_0 r \gg 1$ erhalten wir mit (12.27) und der Abkürzung

$$\hat{E} = j \underline{E}_0 \underline{a}_0 \frac{e^{-jk_0 h} + \underline{r}_E e^{jk_0 h}}{2} \frac{e^{-jk_0 r}}{k_0 r} \quad (12.48)$$

schließlich bei Summation über alle $m = 1, 2, 3, \dots$ mit $n = 2m - 1 = 1, 3, 5, \dots$:

$$\underline{E}_\vartheta^I(\vartheta) = \hat{E} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (4m-1)}{m(2m-1)} \frac{P_{2m-1}(\cos \vartheta_1) \frac{\partial P_{2m-1}(\cos \vartheta)}{\partial \vartheta}}{\frac{\partial \hat{H}_{2m-1}^{(2)}(k_0 h)}{\partial (k_0 h)}} \quad (12.49)$$

Mit diesen Ergebnissen können wir die Feldstärke an jedem Punkt des Raumes berechnen. Insbesondere erhalten wir analog zu (12.28) eine Näherung für die Richtcharakteristik $C(\vartheta)$ der Antenne. Die Vernachlässigung höherer Wellentypen auf der Konusleitung im Raumteil II ist nur dann gerechtfertigt, wenn der Aperturreflexionsfaktor der Grundwelle nicht zu groß ist. Im Vergleich mit der exakten Lösung [Kar84a] findet man tatsächlich gute Übereinstimmung, falls etwa $|\underline{r}_A| \leq 0,07$ bleibt. In diesen Fällen bestimmt die TEM-Welle praktisch alleine den Energieaustausch mit dem Freiraum, da ihre auf die Apertur einfallende Leistung dann mindestens zu $1 - |\underline{r}_A|^2 = 99,5\%$ abgestrahlt wird.

Ein mit der Näherungsmethode berechnetes **Beispiel** zeigt Bild 12.7. Die Konuslänge $h = 2\lambda_0$ führt bei einem Konuswinkel $\vartheta_1 = 50^\circ$ wegen $a = 2h \cos \vartheta_1$ zu einer Aperturhöhe $a = 2,57\lambda_0$. Der Reflexionsfaktor der Grundwelle steigt bei kleinen und auch bei großen Konuswinkeln ϑ_1 steil an – am Designwinkel beträgt er $|\underline{r}_A| = 0,018$.

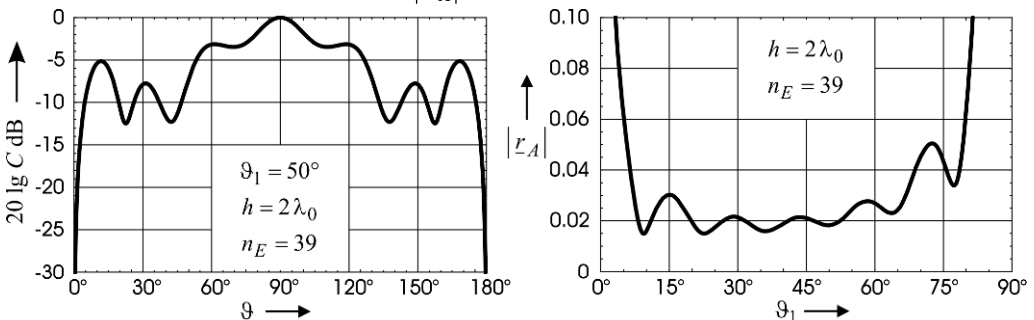


Bild 12.7 Doppelkonusantenne mit Richtdiagramm und Reflexionsfaktor der TEM-Welle

Im Vergleich mit Bild 12.3 zeigt sich ein ähnlicher Verlauf des Richtdiagramms, allerdings mit verbreiterter Hauptkeule und höherem Nebenkeulenpegel. Der Gewinn ist daher nur moderat und beträgt $G = 2,44$ bzw. $3,9$ dBi. Wir wollen schließlich für den festen Öffnungswinkel $\vartheta_1 = 50^\circ$ die Frequenzabhängigkeit der Eingangsimpedanz im Speisepunkt bei $r = 0$ als Funktion der Konuslänge h/λ_0 untersuchen. Dazu konstruieren wir eine Ortskurve in der komplexen Ebene mit dem Parameter $0,1 \leq h/\lambda_0 \leq 2$. Aus Bild 12.6 folgt:

$$\underline{Z}_E = R_E + jX_E = Z_L \frac{1 + r_A e^{-2j k_0 h}}{1 - r_A e^{-2j k_0 h}}. \quad (12.50)$$

Damit nähert sich $\underline{Z}_E$ bei abnehmendem Reflexionsfaktor $r_A \rightarrow 0$ dem Wellenwiderstand Z_L der Leitung an. Die Aperturhöhe wird wegen $a = 2h \cos \vartheta_1$ bei längeren Antennen nämlich größer, wodurch sich ein sanfterer Übergang der Konuswelle in den Freiraum ergibt. Bei kleinem Reflexionsfaktor wird fast die gesamte Quellenleistung abgestrahlt und der freie Raum wirkt wie ein reflexionsfreier Leitungsabschluss. Man erkennt in Bild 12.8 den sehr guten Breitbandcharakter einer Doppelkonusantenne, da sich die Ortskurve dem Anpassungspunkt spiralförmig immer mehr annähert (siehe auch [Gei94]). Ferner stellt sich das für Leitungen typische Transformationsverhalten ein, dass nämlich pro halber Wellenlänge der Anpassungspunkt einmal umrundet wird. Nach (12.1) wird mit $l = 2h$ die untere Frequenzgrenze

$$f_u \gtrsim \frac{c_0}{2l} = \frac{c_0}{4h} \quad (12.51)$$

durch die Konuslänge h bestimmt. Nach [Küh64] sollte h etwa 20 % größer als ein Viertel der größten Betriebswellenlänge sein, d. h. es gilt:

$$\boxed{\frac{h}{\lambda_u} = 0,3}. \quad (12.52)$$

Dieser Punkt ist in Bild 12.8 markiert. Die Anpassung ist dort bereits zufrieden stellend.

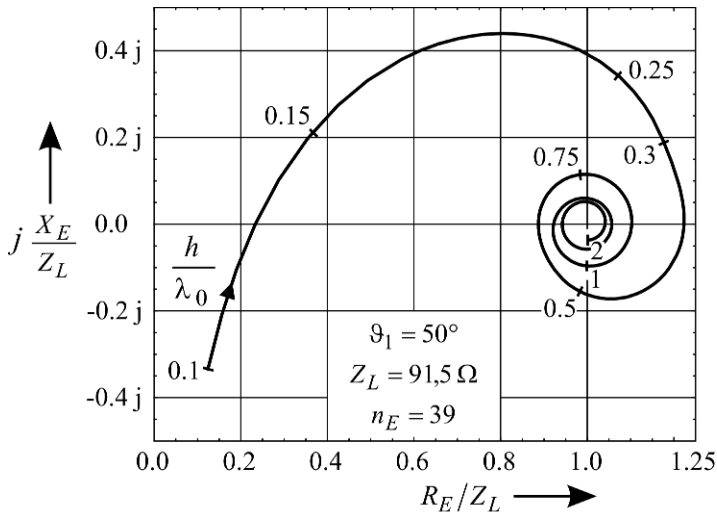


Bild 12.8 Komplexe – auf den Leitungswellenwiderstand Z_L normierte – Eingangsimpedanz $\underline{Z}_E = R_E + jX_E$ einer Doppelkonusantenne mit festem $\vartheta_1 = 50^\circ$ als Funktion der Konuslänge h/λ_0

12.1.4 Doppelkonusantenne mit optimiertem Gewinn

Das Strahlungsverhalten einer Doppelkonusantenne hängt von ihrem Öffnungswinkel $0 < \vartheta_1 < \pi/2$ und ihrer radialen Länge h ab. Aus diesen beiden Werten errechnet man die Höhe der Apertur wie $a = 2h \cos \vartheta_1$. Verkleinert man nun bei festem h den Konuswinkel ϑ_1 , dann wächst zwar die Aperturhöhe a und damit zunächst auch der Gewinn. Allerdings bewirkt – nach Bild 12.9 – die ebenfalls wachsende Abweichung $h - \rho$ eine ungleichmäßige Phasenbelegung in der Apertur und damit teilweise destruktive Interferenz, wodurch nach Überschreiten eines Maximums die Gewinnkurve für noch kleinere ϑ_1 wieder absinkt. Ähnlich wie bei einem

Sektorhorn in der E-Ebene (siehe (14.31)) hat sich als günstige Dimensionierung für hohen Richtfaktor

$$a = \sqrt{2\lambda_0 \rho} \quad (\text{bei TEM-Anregung}) \quad (12.53)$$

erwiesen. Anhand von Bild 12.9 oder auch mit (14.3) kann man zeigen, dass gilt:

$$\rho = \frac{a/2}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1\right)} = \frac{a}{2} \tan \vartheta_1. \quad (12.54)$$

Setzt man (12.54) in (12.53) ein, so kann für optimalen Richtfaktor auch gefordert werden:

$$a = \lambda_0 \tan \vartheta_1. \quad (12.55)$$

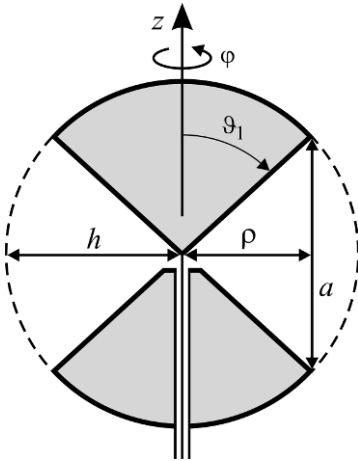


Bild 12.9 Symmetrischer Doppelkonus mit radialer Länge h , Aperturhöhe a und Aperturtiefe ρ

Umfangreiche Untersuchungen des Fernfeldes (12.49) haben gezeigt, dass der Richtfaktor – bei gegebener Bautiefe ρ – maximal wird, wenn der Gangunterschied $h - \rho$ zwischen Aperturmitte bei $\vartheta = \pi/2$ und Aperturkante bei $\vartheta = \vartheta_1$ etwa $\lambda_0/4$ beträgt, was durch (12.53) gerade sichergestellt wird. Den optimalen Konuswinkel finden wir dann mit (12.55) oder der Näherung:

$$\vartheta_1 \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2h/\lambda_0}} \quad (\text{gültig für } h/\lambda_0 \geq 3). \quad (12.56)$$

Für Aperturtiefen $\rho \geq 2\lambda_0$ gewinnen wir im Einklang mit [Jas61] folgende empirische Abschätzung für den zu erwartenden Gewinn einer Doppelkonusantenne, falls sie mit einer TEM-Welle angeregt wird und bei ihrem Aufbau (12.53) bzw. (12.55) berücksichtigt wurden:

$$G \approx 2,36 \sqrt{\frac{\rho}{\lambda_0}}. \quad (12.57)$$

Im logarithmischen Maßstab erhalten wir daraus (ebenfalls für $\rho \geq 2\lambda_0$):

$$\frac{g}{\text{dBi}} \approx 3,73 + 5 \lg \frac{\rho}{\lambda_0}. \quad (12.58)$$

Wegen der Rundstrahlung in der Äquatorebene sind nur mäßig große Gewinnwerte erreichbar. Für einen Gewinn von zum **Beispiel** $g = 9$ dBi folgt aus (12.58) zunächst die notwendige Aperturtiefe $\rho/\lambda_0 = 11,32$. Mit (12.53) wird die Aperturhöhe $a/\lambda_0 = 4,76$ und aus (12.55) erhalten wir den Konuswinkel $\vartheta_1 = 78,13^\circ$. Schließlich folgt die radiale Länge $h/\lambda_0 = 11,57$.

Die große Hornlänge macht eine Summation von relativ vielen Freiraumwellen nötig, damit die Orthogonalreihen konvergieren. Im Vergleich mit dem Richtdiagramm einer deutlich kürzeren Antenne bei vergleichbarem Öffnungswinkel aus Bild 12.3 ($h = 4,8 \lambda_0$, $\vartheta_1 = 70^\circ$) zeigen sich in Bild 12.10 wesentlich geringere Nebenkeulen, was für den höheren Gewinn der optimierten Anordnung spricht. Der Reflexionsfaktor der Grundwelle steigt bei kleinen und auch bei großen Konuswinkeln ϑ_1 steil an. Am Designwinkel $\vartheta_1 = 78,13^\circ$ beträgt er gerade $|r_A| = 0,015$.

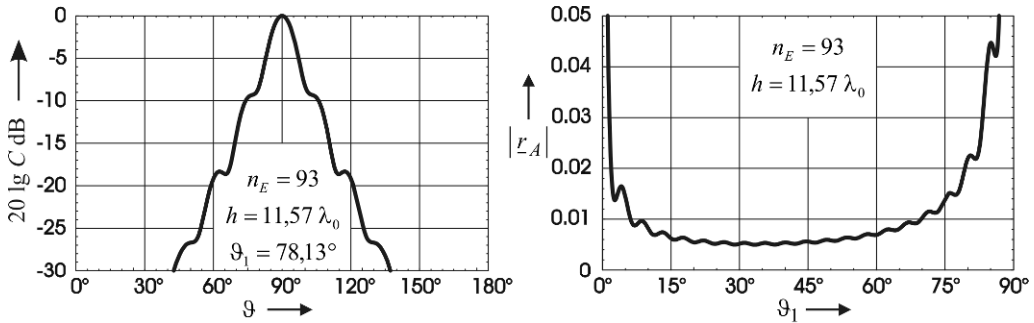


Bild 12.10 TEM erregte Doppelkonusantenne mit optimiertem Gewinn nach (12.58) für $g = 9$ dBi

Der tatsächliche Gewinn der Doppelkonusantenne aus Bild 12.10 kann mit (7.31) und (7.32) wie folgt berechnet werden:

$$G = \frac{4\pi}{2\pi \int_{\vartheta=0}^{\pi} C^2(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta} = 7,90. \quad (12.59)$$

Nach einer numerischen Quadratur des Nenners in (12.59) erhalten wir $G = 7,90 \triangleq 8,98$ dBi, was mit dem erwünschten Wert von 9 dBi übereinstimmt. Man vergleiche das Richtdiagramm aus Bild 12.10 mit demjenigen eines Pyramidenhorns mit optimiertem Gewinn in Bild 14.9.

Doppelkonusantennen werden als **Breitbandantennen** bei Frequenzen oberhalb von etwa 50 MHz eingesetzt. Die Konuslänge wird dann nach (12.52) kleiner als 180 cm. Mit diesem Antennentyp lassen sich sehr hohe Bandbreiten von etwa 10:1 erzielen.

12.2 Logarithmisch-periodische Antenne

Während eine Yagi-Uda-Antenne (Abschnitt 11.2.6) recht schmalbandig ist (relative Bandbreite $B_r \approx 10\%$), lassen sich aus Dipolen auch breitbandige Längsstrahler mit Bandbreiten bis $B \approx 6:1$ aufbauen. Vertreter einer solchen Breitbandantenne ist nach Bild 12.11 die **logarithmisch-periodische Dipolantenne (LPDA)**, die an der Stelle des kleinsten Strahlers mit einer durchgängigen Speiseleitung gespeist wird. Aufgrund der speziellen Bauweise variieren ihre elektrischen Eigenschaften periodisch mit dem Logarithmus der Frequenz [Sti84].

Nach dem von der Yagi-Uda-Antenne bekannten Prinzip wirken bei einer LPDA diejenigen Elemente, die effektiv länger als $\lambda/2$ sind, als Reflektoren und diejenigen Elemente, die kürzer als $\lambda/2$ sind, als Direktoren. Es werden jedoch stets alle Elemente aktiv gespeist, weswegen keine parasitären (nur strahlungsgekoppelte) Elemente existieren. Die jeweilige Betriebsfrequenz bestimmt den „neutralen“ Strahler der Antenne, der sich gerade auf $\lambda/2$ -Resonanz befindet. Die Strahlungszone in dessen Umgebung wandert mit der Betriebsfrequenz längs der

Antennenachse (Bild 12.12). Die Halbwertsbreite einer logarithmisch-periodischen Antenne ist relativ groß, weil bei der jeweiligen Betriebsfrequenz nur wenige Elemente innerhalb der Strahlungszone zur Abstrahlung beitragen. Das Prinzip der Selbstähnlichkeit und der Wanderung der Strahlungszone auf der Antennenstruktur liegt den meisten Breitbandantennen zu Grunde.

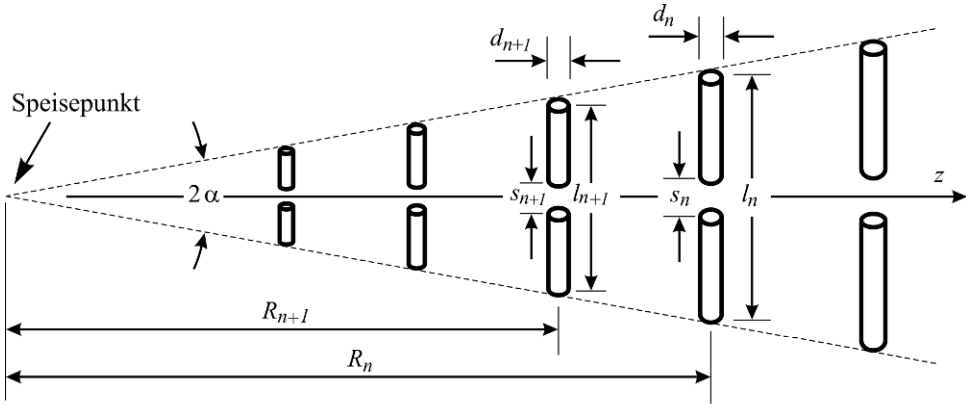


Bild 12.11 Breitbandige, längsstrahlende, logarithmisch-periodische Antenne [Bal05] aus aktiv gespeisten Einzelstrahlern verschiedener Länge, Dicke und Anordnung nach (12.60)

Es nehmen Länge und Abstand der Dipole untereinander in gleich bleibendem Verhältnis τ bei Annäherung an den Speisepunkt ab, d. h. es gilt (Strahlensatz):

$$\tau = \frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{d_{n+1}}{d_n} < 1. \quad (12.60)$$

Neben dem Skalierungsfaktor τ definieren wir noch den Abstandsfaktor:

$$\sigma = \frac{R_n - R_{n+1}}{2l_n} > 0. \quad (12.61)$$

Aus (12.60) folgt $R_n - R_{n+1} = (1 - \tau) R_n$, weswegen wir mit $\tan \alpha = l_n / (2R_n)$ für (12.61) auch schreiben können:

$$\sigma = \frac{(1 - \tau) R_n}{2l_n} = \frac{1 - \tau}{4} \cot \alpha, \quad (12.62)$$

womit durch Wahl von τ und σ auch der Steigungswinkel α festgelegt ist:

$$\alpha = \arctan \frac{1 - \tau}{4\sigma}. \quad (12.63)$$

Gebräuchliche Werte für Skalierungs- und Abstandsfaktor liegen im Bereich $0,78 \leq \tau \leq 0,97$ und $0,13 \leq \sigma \leq 0,19$. Das optimale σ für maximalen Gewinn bei gegebenem τ ist nach [Rot01]:

$$\sigma = 0,258\tau - 0,066. \quad (12.64)$$

Ein zu großes σ macht sich durch Anstieg der Diagrammnebenkeulen bemerkbar. Unter Würdigung der Ergebnisse verschiedener Quellen [Car61, But76, Bal05, Kra88] können für den bei optimalem σ nach (12.64) zu erwartenden Gewinn $g = 10 \lg G$ dBi folgende quadratische Näherungsformeln angegeben werden:

$$g = 93,6\tau^2 - 132\tau + 51,9, \quad (g \text{ in dBi}) \quad (12.65)$$

bzw. kann ein erwünschter Gewinn mit folgendem Skalierungsfaktor erzielt werden:

$$\tau = -\frac{g^2}{321} + \frac{g}{12} + 0,407 \quad (\text{g in dBi}) \quad (12.66)$$

Mit $0,78 \leq \tau \leq 0,97$ sind nach (12.65) Gewinnwerte von etwa 6–12 dBi erreichbar. Zur Festlegung der Strahlerzahl definieren wir schließlich die **Strukturbandbreite** als Verhältnis der Baulängen vom längsten zum kürzesten Strahler:

$$B_s = l_1 / l_N \quad (12.67)$$

Im Allgemeinen wählt man die Länge des längsten Dipols $l_1 \approx 0,54 \lambda_u$, während der kürzeste eine Länge von etwa $l_N \approx \lambda_o / 3$ aufweisen sollte [Rot01]. Die Anzahl N der Dipole ist aber nicht mehr frei wählbar, sondern ist durch die Geometrie der Antenne bereits festgelegt. Nach (12.60) gilt nämlich $l_N = \tau^{N-1} l_1$, womit wir die **Anzahl der Elemente** berechnen können:

$$\tau^{N-1} = \frac{l_N}{l_1} = \frac{1}{B_s} \Rightarrow N = 1 - \frac{\ln B_s}{\ln \tau} \quad (\text{auf ganze Zahl runden!}). \quad (12.68)$$

Wegen des Rundens in (12.68), muss die Strukturbandbreite noch einmal **nachjustiert** werden, d. h. es gilt jetzt $B_s = \tau^{1-N}$. Die **Baulänge** L in z-Richtung ergibt sich nach Bild 12.11 aus:

$$\tan \alpha = \frac{(l_1 - l_N)/2}{L} \Rightarrow L = \frac{l_1 - l_N}{2} \cot \alpha = \frac{l_1}{2} \left(1 - \frac{1}{B_s} \right) \cot \alpha \quad (12.69)$$

Für hohen Gewinn muss nach (12.65) der Skalierungsfaktor τ groß sein, d. h. die geometrischen Eigenschaften der Antenne dürfen sich nur langsam ändern, was zwangsläufig zu kleinen Steigungswinkeln und großen Baulängen mit vielen Teilstrahlern führt. In der Praxis ist die effektiv nutzbare **Bandbreite** $B = f_o / f_u$ einer LPDA kleiner als die Strukturbandbreite [Dub77]

$$B = \eta_B B_s = \frac{B_s}{1,1 + 30,8 (1 - \tau) \sigma} \quad (12.70)$$

Sie wird nämlich durch die Anzahl $N_r = (\ln \eta_B) / (\ln \tau)$ resonanter Strahler in der strahlenden Zone begrenzt [Vit73]. Die Ausdehnung der strahlenden Zone erstreckt sich über alle Dipole, deren Speisestrompegel höchstens 10 dB kleiner ist als derjenige des Dipols mit Maximalstrom.

Logarithmisch-periodische Dipolantennen werden an der Stelle der kleinsten Strahlerlänge symmetrisch gespeist. Dazu sind zwei Varianten gebräuchlich:

- Mit einer durchgehenden Speiseleitung (die meist aus zwei parallelen Stäben aufgebaut wird) erreicht man ein Längsstrahlverhalten in Richtung der längeren Elemente.
- Durch Verdrehen der Speiseleitung wird jedem Nachbarelement eine zusätzliche Phasenverschiebung von 180° gegeben, um ein Strahlungsverhalten in „Rückwärtsrichtung“ – also in Richtung der kürzeren Elemente – zu erzwingen.

Der reelle **Eingangswiderstand** R_E am Beginn der Speiseleitung liegt in der Größenordnung ihres Wellenwiderstandes Z_L , da die Speiseleitung durch die aktive Zone praktisch reflexionsfrei abgeschlossen wird. Zur Berechnung von R_E benötigen wir den Wellenwiderstand Z_D entlang eines jeden Halbwellendipols. Da dieser aber nicht konstant ist, findet man in [Sieg34, Zuh53] – abhängig vom Schlankheitsgrad l/d – einen über der Länge l gemittelten Wert:

$$Z_D = 120 \, \Omega \left(\ln \frac{l}{d} - 0,631 \right). \quad (12.71)$$

Mit einem mittleren Abstands faktor $\sigma' = \sigma/\sqrt{\tau}$ gibt [Car61] dann folgende Näherungsformel:

$$\bar{R}_E \cong \frac{Z_L}{\sqrt{1 + \frac{Z_L}{4\sigma' Z_D}}}. \quad (12.72)$$

Der tatsächliche Eingangswiderstand R_E schwankt periodisch – in Abhängigkeit vom Logarithmus der Frequenz – um den Mittelwert $\bar{R}_E$. Bei einem Schlankheitsgrad $l/d = 125$ folgt zunächst $Z_D = 504 \, \Omega$. Mit $Z_L = 100 \, \Omega$ und den Werten von σ und τ aus Übung 12.3 folgt $\sigma' = 0,171$ und somit $\bar{R}_E = 88 \, \Omega$, was an koaxiale Zuleitungen leicht angepasst werden kann.

Übung 12.3: Entwurf einer logarithmisch-periodischen Antenne

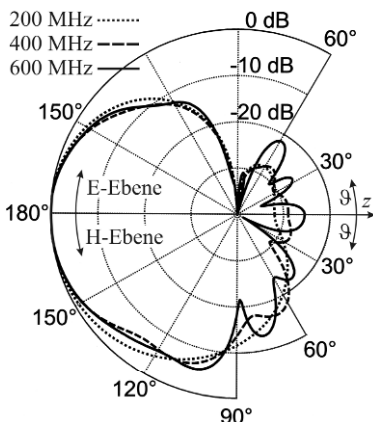
- Bestimmen Sie die notwendigen Geometrieparameter für ein kompaktes Design einer LPDA mit einem Gewinn von 8 dBi im Frequenzbereich $200 \text{ MHz} \leq f \leq 600 \text{ MHz}$.

Lösung:

Für einen angestrebten Gewinn von $g = 8 \text{ dBi}$ ist nach (12.66) ein Skalierungsfaktor

$$\tau = -g^2/321 + g/12 + 0,407 = 0,874 \quad (12.73)$$

erforderlich, womit sich nach (12.64) mit $\sigma = 0,258\tau - 0,066 = 0,160$ der optimale Abstands faktor ergibt. Schließlich folgt aus (12.63) mit $\alpha = \arctan((1-\tau)/(4\sigma)) = 11,1^\circ$ auch der Steigungswinkel. Bei gegebenem Bandbreitfaktor $B = 3$ ermitteln wir aus (12.70) den Wirkungsgrad $\eta_B = 58,1\%$ und die Strukturbandbreite $B_s = B/\eta_B = 5,16$. Daraus erhalten wir mit (12.68) die gerundete Anzahl der Teilstrahler $N = 13$, die gerade um die Anzahl der aktiven Strahler $N_r = 4$ größer ist, als im Falle $\eta_B = 1$. Die nachjustierte Strukturbandbreite wird $B_s = 5,03$, woraus wegen $l_1 = 0,54 \lambda_u = 0,81 \text{ m}$ auch $l_N = l_1/B_s = 0,16 \text{ m}$ feststeht. Schließlich findet man nach (12.69) die gesamte Antennenlänge $L = 1,65 \text{ m}$. Bei einem Schlankheitsgrad $l/d = 125$ hat der längste Dipol eine Dicke von $d_1 = 6,5 \text{ mm}$ und der kürzeste eine von $d_{13} = 1,3 \text{ mm}$. Mit Hilfe der **Momentenmethode** [Poz02] können die numerischen Ergebnisse von Bild 12.12 gewonnen werden.



Dabei wurde eine Speiseleitung mit $Z_L = 100 \, \Omega$ vorausgesetzt. Sowohl die Richtdiagramme, als auch der Gewinn g und der Eingangswiderstand R_E verhalten sich breitbandig. Man beachte die Wanderung der aktiven Strahlungszone entlang der Antennenachse. □

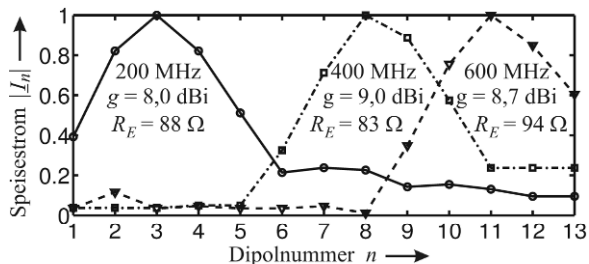


Bild 12.12 Richtdiagramme und Strombelegungen der LPDA aus Übung 12.3 mit $N = 13$ Dipolelementen

12.3 Spiral- und Fraktalantennen

Die Eingangsimpedanz selbstkomplementärer Strukturen ist nach (17.56) gleich $Z_0/2$ und damit unabhängig von der Frequenz. Aus zwei um 180° versetzten Armen, die man als Leiter oder als Schlitze in einer leitenden Ebene aufbaut, kann eine extrem breitbandige Antenne mit Bandbreiten bis 20:1 aufgebaut werden. Ihre Kontur ist durch vier logarithmische Spiralen gegeben (Bild 12.13), die einen Winkelbereich von $\Delta\varphi \approx 3\pi$ abdecken sollten [Stu98a]. Damit sich ihre Arme nicht kreuzen, muss die Bedingung $e^{-a\pi} < K < 1$ eingehalten werden [Hei70].

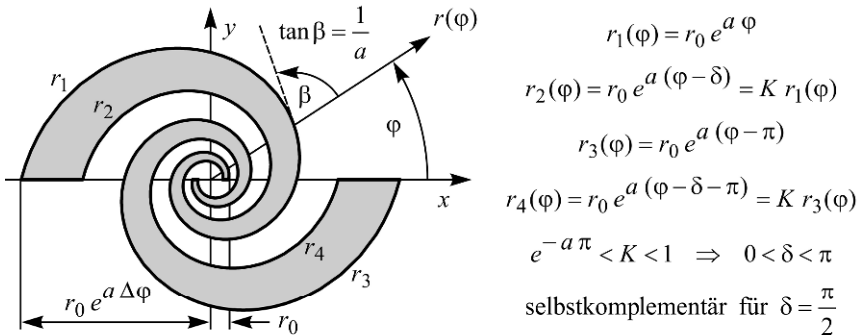


Bild 12.13 Logarithmische Spiralantenne: $a = 1/4 \rightarrow \beta \approx 76^\circ$, $\delta = \pi/2 \rightarrow K = e^{-a\pi} \approx 0,675$, $\Delta\varphi = 3\pi$

Bei logarithmischen Spiralantennen (**Gleichwinkelantennen**) ist der Winkel $\beta = \arctan(1/a)$, den die Tangente mit dem Radialstrahl einschließt, an jedem Punkt des Randes gleich groß [Sta94]. Die höchste Betriebsfrequenz f_o ist durch $\lambda_o/4 \approx r_o$ gegeben, während die niedrigste aus $\lambda_u/4 \approx r_o e^{a\Delta\varphi}$ folgt. Die nutzbare Bandbreite wird also:

$$B = f_o/f_u \approx e^{a\Delta\varphi}. \quad (\text{Mit den Werten aus Bild 12.13 folgt } B \approx 10,55.) \quad (12.74)$$

Wie bei logarithmisch-periodischen Antennen wandert die Strahlungszone mit der Wellenlänge λ_o entlang der Spiralarme [Rum57, Dys59]. Die Hauptstrahlung kommt aus einem Bereich, wo $2\pi r \approx \lambda_o$ gilt. Spiralantennen erzeugen Zirkularpolarisation entsprechend ihrer Windungsrichtung – in Bild 12.13 wird RHC in z-Richtung abgestrahlt und LHC in negative z-Richtung. Ihre meist geringen Gewinne von 2–3 dBi [Dub77] verbessert ein Reflektorschirm um weitere 3 dB.

Auf dem Prinzip der Selbstähnlichkeit sind auch **Fraktalantennen** aufgebaut. Hohe Frequenzen werden von kleinen Strahlerelementen und niedrige von den größeren abgestrahlt. Je nach Iterationsgrad m und fraktalem Teilverhältnis $1/n$ können hohe Bandbreiten erreicht werden (Bild 12.14). Weiterführende Informationen findet man in [Wer99, Wer03, Bal08].

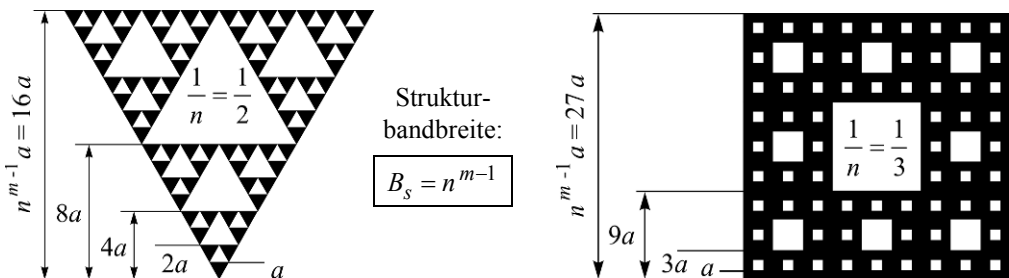


Bild 12.14 Sierpinski-Dreieck ($m = 5$ Frequenzbänder) und Sierpinski-Quadrat ($m = 4$ Frequenzbänder)

Eine **Multiband-Fraktalantenne** mit fünf Frequenzbändern – basierend auf einem Sierpinski-Dreieck mit $a = 5,85 \text{ mm}$ – wurde mit einem 3D-Gitterverfahren [CST] numerisch untersucht [Den07]. Die Patch-Elemente sind auf einem $0,762 \text{ mm}$ dicken Substrat mit $\epsilon_r = 2,5$ aufgebracht. Die Anregung erfolgt mit einer $50 \text{ }\Omega$ -Koaxialleitung, die durch eine elliptische Grundplatte geführt wird. Der **Eingangsreflexionsfaktor** $20 \lg |S_{11}| \text{ dB} = -\text{RL}$ in Bild 12.15 zeigt fünf schmalbandige Bereiche mit starker Abstrahlung (Tabelle 12.2). Die dort realisierte sehr gute Anpassung hängt stark von der geometrischen Ausgestaltung des Speisepunktes ab.

Tabelle 12.2 Resonanzen der Multiband-Antenne

m	f_m/GHz	f_m/f_{m-1}	RL/dB	$2^{5-m} a/\lambda_0^{(m)}$
1	0,62	–	24,7	0,193
2	1,65	2,67	21,1	0,269
3	3,47	2,10	19,7	0,271
4	6,70	1,93	33,4	0,261
5	13,16	1,96	23,9	0,257

Benachbarte **Resonanzfrequenzen** liegen (mit Ausnahme der Grundresonanz) etwa um einen Faktor 2 auseinander, was logarithmisch-periodisches Verhalten zur Folge hat. In Oberwellenresonanz $m \geq 2$ werden kleinere **Untergruppen** angeregt, deren Ausdehnung in z-Richtung jeweils etwa ein Viertel der Freiraumwellenlänge beträgt.

Die Schnitte von $|E_\theta(\theta, \varphi)|$ sind in der H-Ebene bei $\theta = 90^\circ$ und in den E-Ebenen bei $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 90^\circ$ für die ersten drei Bänder dargestellt (siehe auch [Pue98, Pue00, Son03]).

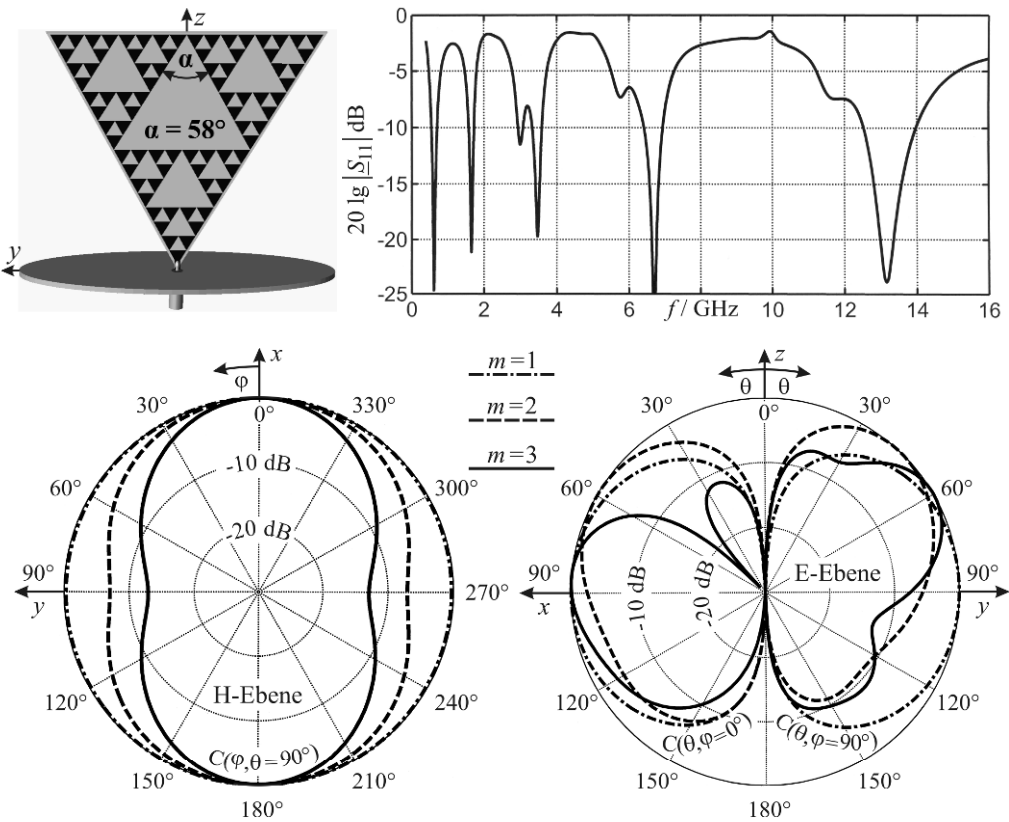


Bild 12.15 Multiband-Fraktalantenne: Geometrie, Anpassung und Richtdiagramme der ersten drei Bänder

12.4 Übungen

12.4.1 Berechnen Sie den reellen Eingangswiderstand einer unendlich langen symmetrischen Doppelkonusleitung für die Konuswinkel $\vartheta_1 = 20^\circ, 45^\circ$ und 70° .

12.4.2 Die Doppelkonusantenne aus Bild 12.3 hat einen Gewinn von $g = 6,91$ dBi. Diesen Wert erhält man mittels numerischer Integration über ihr Richtdiagramm $C(\vartheta)$. Testen Sie mit diesem bekannten Gewinnwert die Verlässlichkeit der Faustformel (12.58).

12.4.3 Es soll eine logarithmisch-periodische Dipolantenne (LPDA) für UHF-Fernsehempfang mit Gewinn von $g = 11$ dBi im Frequenzbereich $f_u = 470 \text{ MHz} \leq f \leq 862 \text{ MHz} = f_o$ (Bandbreitfaktor $B = f_o/f_u = 1,834$) entwickelt werden. Gehen Sie dazu in folgenden Schritten vor.

Berechnen Sie den Skalierungsfaktor τ , den Abstandsfaktor σ und den Steigungswinkel α . Bestimmen Sie den Bandbreitewirkungsgrad η_B und die Strukturbandbreite B_s . Wie viele Dipole N sind daher nötig? Wie groß wird die nachjustierte Strukturbandbreite? Welche Baulänge haben der längste und der kürzeste Strahler? Welche Baulänge L nimmt die gesamte Antenne ein?

12.4.4 Wiederholen Sie den Entwurf der vorherigen Aufgabe 12.4.3, indem Sie anstelle einer LPDA jetzt eine logarithmische Spiralantenne zum UHF-Fernsehempfang verwenden.

Lösungen:

12.4.1 Mit $Z_L = \frac{Z_0}{\pi} \ln \left(\cot \frac{\vartheta_1}{2} \right)$ folgen die Werte $208 \, \Omega$, $106 \, \Omega$ und $42,7 \, \Omega$.

12.4.2 Mit der radialen Ausdehnung $h = 4,8 \lambda_0$ und dem Konuswinkel $\vartheta_1 = 70^\circ$, die wir aus Bild 12.3 entnehmen, berechnen wir zunächst die Aperturtiefe $\rho = h \sin \vartheta_1 = 4,51 \lambda_0$. Mit (12.58) folgt daraus die Abschätzung

$$g \approx (3,73 + 5 \lg(\rho/\lambda_0)) \text{ dBi} = 7,00 \text{ dBi},$$

was dem wahren Wert von $6,91$ dBi sehr nahe kommt. Mit der Aperturhöhe $a = 2 h \cos \vartheta_1 = 3,28 \lambda_0$ und der Aperturtiefe $\rho = 4,51 \lambda_0$ sind die beiden Voraussetzungen zur Anwendung der Faustformel (12.58) – nämlich $\rho \geq 2 \lambda_0$ und $a \approx \sqrt{2 \lambda_0 \rho}$ – gut erfüllt, weswegen die hohe Genauigkeit durchaus zu erwarten war.

12.4.3 $\tau = 0,9467$, $\sigma = 0,1783$, $\alpha = 4,27^\circ$

$$\eta_B = 0,718, \quad B_s = 2,554, \quad N = 19 \text{ (aufgerundet)}$$

$$B_s = \tau^{1-N} = 2,680, \quad l_1 = 0,54 \lambda_u = 34,4 \text{ cm}, \quad l_N = l_1/B_s = 12,8 \text{ cm}, \quad L = 144 \text{ cm}$$

12.4.4 Aus $B = f_o/f_u \approx e^{a \Delta \varphi}$ folgt mit $f_u = 470 \text{ MHz}$ und $f_o = 862 \text{ MHz}$ zunächst $B = 1,834$. Mit der Nebenbedingung $\Delta \varphi \approx 3\pi$ finden wir $a = 0,0644$, woraus wir den Gleichwinkel $\beta = \arctan(1/a) = 86,3^\circ$ ermitteln können. Die kleinste Abmessung wird $r_0 \approx \lambda_o/4 = 8,7 \text{ cm}$ und der größte Durchmesser der Spiralantenne (entlang der x-Achse) ist $2 B r_0 = 31,9 \text{ cm}$, was etwa dem Wert $l_1 = 34,4 \text{ cm}$ bei der LPDA entspricht. Allerdings erreicht die Spiralantenne nicht den hohen Gewinn von 11 dBi der LPDA.

13 Aperturstrahler I (Hohlleiterantennen)

13.1 Prinzipien der Aperturstrahler

Die bisher behandelten Antennen bestanden aus linearen Leitern. Bei der Berechnung ihrer Strahlungsfelder sind wir in folgenden Schritten vorgegangen:

- Berechnung der Stromverteilung auf den linearen Leitern,
- Betrachtung der berechneten Stromverteilung als eingeprägte Quellen und
- Berechnung des Fernfeldes mittels Fourier-Transformation.

Wir haben also die Ströme auf den Leitern als die Quellen der Strahlung angesehen. Das ist im Grunde genommen nur eine Hilfsvorstellung, um auf möglichst einfache Weise die Berechnung der Strahlungsfelder zu ermöglichen. Die eigentliche Quelle der Strahlung bilden nicht die Leiter – in ihnen breitet sich bei $\kappa \rightarrow \infty$ nämlich gar keine Energie aus. Die Energie wandert vielmehr im Dielektrikum um die Leiter, denn nur hier hat der Poyntingsche Vektor nichtverschwindende Werte. Wir wollen als Beispiel einen $\lambda_0/10$ -Monopol, der vertikal über der Erdoberfläche angeordnet ist, betrachten. Seine Speisung erfolge – wie in Bild 13.1 – mit einer Koaxialleitung. Man kann sich den Mechanismus der Abstrahlung mit Hilfe einer Darstellung des zeitgemittelten Energiestroms in der Umgebung der Vertikalantenne verdeutlichen. Die Wirkenergie fließt entlang der Strömungslinien aus dem Dielektrikum der koaxialen Speiseleitung in den freien Raum. Der Antennenstab wirkt dabei als Führung oder als Transformationsglied, um in das Strahlungsfeld überzuleiten; die Länge der Antenne bestimmt die Richtcharakteristik und den Reflexionsfaktor. Die eigentliche Strahlungsquelle ist nicht der Stab sondern die Öffnung des Wellenleiters.

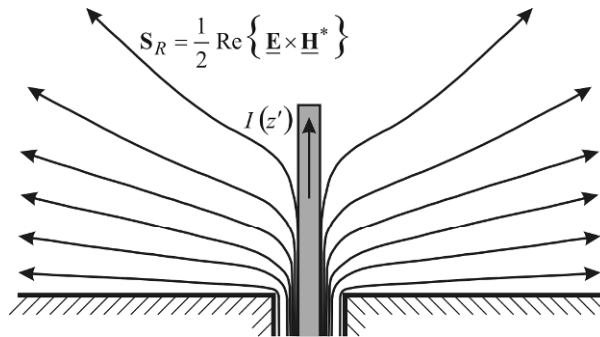


Bild 13.1 Energiestromlinien um eine kurze, vertikale $\lambda_0/10$ -Stabantenne über idealer Erde nach [Lan72]

Im Prinzip würde bereits das offene Ende einer Koaxialleitung elektromagnetische Energie in den Raum abstrahlen. Solange jedoch der Außendurchmesser des Koaxialleiters klein gegenüber der Wellenlänge λ_0 ist, bleibt die Abstrahlung schwach und eine solche Anordnung ist als Antenne nicht geeignet. Die Verhältnisse ändern sich jedoch, sobald die Querschnittsdimensionen der Wellenleiterapertur in die Größenordnung der Wellenlänge λ_0 kommen oder größer sind. In Bild 13.2 ist das Verhältnis der abgestrahlten Leistung zur Leistung der einfallenden Generatorwelle über dem normierten Außendurchmesser $k_0 D = 2 \pi D / \lambda_0$ einer leeren Koaxialleitung aufgetragen. Die Kurve wurde für $D/d = 7/2$ mit Formeln aus [Borg55] errechnet.

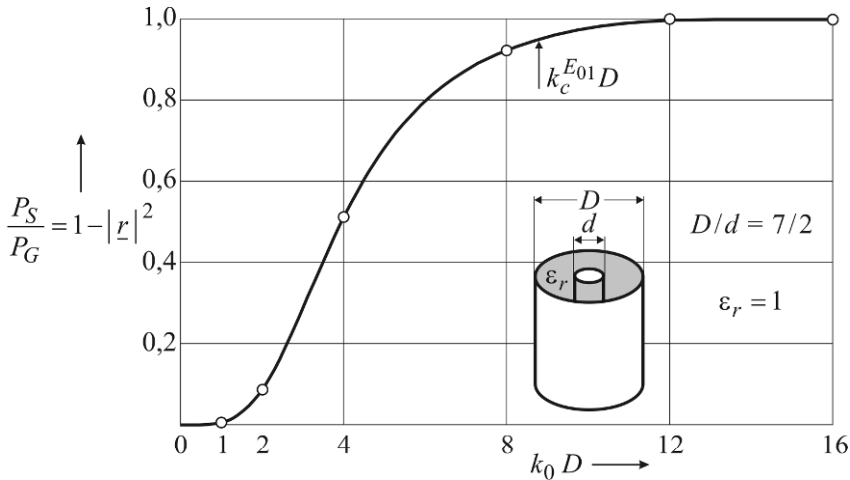


Bild 13.2 Verhältnis von Strahlungsleistung zu Generatorleistung am offenen Ende einer Koaxialleitung

Eine merkliche **Abstrahlung** tritt ab etwa $k_0 D = 2$ ein. Dort wird mit $D/\lambda_0 = 0,32$ bereits 8,5 % der auf das offene Leitungsende einfallenden Leistung in den Freiraum abgestrahlt. Sobald neben der TEM-Welle höhere Wellentypen angeregt werden, wird die Kurve ungültig. Das ist aber erst bei sehr starker Abstrahlung der Fall. Bei einer 7/2-Koaxialleitung wird die E_{01} -Welle als erster rotationssymmetrischer höherer Wellentyp nach (6.80) ausbreitungsfähig bei:

$$k_c^{E_{01}} D = \frac{2 \pi D}{\lambda_c^{E_{01}}} \approx \frac{2 \pi D}{1,02 (D - d)} = \frac{2 \pi}{1,02 (1 - d/D)} \approx 8,6. \quad (13.1)$$

Nach dem **Huygensschen Prinzip** (siehe Abschnitt 8.6) kann man die Strahlungsfelder einer lokalisierten Quellstromverteilung im Außenraum einer die Quellen vollständig umschließenden Hüllfläche exakt berechnen, wenn auf der gesamten Hüllfläche die tangentialen elektrischen und magnetischen Feldstärken bekannt sind. Bei Aperturantennen sind diese Tangentialfelder meist nur auf einem Teil dieser Hülle – nämlich der Wellenleiterapertur – näherungsweise bekannt. Als Aperturfeld nimmt man das ungestörte Feld der Speisewelle an (Kirchhoffsche Randwerte, Physikalische Optik – PO). Reflexionen in der Apertur, Kantenbeugungseffekte und somit die Ströme auf der Außenseite des Wellenleiters werden dabei vernachlässigt, wodurch z.B. für die Koaxialleitung im Grundwellenbetrieb nach [Borg55] die Richtcharakteristik

$$C(\vartheta) \triangleq \frac{\left| J_0 \left(\frac{k_0 d}{2} \sin \vartheta \right) - J_0 \left(\frac{k_0 D}{2} \sin \vartheta \right) \right|}{\sin \vartheta} \quad (\text{unnormiert}) \quad (13.2)$$

folgt. Wie man solche Strahlungsfelder herleitet, werden wir im Folgenden kennen lernen. Die Berechnung der Abstrahlung aus dem ungestörten Aperturfeld (**Aperturfeldmethode**), ist eine gute Näherung für das wahre Strahlungsfeld, wenn folgende Bedingungen gelten.

- Die Apertur muss elektrisch groß sein, d. h. $D \gg \lambda_0$.
- Der Aufpunkt $\mathbf{r}$ sollte mindestens im Fresnel-Gebiet – besser noch im Fernfeld – liegen.

Zunächst werden wir für *ebene* Aperturen die Strahlungsfelder bestimmen. Die Behandlung *gekrümmter* Aperturen, wie sie bei Hornstrahlern auftreten, erfolgt dann in Kapitel 14.

13.2 Ebene Apertur im freien Raum (Chu-Modell)

Wir betrachten das offene Ende eines luftgefüllten, geraden, zylindrischen Wellenleiters, in dem sich eine Welle entlang seiner z-Achse ausbreiten soll. Wegen (8.89) und (8.90) kann das gesuchte Strahlungsfeld durch folgende Vektorpotenziale dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) &= \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \iint_{A'} \underline{\mathbf{J}}_F(\mathbf{r}') e^{jk_0 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} dA' = \\ \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) &= \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \iint_{A'} \underline{\mathbf{M}}_F(\mathbf{r}') e^{jk_0 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} dA'.\end{aligned}\quad (13.3)$$

Die äquivalenten Oberflächenstromdichten in der Wellenleiterapertur A berechnet man nach (8.111) aus den tangentialen Komponenten $\underline{\mathbf{E}}_A$ und $\underline{\mathbf{H}}_A$ der ungestörten einfallenden Welle

$$\underline{\mathbf{J}}_F = \mathbf{n} \times \underline{\mathbf{H}}_A \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{M}}_F = -\mathbf{n} \times \underline{\mathbf{E}}_A, \quad (13.4)$$

wobei die äußere Flächennormale $\mathbf{n}(\mathbf{r}')$ am Integrationspunkt $\mathbf{r}'$ die Richtung der Wellenausbreitung angibt, wenn die Apertur als Fläche konstanter Phase gewählt wird. Meist gilt:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}') = \begin{cases} \mathbf{e}_z & \text{bei zylindrischen Wellenleitern mit ebener Apertur} \\ \mathbf{e}_r(\mathbf{r}') & \text{bei sphärischen Wellenleitern mit gekrümmter Apertur.} \end{cases} \quad (13.5)$$

Mit den Aperturstromdichten (13.4) und den Hilfsintegralen

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) &= \iint_{A'} \underline{\mathbf{E}}_A(\mathbf{r}') e^{jk_0 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} dA' \\ \underline{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) &= \iint_{A'} \underline{\mathbf{H}}_A(\mathbf{r}') e^{jk_0 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} dA'\end{aligned}\quad (13.6)$$

folgt aus (13.3) für $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ die Darstellung:

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \mathbf{e}_z \times \underline{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = -\frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \mathbf{e}_z \times \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{r}), \quad (13.7)$$

aus der wir mit (8.93) und $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ die **Fernfelder** als Fourier-Transformierte beider Aperturstromdichten (**Chu-Modell**) ermitteln können [Stu98a]:

$$\begin{aligned}\underline{E}_\vartheta &= Z_0 \underline{H}_\varphi = jk_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \left[\underline{P}_x \cos \varphi + \underline{P}_y \sin \varphi - Z_0 \cos \vartheta \left(\underline{Q}_x \sin \varphi - \underline{Q}_y \cos \varphi \right) \right] \\ \underline{E}_\varphi &= -Z_0 \underline{H}_\vartheta = -jk_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \left[\cos \vartheta \left(\underline{P}_x \sin \varphi - \underline{P}_y \cos \varphi \right) + Z_0 \left(\underline{Q}_x \cos \varphi + \underline{Q}_y \sin \varphi \right) \right].\end{aligned}\quad (13.8)$$

In der Apertur stehen die tangentialen Feldkomponenten $\underline{\mathbf{E}}_A$ und $\underline{\mathbf{H}}_A$ stets senkrecht aufeinander. Bei Vernachlässigung höherer Wellen, was bei größeren Aperturabmessungen gerechtfertigt ist, gilt dann mit dem Feldwellenwiderstand $\underline{Z}_A$ der Grundwelle des Wellenleiters:

$$\underline{Z}_A \underline{\mathbf{H}}_A = \mathbf{e}_z \times \underline{\mathbf{E}}_A \quad \text{bzw.} \quad \underline{\mathbf{E}}_A = -\mathbf{e}_z \times \underline{Z}_A \underline{\mathbf{H}}_A. \quad (13.9)$$

So gelten mit $\underline{Y}_A = 1/\underline{Z}_A$ auch die Beziehungen:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) &= -\underline{Z}_A \mathbf{e}_z \times \underline{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) \\ \underline{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) &= \underline{Y}_A \mathbf{e}_z \times \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{r});\end{aligned}\quad (13.10)$$

oder in kartesischen Komponenten:

$$\begin{aligned}\underline{P}_x &= \underline{Z}_A \underline{Q}_y \\ \underline{P}_y &= -\underline{Z}_A \underline{Q}_x.\end{aligned}\quad (13.11)$$

Somit erhalten wir aus dem Chu-Modell (13.8) schließlich drei mögliche Darstellungen der Fernfelder einer ebenen, im freien Raum strahlenden Apertur (Tabelle 13.1).

Tabelle 13.1 Aperturmodelle zur Berechnung der Fernfelder einer ebenen Apertur im freien Raum

<u>Chu-Modell I</u> – für eine ebene Apertur im freien Raum $\begin{aligned}\underline{E}_\vartheta &= Z_0 \underline{H}_\varphi = j k_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} \left[\underline{P}_x \cos \varphi + \underline{P}_y \sin \varphi - Z_0 \cos \vartheta \left(\underline{Q}_x \sin \varphi - \underline{Q}_y \cos \varphi \right) \right] \\ \underline{E}_\varphi &= -Z_0 \underline{H}_\vartheta = -j k_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} \left[\cos \vartheta \left(\underline{P}_x \sin \varphi - \underline{P}_y \cos \varphi \right) + Z_0 \left(\underline{Q}_x \cos \varphi + \underline{Q}_y \sin \varphi \right) \right]\end{aligned}$
<u>Chu-Modell II</u> – mit Vernachlässigung höherer Wellentypen (E-Form) $\begin{aligned}\underline{E}_\vartheta &= Z_0 \underline{H}_\varphi = j k_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} \left(1 + \frac{Z_0}{\underline{Z}_A} \cos \vartheta \right) \left(\underline{P}_x \cos \varphi + \underline{P}_y \sin \varphi \right) \\ \underline{E}_\varphi &= -Z_0 \underline{H}_\vartheta = -j k_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} \left(\frac{Z_0}{\underline{Z}_A} + \cos \vartheta \right) \left(\underline{P}_x \sin \varphi - \underline{P}_y \cos \varphi \right)\end{aligned}$
<u>Chu-Modell III</u> – mit Vernachlässigung höherer Wellentypen (H-Form) $\begin{aligned}\underline{E}_\vartheta &= Z_0 \underline{H}_\varphi = -j k_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} \underline{Z}_A \left(1 + \frac{Z_0}{\underline{Z}_A} \cos \vartheta \right) \left(\underline{Q}_x \sin \varphi - \underline{Q}_y \cos \varphi \right) \\ \underline{E}_\varphi &= -Z_0 \underline{H}_\vartheta = -j k_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} \underline{Z}_A \left(\frac{Z_0}{\underline{Z}_A} + \cos \vartheta \right) \left(\underline{Q}_x \cos \varphi + \underline{Q}_y \sin \varphi \right)\end{aligned}$

In Wellenleitern, deren Querabmessungen *groß* gegen die Wellenlänge sind, verhält sich das Aperturfeld – wegen der dann großen Abstände zu den metallischen Wänden – fast wie im freien Raum, d. h. für den Feldwellenwiderstand in einer solchen Struktur gilt angenähert:

$$\underline{Z}_A \approx Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} \approx 376,73 \, \Omega. \quad (13.12)$$

Im Allgemeinen kann nach (6.56) der Feldwellenwiderstand von H_{mn} - bzw. E_{mn} -Hohlleiterwellen wie folgt angegeben werden:

$$\underline{Z}_A^H = \frac{\omega \mu_0}{\underline{k}_z} = \frac{k_0}{\underline{k}_z} Z_0 \quad \text{und} \quad \underline{Z}_A^E = \frac{\underline{k}_z}{\omega \varepsilon_0} = \frac{\underline{k}_z}{k_0} Z_0. \quad (13.13)$$

Die Ausbreitungskonstante $\underline{k}_z$ besitzt im Rechteck- bzw. Rundhohlleiter folgende Werte:

$$\underline{k}_z = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda_0}{2a}\right)^2 - \left(\frac{n\lambda_0}{2b}\right)^2} \quad \text{bzw.} \quad \underline{k}_z = k_0 \sqrt{1 - \frac{K_{mn}^2}{k_0^2}}. \quad (13.14)$$

Für die Anwendung der drei alternativen Formulierungen des **Chu-Aperturmodells** für den Freiraum, in die stets beide Aperturfelder $\underline{E}_A$ und $\underline{H}_A$ eingehen, gelten folgende Grundsätze:

- Sind die Felder $\underline{E}_A(\mathbf{r}')$ und $\underline{H}_A(\mathbf{r}')$ in der Apertur exakt bekannt (entweder durch strenge Lösung des Randwertproblems oder durch Messung) – was allerdings selten der Fall ist – so liefert das **Chu-Modell I** die genauesten Werte der Strahlungsfelder.
- Nimmt man als genäherte Aperturbelegung lediglich die ungestörten Felder der einfallenden Welle an, für die der Zusammenhang $\underline{Z}_A \underline{H}_A = \mathbf{e}_z \times \underline{E}_A$ exakt gilt, so ergeben alle drei Modelle die selben Werte der Strahlungsfelder.
- Für elektrisch *große* Aperturen mit $\underline{Z}_A \approx Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ erhält man in den beiden **Chu-Modellen II und III** jeweils den gleichen Vorfaktor $(1 + \cos \vartheta)$, d. h. ein Verschwinden der Strahlungsfelder in Rückwärtsrichtung $\vartheta = \pi$.
- Für elektrisch *kleine* Aperturen werden die Ergebnisse der Aperturfeldmethode zweifelhaft.
- Die Genauigkeit der Aperturfeldmethode nimmt mit größer werdendem Winkel ϑ ab und ist auf der z-Achse für $\vartheta = 0$ am höchsten.

Für eine ebene, rechteckige Apertur, die sich wie in Bild 13.3 im freien Raum befinden soll, berechnen wir in Übung 13.1 bei uniformer Amplituden- und Phasenbelegung die Richtcharakteristik $C(\vartheta, \varphi)$. Der Abstand r der Diagrammschnitte von der Antenne liege dabei im Fernfeld, sodass die Felddarstellungen im Fraunhofer-Gebiet verwendet werden können.

Übung 13.1: Fernfeld-Richtdiagramm einer rechteckigen Apertur

- Man berechne das Strahlungsfeld im Fraunhofer-Gebiet einer homogen belegten rechteckigen Apertur nach Bild 13.3.

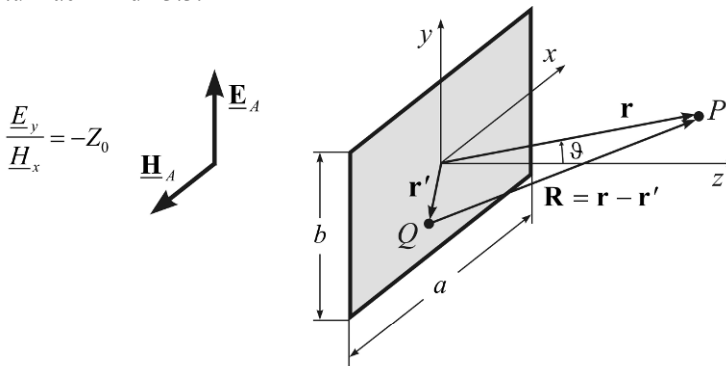


Bild 13.3 Homogen belegtes rechteckiges Flächenelement im freien Raum (Huygens-Quelle)

Die Apertur sei mit einer TEM-Welle $\underline{E}_A(\mathbf{r}') = \underline{E}_0 \mathbf{e}_y$ und $Z_0 \underline{H}_A(\mathbf{r}') = -\underline{E}_0 \mathbf{e}_x$ belegt, die im zeitlichen Mittel eine Wirkleistung von $P = ab |\underline{E}_0|^2 / (2Z_0)$ transportiert. Ein solches homogen belegtes Flächenelement wird als **Huygenssche Quelle** bezeichnet.

• **Lösung:**

Für $\mathbf{n}(\mathbf{r}') = \mathbf{e}_z$ erhält man im Halbraum $z > 0$ mit Hilfe des **Chu-Modells II** aus Tabelle 13.1 und mit $\underline{Z}_A = Z_0$ folgende Fernfeldkomponenten:

$$\begin{aligned} \underline{E}_\vartheta &= Z_0 \underline{H}_\varphi = j k_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} (1 + \cos \vartheta) (\underline{P}_x \cos \varphi + \underline{P}_y \sin \varphi) \\ \underline{E}_\varphi &= -Z_0 \underline{H}_\vartheta = -j k_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} (1 + \cos \vartheta) (\underline{P}_x \sin \varphi - \underline{P}_y \cos \varphi). \end{aligned} \quad (13.15)$$

Dabei sind $\underline{P}_x$ und $\underline{P}_y$ die kartesischen Komponenten des Aperturfeldintegrals:

$$\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{r}) = \iint_{A'} \underline{\mathbf{E}}_A(\mathbf{r}') e^{j k_0 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} dA'. \quad (13.16)$$

Aus $\underline{\mathbf{E}}_A(\mathbf{r}') = \underline{E}_0 \mathbf{e}_y$ folgt $\underline{P}_x = 0$ und mit $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}' = x' \sin \vartheta \cos \varphi + y' \sin \vartheta \sin \varphi$ wird:

$$\underline{P}_y = \underline{E}_0 \int_{x'=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{y'=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{j k_0 (x' \sin \vartheta \cos \varphi + y' \sin \vartheta \sin \varphi)} dx' dy'. \quad (13.17)$$

Das Doppelintegral (13.17) kann in zwei Einfachintegrale aufgespalten werden:

$$\underline{P}_y = \underline{E}_0 \int_{x'=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{j k_0 x' \sin \vartheta \cos \varphi} dx' \int_{y'=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{j k_0 y' \sin \vartheta \sin \varphi} dy', \quad (13.18)$$

und man erhält nach elementarer Umformung:

$$\underline{P}_y = a b \underline{E}_0 \frac{\sin\left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \cos \varphi\right)}{\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \cos \varphi} \frac{\sin\left(\frac{k_0 b}{2} \sin \vartheta \sin \varphi\right)}{\frac{k_0 b}{2} \sin \vartheta \sin \varphi}. \quad (13.19)$$

In (13.19) tritt – wie bei der Fourier-Transformation einer Konstanten üblich – die Funktion $\text{si}(x) = \sin x / x$ auf. Die si-Funktion hat ihr Maximum bei $x = 0$, nämlich $\text{si}(0) = 1$ (siehe Bild 10.9). Der elektrische Feldvektor im Fernfeld ist nach (13.15) mit $\underline{P}_x = 0$:

$$\underline{\mathbf{E}} = j k_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} (1 + \cos \vartheta) (\mathbf{e}_\vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi) \underline{P}_y \quad (13.20)$$

und kann mit (13.19) wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= j k_0 a b \underline{E}_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{4 \pi r} (1 + \cos \vartheta) (\mathbf{e}_\vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi) \cdot \\ &\quad \cdot \text{si}\left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \cos \varphi\right) \text{si}\left(\frac{k_0 b}{2} \sin \vartheta \sin \varphi\right). \end{aligned} \quad (13.21)$$

Das Maximum der Feldstärke (13.21) tritt bei $\vartheta = 0$ auf, d. h. es wird

$$|\underline{E}|_{\max} = |\underline{E}_0| \frac{k_0 a b}{2 \pi r}. \quad (13.22)$$

Die zum linear in y -Richtung polarisierten Aperturfeld **kopolare** Fernfeldkomponente erhält man entsprechend (8.136) mit $\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_r \sin \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_\vartheta \cos \vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi$ aus:

$$\underline{E}_{\text{co}} = \underline{E} \cdot \mathbf{e}_y \Big|_{\vartheta=0} = \underline{E} \cdot (\mathbf{e}_\vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi) \quad (13.23)$$

und mit $\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_r \sin \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_\vartheta \cos \vartheta \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi$ erhält man die dazu orthogonale **kreuzpolare** Komponente wie in (8.137) aus:

$$\underline{E}_{\text{xp}} = \underline{E} \cdot \mathbf{e}_x \Big|_{\vartheta=0} = \underline{E} \cdot (\mathbf{e}_\vartheta \cos \varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin \varphi), \quad (13.24)$$

die mit (13.21) zu null wird. Das **Chu-Modell** für große Aperturen (mit $Z_A \rightarrow Z_0$) im freien Raum führt stets zu einem Verschwinden der Kreuzpolarisation, falls die Aperturbelegung linear polarisiert ist. Mit (13.15), (13.23) und (13.24) folgt nämlich allgemein:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{\text{co}} &= \underline{E}_\vartheta \sin \varphi + \underline{E}_\varphi \cos \varphi = j k_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{2 \pi r} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \underline{P}_y \\ \underline{E}_{\text{xp}} &= \underline{E}_\vartheta \cos \varphi - \underline{E}_\varphi \sin \varphi = j k_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{2 \pi r} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \underline{P}_x. \end{aligned} \quad (13.25)$$

Damit strahlt die Huygens-Quelle wegen $\underline{P}_x = 0$ ein kreuzpolarisationsfreies Fernfeld mit $\underline{E}_{\text{xp}} = 0$ ab, während für die Nutzpolarisation gilt:

$$\underline{E}_{\text{co}} = j k_0 a b \underline{E}_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{2 \pi r} \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \text{si} \left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \cos \varphi \right) \text{si} \left(\frac{k_0 b}{2} \sin \vartheta \sin \varphi \right), \quad (13.26)$$

woraus wir die **kopolare Richtcharakteristik** $C_{\text{co}}(\vartheta, \varphi) = |\underline{E}_{\text{co}}| / |\underline{E}_{\text{co}}|_{\max}$ ermitteln:

$$C_{\text{co}}(\vartheta, \varphi) = \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \left| \text{si} \left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \cos \varphi \right) \text{si} \left(\frac{k_0 b}{2} \sin \vartheta \sin \varphi \right) \right|, \quad (13.27)$$

die für $a = 8 \lambda_0$ und $b = 4 \lambda_0$ im Horizontalschnitt ($\varphi = 0$, **H-Ebene**) und im Vertikalschnitt ($\varphi = \pi/2$, **E-Ebene**) in Bild 13.4 dargestellt ist. Dabei gilt:

$$C_{\text{co}}^{\text{H}}(\vartheta) = \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \left| \text{si} \left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \right) \right| \quad (13.28)$$

$$C_{\text{co}}^{\text{E}}(\vartheta) = \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \left| \text{si} \left(\frac{k_0 b}{2} \sin \vartheta \right) \right|. \quad (13.29)$$

In der rechten Diagrammhälfte ist für $0^\circ \leq \vartheta \leq 90^\circ$ der Horizontalschnitt C_{co}^{H} in der **H-Ebene** und links der Vertikalschnitt C_{co}^{E} in der **E-Ebene** im logarithmischen Maßstab dargestellt. Bei Flächenstrahlern, deren Fernfeld zwei transversale elektrische Feldkomponenten aufweist, genügt die einfache Definition der Richtcharakteristik C , wie wir sie für Linearstrahler eingeführt hatten, nicht mehr. Das Strahlungsfeld muss hier vielmehr durch die ko- und die kreuzpolaren Charakteristiken C_{co} und C_{xp} beschrieben werden (siehe Abschnitt 8.7).

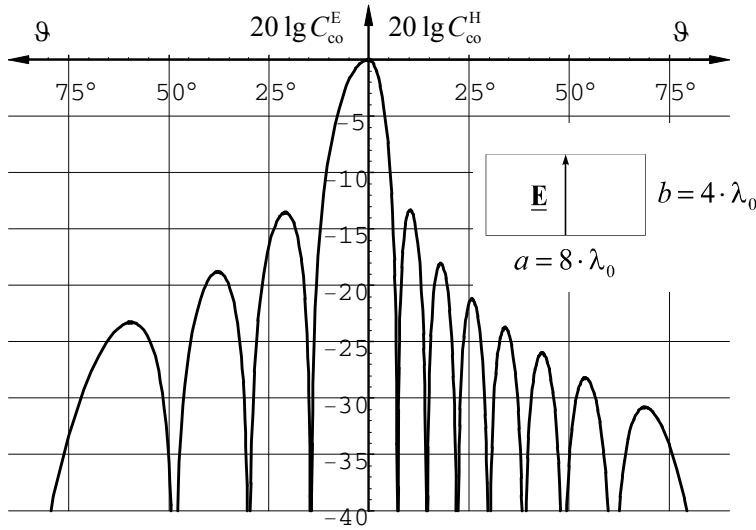


Bild 13.4 Vertikalschnitt (links) und Horizontalschnitt (rechts) der kopolaren Fernfeldcharakteristik (13.27) einer Huygens-Quelle

Für das Richtdiagramm in der **H-Ebene** (E-Ebene analog mit Vertauschung $a \leftrightarrow b$)

$$C_{co}^H(\vartheta) = \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \left| \operatorname{si} \left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \right) \right| \quad (13.30)$$

können weitere charakteristische Daten angegeben werden:

- Die **Nullwertbreite** folgt aus der ersten Nullstelle von $\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \vartheta \right)$, d. h. es gilt:

$$\Delta \vartheta_0 = 2 \arcsin \frac{\lambda_0}{a} \approx \frac{2 \lambda_0}{a} \triangleq \frac{114,6^\circ}{a/\lambda_0}, \quad (a = 8 \lambda_0 \rightarrow \Delta \vartheta_0 \triangleq 14,36^\circ). \quad (13.31)$$

- Mit der Näherung $(1 + \cos \vartheta)/2 \approx 1$ und mit $\operatorname{si}(1,392) \approx 1/\sqrt{2}$ folgt die **Halbwertsbreite** aus

$$\Delta \vartheta \approx 2 \arcsin \left(\frac{\lambda_0}{a} \frac{1,392}{\pi} \right) \approx 0,886 \frac{\lambda_0}{a} \triangleq \frac{50,8^\circ}{a/\lambda_0}, \quad (a = 8 \lambda_0 \rightarrow \Delta \vartheta \triangleq 6,35^\circ). \quad (13.32)$$

Bei **kleineren** Aperturen mit $0,5 \leq a/\lambda_0 \leq 2$ ist folgende empirische Beziehung nützlich:

$$\Delta \vartheta \approx \frac{97,7^\circ}{\sqrt{a/\lambda_0}} + 4,6^\circ \frac{a}{\lambda_0} - 53,3^\circ. \quad \text{Zu verwenden, falls am Halbwertswinkel die Beziehung } (1 + \cos \vartheta)/2 \approx 1 \text{ nicht gilt.} \quad (13.33)$$

- Die Dämpfung der **ersten Nebenkeule** relativ zur Hauptkeule beträgt bei elektrisch *großer* Apertur ca. 13,26 dB. Eine Näherung für diesen Wert erhält man aus der Forderung:

$$\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda_0} \sin \vartheta \right) = \sin u = -1. \quad (13.34)$$

Mit $\pi < u < 2\pi$, d. h. $u = 3\pi/2$ folgt daraus:

$$\left| \operatorname{si}(3\pi/2) \right| = 2/(3\pi) = 0,212 \triangleq -13,46 \text{ dB}. \quad \square \quad (13.35)$$

13.3 Ebene Apertur im unendlichen ebenen Schirm (E-Feld-Modell)

Im Gegensatz zur bisher behandelten Apertur im freien Raum (Chu-Modell) soll nun die Abstrahlung aus einem offenen Wellenleiter untersucht werden, dessen Apertur in einen unendlich ausgedehnten ebenen Schirmkragen eingebettet ist. Die Anordnung ist in Bild 13.5 dargestellt.

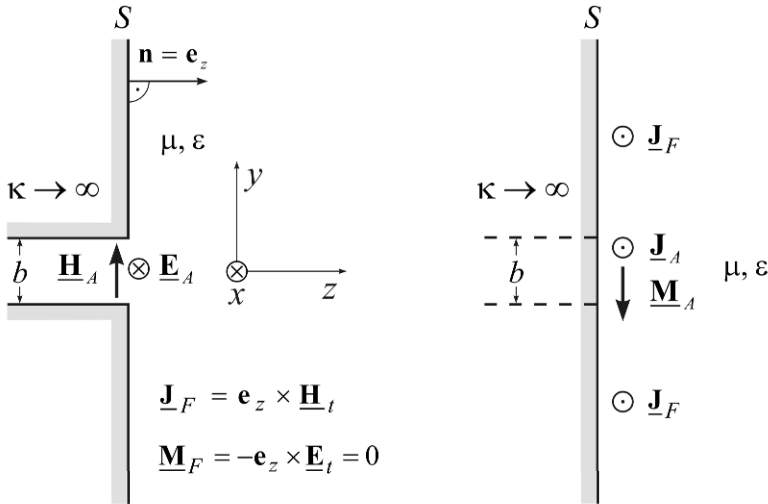


Bild 13.5 Offener Hohlleiter mit Schirm und sein Huygens-Äquivalent mit Oberflächenstromdichten

Aufgrund der Randbedingungen auf dem elektrisch ideal leitenden **Schirm** kann dort nur eine elektrische Flächenstromdichte $\underline{J}_F$ fließen und es gilt $\underline{M}_F = 0$. In der **Hohlleiteröffnung** existieren dagegen beide Arten der äquivalenten Flächenströme, d. h. dort muss man ansetzen:

$$\underline{J}_A = \underline{e}_z \times \underline{H}_A \quad \text{und} \quad \underline{M}_A = -\underline{e}_z \times \underline{E}_A. \quad (13.36)$$

Dabei werden für $\underline{E}_A$ und $\underline{H}_A$ näherungsweise die ungestörten Felder der einfallenden Welle eingesetzt. Die Felder im Halbraum $z > 0$ können nach dem Huygensschen Prinzip durch Integration der Flächenstromdichten über der unendlich ausgedehnte Ebene S , die sich im Unendlichen schließt, bestimmt werden. Besonders einfach wird diese Integration, wenn wir gemäß dem **Äquivalenztheorem** (Abschnitt 8.6) den gesamten Halbraum $z < 0$, der sowieso feldfrei ist, mit einem idealen elektrischen Leiter auffüllen. Dadurch erhalten wir eine äquivalente Ersatzanordnung, die im rechten Teil von Bild 13.5 wiedergegeben ist.

Die **Spiegelung** tangentialer elektrischer bzw. magnetischer Stromelemente $\underline{J}_F$ und $\underline{M}_F$ an ideal leitenden, unendlich ausgedehnten, ebenen Wänden haben wir bereits in Abschnitt 11.4 behandelt und wird in Bild 13.6 nochmals erläutert. Die Wirkung der tangentialen elektrischen Stromelemente $\underline{J}_F$ und $\underline{J}_A$, die wie in Bild 13.5 infinitesimal dicht vor einer elektrisch ideal leitenden Ebene liegen, hebt sich demnach wegen der gegenphasigen Spiegelbilder auf; während das tangential magnetische Stromelement $\underline{M}_A$ durch die Spiegelung verdoppelt wird.

Zur Berechnung der Abstrahlung aus einem Wellenleiter mit metallischem Schirm muss demnach nur innerhalb der begrenzten Wellenleiterapertur über die doppelte äquivalente **magnetische** Flächenstromdichte $2\underline{M}_A$ der einfallenden Welle integriert werden. Bei Verwendung eines magnetischen Schirmes wäre die Integration über die doppelte äquivalente **elektrische** Flächenstromdichte der einfallenden Welle auszuführen.

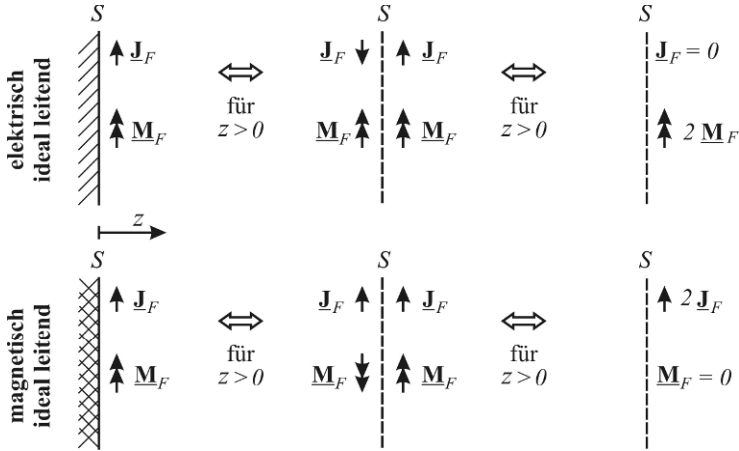


Bild 13.6 Zur Spiegelung elektrischer und magnetischer Flächenströme $\underline{J}_F$ bzw. $\underline{M}_F$ an ideal leitenden Wänden (nach [Stu98a])

Nach Spiegelung und anschließendem Weglassen der metallischen Ebene kommt man zu folgendem Huygens-Äquivalent, das sich nun im freien Raum befindet (Bild 13.7). Es muss lediglich $2\underline{M}_A$ über die begrenzte Aperturfläche A' integriert werden.

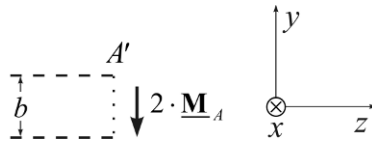


Bild 13.7 Integration der doppelten magnetischen Flächenstromdichte über die Apertur A'

Mit $\underline{M}_A = -\underline{e}_z \times \underline{E}_A$ und dem Aperturfeldintegral

$$\underline{P}(\mathbf{r}) = \iint_{A'} \underline{E}_A(\mathbf{r}') e^{jk_0 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}'} dA' \quad (13.37)$$

erhalten wir schließlich das **E-Feld-Aperturmodell mit elektrischem Schirm** (gültig nur für $z > 0$), wenn wir in (13.8) alle P -Werte verdoppeln und die Q -Werte null setzen [Camp98]:

$$\begin{aligned} \underline{E}_\vartheta &= Z_0 \underline{H}_\varphi = j k_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{2 \pi r} (\underline{P}_x \cos \varphi + \underline{P}_y \sin \varphi) \\ \underline{E}_\varphi &= -Z_0 \underline{H}_\vartheta = -j k_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{2 \pi r} \cos \vartheta (\underline{P}_x \sin \varphi - \underline{P}_y \cos \varphi). \end{aligned} \quad (13.38)$$

Chu-Modell II (13.15) und E-Feld-Modell (13.38) gehen für $\cos \vartheta \rightarrow 1$ ineinander über.

13.3.1 Hohlleiterstrahler

Wir wollen in Übung 13.2 die Aperturfeldformel (13.38) zur Berechnung der Abstrahlung aus dem offenen Ende eines rechteckigen Hohlleiters anwenden. Am Hohlleiter sei zur Verringerung rückwärts gerichteter Strahlungsanteile ein ebener Aperturschirm angebracht. Der Schirm sei so groß, dass er für die Rechnung als unendlich ausgedehnt angenommen werden kann.

Übung 13.2: Fernfeld eines offenen Rechteckhohlleiters mit Schirm

- Man berechne das Strahlungsfeld eines mit der H_{10} -Welle erregten Rechteckhohlleiters, wobei für $a > b$ die H_{10} -Welle die Grundwelle in diesem Wellenleiter darstellt.

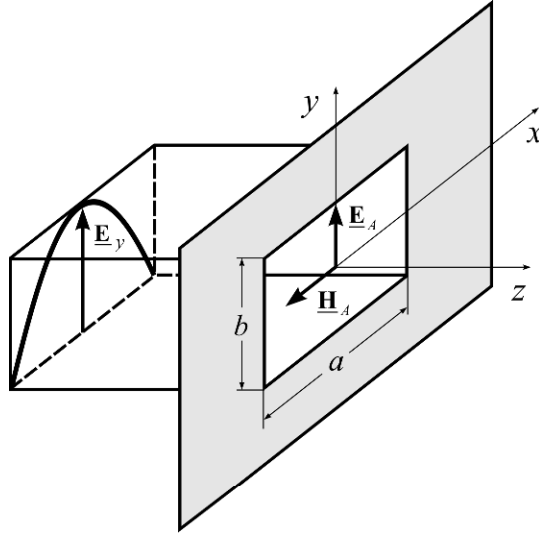


Bild 13.8 Offener Rechteckhohlleiter mit metallischem Schirm, gespeist von einer H_{10} -Welle

Die Hohlleiterapertur mündet in einen unendlich großen Schirm, der als elektrisch ideal leitend angesehen werden kann, d. h. $\kappa \rightarrow \infty$. Im Halbraum $z > 0$ kann das Strahlungsfeld mit Hilfe von (13.38) gewonnen werden [Vog91].

• Lösung:

Das E-Feld der H_{10} -Welle eines Rechteckhohlleiters ist vertikal polarisiert und muss auf den Seitenwänden bei $x = \pm a/2$ verschwinden (siehe Abschnitt 6.2), d. h. es gilt bei $z = 0$

$$\underline{E}_A(\mathbf{r}') = \mathbf{e}_y \underline{E}_0 \cos \frac{\pi x'}{a}. \quad (13.39)$$

Aus (13.37) folgt sofort $\underline{P}_x = 0$ und mit $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}' = x' \sin \vartheta \cos \varphi + y' \sin \vartheta \sin \varphi$ wird:

$$\underline{P}_y = \underline{E}_0 \int_{x'=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{y'=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos \frac{\pi x'}{a} e^{j k_0 (x' \sin \vartheta \cos \varphi + y' \sin \vartheta \sin \varphi)} dx' dy'. \quad (13.40)$$

Das Doppelintegral (13.40) kann in zwei Einfachintegrale aufgespalten werden:

$$\underline{P}_y = \underline{E}_0 \int_{x'=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos \frac{\pi x'}{a} e^{j k_0 x' \sin \vartheta \cos \varphi} dx' \int_{y'=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{j k_0 y' \sin \vartheta \sin \varphi} dy' = \underline{E}_0 \underline{I}_{x'} \underline{I}_{y'}. \quad (13.41)$$

Das erste Teilintegral formen wir mit einer Eulerschen Formel etwas um:

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_{x'} &= \frac{1}{2} \int_{x'=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(e^{j\pi x'/a} + e^{-j\pi x'/a} \right) e^{jk_0 x' \sin \vartheta \cos \varphi} dx' = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{x'=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{jx' \left(k_0 \sin \vartheta \cos \varphi + \pi/a \right)} dx' + \frac{1}{2} \int_{x'=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{jx' \left(k_0 \sin \vartheta \cos \varphi - \pi/a \right)} dx'.
 \end{aligned} \tag{13.42}$$

Die Durchführung der Integrationen in $\underline{I}_{x'}$ führt zu:

$$\underline{I}_{x'} = \frac{1}{2} \frac{e^{jx' \left(k_0 \sin \vartheta \cos \varphi + \pi/a \right)} \frac{a}{2}}{j \left(k_0 \sin \vartheta \cos \varphi + \pi/a \right)} \Big|_{x'=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} + \frac{1}{2} \frac{e^{jx' \left(k_0 \sin \vartheta \cos \varphi - \pi/a \right)} \frac{a}{2}}{j \left(k_0 \sin \vartheta \cos \varphi - \pi/a \right)} \Big|_{x'=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \tag{13.43}$$

und damit:

$$\underline{I}_{x'} = \frac{\sin \left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \cos \varphi + \frac{\pi}{2} \right)}{k_0 \sin \vartheta \cos \varphi + \pi/a} + \frac{\sin \left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \cos \varphi - \frac{\pi}{2} \right)}{k_0 \sin \vartheta \cos \varphi - \pi/a}, \tag{13.44}$$

was noch weiter umgeformt werden kann:

$$\underline{I}_{x'} = \cos \left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \cos \varphi \right) \frac{k_0 \sin \vartheta \cos \varphi - \pi/a - k_0 \sin \vartheta \cos \varphi - \pi/a}{(k_0 \sin \vartheta \cos \varphi)^2 - (\pi/a)^2}. \tag{13.45}$$

Also gilt:

$$\underline{I}_{x'} = \cos \left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \cos \varphi \right) \frac{2a/\pi}{1 - (k_0 a/\pi)^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}. \tag{13.46}$$

Für das zweite Teilintegral in (13.41) findet man auf ähnliche Weise:

$$\underline{I}_{y'} = \int_{y'=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{jk_0 y' \sin \vartheta \sin \varphi} dy' = b \operatorname{si} \left(\frac{k_0 b}{2} \sin \vartheta \sin \varphi \right). \tag{13.47}$$

Damit kann man für das Aperturfeldintegral (13.41) nun schreiben:

$$\underline{P}_y = \underline{E}_0 \underline{I}_{x'} \underline{I}_{y'} = \frac{2ab}{\pi} \underline{E}_0 \frac{\cos \left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \cos \varphi \right)}{1 - (k_0 a/\pi)^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi} \operatorname{si} \left(\frac{k_0 b}{2} \sin \vartheta \sin \varphi \right). \tag{13.48}$$

Der elektrische Feldvektor im Fernfeld wird nach (13.38) mit $\underline{P}_x = 0$:

$$\underline{\mathbf{E}} = jk_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{2\pi r} \left(\mathbf{e}_\vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \vartheta \cos \varphi \right) \underline{P}_y \tag{13.49}$$

und mit $\underline{P}_y$ aus (13.48) erhalten wir schließlich:

$$\underline{E} = j k_0 a b \underline{E}_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{\pi^2 r} \left(\mathbf{e}_\vartheta \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \vartheta \cos \varphi \right) \cdot \frac{\cos \left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \cos \varphi \right)}{1 - (k_0 a / \pi)^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi} \operatorname{si} \left(\frac{k_0 b}{2} \sin \vartheta \sin \varphi \right). \quad (13.50)$$

Das Maximum des Betrags der Feldstärke tritt bei $\vartheta = 0$ auf, d. h. es gilt:

$$|\underline{E}|_{\max} = |\underline{E}_0| \frac{k_0 a b}{\pi^2 r} = |\underline{E}_{\text{co}}|_{\max}, \quad (13.51)$$

was auch gleichzeitig das Maximum des kopolaren Feldes (13.53) ist. Das Aperturfeld der H_{10} -Welle ist in y -Richtung linear polarisiert. Darum definieren wir die ko- und kreuzpolaren Komponenten wie in (13.23) und (13.24) und erhalten mit (13.38) nach kurzer Umformung mit Hilfe von $2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin(2 \varphi)$ und $1 - \cos \vartheta = 2 \sin^2(\vartheta/2)$ eine Beziehung, die allgemein für das **E-Feld Aperturmodell mit elektrischem Schirm** gültig ist:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{\text{co}} &= j k_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{2 \pi r} \left[\underline{P}_y (\sin^2 \varphi + \cos \vartheta \cos^2 \varphi) + \underline{P}_x \sin(2 \varphi) \sin^2(\vartheta/2) \right] \\ \underline{E}_{\text{xp}} &= j k_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{2 \pi r} \left[\underline{P}_x (\cos^2 \varphi + \cos \vartheta \sin^2 \varphi) + \underline{P}_y \sin(2 \varphi) \sin^2(\vartheta/2) \right]. \end{aligned} \quad (13.52)$$

In unserem Fall gilt $\underline{P}_x = 0$ und mit $\underline{P}_y$ aus (13.48) folgt daher

$$\begin{aligned} \underline{E}_{\text{co}} &= j k_0 a b \underline{E}_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{\pi^2 r} (\sin^2 \varphi + \cos \vartheta \cos^2 \varphi) \cdot \\ &\cdot \frac{\cos \left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \cos \varphi \right)}{1 - (k_0 a / \pi)^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi} \operatorname{si} \left(\frac{k_0 b}{2} \sin \vartheta \sin \varphi \right) \end{aligned} \quad (13.53)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \underline{E}_{\text{xp}} &= j k_0 a b \underline{E}_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{\pi^2 r} \sin(2 \varphi) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \\ &\cdot \frac{\cos \left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \cos \varphi \right)}{1 - (k_0 a / \pi)^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi} \operatorname{si} \left(\frac{k_0 b}{2} \sin \vartheta \sin \varphi \right). \end{aligned} \quad (13.54)$$

Somit wird die **kopolare Richtcharakteristik** $C_{\text{co}}(\vartheta, \varphi) = |\underline{E}_{\text{co}}| / |\underline{E}_{\text{co}}|_{\max}$, d. h. es gilt:

$$C_{\text{co}}(\vartheta, \varphi) = \left(\sin^2 \varphi + \cos \vartheta \cos^2 \varphi \right) \frac{\cos \left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \cos \varphi \right)}{1 - (k_0 a / \pi)^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi} \operatorname{si} \left(\frac{k_0 b}{2} \sin \vartheta \sin \varphi \right). \quad (13.55)$$

$C_{\text{co}}(\vartheta)$ wird für $a = 8\lambda_0$ und $b = 4\lambda_0$ im Horizontalschnitt ($\varphi = 0$, **H-Ebene**) und im Vertikalschnitt ($\varphi = \pi/2$, **E-Ebene**) in Bild 13.9 dargestellt. Dabei gilt:

$$C_{\text{co}}^{\text{H}}(\vartheta) = \cos \vartheta \left| \frac{\cos\left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta\right)}{1 - (k_0 a / \pi)^2 \sin^2 \vartheta} \right| \quad (13.56)$$

$$C_{\text{co}}^{\text{E}}(\vartheta) = \left| \text{si}\left(\frac{k_0 b}{2} \sin \vartheta\right) \right|. \quad (13.57)$$

In der rechten Diagrammhälfte ist für $0^\circ \leq \vartheta \leq 90^\circ$ der Diagrammschnitt C_{co}^{H} in der **H-Ebene** und links der Schnitt C_{co}^{E} in der **E-Ebene** im logarithmischen Maßstab dargestellt.

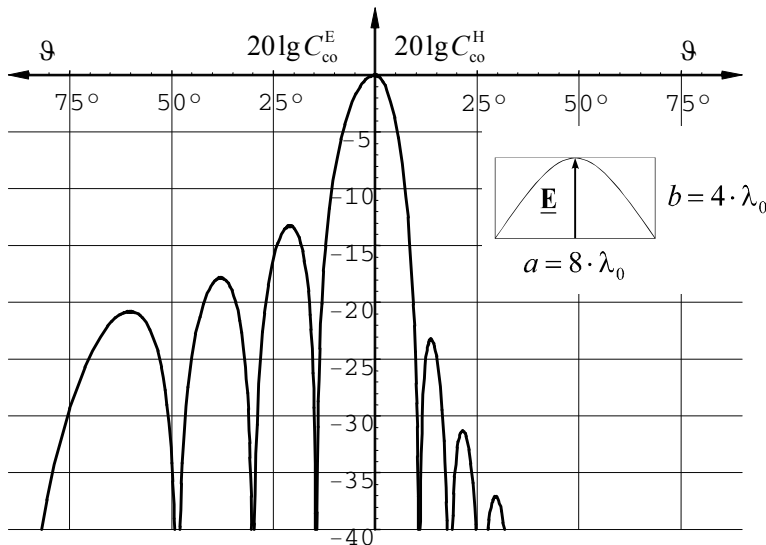


Bild 13.9 Vertikalschnitt (links) und Horizontalschnitt (rechts) der kopolaren Fernfeldcharakteristik (13.55) eines H_{10} -gespeisten offenen Rechteckhohlleiters mit Schirm (man vergleiche Bild 13.4)

Der Diagrammschnitt in der E-Ebene ist ähnlich demjenigen einer uniform ausgeleuchteten Apertur (Huygens-Quelle, Bild 13.4). In der H-Ebene verbreitert sich durch die kosinusförmige Belegung (13.39) die Hauptkeule, andererseits werden durch eine solche Aperturtaperung aber die Nebenkeulen deutlich kleiner. Dieser allgemeine Zusammenhang ist aus der Nachrichtentechnik bekannt: Das Fourier-Spektrum eines Rechteckimpulses hat eine schmale Hauptkeule, aber auch hohe Nebenkeulen. Glattere Impulse wie z. B. der $\cos^2$ -Impuls oder der Gauß-Impuls haben im Spektralbereich eine breitere Hauptkeule, dafür aber wesentlich kleinere – oder gar keine – Nebenkeulen.

Die abgestrahlte **Kreuzpolarisation** $C_{\text{xp}}(\vartheta, \varphi) = \left| \frac{E_{\text{xp}}}{E_{\text{co}}}|_{\text{max}} \right|$ wird:

$$C_{\text{xp}}(\vartheta, \varphi) = \left| \sin(2\varphi) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \frac{\cos\left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta \cos \varphi\right)}{1 - (k_0 a / \pi)^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi} \text{si}\left(\frac{k_0 b}{2} \sin \vartheta \sin \varphi\right) \right|. \quad (13.58)$$

Sie verschwindet in der E- und auch in der H-Ebene. In allen anderen Diagrammschnitten ist sie bei den gewählten Aperturabmessungen $a = 8\lambda_0$ und $b = 4\lambda_0$ um mindestens 50 dB niedriger als das Maximum der Kopolarisation. Innerhalb der 12-dB-Breite der Hauptkeule des kopolaren Diagramms wird das **Kreuzpolarisationsmaß** nach (8.142) sogar nur $XP = -66$ dB. $\square$

Bemerkung: Das E-Feld Aperturmodell mit elektrischem Schirm (13.38) und (13.52) liefert auch dann eine Kreuzpolarisation, wenn das Aperturfeld linear polarisiert ist – diese Tatsache wird durch Messungen gut bestätigt. Beim alternativen Chu-Modell im freien Raum (13.15) und (13.25) verschwindet hingegen bei linear polarisierter Belegung großer Aperturen (mit $Z_A \rightarrow Z_0$) die kreuzpolare Abstrahlung, was sicherlich nicht korrekt ist. Der Vergleich mit Messungen [Rud86] belegt, dass die kopolaren Diagramme beider Modelle zwar sehr ähnlich sind, während bei der Kreuzpolarisation das Schirmmodell genauere Werte vorhersagt.

Zur Diskussion der Diagrammeigenschaften betrachten wir nur die H-Ebene (13.56), da die E-Ebene (13.57) im Bereich der Hauptkeule ($\cos \vartheta \cong 1$) nur unwesentlich von (13.29) abweicht. Die **Nullwertbreite** des Richtdiagramms in der H-Ebene eines H_{10} -Hohlleiterstrahlers mit unendlichem Aperturflansch folgt daher mit $u = (k_0 a/2) \sin \vartheta$ aus der ersten Nullstelle von:

$$C_{co}^H(\vartheta) = \cos \vartheta \left| \frac{\cos\left(\frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta\right)}{1 - (k_0 a/\pi)^2 \sin^2 \vartheta} \right| = \sqrt{1 - \frac{u^2}{(\pi a/\lambda_0)^2}} \left| \frac{\cos u}{1 - (2u/\pi)^2} \right|. \quad (13.59)$$

Bei $a/\lambda_0 \geq 3/2$ erhält man als erste Nullstelle $u = 3\pi/2$, woraus folgt:

$$\Delta \vartheta_0 = 2 \arcsin \frac{3\lambda_0}{2a} \approx \frac{3\lambda_0}{a} \triangleq \frac{171,9^\circ}{a/\lambda_0}. \quad (13.60)$$

Die **Halbwertsbreite** in der H-Ebene berechnen wir aus zwei empirischen Beziehungen:

$$\Delta \vartheta \approx 106^\circ - 61,7^\circ \frac{a}{\lambda_0} + 12,5^\circ \frac{a^2}{\lambda_0^2} \quad \text{für } 0,5 \leq \frac{a}{\lambda_0} \leq 2 \quad \text{und} \quad \Delta \vartheta \approx \frac{68,1^\circ}{a/\lambda_0} \quad \text{für } \frac{a}{\lambda_0} \geq 2. \quad (13.61)$$

Die Dämpfung der **ersten Nebenkeule** gegenüber der Hauptkeule beträgt bei elektrisch *großer* Apertur in der H-Ebene ca. 23,1 dB. Das erste Nebenmaximum liegt bei der kosinusförmig belegten Apertur darum um fast 10 dB niedriger als bei der uniformen Belegung (13.35).

13.3.2 Richtfaktor und Flächenwirkungsgrad

Eine ausbreitungsfähige H_{10} -Welle transportiert nach Übung 6.1 durch den Querschnitt $a \cdot b$ eines Rechteckhohlleiters folgende Leistung:

$$P = \frac{ab |E_0|^2}{4Z_A}. \quad (13.62)$$

Dabei ist Z_A der reelle Feldwellenwiderstand der ausbreitungsfähigen H_{10} -Welle:

$$Z_A = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - (\pi/(k_0 a))^2}} \approx Z_0, \quad (13.63)$$

der bei großen Abmessungen ($k_0 a \gg \pi$) gegen den Freiraumwert $Z_0 \approx 120 \pi \Omega$ geht. Wenn man näherungsweise annimmt, dass die gesamte Leistung der auf die Apertur zulaufenden Hohlleiterwelle in den freien Raum reflexionsfrei abgestrahlt wird, so ist die Strahlungsleistung $P_S = P$ und man kann auf einfache Weise den Richtfaktor eines mit der H_{10} -Welle gespeisten Rechteckhohlleiterstrahlers bestimmen. Nach (7.19) folgt nämlich:

$$D = 4 \pi r^2 \frac{S_r(\vartheta, \varphi)_{\max}}{P_S} = 4 \pi r^2 \frac{|\underline{E}|_{\max}^2 / (2 Z_0)}{a b |\underline{E}_0|^2 / (4 Z_A)} = \frac{Z_A}{Z_0} 8 \pi r^2 \frac{|\underline{E}|_{\max}^2}{a b |\underline{E}_0|^2}. \quad (13.64)$$

Mit $|\underline{E}|_{\max} = |\underline{E}_0| \frac{k_0 a b}{\pi^2 r}$ nach (13.51) erhalten wir schließlich den **Richtfaktor**:

$$D = \frac{Z_A}{Z_0} 8 \pi r^2 \frac{|\underline{E}_0|^2 \frac{k_0^2 a^2 b^2}{\pi^4 r^2}}{a b |\underline{E}_0|^2} = \frac{Z_A}{Z_0} \frac{32 a b}{\pi \lambda_0^2} \approx \frac{32 a b}{\pi \lambda_0^2}. \quad (13.65)$$

Mit der bekannten Beziehung $D = 4 \pi A_W / \lambda_0^2$ kann man auch die **Wirkfläche** des offenen Rechteckhohlleiters (bei H_{10} -Anregung) bestimmen:

$$A_W = \frac{\lambda_0^2 D}{4 \pi} = \frac{\lambda_0^2}{4 \pi} \frac{32 a b}{\pi \lambda_0^2} \approx 0,8106 a b = q A_{\text{geo}}. \quad (13.66)$$

Der **Flächenwirkungsgrad** einer elektrisch *großen* Rechtekapertur mit uniformer Belegung in der E-Ebene und kosinusförmiger Belegung in der H-Ebene (d. h. bei einer H_{10} -Welle) ist daher $q = 81,06\%$. Bei einer Kosinus-Taperung in der H- und in der E-Ebene würde sich ein Flächenwirkungsgrad von $q = 0,8106^2 = 65,7\%$ einstellen. Diese Feldverteilung wird als „**balanced hybrid mode**“ bezeichnet und in Rillenhörner (siehe auch Abschnitt 14.4) zur Reduktion der Diagrammnebenkeulen bei geringer Kreuzpolarisation eingesetzt [Cla84, Kar93]. Demgegenüber ist der Flächenwirkungsgrad einer in der gesamten Fläche uniform belegten Apertur – die wir weiterhin elektrisch groß voraussetzen – natürlich $q = 100\%$ (siehe Abschnitt 8.6.2).

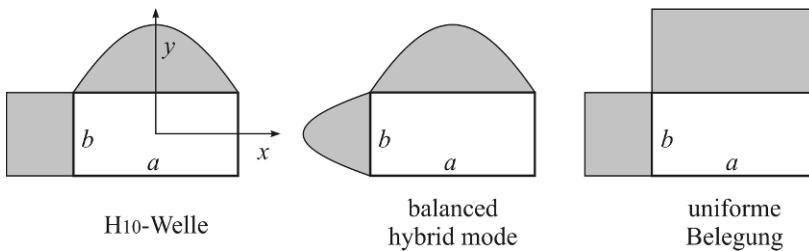


Bild 13.10 Rechteckhohlleiter ($q = 81,1\%$), Rillenhorn ($q = 65,7\%$) und Huygens-Quelle ($q = 100\%$)

Der Richtfaktor eines **offenen Rundhohlleiters** (bei H_{11} -Anregung) folgt analog [Sil49]:

$$D = \frac{2 (k_0 a)^2}{j_{11}^2 - 1} \quad \text{mit dem Flächenwirkungsgrad} \quad q = \frac{2}{j_{11}^2 - 1} \approx 0,8368. \quad (13.67)$$

Bei den bisher behandelten ebenen Aperturen haben wir stets eine uniforme Phasenbelegung vorausgesetzt. In Kapitel 14 werden wir sphärisch gekrümmte Aperturen mit quadratischem Phasenfehler betrachten.

13.4 Übungen

13.4.1 Eine am Ende offene Koaxialleitung, die mit ihrer TEM-Welle betrieben wird, hat nach (13.2) die unnormierte Richtcharakteristik

$$C(\vartheta) \triangleq \frac{\left| J_0\left(\frac{k_0 d}{2} \sin \vartheta\right) - J_0\left(\frac{k_0 D}{2} \sin \vartheta\right) \right|}{\sin \vartheta}.$$

Welche einfachere Näherung für $C(\vartheta)$ kann man unter der Voraussetzung $k_0 D/2 \ll 1$ herleiten?

13.4.2 Ein rechteckiger Aperturstrahler mit den Abmessungen a und b , der sich im freien Raum befindet, wird von einer homogenen ebenen Welle angeregt. Für welche Abmessungen a und b , die möglichst klein zu wählen sind, hat der Aperturstrahler bei der Betriebsfrequenz $f = 10$ GHz folgendes Verhalten?

- Die erste Nullstelle der Horizontalcharakteristik (H-Ebene bei $\varphi = 0^\circ$) soll bei $\vartheta_0 = 5,74^\circ$ liegen.
- Ein Störsender, der aus der Richtung $\vartheta = 15^\circ$ und $\varphi = 20^\circ$ einfällt, soll ausgeblendet werden.
- Geben Sie die Wirkfläche in m^2 und den Gewinn in dBi des Aperturstrahlers an.

13.4.3 Wiederholen Sie den Entwurf der vorherigen Aufgabe 13.4.2, indem Sie als Aperturstrahler einen offenen Rechteckhohlleiter mit metallischem Schirm verwenden.

Lösungen:

13.4.1 Mit $k_0 D/2 \ll 1$ gilt auch $k_0 d/2 \ll 1$ und wir können beide Besselfunktionen durch ihre Reihenentwicklung für kleine Argumente $J_0(x) \approx 1 - x^2/4$ ersetzen (Anhang A.3):

$$C(\vartheta) \triangleq \frac{1 - \frac{\left(\frac{k_0 d}{2} \sin \vartheta\right)^2}{4} - 1 + \frac{\left(\frac{k_0 D}{2} \sin \vartheta\right)^2}{4}}{\sin \vartheta},$$

woraus sofort die normierte Richtcharakteristik $C(\vartheta) = \sin \vartheta$ folgt. Die mit $\pi D \ll \lambda_0$ niederfrequent angeregte Koaxialleitung strahlt daher wie ein Hertzscher Dipol.

13.4.2 Mit $\lambda_0 = 3$ cm erhalten wir aus $\Delta \vartheta_0 = 2 \vartheta_0 = 2 \arcsin(\lambda_0/a)$ den Wert $a = 30$ cm.

Aus $(k_0 b)/2 \sin \vartheta \sin \varphi = \pi$ folgt $b = 33,9$ cm.

Die Wirkfläche wird $A_W = A_{\text{geo}} = a b = 0,102 \text{ m}^2$ und der Gewinn ist $g = 31,5$ dBi.

13.4.3 Aus $\Delta \vartheta_0 = 2 \vartheta_0 = 2 \arcsin(1,5 \lambda_0/a)$ folgt jetzt $a = 45$ cm, während weiterhin $b = 33,9$ cm gilt. Die Wirkfläche wird jetzt $A_W = q A_{\text{geo}} = 0,81 a b = 0,124 \text{ m}^2$ und der Gewinn ist $g = 32,4$ dBi. Obwohl die Hauptkeulen aus 13.4.2 und 13.4.3 gleiche Nullwertsbreiten besitzen, hat der Hohlleiterstrahler wegen seiner abfallenden Belegung, welche die Nebenkeulen in der H-Ebene stark verkleinert, einen etwas höheren Gewinn.

14 Aperturstrahler II (Hornantennen)

14.1 Bauformen

Die einfachste Aperturantenne ist der mit einer H_{10} -Welle gespeiste und am Ende offene Rechteckhohlleiter. Nach Bild 13.2 wirkt bei Aperturabmessungen $L \gtrsim \lambda_0/5$ ein offenes Leitungsende nicht mehr wie ein idealer Leerlauf mit einem Reflexionsfaktor von $\underline{r} = 1$, sondern es wird ein Teil der ankommenden Leistung abgestrahlt. Bei elektrisch großen Aperturen $L \gg \lambda_0$ kann der Aperturreflexionsfaktor in grösster Näherung (5.29) wie folgt abgeschätzt werden:

$$\underline{r} = \frac{Z_0 - \underline{Z}_A}{Z_0 + \underline{Z}_A} \quad (14.1)$$

Der Feldwellenwiderstand des Wellenleiters $\underline{Z}_A$ wird nach (13.63) im optischen Grenzfall

$$\lim_{k_0 \rightarrow \infty} \underline{Z}_A = Z_0, \quad (14.2)$$

d. h. es folgt $\underline{r} \rightarrow 0$ und die gesamte ankommende Energie würde reflexionsfrei mit einem Flächenwirkungsgrad von $q = 81\%$ abgestrahlt. Eine breitbandige Umwandlung der Leitungswelle in eine Raumwelle ($B \approx 3:1$) erreicht man mit einem trichterförmigen allmählichen Übergang (Bild 14.1). Durch die „langsame“ Querschnittsaufweitung in einem **Pyramidenhorn** wird nur ein geringer Anteil der Generatorleistung in den Hohlleiter zurück reflektiert.

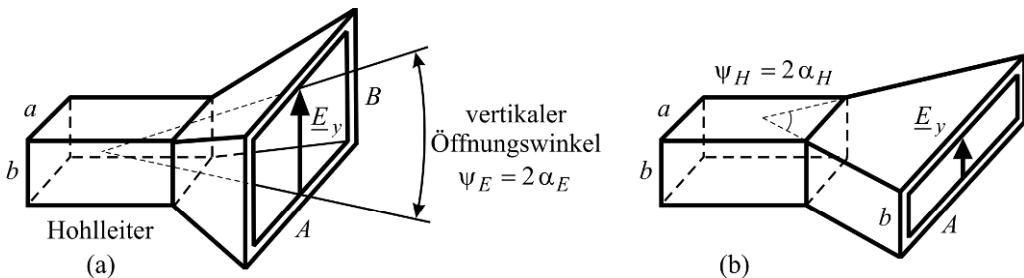


Bild 14.1 Pyramidenhorn (a) und Sektorhorn in der H-Ebene (b), gespeist durch einen Rechteckhohlleiter. Durch die Aufweitung des Hohlleiterquerschnittes $a \cdot b \Rightarrow A \cdot B$ wird die Aperturfläche vergrößert, was eine schärfere Bündelung und eine Erhöhung des Gewinns zur Folge hat. Wenn sich der Trichter nur in einer Ebene erweitert, spricht man von einem **Sektorhorn**, das als Grenzfall eines Pyramidenhorns betrachtet werden kann, falls einer der beiden Öffnungswinkel null wird. Bild 14.1 (b) zeigt mit $\psi_E = 0$ das Sektorhorn in der H-Ebene (bezogen auf die magnetischen Feldkomponenten der H_{10} -Speisewelle), in dem sich zylindrische Wellen ohne Grenzfrequenz ausbreiten. Zunächst betrachten wir das Sektorhorn in der E-Ebene (Bild 14.2 mit $\psi_H = 0$).

14.2 Sektorhorn

Der Sonderfall eines mit der H_{10} -Welle angeregten Trichters rechteckigen Querschnitts, der sich nur in der E-Ebene linear erweitert $b \Rightarrow B$, wird **Sektorhorn** in der E-Ebene genannt. In Bild 14.2 sieht man, dass in der H-Ebene Hohlleiterbreite und Aperturbreite gleich a bleiben.

Die ebene Apertur wird wegen der gekrümmten Phasenfront mit nach außen hin nacheilender Phase $k_0 \delta(y)$ angeregt. Den **Gangunterschied** $\delta(y)$ erhält man in Abhängigkeit von der Lage y mit $-B/2 \leq y \leq B/2$ aus der Beziehung:

$$[\rho_E + \delta(y)]^2 = \rho_E^2 + y^2, \quad (14.4)$$

d. h. es folgt:

$$\delta(y) = \sqrt{\rho_E^2 + y^2} - \rho_E. \quad (14.5)$$

Bei einem schlanken Hornstrahler gilt $y \ll \rho_E$ und man kann die Wurzel entwickeln:

$$\delta(y) = \rho_E \left(\sqrt{1 + \frac{y^2}{\rho_E^2}} - 1 \right) \approx \rho_E \left(1 + \frac{y^2}{2\rho_E^2} - 1 \right) \Rightarrow \boxed{\delta(y) \approx \frac{y^2}{2\rho_E}}, \quad (14.6)$$

weswegen man auch von einem (bezüglich y) **quadratischen Phasenfehler** spricht. Der Gangunterschied ist am Hornrand maximal. Ausgedrückt durch die exakte Wurzelfunktion, wird er

$$\delta_{\max} = \delta(y = \pm B/2) = \rho_E \left(\sqrt{1 + \frac{B^2}{4\rho_E^2}} - 1 \right) = \rho_E \left(\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_E} - 1 \right). \quad (14.7)$$

Mit Hilfe der Beziehungen $\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_E} = 1/\cos \alpha_E$ und $\rho_E = \frac{B/2}{\tan \alpha_E}$ folgt:

$$\delta_{\max} = \frac{B/2}{\tan \alpha_E} \left(\frac{1}{\cos \alpha_E} - 1 \right) = \frac{B}{2} \frac{1 - \cos \alpha_E}{\sin \alpha_E}. \quad (14.8)$$

Mit $1 - \cos \alpha_E = 2 \sin^2(\alpha_E/2)$ und $\sin \alpha_E = 2 \sin(\alpha_E/2) \cos(\alpha_E/2)$ erhält man schließlich:

$$\delta_{\max} = \frac{B}{2} \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha_E}{2}}{2 \sin \frac{\alpha_E}{2} \cos \frac{\alpha_E}{2}} \Rightarrow \boxed{\delta_{\max} = \frac{B}{2} \tan \frac{\alpha_E}{2} \approx \frac{B^2}{8\rho_E}}. \quad (14.9)$$

Der Gewinn, der bei Hornstrahlern von der Direktivität praktisch kaum abweicht, sinkt bei großen **E-Sektorhörnern** (mit $B/\lambda_0 \gg 1$) schnell ab, wenn der Gangunterschied $\delta_{\max}$ zwischen Zentrums- und Randstrahl größer als etwa $0,26 \lambda_0 \hat{=} 94^\circ$ wird, weil sich dann destruktive Interferenz immer stärker bemerkbar macht¹. Wenn wir hingegen fordern

$$\delta_{\max} = \frac{B}{2} \tan \frac{\alpha_E}{2} \leq \frac{\lambda_0}{16} \hat{=} 22,5^\circ, \quad (14.10)$$

dann kann die Krümmung der Wellenfront vernachlässigt werden und ein Gewinnverlust durch leicht ungleichmäßige Phasenbelegung der Apertur ist kaum spürbar. Für kleine Argumente gilt (im Bogenmaß) $\tan \alpha_E \approx \alpha_E$ und damit $B \alpha_E / 4 \leq \lambda_0 / 16$. Bei kleinen **Steigungswinkeln**

$$\boxed{\alpha_E \leq 2 \arctan \frac{\lambda_0}{8B} \approx \frac{\lambda_0}{4B}} \quad (14.11)$$

¹ Bei **H-Sektorhörnern** wird destruktive Interferenz – wegen der kosinusförmigen Taperung in der H-Ebene – erst ab größeren Gangunterschieden von etwa $0,40 \lambda_0 \hat{=} 143^\circ$ spürbar.

können wir daher in guter Näherung von einer ungestörten H_{10} -Welle mit uniformer Phasenbelegung in der Hornapertur ausgehen, deren Abstrahlungsverhalten uns aber aus Kapitel 13 bereits bekannt ist. Insbesondere können wir den Gewinn mit Hilfe von (13.65) berechnen. Der Flächenwirkungsgrad eines Sektorhorns kann daher maximal $q = 81\%$ werden.

Der nach (14.11) maximal zulässige Steigungswinkel α_E , für den wir die Krümmung der Wellenfront vernachlässigen dürfen, ist in Bild 14.4 im Gradmaß über der normierten Aperturabmessung B/λ_0 angegeben.

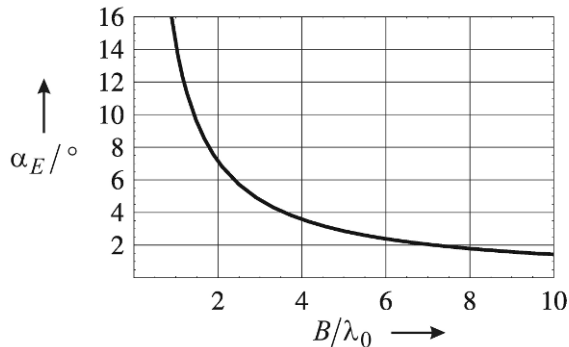


Bild 14.4 Maximal zulässiger Steigungswinkel eines Sektorhorns (im Gradmaß) mit vernachlässigbarem quadratischem Phasenfehler

Wenn wir den Gewinn eines Sektorhorns mit (13.65) bzw. (14.13) ermitteln wollen, darf das Horn bei $B \gg \lambda_0$ nur einen *kleinen* Steigungswinkel α_E aufweisen, damit der quadratische Phasenfehler klein bleibt. Das bedeutet aber, dass mit (14.3) und (14.11) die Anordnung wegen

$$l_E = \frac{B/2}{\sin \alpha_E} \approx \frac{B}{2 \alpha_E} \geq \frac{2 B^2}{\lambda_0} \quad (\text{vgl. } \underline{\text{Fernfeldabstand}} \text{ in Abschnitt 8.3.2}) \quad (14.12)$$

eine unpraktisch große Baulänge haben wird, wie wir in folgender Übung noch sehen werden.

Übung 14.1: Dimensionierung eines Sektorhorns in der E-Ebene

- Ein Sektorhorn in der E-Ebene werde mit der H_{10} -Welle eines Rechteckhohlleiters angeregt. Der Steigungswinkel α_E sei klein, sodass quadratische Phasenfehler vernachlässigt werden dürfen.
- Bestimmen Sie die notwendige Abmessung B , sodass das Horn bei $a = 2\lambda_0$ eine Direktivität von $10 \lg D_E = 23 \text{ dBi}$ besitzt.
- Wie groß ist dann der maximal zulässige Steigungswinkel α_E ?
- Welche minimale Baulänge l_E hat dieser Hornstrahler?

• Lösung:

Nach (13.65) ist die Direktivität einer H_{10} -belegten Rechteckapertur der Fläche $a B$:

$$D = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_0^2/(4a^2)}} \frac{32 a B}{\pi \lambda_0^2} \approx \frac{32 a B}{\pi \lambda_0^2}, \quad (14.13)$$

wobei a als Abmessung in der H-Ebene und B in der E-Ebene angesehen wird. Bei einem geforderten Wert von $D_E \approx D \approx 200$ gilt für $a = 2\lambda_0$:

$$\frac{B}{\lambda_0} \approx \frac{200 \pi}{32 \cdot 2} \approx 9,82. \quad (14.14)$$

Den maximal zulässigen Steigungswinkel bestimmen wir aus (14.11):

$$\alpha_E = 2 \arctan \frac{\lambda_0}{8B} \approx 2 \arctan \frac{1}{8 \cdot 9,82} \approx 1,46^\circ, \quad (14.15)$$

woraus mit (14.12) als minimal notwendige Baulänge folgt:

$$l_E = \frac{B/2}{\sin \alpha_E} \approx \frac{4,91 \lambda_0}{\sin 1,46^\circ} \approx 193 \lambda_0. \quad (14.16)$$

Für $f = 10 \text{ GHz}$ gilt $\lambda_0 \approx 3 \text{ cm}$; die geometrischen Abmessungen sind daher:

$$a = 2 \lambda_0 = 6 \text{ cm} \quad \text{und} \quad B = 9,82 \lambda_0 = 29,5 \text{ cm} \quad \text{sowie} \quad l_E = 193 \lambda_0 = 5,78 \text{ m}. \quad (14.17)$$

Eine Baulänge von 5,78 m ist aber aus konstruktiven Gründen inakzeptabel. Kompaktere Lösungen sind nur möglich, wenn wir quadratische Phasenfehler in der Apertur zulassen. $\square$

14.3 Pyramidenhorn

Betrachtet man die Aufweitung eines rechteckigen Querschnitts in zwei zueinander orthogonalen Ebenen, dann entsteht kein Sektorhorn, sondern ein Pyramidenhorn (siehe Bild 14.1), dessen Längsschnitt durch die H-Ebene in Bild 14.5 dargestellt ist.

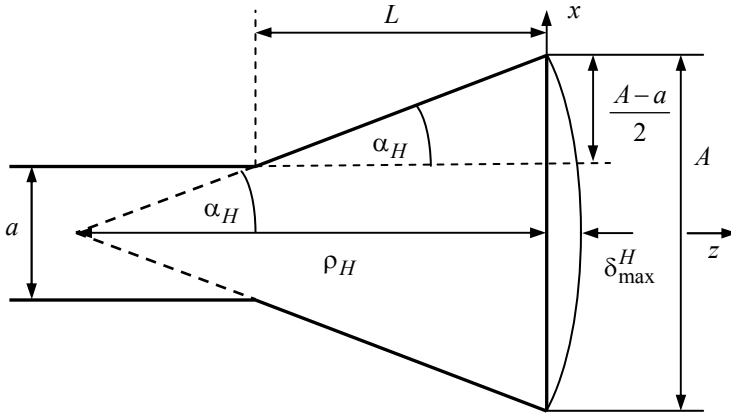


Bild 14.5 Längsschnitt durch die H-Ebene eines Pyramidenhorns mit maximalem Gangunterschied $\delta_{\max}^H$

Aus Bild 14.5 folgt $\tan \alpha_H = (A - a)/(2L) = A/(2\rho_H)$ und $\tan \alpha_E = (B - b)/(2L) = B/(2\rho_E)$ in der zur H-Ebene orthogonalen E-Ebene. Für ein realisierbares Pyramidenhorn muss die Knicklänge L zwischen Hohlleiteröffnung und Apertur in beiden Ebenen gleich sein, damit der Speisehohlleiter mit den Hornwänden verbunden werden kann, d. h. es muss gelten:

$$\boxed{2L = \frac{A - a}{\tan \alpha_H} = \frac{B - b}{\tan \alpha_E}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{L = \rho_H (1 - a/A) = \rho_E (1 - b/B)}. \quad (14.18)$$

Im Pyramidenhorn stellt sich eine in zwei Ebenen sphärisch gekrümmte Phasenfront ein, deren Abweichung von der ebenen Apertur in beiden Hauptschnitten durch die Gangunterschiede

$$\delta_H(x) = \sqrt{\rho_H^2 + x^2} - \rho_H \approx \frac{x^2}{2\rho_H} \quad \text{und} \quad \delta_E(y) = \sqrt{\rho_E^2 + y^2} - \rho_E \approx \frac{y^2}{2\rho_E} \quad (14.19)$$

ausgedrückt werden können, siehe (14.6). Für flache Steigungswinkel $\alpha_H, \alpha_E < 30^\circ$ erhält man den bereits vom Sektorhorn bekannten quadratischen Phasenfehler, der sich nun aus zwei Beiträgen zusammensetzt:

$$k_0 (\delta_H(x) + \delta_E(y)) \approx k_0 \left(\frac{x^2}{2\rho_H} + \frac{y^2}{2\rho_E} \right). \quad (14.20)$$

In der ebenen Hornapertur mit $-A/2 \leq x \leq A/2$ und $-B/2 \leq y \leq B/2$ stellt sich also näherungsweise folgende **Feldverteilung** ein:

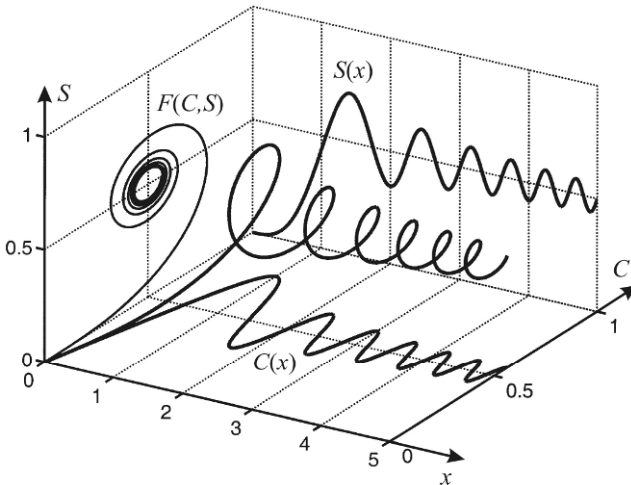
$$\underline{E}_A(x, y) = \underline{E}_0 \mathbf{e}_y \cos \frac{\pi x}{A} e^{-j k_0 \left(\frac{x^2}{2\rho_H} + \frac{y^2}{2\rho_E} \right)}, \quad (14.21)$$

falls das Pyramidenhorn mit einer H_{10} -Welle gespeist wird. Das Strahlungsfeld gewinnt man analog zur Berechnung der Abstrahlung einer Huygens-Quelle im freien Raum mit Hilfe des **Chu-Modells II** aus Tabelle 13.1. Wegen der quadratischen Näherung beim Phasenfehler lässt sich sogar eine geschlossene Lösung finden, in der die **Fresnelschen Integrale** auftreten:

$$C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi \tau^2}{2} d\tau \quad \text{und} \quad S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi \tau^2}{2} d\tau, \quad (14.22)$$

die man komplex zusammenfassen kann: $\underline{F}(x) = C(x) - j S(x) = \int_0^x e^{-j \frac{\pi}{2} \tau^2} d\tau$.

Man stellt die Fresnelschen Integrale – wie in Bild 14.6 – anschaulich als Projektionen einer räumlichen Spirale auf die drei Koordinatenebenen dar. Die parametrische Darstellung $F(C, S)$ wird als Cornuspirale² bezeichnet [JEL66, Spa87].



Für kleine Argumente x gelten folgende Reihenentwicklungen:

$$C(x) \approx x \left(1 - \frac{\pi^2}{40} x^4 \right)$$

$$S(x) \approx \frac{\pi}{6} x^3 \left(1 - \frac{\pi^2}{56} x^4 \right);$$

für große x erhält man asymptotisch:

$$C(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi x} \sin \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right)$$

$$S(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi x} \cos \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right).$$

Bild 14.6 Fresnelsche Integrale $C(x)$, $S(x)$ und Cornuspirale $F(C, S)$

² Alfred **Cornu** (1841-1902): frz. Physiker (Optik, Interferenz, Fresnelsche Beugung, Spektralanalyse, Akustik, Elastomechanik, Elektrizitätslehre)

Unter Umgehung der längeren Herleitung, die man in [Zuh53, Stu98a, LoLe88] finden kann, wollen wir hier nicht das gesamte Strahlungsfeld sondern nur die **Direktivität** eines Pyramidenhorns diskutieren, wobei die Sektorhörner in der E- und in der H-Ebene als Grenzfälle eines Pyramidenhorns betrachtet werden können. Im Vergleich zur Direktivität $D = 32 a b / (\pi \lambda_0^2)$ der H_{10} -belegten Apertur eines offenen Rechteckhohlleiters, wo kein Phasenfehler auftritt, gilt:

$$D_E = \frac{32 a B}{\pi \lambda_0^2} K_E(w) \quad \textbf{E-Sektorhorn} \text{ mit } a \gg \lambda_0 \text{ und } B \gg \lambda_0 \quad (14.23)$$

$$D_H = \frac{32 A b}{\pi \lambda_0^2} K_H(p) \quad \textbf{H-Sektorhorn} \text{ mit } A \gg \lambda_0 \text{ und } b \gg \lambda_0. \quad (14.24)$$

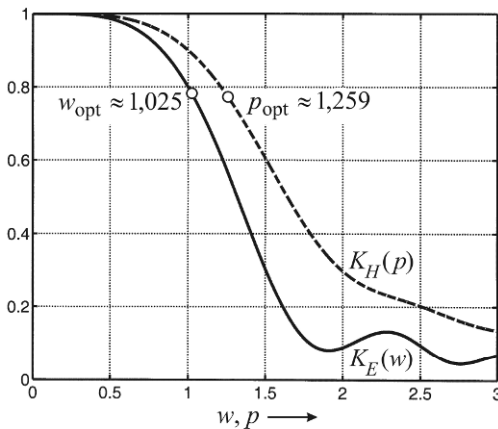
Die Korrekturfaktoren nach [Sche52b]

$$K_E(w) = \frac{C^2(w) + S^2(w)}{w^2} \leq 1 \quad (14.25)$$

$$K_H(p) = \frac{\pi^2}{16} \frac{[C(u) - C(v)]^2 + [S(u) - S(v)]^2}{p^2} \leq 1, \quad (14.26)$$

berücksichtigen den quadratischen Phasenfehler in der Hornapertur und sind in Bild 14.7 grafisch dargestellt. Zur kompakteren Darstellung haben wir folgende Abkürzungen verwendet:

$$w = B / \sqrt{2 \lambda_0 \rho_E}, \quad p = A / \sqrt{2 \lambda_0 \rho_H} \quad \text{mit } u = \frac{1}{2p} + p \text{ und } v = \frac{1}{2p} - p. \quad (14.27)$$



In der Praxis nimmt man zugunsten einer möglichst kurzen Baulänge $\rho_{E,H}$ eine ungleichmäßige Phasenbelegung in der Apertur in Kauf. Der Maximalgewinn bei gegebener Baulänge wird nach (14.30) und (14.33) dann erreicht, wenn die Korrekturfaktoren gerade

$$K_E(w_{\text{opt}}) = 0,782 \quad \text{und} \quad K_H(p_{\text{opt}}) = 0,772$$

betragen. Ein Pyramidenhorn verliert dann

$$10 \lg(K_E(w_{\text{opt}}) K_H(p_{\text{opt}})) = -2,19 \text{ dB}$$

an Gewinn im Vergleich zu einer gleich großen Rechteckapertur ohne Phasenfehler.

Bild 14.7 Korrekturfaktoren $K_E(w)$ und $K_H(p)$ aufgrund quadratischer Phasenfehler in E- bzw. H-Ebene

Substituiert man in (14.23) beim E-Sektorhorn $a \rightarrow A$ und in (14.24) beim H-Sektorhorn $b \rightarrow B$, dann gilt für das **Pyramidenhorn** [Sche52b]:

$$D_P = \frac{\pi \lambda_0^2}{32 A B} D_E D_H = \frac{32 A B}{\pi \lambda_0^2} K_E(w) K_H(p) \quad \text{mit } A \gg \lambda_0 \text{ und } B \gg \lambda_0. \quad (14.28)$$

Beim **E-Sektorhorn** wollen wir bei gegebener Aperturbreite a und gegebener Hornlänge ρ_E fragen, bei welcher Aperturhöhe B der Richtfaktor D_E maximal wird. Wir formen daher (14.23) ein wenig um und erhalten eine Formel, die in Bild 14.8 als Kurvenschar dargestellt ist:

$$\frac{\lambda_0}{a} D_E = \frac{32}{\pi} \sqrt{\frac{2\rho_E}{\lambda_0}} \frac{C^2(w) + S^2(w)}{w} \quad (a, \rho_E \text{ fest}). \quad (14.29)$$

Das Maximum dieser Funktion finden wir aus

$$\frac{d}{dw} \frac{C^2(w) + S^2(w)}{w} = 0 \Rightarrow w_{\text{opt}} = 1,02455 \Rightarrow K_E(w_{\text{opt}}) = 0,782046. \quad (14.30)$$

Beim optimalen E-Sektorhorn (mit Maximalgewinn bei fester Baulänge ρ_E) erhalten wir mit (14.27) seine vertikale Abmessung und aus (14.9) den Gangunterschied am Hornrand:

$$\boxed{B_{\text{opt}} = \sqrt{2,099 \lambda_0 \rho_E}} \Rightarrow \boxed{\delta_{\text{max}}^E = \frac{B_{\text{opt}}^2}{8 \rho_E} = 0,2624 \lambda_0 \hat{=} 94,47^\circ}. \quad (14.31)$$

Beim **H-Sektorhorn** gehen wir analog vor und erhalten die zweite Kurvenschar von Bild 14.8

$$\frac{\lambda_0}{b} D_H = 2\pi \sqrt{\frac{2\rho_H}{\lambda_0}} \frac{[C(u) - C(v)]^2 + [S(u) - S(v)]^2}{p} \quad (b, \rho_H \text{ fest}), \quad (14.32)$$

deren Maxima sich mit $u(p)$ und $v(p)$ aus (14.27) wie folgt bestimmen lassen:

$$\frac{d}{dp} \frac{[C(u) - C(v)]^2 + [S(u) - S(v)]^2}{p} = 0 \Rightarrow p_{\text{opt}} = 1,25933 \Rightarrow K_H(p_{\text{opt}}) = 0,772269, \quad (14.33)$$

woraus schließlich folgt:

$$\boxed{A_{\text{opt}} = \sqrt{3,172 \lambda_0 \rho_H}} \Rightarrow \boxed{\delta_{\text{max}}^H = \frac{A_{\text{opt}}^2}{8 \rho_H} = 0,3965 \lambda_0 \hat{=} 142,7^\circ}. \quad (14.34)$$

Beim optimalen H-Sektorhorn darf der Gangunterschied am Hornrand deutlich größer als beim E-Sektorhorn sein, was an der kosinusförmigen Belegung in der H-Ebene liegt.

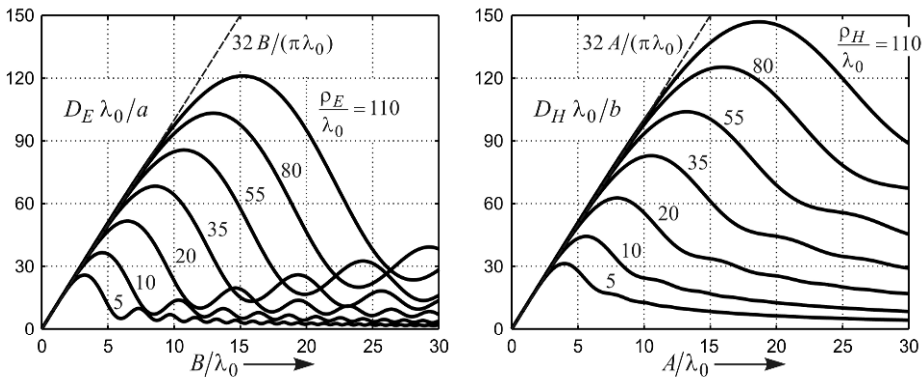


Bild 14.8 Normierter Gewinn des E- bzw. H-Sektorhorns als Funktion von (B, ρ_E) bzw. (A, ρ_H)

Vergrößert man bei fester Hornlänge die Steigungswinkel $\alpha_{E,H}$, dann wachsen die Aperturfläche und zunächst auch der Gewinn. Die zunehmenden Phasenfehler in der Apertur führen aber dazu, dass nach Überschreiten eines Maximums (an den Optimalwerten B_{opt} bzw. A_{opt}) die Gewinnkurven durch destruktive Interferenz wieder steil abfallen.

Für Hörner, die bei gegebener Baulänge einen optimalen Gewinn besitzen, kann man mit B_{opt} und A_{opt} aus (14.31) bzw. (14.34) folgende **Halbwertsbreiten** angeben (siehe Abschnitt C.6):

$$\begin{aligned} \Theta_E &= 2 \arcsin(0,4737 \lambda_0 / B_{\text{opt}}) \hat{=} 54,3^\circ \lambda_0 / B_{\text{opt}} & (\text{E - Ebene im E - Sektorhorn}) \\ \Theta_H &= 2 \arcsin(0,6928 \lambda_0 / A_{\text{opt}}) \hat{=} 79,4^\circ \lambda_0 / A_{\text{opt}} & (\text{H - Ebene im H - Sektorhorn}). \end{aligned} \quad (14.35)$$

Man kann nun leicht den **Flächenwirkungsgrad** solcher Optimalhörner ermitteln. Wir erhalten ihn durch Multiplikation des Flächenwirkungsgrads $q = 8/\pi^2$ der H_{10} -belegten Rechteckapertur ohne Phasenfehler (13.66) mit den optimalen Werten K_E bzw. K_H aus Bild 14.7:

$$\boxed{q_E = q K_E = 63,39 \%} \quad \boxed{q_H = q K_H = 62,60 \%} \quad \boxed{q_P = q K_E K_H = 48,95 \%}. \quad (14.36)$$

Für den erreichbaren **Maximalgewinn** eines Pyramidenhorns erhalten wir daher:

$$D_P = \frac{4\pi}{\lambda_0^2} A_W = \frac{4\pi}{\lambda_0^2} q_P A_{\text{opt}} B_{\text{opt}} \quad \text{bzw.} \quad 10 \lg D_P = \left(7,89 + 10 \lg \frac{A_{\text{opt}} B_{\text{opt}}}{\lambda_0^2} \right) \text{dBi}. \quad (14.37)$$

Nach Einsetzen von q_P und der optimalen Aperturabmessungen (14.31) und (14.34) folgt:

$$\boxed{D_P = 6,152 \frac{A_{\text{opt}} B_{\text{opt}}}{\lambda_0^2} = \frac{15,87}{\lambda_0} \sqrt{\rho_H \rho_E}}. \quad (14.38)$$

Übung 14.2: Dimensionierung eines Pyramidenhorns mit Maximalgewinn

- Ein Pyramidenhorn werde bei einer Wellenlänge von $\lambda_0 = 3 \text{ cm}$ mit der H_{10} -Welle eines Rechteckhohlleiters mit den Abmessungen $a = 0,7 \lambda_0$ und $b = 0,35 \lambda_0$ angeregt. Man bestimme die notwendigen Abmessungen, sodass sich ein optimales Pyramidenhorn mit Maximalgewinn $D_P = 200$ – also 23,01 dBi – einstellt (vgl. Übung 14.1).

• Lösung:

Wegen der Realisierungsbedingung (14.18), d. h. wegen $L = \rho_H (1 - a/A) = \rho_E (1 - b/B)$, können in (14.38) die Werte von A und B nicht unabhängig voneinander gewählt werden. Wir formen die **Realisierungsbedingung** zunächst noch etwas um:

$$\frac{\rho_H}{\rho_E} = \frac{1 - b/B}{1 - a/A} \Rightarrow \frac{\rho_H / A^2}{\rho_E / B^2} = \frac{B(B - b)}{A(A - a)}. \quad (14.39)$$

Beim optimalen Pyramidenhorn (mit Maximalgewinn bei gegebener Baulänge) ist nach (14.31) nun $B^2/\rho_E = 8 \delta_{\text{max}}^E$ und nach (14.34) gilt $A^2/\rho_H = 8 \delta_{\text{max}}^H$. Damit erhalten wir

$$\boxed{\frac{B(B - b)}{A(A - a)} = \frac{\delta_{\text{max}}^E}{\delta_{\text{max}}^H} = \frac{0,2624}{0,3965} = 0,6619}. \quad (14.40)$$

Mit (14.38) erhalten wir noch eine zweite Gleichung, die simultan erfüllt werden muss:

$$\boxed{AB = \frac{\lambda_0^2 D_P}{6,152}}. \quad (14.41)$$

Da a, b, λ_0 und D_P gegeben sind, kann das gekoppelte Gleichungssystem (14.40) und (14.41) mit einer numerischen Iteration nach A und B aufgelöst werden. Als Startlösung eignet sich $A_0 = B_0 = \lambda_0 \sqrt{D_P/6,152}$. So erhält man alle gesuchten Abmessungen aus:

$$\rho_E = B^2 / (2,099 \lambda_0) \Rightarrow l_E = \sqrt{\rho_E^2 + (B/2)^2} \quad (14.42)$$

$$\rho_H = A^2 / (3,172 \lambda_0) \Rightarrow l_H = \sqrt{\rho_H^2 + (A/2)^2} \quad (14.43)$$

Die (gleich großen!) Knicklängen des Pyramidenhorns folgen aus $L_H = \rho_H (1 - a/A)$ und $L_E = \rho_E (1 - b/B)$, woraus wir schließlich auch die Steigungswinkel ermitteln können:

$$\tan \alpha_E = (B - b) / (2 L_E) \quad \text{und} \quad \tan \alpha_H = (A - a) / (2 L_H) \quad (14.44)$$

Tabelle 14.1 Geometriedaten für das gesuchte optimale Pyramidenhorn

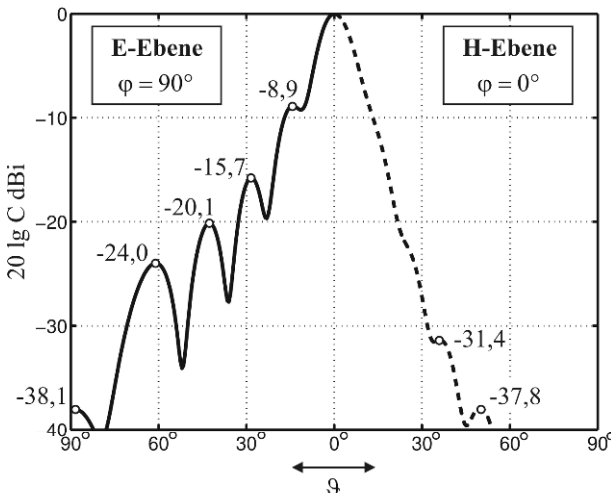
$B = 15,26 \text{ cm}$	$\rho_E = 36,96 \text{ cm}$	$l_E = 37,74 \text{ cm}$	$L_E = 34,42 \text{ cm}$	$\alpha_E = 11,66^\circ$
$A = 19,18 \text{ cm}$	$\rho_H = 38,65 \text{ cm}$	$l_H = 39,82 \text{ cm}$	$L_H = 34,42 \text{ cm}$	$\alpha_H = 13,93^\circ$

Die Knicklängen des Pyramidenhorns werden identisch (Tabelle 14.1), was eine praktische Realisierbarkeit garantiert. Der optimierte Entwurf – bei gleichem Gewinn aber mit Phasenfehlern in der Aperturbelegung – ist wesentlich kürzer als das E-Sektorhorn aus Übung 14.1, in der noch eine möglichst uniforme Phasenbelegung der Apertur gefordert wurde. □

Schließlich wollen wir noch die Richtdiagramme in der E- und der H-Ebene des Pyramidenhorns aus Übung 14.2 ermitteln. Der Entwurf erfolgte zweckmäßig mit analytischen Formeln, doch kann es bequemer sein, die Strahlungsfelder durch eine numerische Integration der Aperturfeldintegrale mit dem **Chu-Modell** zu gewinnen [Dia96]. Für den Phasenfehler kann dann anstelle der quadratischen Approximation $\delta_H(x) + \delta_E(y) \approx x^2 / (2\rho_H) + y^2 / (2\rho_E)$ sogar der exakte Wert eingesetzt werden, was die Genauigkeit der Ergebnisse noch geringfügig steigert:

$$\delta_H(x) + \delta_E(y) = \sqrt{\rho_H^2 + x^2} - \rho_H + \sqrt{\rho_E^2 + y^2} - \rho_E \quad (14.45)$$

Aus unseren analytischen Voruntersuchungen erwarten wir nach (14.35) Halbwertsbreiten von $\Theta_E = 2 \arcsin(0,4737 \lambda_0 / B) = 10,69^\circ$ und $\Theta_H = 2 \arcsin(0,6928 \lambda_0 / A) = 12,44^\circ$. Der Gewinn soll 23,01 dBi und der Flächenwirkungsgrad 48,95 % betragen. Im Vergleich mit den numerischen Daten von Bild 14.9 wird unser Entwurf vollauf bestätigt.



numerische Daten:

Gewinn: 23,05 dBi

$q_P = 49,41 \%$

E-Ebene:

$\Theta_E = 10,64^\circ$

1. Nebenkeule:

-8,9 dB bei $\vartheta = 14,2^\circ$

H-Ebene

$\Theta_H = 12,37^\circ$

1. deutliche Nebenkeule

(Schultern ausgelassen):

-31,4 dB bei $\vartheta = 36,3^\circ$

Bild 14.9 Richtdiagramme in der E-Ebene und H-Ebene des Pyramidenhorns aus Übung 14.2

Die Hauptkeule ist fast rotationssymmetrisch. Man beachte, dass die Halbwertsbreiten im Pyramidenhorn größer als beim offenen Rechteckhohlleiter gleicher Abmessungen sind. Es fällt auf, dass in der E-Ebene höhere Nebenkeulen als in der H-Ebene auftreten, was durch die kosinusförmige Amplitudenbelegung in der H-Ebene bedingt ist. Weil man den Gewinn von Pyramidenhörnern mit analytischen Formeln relativ genau berechnen kann (Fehler < 0,1 dBi), werden sie oft als **Eichnormale** zur Messung des Gewinns einer anderen Testantenne eingesetzt.

Die Seiten- und Rückwärtsstrahlung von Pyramidenhörnern ist gering und hat ihre Ursache in der Beugung der Felder an den Aperturkanten (siehe Abschnitt 5.6) und den dadurch angeregten Oberflächenströmen auf der Hornaußenwand. Durch Belegung des Aperturrandes mit Absorbermaterialien kann dieser Störeffekt abgeschwächt werden.

Der nutzbare Frequenzbereich eines Pyramidenhorns wird durch den Querschnitt des H_{10} -Speisehohlleiters bestimmt. Bei symmetrischem Aufbau tritt als erster höherer Wellentyp die H_{30} -Welle auf, d. h. es steht ein **Frequenzband** von 3:1 zur Verfügung:

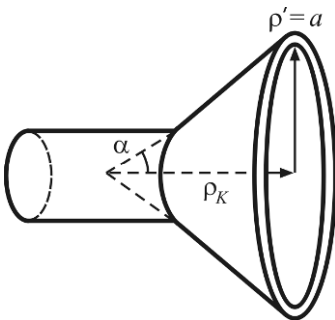
$$f_c^{H_{10}} = \frac{c_0}{2a} < f < \frac{3c_0}{2a} = f_c^{H_{30}} \quad (14.46)$$

Mit Ausnahme der Halbwertsbreiten ändert sich in diesem Bereich das Strahlungsverhalten kaum – insbesondere bleiben die Nebenkeulen und auch die Reflexionen klein. Wegen praktischer Beschränkungen bei der Baulänge sind die erzielbaren Gewinne bei Hornstrahlern begrenzt. Ihre Hauptanwendungen liegen im Frequenzbereich über 1 GHz entweder zur direkten Abstrahlung oder als Primärstrahler in Verbindung mit Linsen- oder Spiegelantennen.

14.4 Kegelhorn und Rillenhorn

14.4.1 Phasenfehler in der ebenen Hornapertur

Wie beim Pyramidenhorn kann das Strahlungsverhalten eines Kegelhorns (Bild 14.10), in dem sich sphärische Wellen ohne Grenzfrequenz ausbreiten, in erster Näherung als Strahlung eines offenen Hohlleiters berechnet werden. Hornstrahler mit hohem Gewinn benötigen eine große Apertur, was zu großen Baulängen ρ_K oder großen Steigungswinkeln α führt. Zugunsten einer kompakten Bauform haben in der Praxis viele Hornstrahler Steigungswinkel im Bereich $10^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$, wodurch zwangsläufig eine ungleichmäßige Phasenbelegung in der ebenen Hornapertur folgt. In weiter Näherung kann im Kegelhorn eine H_{11} -Rundhohlleiterwelle eingesetzt werden, die von einem Phasenfehler überlagert ist (man beachte hierzu Abschnitt 15.2).



Zur Untersuchung des Einflusses von Phasenfehlern ϕ bei kreisförmigen Aperturen betrachten wir zunächst ein Kegelhorn, das nach Bild 14.10 eine Länge ρ_K aufweist, gemessen vom Apex bis zur Mitte der ebenen Apertur. Die (nacheilende) Abweichung von einer uniformen Phasenbelegung lässt sich nach (14.5) wie folgt ausdrücken:

$$\phi(\rho') = -k_0 \delta(\rho') = -k_0 \left(\sqrt{\rho_K^2 + \rho'^2} - \rho_K \right), \quad (14.47)$$

womit wir bei $\rho' \leq a \ll \rho_K$ wieder den üblichen **quadratischen Phasenfehler** $\phi(\rho') \approx -k_0 \rho'^2 / (2\rho_K)$ erhalten.

Bild 14.10 Längsschnitt durch ein Kegelhorn mit Kreisquerschnitt (Durchmesser $D = 2a$, Baulänge ρ_K)

Nun kann wegen $\underline{E}_x = 0$ sofort auch $\underline{P}_x = 0$ gesetzt werden. Für $\underline{P}_y$ erhalten wir mit (13.37) und dem Skalarprodukt $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}' = \rho' \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi')$ (siehe Übung 8.7) sowie $dA' = \rho' d\rho' d\varphi'$

$$\underline{P}_y(\vartheta, \varphi) = \underline{E}_0 \int_{\rho'=0}^a \rho' J_0\left(\frac{j_{01}\rho'}{a}\right) e^{-j k_0 \frac{\rho'^2}{2\rho_R}} \left[\int_{\varphi'=0}^{2\pi} e^{j k_0 \rho' \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi')} d\varphi' \right] d\rho'. \quad (14.50)$$

Das Integral über φ' hat die geschlossene Darstellung (8.122), woraus mit den **Abkürzungen** $u = \rho'/a$ und $p = k_0 a \sin \vartheta$ sowie $a^2/(2\rho_R) = \delta_{\max} = s\lambda_0$ schließlich folgt:

$$\underline{P}_y = 2\pi a^2 \underline{E}_0 e^{-j 2\pi s} \int_{u=0}^1 u J_0(j_{01}u) J_0(pu) e^{j 2\pi s(1-u^2)} du. \quad (14.51)$$

Bei verschwindendem Phasenfehler ($s \rightarrow 0$) hätte dieses Integral eine geschlossene Lösung. Bei endlicher Hornlänge ρ_R bietet sich nach [Nar70] eine **Näherungslösung** an. Wir ersetzen dazu für $0 \leq u \leq 1$ die erste Besselfunktion in (14.51) durch eine Ausgleichskurve 4. Ordnung:

$$J_0(j_{01}u) \approx a_0 + a_2 u^2 + a_4 u^4 \quad \text{mit} \quad a_0 = 0,99843, \quad a_2 = -1,4123 \quad \text{und} \quad a_4 = 0,41862, \quad (14.52)$$

womit (14.51) in drei **Teilintegrale** $\underline{M}_{10}$, $\underline{M}_{30}$ und $\underline{M}_{50}$ zerfällt. Wir geben exemplarisch nur das erste Teilintegral an – die beiden anderen ($\underline{M}_{30}$ und $\underline{M}_{50}$) findet man im Anhang A.7:

$$\underline{M}_{10} = \int_{u=0}^1 u J_0(pu) e^{j 2\pi s(1-u^2)} du = \frac{U_1(4\pi s, p) + j U_2(4\pi s, p)}{4\pi s}. \quad (14.53)$$

Alle drei M-Integrale können entweder direkt oder nach ein- bzw. zweimaliger partieller Integration durch **Lommelsche Funktionen** $U_n(w, z)$ mit einem Index und zwei Argumenten ausgedrückt werden [Kark06]. Detaillierte Informationen zu den Lommelschen Funktionen, die als Reihe über Besselfunktionen darstellbar sind, findet man in [Lom86, Walk04, Wat06, Born93, Miel98, Kor02] und im Anhang A.7. Mehrere Hilfsintegrale, die während der etwas mühsamen Rechnung benötigt werden, haben nur dann eine geschlossene Darstellung, wenn die Ausgleichskurve für $J_0(j_{01}u)$ lediglich geradzahlige Potenzen enthält. Das Aperturfeldintegral (14.51) liegt – unter Zuhilfenahme der M-Integrale – somit in geschlossener Form vor:

$$\underline{P}_y(\vartheta, \varphi) = 2\pi a^2 \underline{E}_0 e^{-j 2\pi s} (a_0 \underline{M}_{10} + a_2 \underline{M}_{30} + a_4 \underline{M}_{50}). \quad (14.54)$$

Mit (14.54) können wir aus (14.49) schließlich das Strahlungsfeld und damit auch die **Richtdiagramme** von Bild 14.13 erhalten. Nach längeren algebraischen Umformungen können auch die **Richtfaktoren** D_R eines HE_{11} -Rillenhorns und D_K eines H_{11} -Kegelhorns in geschlossener Form über Lommelsche Funktionen ausgedrückt werden [Nar70, Nar71]. Beide Richtfaktoren nehmen (bei fester Hornlänge ρ) mit wachsendem Phasenfehler $|\phi_{\max}| = 2\pi s$ bis zu einem Maximum zu und fallen danach wieder ab (Bild 14.12). Obwohl in (14.55) Reflexionen und Beugungseffekte an der Apertur vernachlässigt sind, bleibt der relative Fehler kleiner als 2,2 %.

$$\begin{aligned} D_R &= \frac{2\rho_R}{\lambda_0} \frac{U_1^2(4\pi s, j_{01}) + U_2^2(4\pi s, j_{01})}{s J_1^2(j_{01})} && \text{maximal bei } s = 0,4884 \\ D_K &= \frac{\rho_K}{\lambda_0} \frac{j_{11}'^2}{j_{11}'^2 - 1} \frac{U_1^2(4\pi s, j_{11}') + U_2^2(4\pi s, j_{11}')}{s J_1^2(j_{11}')} && \text{maximal bei } s = 0,3908 \end{aligned} \quad (14.55)$$

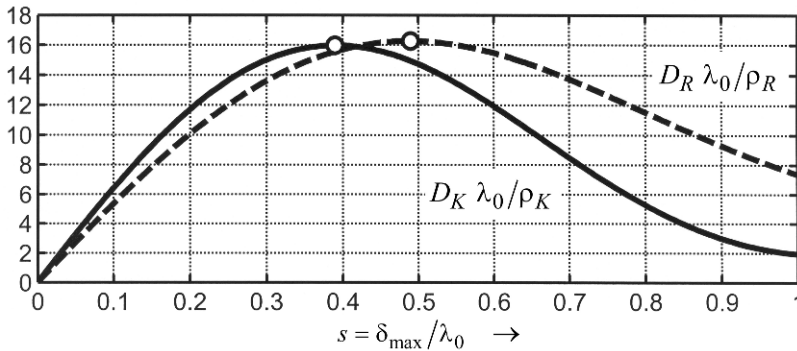


Bild 14.12 Normierter Richtfaktor eines HE_{11} -Rillenhorns bzw. H_{11} -Kegelhorns als Funktion des normierten Phasenfehlers $s = \delta_{\max}/\lambda_0$ am Rand der Hornapertur

Die Maxima beider Kurven in Bild 14.12 liegen bei $s = 0,4884$ bzw. $s = 0,3908$. Ähnlich wie in (14.38) hängt der **Maximalgewinn** eines Hornstrahlers nur von seiner axialen Baulänge ab:

$$D_P = 15,87 \frac{\sqrt{\rho_H \rho_E}}{\lambda_0}, \quad D_R = 16,26 \frac{\rho_R}{\lambda_0} \quad \text{und} \quad D_K = 15,97 \frac{\rho_K}{\lambda_0}, \quad (14.56)$$

wobei alle drei Vorfaktoren sehr ähnliche Zahlenwerte aufweisen.

Bei ($s \rightarrow 0$) geht ein Hornstrahler in seinen zugehörigen, geradlinigen, offenen Hohlleiter über. Den Richtfaktor eines **offenen Hohlleiters** kann man exakt bestimmen. In unseren beiden Fällen werden Flächenwirkungsgrade von 69,2 % bzw. 83,7 % erreicht – siehe auch (13.67):

$$D = \frac{4}{j_{01}^2} (k_0 a)^2 \approx 0,6917 (k_0 a)^2 \quad \text{Rillenhohlleiter mit } HE_{11} - \text{Welle} \\ D = \frac{2}{j_{11}'^2 - 1} (k_0 a)^2 \approx 0,8368 (k_0 a)^2 \quad \text{Rundhohlleiter mit } H_{11} - \text{Welle.} \quad (14.57)$$

Der gewinnmindernde Einfluss einer gekrümmten Phasenfront in der Hornapertur führt zu einem quadratischen Phasenfehler und kann wie in (14.23) bzw. (14.24) durch einen **Korrekturfaktor** berücksichtigt werden. So lassen sich die Formeln (14.55) für den Richtfaktor eines HE_{11} -Rillenhorns bzw. H_{11} -Kegelhorns mit $\rho = a^2/(2s\lambda_0)$ noch umformen:

$$D_R = \frac{4}{j_{01}^2} (k_0 a_R)^2 K_R(s) \quad \text{und} \quad D_K = \frac{2}{j_{11}'^2 - 1} (k_0 a_K)^2 K_K(s) \quad (14.58)$$

mit den Korrekturfaktoren (die stets kleiner gleich eins bleiben):

$$K_R(s) = \left(\frac{j_{01}}{4\pi s J_1(j_{01})} \right)^2 \left[U_1^2(4\pi s, j_{01}) + U_2^2(4\pi s, j_{01}) \right] \\ K_K(s) = \left(\frac{j_{11}'}{4\pi s J_1(j_{11}') } \right)^2 \left[U_1^2(4\pi s, j_{11}') + U_2^2(4\pi s, j_{11}') \right]. \quad (14.59)$$

Bei Hörnern mit Maximalgewinn gilt $K_R(0,4884) = 0,6097$ und $K_K(0,3908) = 0,6185$, was dem Produkt $K_E(w_{\text{opt}}) K_H(p_{\text{opt}}) = 0,6039$ beim Pyramidenhorn entspricht (Bild 14.7).

14.4.3 Optimale Bauweise

Wie beim Pyramidenhorn gibt es auch beim Rillen- und Kegelhorn optimale Abmessungen, damit bei gegebener Baulänge ρ der Richtfaktor maximal wird. Das ist nach (14.55) jeweils bei einem bestimmten Phasenfehler der Fall. Einige Ergebnisse aus [Kark06] zeigt Tabelle 14.2.

Tabelle 14.2 Geometriedaten für Optimalhörner fester Baulänge ρ , die maximalen Richtfaktor aufweisen

	Rillenhorn ($2 a_R \gg \lambda_0$)	Kegelhorn ($2 a_K \gg \lambda_0$)
Gangunterschied am Hornrand	$\delta_{\max} = \frac{a_R^2}{2 \rho_R} = 0,4884 \lambda_0 \hat{=} 175,8^\circ$	$\delta_{\max} = \frac{a_K^2}{2 \rho_K} = 0,3908 \lambda_0 \hat{=} 140,7^\circ$
Aperturdurchmesser	$2 a_R = \sqrt{3,907 \lambda_0 \rho_R}$	$2 a_K = \sqrt{3,127 \lambda_0 \rho_K}$
Steigungswinkel	$\tan \alpha_R = \frac{a_R}{\rho_R} = \sqrt{\frac{0,9767 \lambda_0}{\rho_R}}$	$\tan \alpha_K = \frac{a_K}{\rho_K} = \sqrt{\frac{0,7816 \lambda_0}{\rho_K}}$
Flächenwirkungsgrad	$q_R = 42,17 \%$	$q_K = 51,76 \%$
Richtfaktor siehe (15.16)	$\frac{10 \lg D_R}{\text{dBi}} = 6,19 + 20 \lg \frac{2 a_R}{\lambda_0}$	$\frac{10 \lg D_K}{\text{dBi}} = 7,08 + 20 \lg \frac{2 a_K}{\lambda_0}$

Für Rillen- bzw. Kegelhörner, die bei gegebener Baulänge einen optimalen Richtfaktor aufweisen, kann man mit a_R und a_K aus Tabelle 14.2 folgende **Halbwertsbreiten** angeben:

$$\begin{aligned}
 \Theta_{E,H} &= 2 \arcsin(0,7386 \lambda_0 / (2 a_R)) \hat{=} 84,6^\circ \lambda_0 / (2 a_R) \quad (\text{E- und H-Ebene im Rillenhorn}) \\
 \Theta_E &= 2 \arcsin(0,5662 \lambda_0 / (2 a_K)) \hat{=} 64,9^\circ \lambda_0 / (2 a_K) \quad (\text{E-Ebene im Kegelhorn}) \\
 \Theta_H &= 2 \arcsin(0,6639 \lambda_0 / (2 a_K)) \hat{=} 76,1^\circ \lambda_0 / (2 a_K) \quad (\text{H-Ebene im Kegelhorn}).
 \end{aligned} \tag{14.60}$$

Im direkten Vergleich zu Übung 14.2 zeigt Bild 14.13 die Strahlungsdiagramme von Optimalhörnern nach Tabelle 14.2, bei denen ein Richtfaktor von $D_R = D_K = 200$ gefordert wurde.

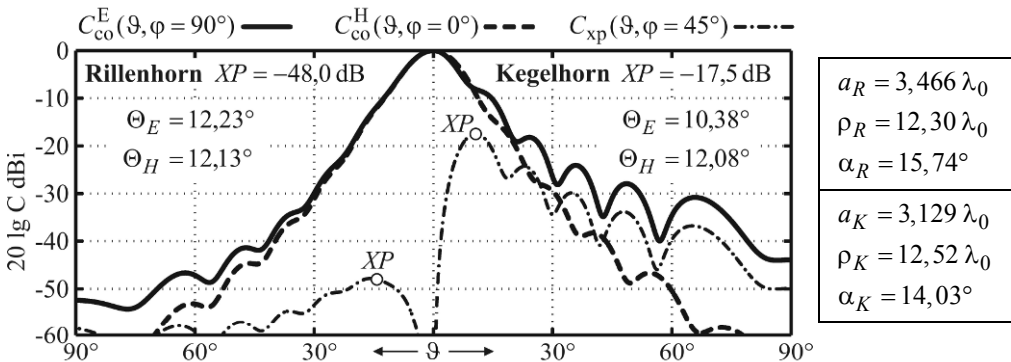


Bild 14.13 Ko- und kreuzpolare Richtdiagramme eines optimalen Rillenhorns (←) bzw. Kegelhorns (→)

Das **Kreuzpolarisationsmaß** XP hängt beim Kegelhorn für $a_K \geq 1,5 \lambda_0$ kaum von der Aperturgröße ab, während es im Rillenhorn mit wachsendem a_R immer kleiner wird. Bei Breitbandanwendungen – aber fester Rillentiefe – kann in Rillenhörnern die gewünschte HE_{11} -Welle nicht mehr ganz exakt angeregt werden. Realistisch kann dann $XP \leq -35 \text{ dB}$ erreicht werden.

Alle sechs Richtdiagramme – berechnet nach dem **E-Feld-Aperturmodell** (14.49) – der optimalen Rillen- und Kegelhörner aus Bild 14.13 (mit einem Richtfaktor von $D = 200$ bei minimaler axialer Baulänge ρ) werden in Bild 14.14 noch einmal als fett gedruckte Kurven dargestellt. Zusätzlich sieht man die etwas dünnere gezeichneten Ergebnisse einer numerischen Simulation mit einem 3D-Gitterverfahren [CST]. Für die numerische Simulation wurde ein CAD-Modell mit 7 Rillen pro Wellenlänge λ_0 entworfen. Die hohe Genauigkeit der Näherungsrechnungen kann bis zu einem Winkel von etwa $\vartheta = 60^\circ$ bestätigt werden, was typisch für **Aper-turfeldmethoden** ist. Auch die Kreuzpolarisation wird mit dem E-Feld-Aperturmodell (mit elektrischem Schirm) gut vorhergesagt. Die **Feinstruktur** der genaueren – aber wesentlich aufwändigeren – numerischen Simulation resultiert aus Reflexions- und Beugungseffekten an der Apertur, die mit der physikalisch optischen Näherung natürlich nicht gefunden werden.

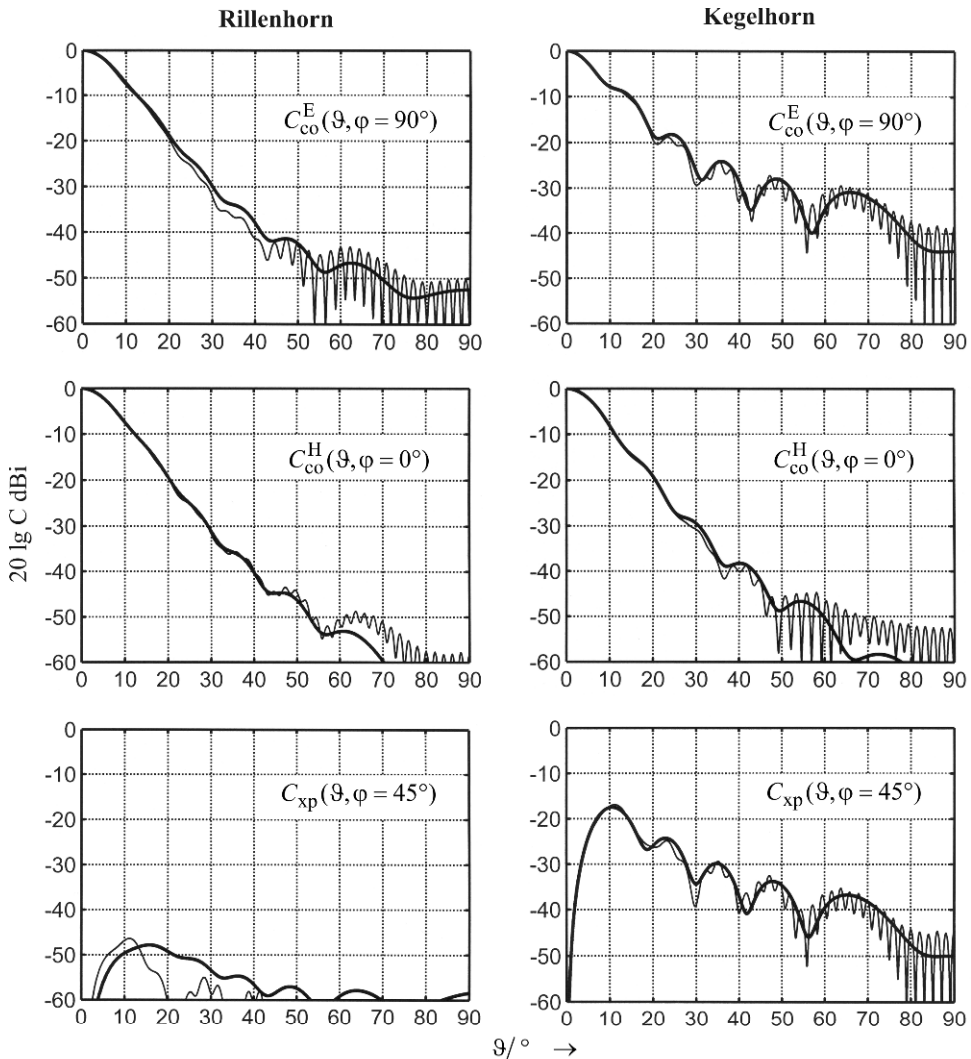


Bild 14.14 Ko- und kreuzpolare Richtdiagramme (analytische Näherung fett und numerische Simulation dünn) eines optimalen Rillenhorns bzw. Kegelhorns – Abmessungen siehe Bild 14.13

14.5 Übungen

- 14.5.1** Vergleichen Sie zwei optimale Sektorhörner mit Maximalgewinn, die sich in der E-Ebene bzw. in der H-Ebene weiten. Sie werden jeweils von einem Rechteckhohlleiter mit Seitenverhältnis $a/b = 2,25$ gespeist. Es gelte $q_E = q_H = 0,63$. Welches der beiden Hörner hat die kürzere Knicklänge, falls gleicher Richtfaktor $D_E = D_H$ vorliegt?
- 14.5.2** Wie groß werden die Knicklängen des Rillenhorns und des Kegelhorns aus Bild 14.13? Gehen Sie von einem Einsatz im X-Band bei $\lambda_0 = 3$ cm aus.
- 14.5.3** Zeigen Sie, dass für die transversalen elektrischen Felder $\underline{E}_\rho$ und $\underline{E}_\varphi$ einer H_{11} -Rundhohlleiterwelle (6.53) bei $z = 0$ folgende kartesische Darstellung existiert [Col85]:
- $$\begin{aligned} \underline{E}_x &= \underline{E}_0 J_2(K\rho) \sin(2\varphi) \\ \underline{E}_y &= \underline{E}_0 [J_0(K\rho) - J_2(K\rho) \cos(2\varphi)] \end{aligned} \quad \text{mit } K = \frac{j'_{11}}{a} \quad \text{und } j'_{11} = 1,8412.$$
- 14.5.4** Ergänzen Sie die kartesischen Komponenten der H_{11} -Rundhohlleiterwelle aus vorheriger Übung 14.5.3 um den quadratischen Phasenfehler $\phi(\rho') \approx -k_0 \rho'^2 / (2\rho_K)$ eines Kegelhorns und berechnen Sie die Aperturfeldintegrale $\underline{P}_x$ und $\underline{P}_y$. Verwenden Sie die Abkürzungen $u = \rho'/a$ und $p = k_0 a \sin \vartheta$ sowie $a^2 / (2\rho_K) = \delta_{\max} = s\lambda_0$.
- 14.5.5** Überlegen Sie sich analog zu (14.51) eine Näherungslösung für die Integrale $\underline{I}_0$ und $\underline{I}_2$, die in der Lösung der Übung 14.5.4 aufgetreten sind.

Lösungen:

- 14.5.1** Mit $D_E = (4\pi/\lambda_0^2) q_E a B$ und $\rho_E = B^2 / (8 \cdot 0,2624 \lambda_0)$ sowie $L_E = \rho_E (1 - b/B)$ folgt:
- $$L_E = \frac{D_E^2}{8 \cdot 0,2624 \lambda_0 \left((4\pi/\lambda_0^2) q_E a \right)^2} \left(1 - \frac{(4\pi/\lambda_0^2) q_E a b}{D_E} \right). \quad \text{Mit einer analogen Formel}$$
- für L_H sowie mit $D_E/q_E = D_H/q_H$ folgt: $\frac{L_H}{L_E} = \frac{0,2624}{0,3965} \frac{a^2}{b^2} = \frac{0,2624}{0,3965} 2,25^2 = 3,4$.
- 14.5.2** Nach Tabelle 6.8 wählen wir als Speiseleitung einen Rundhohlleiter (C 104) mit einem Radius von $a = 1,0122$ cm. Analog zu (14.18) folgen die gesuchten Knicklängen aus
- $$L_R = \rho_R (1 - a/a_R) = 33,3 \text{ cm} \quad \text{und} \quad L_K = \rho_K (1 - a/a_K) = 33,5 \text{ cm}.$$
- 14.5.4** $\underline{P}_x(\vartheta, \varphi) = -2\pi a^2 \underline{E}_0 e^{-j2\pi s} \sin(2\varphi) \underline{I}_2(\vartheta)$ und
- $$\underline{P}_y(\vartheta, \varphi) = 2\pi a^2 \underline{E}_0 e^{-j2\pi s} [\underline{I}_0(\vartheta) + \cos(2\varphi) \underline{I}_2(\vartheta)] \quad \text{mit den Hilfsintegralen}$$
- $$\underline{I}_0 = \int_{u=0}^1 u J_0(j'_{11} u) J_0(pu) e^{j2\pi s(1-u^2)} du, \quad \underline{I}_2 = \int_{u=0}^1 u J_2(j'_{11} u) J_2(pu) e^{j2\pi s(1-u^2)} du$$
- 14.5.5** Mit einer Ausgleichskurve vierter Ordnung im Bereich $0 \leq u \leq 1$ jeweils für $J_0(j'_{11} u) \approx b_0 + b_2 u^2 + b_4 u^4$ und $J_2(j'_{11} u) \approx c_0 + c_2 u^2 + c_4 u^4$ können die gesuchten Integrale auf Lommelsche Funktionen zurückgeführt werden. In diesem Zusammenhang nützliche Integrale findet man im Anhang A.7. Numerische Ergebnisse zeigt Bild 14.13.

15 Aperturstrahler III (Linsenantennen)

15.1 Konvexe Verzögerungslinse

Dielektrische Linsen kompensieren die Laufzeitunterschiede in der Belegung der ebenen Apertur eines Hornstrahlers dadurch, dass sie die achsennahe Strahlung gegenüber den Randstrahlen verzögern. Eine solche **konvexe Verzögerungslinse** ist in Bild 15.1 dargestellt.

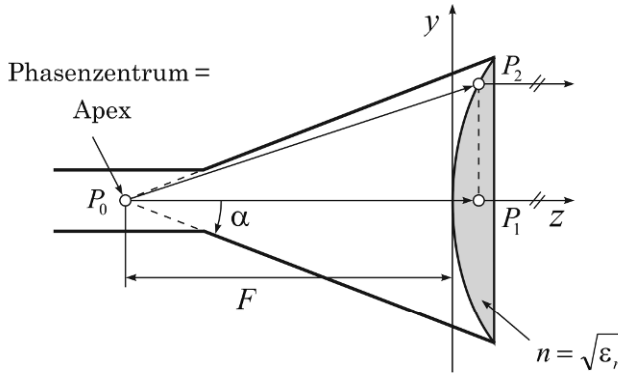


Bild 15.1 Dielektrische Verzögerungslinse (Rotationshyperboloid) in der Apertur eines Kegelhorns

Der Abstand der Linse vom Hornapex sei F und die Phasengeschwindigkeit in der Linse ist

$$v_p = c = c_0 / \sqrt{\epsilon_r} = c_0 / n, \quad (15.1)$$

wobei mit $n = \sqrt{\epsilon_r} > 1$ der Brechungsindex bezeichnet wird. Nach dem Linsendurchgang sollen sich alle gebrochenen Strahlen achsenparallel und phasengleich ausbreiten. Wir betrachten dazu einen Punkt $P_1(z, y = 0)$ auf der Symmetrieachse der Linse und einen zweiten $P_2(z, y)$, der bei gleichem z auf dem inneren Linsenrand liegen soll. Für gleiche Laufzeit des Mittelstrahls $P_0 P_1$ und eines beliebigen anderen $P_0 P_2$ fordert man:

$$\frac{F}{c_0} + \frac{z}{c} = \frac{\sqrt{(F+z)^2 + y^2}}{c_0} \Rightarrow (F+nz)^2 = (F+z)^2 + y^2. \quad (15.2)$$

Nach Ausführen der Quadrate und Zusammenfassung erhält man für $z \geq 0$ und $n > 1$:

$$z^2 (n^2 - 1) + 2 z F (n - 1) - y^2 = 0. \quad (15.3)$$

Das ist die Gleichung einer Hyperbel, aus der man für gegebenes y die **Linsenkontur** $z(y)$ bestimmen kann, um eine uniforme Phasenbelegung in der ebenen Apertur zu erzeugen. Die Oberfläche der gewölbten Seite der Linse ist also ein **Rotationshyperboloid**. Mit dieser Kontur kann eine *sphärische* Phasenfront in eine *ebene* Phasenfront umgewandelt werden.

Übung 15.1: Dimensionierung einer Linsenantenne

- Zur Korrektur des sphärischen Phasenfehlers eines Kegelhorns mit Steigungswinkel α soll in dessen Apertur mit Durchmesser D eine rotationssymmetrische Linse eingebaut werden. Ihre konvexe Vorderkontur sei hyperbelförmig; die Hinterkontur sei plan (Bild 15.2).

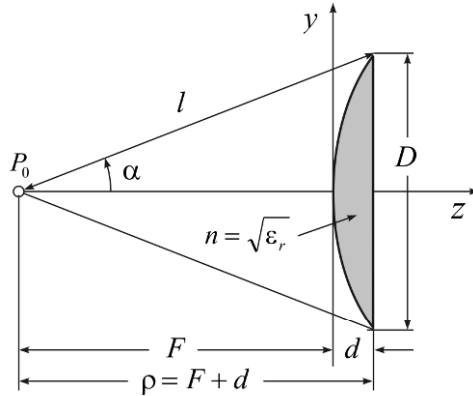


Bild 15.2 Bestimmung der maximalen Dicke d einer dielektrischen Verzögerungslinse im Kegelhorn

- Nehmen Sie an, dass der Apexabstand F bekannt sei und bestimmen Sie für ein vorhandenes Linsenmaterial mit Brechungsindex n die erforderliche maximale Dicke d der Linse.
- **Lösung:**

Die gesuchte Linsendicke d bestimmt man aus der Linsengleichung (15.3):

$$z^2 (n^2 - 1) + 2 z F (n - 1) - y^2 = 0, \quad (15.4)$$

wenn man sie für einen Punkt auf dem Linsenrand auswertet. Man erhält an den Randpunkten $P(z = d, y = \pm D/2)$ den Zusammenhang:

$$d^2 (n^2 - 1) + 2 d F (n - 1) - \frac{D^2}{4} = 0, \quad (15.5)$$

d. h.

$$d^2 + 2 d \frac{F}{n+1} - \frac{D^2}{4(n^2-1)} = 0. \quad (15.6)$$

Durch Auflösen der quadratischen Gleichung (15.6) nach der Linsendicke

$$d = -\frac{F}{n+1} \pm \sqrt{\left(\frac{F}{n+1}\right)^2 + \frac{D^2}{4(n^2-1)}} > 0, \quad (15.7)$$

wobei nur ein positives d sinnvoll ist, findet man:

$$d = \frac{1}{n+1} \left[\sqrt{F^2 + \frac{D^2(n+1)}{4(n-1)}} - F \right]. \quad (15.8)$$

Bezogen auf den Linsendurchmesser D erhält man die normierte Dicke:

$$\left[\frac{d}{D} = \frac{1}{n+1} \left[\sqrt{\left(\frac{F}{D}\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{n+1}{n-1}} - \frac{F}{D} \right] \right], \quad (15.9)$$

die in Bild 15.3 für verschiedene F/D -Werte über dem Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon_r}$ aufgetragen ist.

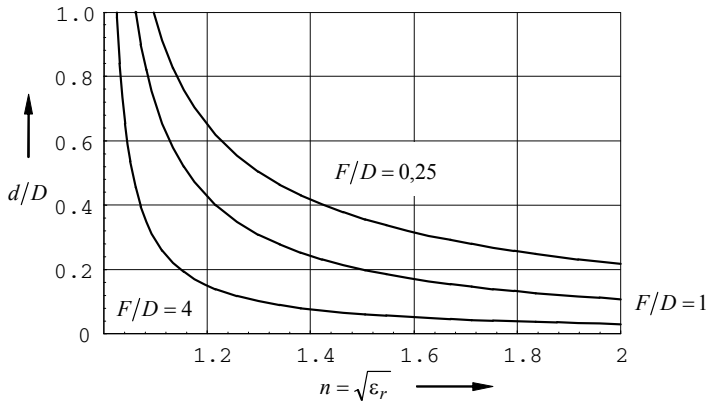


Bild 15.3 Normierte Dicke einer Linsenantenne als Funktion vom Brechungsindex n und von F/D

Im Allgemeinen ist der notwendige Apexabstand F gar nicht bekannt, dafür aber die Summe $\rho = F + d$, die sich aus der axialen Hornlänge ρ ergibt. Mit $F = \rho - d$ folgt aus (15.5):

$$d^2 (n^2 - 1) + 2d(\rho - d)(n - 1) - \frac{D^2}{4} = 0. \quad (15.10)$$

So erhält man eine neue Bestimmungsgleichung für die gesuchte Linsendicke d :

$$d^2 (n - 1)^2 + 2d\rho(n - 1) - \frac{D^2}{4} = 0, \quad (15.11)$$

nun aber als Funktion von ρ anstelle von F , die man noch weiter umformt:

$$d^2 + 2d \frac{\rho}{n - 1} - \frac{D^2}{4(n - 1)^2} = 0. \quad (15.12)$$

Die Lösung von (15.12) liefert die Linsendicke d in Abhängigkeit von der Hornlänge ρ :

$$d = \frac{1}{n - 1} \left[\sqrt{\rho^2 + D^2/4} - \rho \right] > 0. \quad (15.13)$$

Mit der Hornmantellänge $l = \sqrt{\rho^2 + D^2/4}$ folgt noch einfacher:

$$\boxed{d = \frac{l - \rho}{n - 1}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{d = \frac{1}{n - 1} \frac{D}{2} \tan \frac{\alpha}{2}}, \quad \text{wobei (14.9) verwendet wurde.} \quad (15.14)$$

Die Größe $l - \rho$ ist der Gangunterschied, der am Hornrand bei nicht vorhandener Linse auftritt. Mit (15.14) finden wir den für die Linsengleichung (15.3) nötigen Apexabstand:

$$\boxed{F = \rho - d = \frac{n\rho - l}{n - 1}}, \quad \text{der positiv sein muss, also gilt:} \quad \boxed{n = \sqrt{\epsilon_r} > l/\rho}. \quad \square \quad (15.15)$$

Für den Aufbau von Mikrowellenlinsen sind die aus der Optik bekannten Dielektrika ungeeignet, da wegen der größeren Durchmesser solche Linsen zu schwer und zu teuer würden. Man verwendet eher leichte dielektrische Materialien mit geringen Verlusten. Typische Verlustfaktoren sind $\tan \delta \leq 10^{-3}$, wobei die relative Permittivität meist im Bereich $\epsilon_r \leq 3$ liegt (Anhang D). Linsenantennen werden für spezielle Aufgabenstellungen eingesetzt, die kleine Antennenabmessungen erfordern [Kar94]. In ihren elektrischen Eigenschaften und in den Kosten sind sie im Allgemeinen den Reflektorantennen unterlegen.

15.2 Aperturlinse im optimalen Kegelhorn

Im Abschnitt 14.4 haben wir uns ausführlich mit **optimalen Kegelhornantennen** beschäftigt, die bei gegebener axialer Baulänge ρ einen maximalen Gewinn aufweisen. Die dazu notwendigen geometrischen Abmessungen findet man in Tabelle 14.2. Ein solches Optimalhorn – mit einem Phasenfehler von $140,7^\circ$ am Hornrand – hat demnach einen Gewinn von

$$\frac{10 \lg G}{\text{dBi}} = 7,08 + 20 \lg \frac{2a}{\lambda_0}, \quad (15.16)$$

falls der Durchmesser der Hornapertur wie

$$D = 2a = \sqrt{3,127 \lambda_0 \rho} \quad (15.17)$$

gewählt wurde. Im Folgenden interessieren wir uns für die Frage, um welchen Wert sich der Gewinn (15.16) noch steigern lässt, wenn in das optimale Kegelhorn eine dielektrische Hyperbellinse nach Bild 15.2 eingesetzt wird. Durch passende Verzögerung der achsennahen Strahlung wird die ursprünglich sphärische Phasenfront in eine ebene Phasenfront umgewandelt und so der Phasenfehler über der gesamten Apertur kompensiert. Die Aperturbelegung entspricht dann – mit Ausnahme des Bereichs unmittelbar an der Aperturkante – derjenigen eines H_{11} -Rundhohlleiters. Nach (13.67) sollte sich also ein Gewinn von

$$\frac{10 \lg G}{\text{dBi}} = \frac{10 \lg [0,8368 (k_0 a)^2]}{\text{dBi}} = 9,17 + 20 \lg \frac{2a}{\lambda_0}, \quad (15.18)$$

erreichen lassen, d.h. 2,09 dB mehr als ohne Linse. Diese Gewinnabschätzungen gelten für ausreichend große Aperturen mit $2a \gg \lambda_0$. Mit Hilfe eines numerischen 3D-Gitterverfahrens [CST] wurde (15.18) für Optimalhörner mit dielektrischer Aperturlinse sowie (15.16) für leere Optimalhörner überprüft (Bild 15.4).

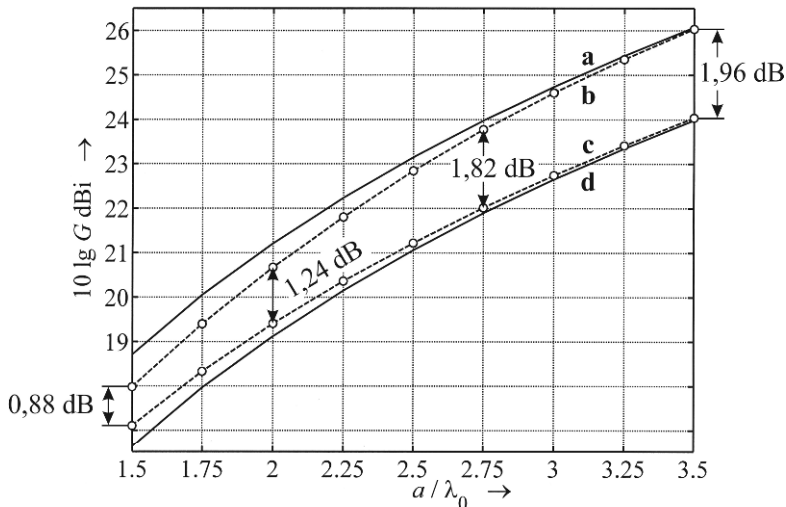


Bild 15.4 Kurve **a**: Asymptotischer Gewinn eines offenen Rundhohlleiters nach (15.18), Kurve **b**: Gewinn eines Kegelhorns (15.17) mit dielektrischer Aperturlinse [CST], Kurve **c**: Gewinn eines leeren Kegelhorns (15.17) [CST], Kurve **d**: Asymptotischer Gewinn eines Kegelhorns nach (15.16).

In Bild 15.4 wird deutlich, dass die für große Aperturen mit $2a \gg \lambda_0$ hergeleiteten Gewinnformeln (15.16) und (15.18) asymptotisch korrekt sind. Die numerischen Vergleichsergebnisse sind mit Markern (o) dargestellt und durch gestrichelte Linien verbunden. Der wahre Gewinn eines leeren Kegelhorns mit Geometrie (15.17) ist immer etwas höher (Kurve c) als die Abschätzung (15.16) erwarten lässt. Durch den Einbau einer dielektrischen Aperturlinse (Kurve b) kann der Gewinn eines Kegelhorns großer Apertur tatsächlich um bis zu 2,09 dB gesteigert werden – bei kleineren Aperturen fällt die mögliche Verbesserung spürbar geringer aus.

Die **verbesserten Gewinnwerte** (Kurve b in Bild 15.4) stellen sich bei optimalen Kegelhornantennen gegebenen Aperturdurchmessers $2a$ aber nur für ganz bestimmte Linsenmaterialien mit jeweiligem Brechungsindex $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ ein. Die optimalen Werte von ε_r sind im Bild 15.5 dargestellt und wurden durch umfangreiche numerische Untersuchungen ermittelt [Zim10].

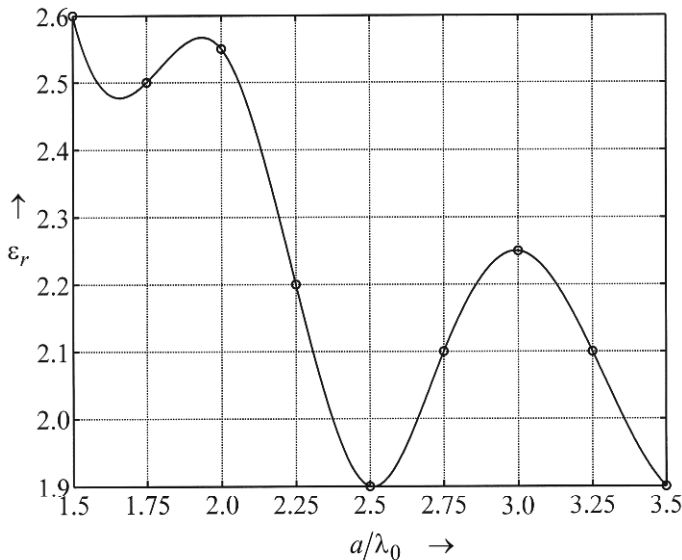


Bild 15.5 Optimale relative Permittivität ε_r einer Linse im Kegelhorn mit Maximalgewinn [Zim10]

Mit den in der Praxis üblichen Linsenmaterialien Teflon ($\varepsilon_r = 2,1$), Paraffin ($\varepsilon_r = 2,25$) und Polystyrol ($\varepsilon_r = 2,55$) lässt sich der notwendige Bereich gut abdecken.

15.2.1 Einfluss des Linsenmaterials

Wir wollen nun die Frage klären, warum es gerade diejenigen Werte von ε_r aus Bild 15.5 sind, die besonders hohe Gewinne ermöglichen. Es gibt schließlich – je nach Brechungsindex $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ – viele mögliche **Linsen mit Hyperbelkontur**, die eine sphärische in eine ebene Phasenfront umwandeln können und auf den ersten Blick gleichwertig erscheinen.

Tatsächlich hat der Brechungsindex starken Einfluss auf die Linsendicke d , den Linsenrandwinkel γ sowie die Krümmung der Linsenvorderseite, was in zwei Beispielen für einen Aperturdurchmesser des optimalen Kegelhorns von $2a = 3\lambda_0$ in Bild 15.6 gezeigt wird. Der Steigungswinkel eines solchen Optimalhorns beträgt nach Tabelle 14.2 dann

$$\alpha = \arctan \frac{0,7816}{a/\lambda_0} = 27,5^\circ. \quad (15.19)$$

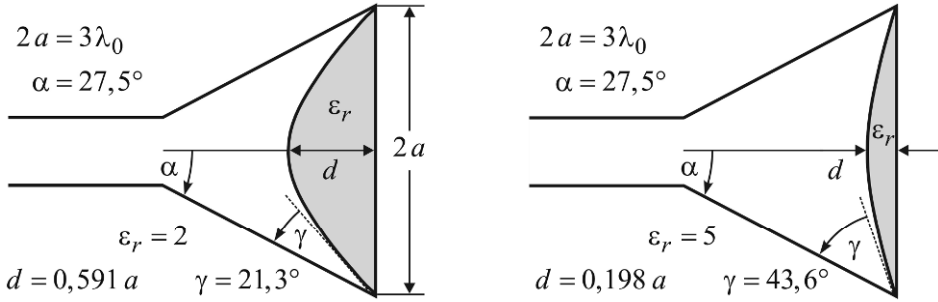


Bild 15.6 Einfluss vom Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon_r}$ auf die Gestalt der Korrekturlinse eines Kegelhorns

Welcher **Brechungsindex** $n = \sqrt{\epsilon_r}$ nun günstig ist, hängt von folgenden Gesichtspunkten ab:

- 1) Polarisationsverluste im Dielektrikum schwächen das Aperturfeld.
- 2) Reflexionsverluste an beiden Linsenkonturen schwächen das Aperturfeld.
- 3) Mehrfachreflexionen innerhalb der Linse stören das Aperturfeld.
- 4) Mehrfachreflexionen zwischen Linse und Kegelhornrand stören das Aperturfeld.

Eine Korrekturlinse hat also neben dem positiven Effekt, eine ebene Phasenfront zu erzeugen, auch die genannten vier negativen Auswirkungen. Damit wird klar, dass ein Kegelhorn mit Linse nicht ganz den Gewinn eines leeren Rundhohlleiters gleicher Aperturgröße erreichen kann.

Kleine Werte von ϵ_r führen zu dicken, schweren und stark gekrümmten Linsen (Bild 15.6). Dadurch ergeben sich kleine Linsenrandwinkel γ , die dazu führen, dass Mehrfachreflexionen zwischen Linse und Kegelhornrand sich in Vorwärtsrichtung als starke Phasenfehler in den äußeren Aperturbereichen bemerkbar machen. Ist bei großen Werten von ϵ_r der Linsenrandwinkel γ hingegen größer, laufen die Mehrfachreflexionen eher in Rückwärtsrichtung und das Aperturfeld wird weniger gestört. Näheres zum Zusammenhang $\gamma(n)$ bietet Übung 15.5.2.

Andererseits verursachen große Werte von ϵ_r spürbare Reflexionsverluste. Für die durch den Einbau einer Linse bedingte **Einfügungsdämpfung** (insertion loss IL) gibt [Jas61] eine Näherungsformel, bei der die Wahl des Linsenmaterials Berücksichtigung findet:

$$IL = -10 \lg |S_{21}|^2 \text{ dB} = -10 \lg \left(1 - |S_{11}|^2 \right) \text{ dB} \approx 8,69 \cdot \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} \text{ dB}. \quad (15.20)$$

Folgende empirisch gewonnene Abschätzung

$$IL \approx \frac{13,5}{a/\lambda_0} \cdot \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} \text{ dB} \quad (15.21)$$

stimmt mit den Daten, die aus umfangreichen numerischen Untersuchungen [CST] im Bereich $n \leq 1,7$ und $1,5 \leq a/\lambda_0 \leq 3,5$ ermittelt wurden, besser überein.

Am besten wäre es also, kleine Werte von ϵ_r und große Werte von γ zu haben, was sich bei kleinen Aperturen leider gegenseitig ausschließt. Erst bei $a/\lambda_0 > 2,75$ wird der Linsenrandwinkel $\gamma > 45^\circ$ und gleichzeitig $\epsilon_r < 2,25$. Damit erklärt sich nachträglich, warum im Bild 15.4 erst bei größeren Aperturen die Abstände der Kurven **b** und **c** gegen 2,09 dB streben.

15.2.2 Berechnungsbeispiel

Wir betrachten nun nach Bild 15.2 eine dielektrische Verzögerungslinse mit hyperbelförmiger Vorderkontur und ebener Rückseite. Ihre **Vorderkontur** $z(y)$ erhalten wir aus (15.3):

$$z(y) = \frac{F}{n+1} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{n+1}{n-1} \frac{y^2}{F^2}} \right). \quad (15.22)$$

Mit dem Apexabstand F aus (15.15) folgt

$$z(y) = \frac{n \rho - l}{n^2 - 1} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{n^2 - 1}{(n \rho - l)^2} y^2} \right) \quad \text{mit} \quad -\frac{D}{2} = -a \leq y \leq a = \frac{D}{2}. \quad (15.23)$$

Die Geometrie der Korrekturlinse hängt also von den Abmessungen ρ und $l = \sqrt{\rho^2 + a^2}$ des zugehörigen Kegelhorns und ihrem Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon_r} > l/\rho$ ab. Als **Beispiel** betrachten wir bei $\lambda_0 = 29,98$ mm ein Kegelhorn mit Aperturdurchmesser $D = 2a = 5,5\lambda_0 = 164,9$ mm, dessen Geometrie nach Tabelle 14.2 für maximalen Gewinn optimiert wurde. Als Speiseleitung wird ein für $f = 10$ GHz geeigneter C 104-Rundhohlleiter eingesetzt, der nach Tabelle 6.8 einen Innendurchmesser von 20,244 mm besitzt. Wir wollen untersuchen, wie sich die Richtdiagramme und der Richtfaktor verbessern lassen, wenn wir zur Korrektur der Phasenfehler in der Apertur des Horns eine dielektrische Linse mit der Vorderkontur (15.23) einsetzen. Nach Tabelle 14.2 hat das optimale Kegelhorn folgende **Abmessungen**:

$$\rho = 4a^2 / (3,127\lambda_0) = 290,1 \text{ mm} \quad \text{und} \quad l = \sqrt{\rho^2 + a^2} = 301,5 \text{ mm}. \quad (15.24)$$

Der Steigungswinkel ist $\alpha = \arctan(a/\rho) = 15,9^\circ$, der Gewinn des leeren Horns (noch ohne Linse) beträgt 22,01 dBi (Bild 15.4) und der Linsenrandwinkel (Bild 15.6) ist $\gamma = 44,8^\circ$.

Mit [CST] sind die in Bild 15.7 dargestellten – stark schwankenden – Kurven des **Gewinns** G und des **realisierten Gewinns** $G_r = G(1 - |\underline{S}_{11}|^2)$ für ein Kegelhorn mit Geometrie nach (15.24) als Funktion von ϵ_r ermittelt worden. Beim realisierten Gewinn geht zusätzlich zur Aperturbelegung auch noch die Anpassung in die Bewertung mit ein.

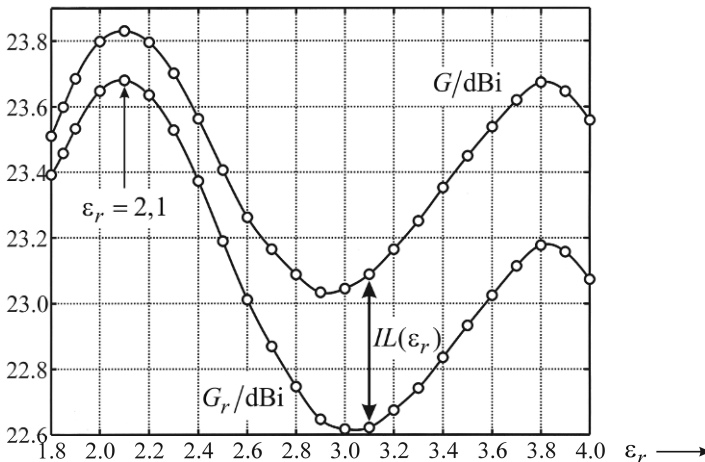


Bild 15.7 Gewinn bei $f = 10$ GHz eines nach Tabelle 14.2 optimalen Kegelhorns mit Aperturdurchmesser $D = 2a = 5,5\lambda_0$ als Funktion der relativen Permittivität ϵ_r seiner Korrekturlinse

Beide Kurven in Bild 15.7 haben ihr Maximum bei $\epsilon_r = 2,1$, was hier die Wahl von Teflon als Linsenmaterial nahelegt. Bei größeren Werten von ϵ_r verursachen die dort stärkeren Reflexionsverluste eine steigende Einfügungsdämpfung $IL(\epsilon_r)$, weshalb sich beide Kurven voneinander entfernen. Für $\epsilon_r = 2,1$ folgt die Einfügungsdämpfung aus (15.21):

$$IL \approx \frac{13,5}{a/\lambda_0} \cdot \frac{(\sqrt{\epsilon_r} - 1)^2}{(\sqrt{\epsilon_r} + 1)^2} \text{ dB} = \frac{13,5}{2,75} \cdot \frac{(\sqrt{2,1} - 1)^2}{(\sqrt{2,1} + 1)^2} \text{ dB} = 0,17 \text{ dB}. \quad (15.25)$$

Durch eine reflexionsmindernde Beschichtung der äußeren, ebenen Linsen­seite kann diese Einfügungsdämpfung verringert werden. Ein $\lambda/4$ -Transformator zwischen Linse ($n = \sqrt{2,1}$) und Luft ($n_0 = 1$) scheidet hier aus, da er wegen $n_1 = \sqrt{n n_0}$ ein sehr ungewöhnliches Material mit $\epsilon_{r1} = 1,45$ benötigen würde. Alternativ kann man die Anpassungsverluste auch mit einer passend gewählten zylindrischen Verlängerung der Linse gleichen Materials ϵ_r reduzieren.

Für ein leeres Kegelhorn gegebener Baulänge $\rho = 290,1 \text{ mm}$, das nach (15.24) bei $f = 10 \text{ GHz}$ einen Aperturdurchmesser von $D = 2a = 5,5\lambda_0 = 164,9 \text{ mm}$ aufweisen muss, um seinen maximalen Gewinn von 22,01 dBi zu erreichen, sind in Bild 15.8 die kopolaren Richtdiagramme in der E- und der H-Ebene als gestrichelte Kurven dargestellt. Die durchgezogenen Kurven zeigen die Richtdiagramme, die sich nach dem Einbau einer Hyperbellinse mit $\epsilon_r = 2,1$ einstellen. Der Gewinnanstieg um 1,82 dB auf einen Wert von 23,83 dBi (siehe auch Bild 15.4) wird durch ein deutliches Absenken der Nebenkeulen erreicht – als Folge der nun gleichphasigen Aperturbelegung. Das Kegelhorn mit Linse strahlt somit nahezu wie ein offener H_{11} -Rundhohlleiter (man vergleiche die fast identischen Werte aus Tabelle C.4).

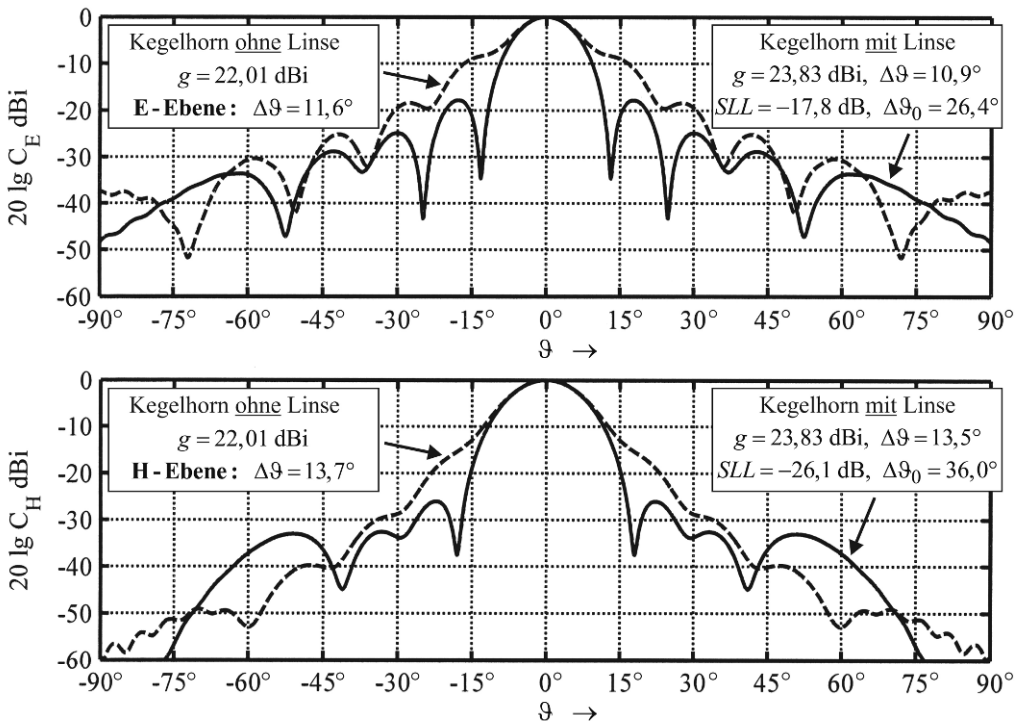


Bild 15.8 Kopolare Kegelhorndiagramme [CST] für $D = 5,5\lambda_0$ und $\rho = 9,674\lambda_0$ bei $f = 10 \text{ GHz}$

15.3 Konkave Beschleunigungslinse

Zur Kompensation von Laufzeitunterschieden in der Belegung einer ebenen Apertur kann man – anstelle der Verzögerung der achsennahen Strahlung – auch versuchen, die randnahe Strahlung zu beschleunigen. Das ist natürlich nicht mit dielektrischen Linsen möglich, sondern erfordert ein künstliches Linsenmedium, das man im Allgemeinen aus äquidistanten, parallelen Metallplatten im gegenseitigen Abstand a aufbaut (Bild 15.9).

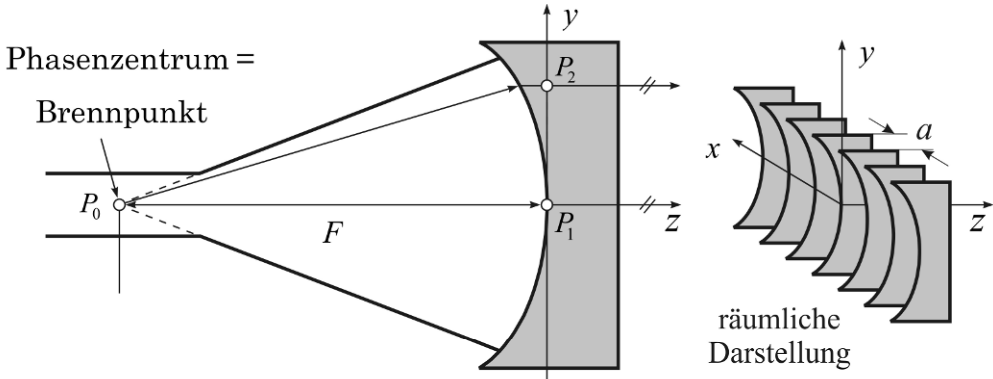


Bild 15.9 Metallplattenmedium zur Beschleunigung der randnahen Strahlung eines E-plane Sektorhorns

Die für $z \leq 0$ gültige Linsengleichung erhält man aus (15.3) nach Multiplikation mit -1 :

$$\boxed{z^2(1-n^2) + 2zF(1-n) + y^2 = 0} \quad (15.26)$$

Sie führt bei $n < 1$ auf eine **elliptische Vorderkontur**. Falls der elektrische Feldvektor **parallel** zu den Metallplatten – mit gegenseitigem Abstand a – orientiert ist, ergibt sich eine Feldverteilung, die derjenigen einer H_{10} -Hohlleiterwelle entspricht. Aus der Phasengeschwindigkeit einer H_{10} -Welle im luftgefüllten Hohlleiter

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{k_0 a}\right)^2}}, \quad (15.27)$$

die aus (6.19) folgt, erhält man den Brechungsindex des Metallplattenmediums:

$$\boxed{n(\lambda_0) = \frac{c_0}{v_p} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2} < 1} \quad \text{mit } \lambda_0/2 < a < \lambda_0, \quad (15.28)$$

sodass keine höheren Wellen im Hohlleiterbereich auftreten. Es wird in der dünneren Linsenmitte weniger stark beschleunigt als in den längeren Hohlleiterstücken am Linsenrand. Die sphärische Phasenfront am Eingang der Beschleunigungslinse wird somit in eine ebene Phasenfront umgewandelt. Ein Metallplattenmedium ist nur für **Polarisationen parallel zu den Platten** brauchbar, weil bei orthogonaler Polarisationsrichtung gar keine Linsenwirkung auftritt.

Man beachte, dass der Brechungsindex (15.28) relativ stark frequenzabhängig ist, sodass eine Metallplattenlinse nur schmalbandig einsetzbar ist. Einen günstigen Bereich von (15.28) erreicht man, wenn der Plattenabstand wie $\lambda_0/a = 1,6$ gewählt wird, woraus sich $n = 0,6$ ergibt.

15.4 Luneburg-Linse

Die Luneburg-Linse ist eine Verzögerungslinse und besteht aus einer inhomogenen dielektrischen Kugel vom Radius a , deren Brechungsindex n in radialer Richtung r variiert [Lun64]:

$$n(r) = \sqrt{2 - (r/a)^2} \quad \text{mit} \quad 1 \leq n \leq \sqrt{2}. \quad (15.29)$$

Aufgrund kontinuierlicher Strahlbrechung in der inhomogenen Linse wird ein Strahlenbündel, das an einem beliebigen Punkt F der Kugeloberfläche bei $r = a$ eingespeist wird, die Linse auf der gegenüber liegenden Seite als Gruppe paralleler Strahlen verlassen (Bild 15.10). Beim Einsatz als Empfangsantenne wird eine einfallende ebene Welle im Brennpunkt F gebündelt.

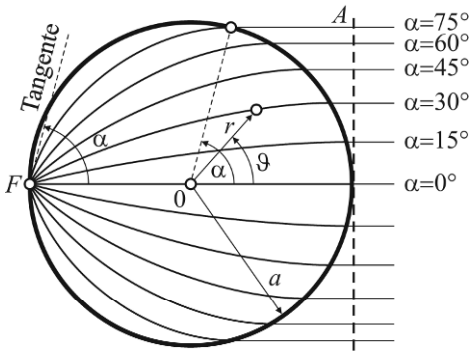


Bild 15.10 Strahlengang einer Luneburg-Linse (fälschlicherweise auch als Luneberg-Linse bezeichnet) mit Erreger im Brennpunkt F

Der Strahlengang für einen Startwinkel α kann nach [Col69] wie folgt beschrieben werden:

$$r^2 [\sin^2 \theta + \sin^2 (\theta - \alpha)] = a^2 \sin^2 \alpha \quad (15.30)$$

Die Phasenverzögerung aller Strahlen vom Brennpunkt F bis in die Aperturebene A ist $k_0 a (1 + \pi/2)$, was eine gleichphasige Erregung der Apertur sichert. Die Amplitudenbelegung hängt von der Charakteristik $C(\theta)$ des Primärstrahlers ab und beträgt $C(\theta)/\sqrt{\cos \theta}$. Für eine optimale Ausnutzung der Apertur muss der Primärstrahler eine breite Hauptkeule besitzen und sein Phasenzentrum muss auf der Linsenoberfläche liegen [Hei70, Elli81].

Wegen ihrer sphärischen Symmetrie ermöglicht die Luneburg-Linse eine verzerrungsfreie Schwenkung des Primärdiagramms in jede beliebige Richtung, falls die Speiseantenne auf der Kugeloberfläche mechanisch verschoben wird. Eine trägheitslose Strahlschwenkung lässt sich mit fest installierten Teilstrahlern, zwischen denen elektronisch umgeschaltet wird, realisieren.

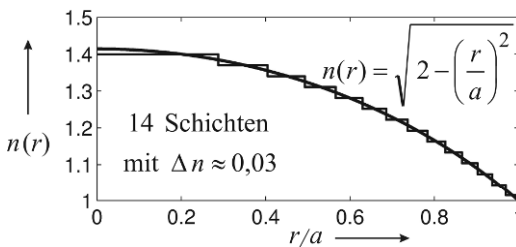


Bild 15.11 Brechungsindex über dem Radius und Annäherung durch ein Stufenprofil

Da die Herstellung inhomogener Dielektrika mit kontinuierlich variierender Permittivität schwierig ist, baut man eine Luneburg-Linse meist aus konzentrischen, jeweils homogenen Kugelschalen auf. Der stetige Gradientenübergang $n(r)$ wird dann durch eine diskrete Treppenkurve (Bild 15.11) gleicher Stufenhöhe Δn approximiert. Man sollte mindestens zehn Schichten verwenden [Col69].

Alternativ kann der Aufbau auch durch ein künstliches Dielektrikum [Kra88] erfolgen, das man z. B. durch Einlagerung von elektrisch kleinen Metallkugeln in einer homogenen dielektrischen Kugel erhält (siehe auch Bild 5.6). Die Anzahl der Kugeln pro Volumeneinheit wird dann so gewählt, dass sich näherungsweise der Brechungsindexverlauf (15.29) einstellt.

Luneburg-Linsen, die im Frequenzbereich über 10 GHz bei Radien $a \geq 10 \lambda_0$ eingesetzt werden, haben Nebenkeulendämpfungen um 17 dB und hohe Flächenwirkungsgrade $0,6 < q < 0,9$.

15.5 Übungen

15.5.1 Der Brechungsindex eines Metallplattenmediums ist von der Wellenlänge abhängig:

$$n(\lambda_0) = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}.$$

Zeichnen Sie die Kurve $n(\lambda_0/a)$ im Intervall $1 < \lambda_0/a < 2$ und suchen Sie einen Bereich geringerer Dispersion, in dem die Kurve flacher verläuft und der durch $|dn/d\lambda_0| < 1$ charakterisiert sei.

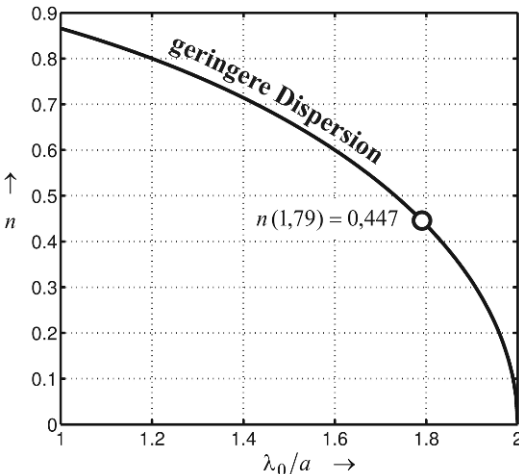
15.5.2 Ein bei $\lambda_0 = 3$ cm mit der H_{11} -Welle angeregtes Kegelhorn hat nach Tabelle 14.2 bei fester Baulänge ρ den größten Gewinn, falls der Aperturdurchmesser $D = \sqrt{3,127\lambda_0\rho}$ beträgt. In die Apertur eines solchen Kegelhorns mit Durchmesser $D = 2a = 4\lambda_0$ soll eine konvexe Verzögerungslinse aus Polystyrol ($\epsilon_r = 2,55$) wie in Bild 15.2 eingesetzt werden. Berechnen Sie die Baulänge ρ und den Steigungswinkel α des Horns sowie die notwendige Dicke d der Linse. Um wie viel steigt der Gewinn des Horns nach dem Einbau der Linse an? Wie groß ist dann die Einfügungsdämpfung und welche Halbwertsbreiten stellen sich ein? Man kann zeigen, dass der in Bild 15.6 definierte Linsenrandwinkel γ sich aus folgender Beziehung berechnen lässt:

$$\tan(\alpha + \gamma) = \frac{n - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Wie groß wird γ , falls der Brechungsindex $n = \sqrt{2,55}$ ist?

Lösungen:

15.5.1



Um $|dn/d\lambda_0| < 1$ zu erreichen, muss $\lambda_0/a < 4/\sqrt{5} = 1,79$ gewählt werden.

In der Praxis hat sich ein Design mit $\lambda_0/a < 1,6$ durchgesetzt, bei dem sich dann $n > 0,6$ einstellt.

15.5.2

Aus $D = \sqrt{3,127\lambda_0\rho}$ folgt $\rho = 15,35$ cm

und es wird $\alpha = \arctan \frac{D/2}{\rho} = 21,3^\circ$.

Weiter gilt $d = \frac{D/2}{\sqrt{\epsilon_r} - 1} \tan \frac{\alpha}{2} = 1,89$ cm.

Aus den Bildern 15.4 und 15.5 folgt, dass bei $a = 2\lambda_0$ mit einem Gewinnanstieg von 1,24 dB zu rechnen ist.

Mit (15.21) können wir die zu erwartende Einfügungsdämpfung mit $IL = 0,36$ dB abschätzen.

Aus Tabelle C.4 folgen schließlich die Halbwertsbreiten in der E-Ebene $\Theta_E = 59,0^\circ$ $\lambda_0/D = 14,8^\circ$ und in der H-Ebene $\Theta_H = 74,3^\circ$ $\lambda_0/D = 18,6^\circ$.

Der Linsenrandwinkel ist $\gamma = 40,0^\circ$.

16 Aperturstrahler IV (Reflektorantennen)

16.1 Bauformen

Neben der Verwendung von Linsenantennen gibt es noch eine weitere Möglichkeit, *sphärische* Phasenfronten in *ebene* Phasenfronten umzuwandeln. Dazu muss die Primärwelle des Hornstrahlers an einem **Parabolspiegel** umgelenkt werden. Ein solcher Reflektor kann aus einer massiven Metallfläche oder aus einem Drahtgitter mit – im Vergleich zur Wellenlänge – kleinen Öffnungen bestehen.

Anders als bei einer Linsenantenne ist bei einer Spiegelantenne die strahlende Apertur gegenüber den Abmessungen des Primärstrahlers meist deutlich größer, wodurch neben der Phasenkorrektur auch noch sehr hohe Gewinnwerte erzielt werden können. Einige wichtige Ausführungsformen zeigt Bild 16.1.

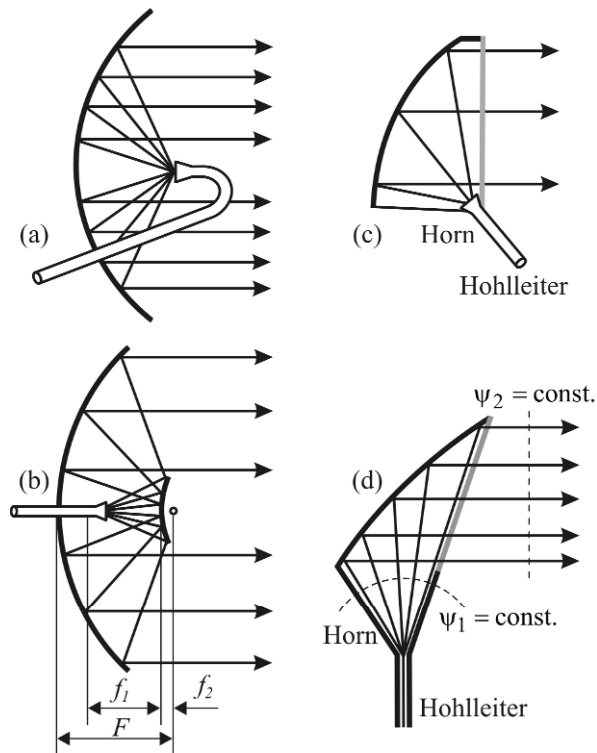


Bild 16.1 Reflektorantennen in verschiedenen Bauformen nach [Ung94] (a) Parabolantenne, (b) Cassegrain-Antenne, (c) Muschelantenne und (d) Hornparabolantenne

- a)** Die einfachste Reflektorantenne besteht aus einem **Rotationsparaboloid** und wird im Brennpunkt mit einem relativ kleinen Horn als Primärstrahler angeregt. Nachteile dieser Anordnung sind der lange Speisehohlleiter, die Aperturabschattung durch den Erreger und die Überstrahlung des Reflektors (*spillover*) infolge einer zu breiten Charakteristik des Primärstrahlers.

- b) Zur gleichmäßigeren Ausleuchtung des Reflektors verwendet man Systeme mit großen Brennweiten, die sich leichter mit Mehrspiegelantennen realisieren lassen. In der **Cassegrain-Antenne**¹ wird der Hauptreflektor erst nach Umlenkung an einem konvexen, hyperbolischen Subreflektor angestrahlt. Die sphärische Phasenfront des Primärstrahlers bleibt nach der ersten Reflexion sphärisch, während sie durch Umlenkung am Hauptreflektor in eine ebene Phasenfront umgewandelt wird. Die effektive Brennweite F_{eff} ist deutlich länger als die Brennweite F des Hauptreflektors:

$$F_{\text{eff}} = \frac{f_1}{f_2} F \quad (16.1)$$

Spiegelantennen mit Subreflektor werden meist im Satellitenfunk und in der Radioastronomie verwendet, wo es auf sehr hohe Bündelung und sehr geringe Überstrahlung des Hauptreflektors ankommt. Man erreicht Flächenwirkungsgrade bis $q = 85\%$.

- c) Zur Minderung der stark frequenzabhängigen Rückwirkung des Subreflektors auf den Erreger verwendet man in der breitbandigen Richtfunktechnik meist offset-gespeiste **Muschelantennen**. Dadurch wird auch die Abschattung der Apertur durch den Subreflektor und seine Haltestützen vermieden. Der Parabolspiegel wird nicht mehr rotationssymmetrisch ausgeführt, sondern aus einer parabolischen Fläche wird nur ein Teil ausgeschnitten. Mit Muschelantennen können Flächenwirkungsgrade bis $q = 60\%$ erzielt werden.
- d) Noch bessere breitbandige Anpassung – bei allerdings größerer Baulänge – erreicht man mit einer **Hornparabolantenne**. In ihr weitet sich der Speisehohlleiter zu einem Horn auf, das sich bis zu einem Reflektor fortsetzt. Durch die Reflexion wird – wie bei allen Reflektorantennen – eine sphärische in eine ebene Phasenfront umgewandelt. Es können Reflexionsfaktoren kleiner als 1% bei Flächenwirkungsgraden bis $q = 70\%$ erzielt werden. Beim praktischen Einsatz in Richtfunkstrecken ist die Aperturfläche von Hornparabol- und Muschelantenne durch eine $\lambda/2$ dicke Kunststoffplatte wetterfest abgeschlossen, sodass Regen und Vereisung nicht stören. Auf dem Prinzip der $\lambda/2$ -Transformation beruhen auch die so genannten Radome (engl.: radar dome), welche als Wetterschutz oder windschnittige Verkleidung Antennen umgeben. Wenn ihre Wand nicht absorbiert und gerade $\lambda/2$ dick ist, sind sie für die Antennenstrahlung vollkommen transparent.

Reflektorantennen mit Durchmesser D haben nach (7.53) und (7.56) einen **Gewinn** von etwa

$$G \approx q \left(\frac{\pi D}{\lambda_0} \right)^2 \approx q \left(10,48 \frac{f}{\text{GHz}} \frac{D}{\text{m}} \right)^2 \quad (16.2)$$

Dabei ist $q = A_W / A_{\text{geo}}$ der Flächenwirkungsgrad, der als Verhältnis der Antennenwirkfläche zur Aperturfläche $A_{\text{geo}} = \pi D^2/4$ definiert wird und stets im Bereich $0 < q \leq 1$ liegen muss. Er hängt in komplizierter Weise von verschiedenen geometrischen und elektrischen Parametern der Reflektorantenne ab (siehe Abschnitt 16.6). Typische Gewinnwerte von Richtfunkantennen liegen im Bereich zwischen 30 und 50 dBi, während bei Bodenstationen für die Satellitenkommunikation über 60 dBi erreicht werden können. Aus vielen in der Literatur angegebenen Belegungen (Bild 16.2) kann im Bereich $0,4 \leq q \leq 0,9$ folgende empirische Formel für die **Halbwertsbreite** einer Parabolantenne gewonnen werden:

¹ N. Cassegrain (17. Jahrhundert): frz. Arzt, Mathematiker und Astronom, der 1672 ein optisches Teleskop mit Haupt- und Subreflektor vorschlug

$$\Delta\vartheta \approx 62,8^\circ \frac{\lambda_0}{D\sqrt{q}} \approx \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{18,8^\circ}{\frac{f}{\text{GHz}} \frac{D}{\text{m}}} \quad (16.3)$$

Die Formel (16.3) wurde nach Bild 16.2 aus den Stützpunkten (o) als Ausgleichskurve bei minimalem quadratischem Fehler ermittelt und gilt zunächst nur für eine bestimmte Klasse von idealisierten Reflektorantennen – nämlich für rotationssymmetrische Parabolantennen mit einem Randabfall der Belegung von 12 dB. Sie kann aber – wie ein Vergleich mit den Tabellen 16.2 und 16.3 zeigt – mit hoher Genauigkeit auch für andere Belegungen verwendet werden.

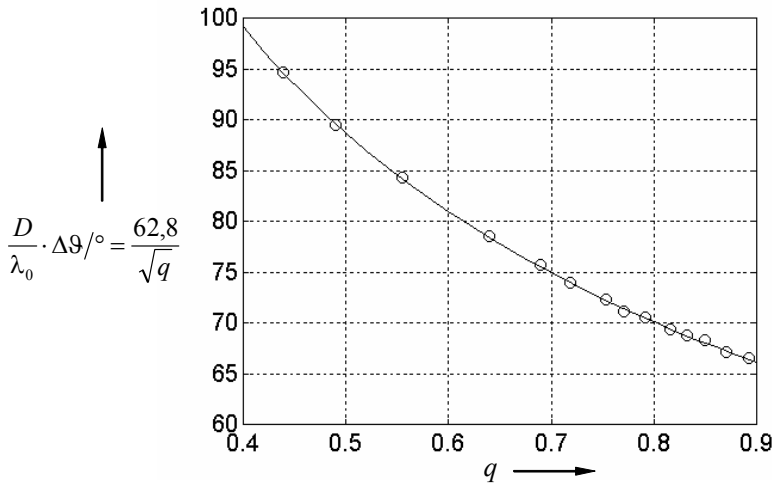


Bild 16.2 Abhängigkeit der normierten Halbwertsbreite (im Gradmaß) vom Flächenwirkungsgrad bei einer Parabolantenne mit rotationssymmetrischer Belegung und 12 dB Randabfall

Gewinn G und Halbwertsbreite $\Delta\vartheta^\circ$ (3-dB-Breite der Hauptkeule im Gradmaß) einer idealisierten Parabolantenne hängen bei rotationssymmetrischer Belegung und ca. 12 dB Randabfall nach (16.2) und (16.3) daher wie folgt zusammen (siehe auch Anhang C.7):

$$G \left(\Delta\vartheta^\circ \right)^2 \approx 38900. \quad (16.4)$$

Die meisten Antennen haben **Gewinn-Hauptkeulen-Produkte** von (siehe Abschnitt 7.3.3)

$$G \left(\Delta\vartheta^\circ \right)^2 \geq 26000. \quad (16.5)$$

Als konservative Abschätzung kann daher zunächst angenommen werden, dass eine Antenne mit einer Halbwertsbreite von $\Delta\vartheta = 1^\circ$ einen Gewinn von $G \geq 26000$ aufweist. Im logarithmischen Maßstab erhält man $g \geq 10 \lg 26000 \approx 44,1 \text{ dBi}$ (siehe auch [Ste64]).

Zur Berechnung der Abstrahlung einer Reflektorantenne muss zunächst das Aperturfeld des Erregerhorns bekannt sein. Die Weglänge von der Hornapertur über den Reflektor zur Apertur des Paraboloids entspricht bezüglich der Abmessungen des Erregers meist der Fernfeldldistanz. In guter Näherung kann deshalb die Feldverteilung in der Hauptapertur direkt aus der Fernfeldcharakteristik des Erregers berechnet werden. Im zweiten Schritt ergeben sich die Fernfelder der gesamten Anordnung dann aus den allgemeinen Flächenstrahlerformeln (Physikalische Optik – PO), die wir im Kapitel 13 über Hohlleiterantennen bereits besprochen haben.

16.2 Mehrspiegelantennen

Mehrspeigelsysteme bestehen meist aus einem **Hauptreflektor**, einem **Hilfsreflektor** und einem **Primärstrahler**, der über eine Speiseleitung mit Sender oder Empfänger verbunden ist. Die Reflektorkontur besitzt im Allgemeinen die Form einer Kegelschnittkurve und hat die Aufgabe, ein paralleles Strahlenbündel zu erzeugen. Der Primärstrahler befindet sich im Brennpunkt F_1 des Antennensystems und bestimmt wesentliche elektrische Eigenschaften der Antenne und somit des Gesamtsystems (Bild 16.3). Moderne digitale Systeme sehen den Betrieb mit zwei orthogonalen Polarisationen im *Polarisations-Multiplex* vor. Als Primärstrahler wird dann ein so genanntes Rillenhorn eingesetzt, das wegen seiner wesentlich besseren Kreuzpolarisationseigenschaften einem Pyramidenhorn vorgezogen wird. In der Praxis lassen sich damit zwischen den Polarisationsebenen Entkopplungswerte von 30 bis 40 dB erreichen. Zweispiegelantennen können nach dem Cassegrain-Prinzip oder dem Gregory-Prinzip² aufgebaut werden.

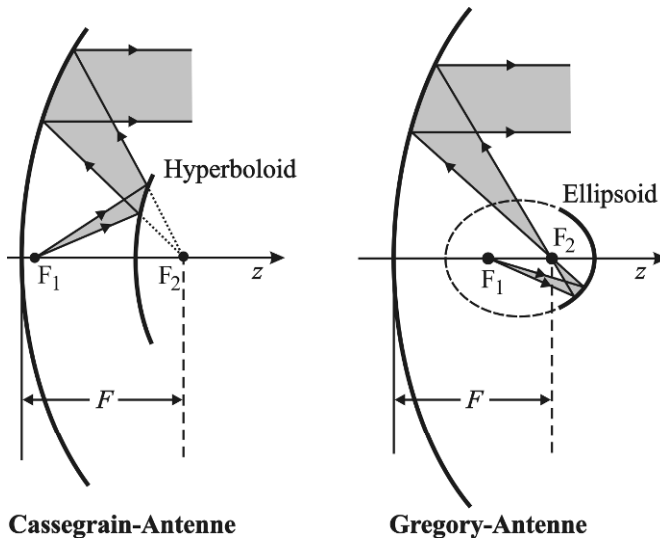


Bild 16.3 Zentral gespeiste Zweispiegelantennen mit Haupt- und Hilfsreflektor nach [Col85]

Bei Parabolantennen nach dem **Cassegrain**-Prinzip ist im Brennpunkt eines rotationsparabolisch geformten Hauptreflektors das Erregersystem angeordnet. Die von einem Primärstrahler ausgehenden Wellen treffen auf den konvex gekrümmten, hyperbolischen Subreflektor und dann erst auf den Hauptreflektor, der sie bündelt und sowohl parallel als auch phasengleich in Richtung seiner Hauptachse abstrahlt [Dra98]. Nach dem **Gregory**-Prinzip wird ein Paraboloid von einem im Brennpunkt angebrachten Primärstrahler über einen konkav gekrümmten, elliptischen Hilfsreflektor angestrahlt. Die bei Parabolantennen auftretende Rückwirkung der reflektierten Wellen auf den Strahler – bedingt durch die Abschattung des Strahlengangs durch den Subreflektor – lässt sich durch **Offset-Speisung** vermeiden. Dort wird als Hauptreflektor nur ein außerhalb der Rotationsachse liegender Teil der Paraboloidfläche verwendet und das gesamte Speisesystem liegt somit neben der strahlenden Apertur.

² James **Gregory** (1638-1675): schott. Mathematiker und Astronom, der 1663 das Spiegelteleskop erfand, das 1668 erstmals erfolgreich von Newton aufgebaut wurde. Isaac **Newton** (1643-1727): engl. Physiker, Mathematiker und Astronom, der als Begründer der klassischen theoretischen Physik gilt. Mechanik, Gravitation, Strömungslehre, Akustik, Optik, Infinitesimalrechnung, Interpolationsverfahren.

16.3 Entwurf einer Cassegrain-Antenne

Bei der aus der Optik bekannten, im Allgemeinen rotationssymmetrischen Cassegrain-Antenne wird das primäre Strahlungsfeld einer Hornantenne an einem konvexen, hyperbolischen Subreflektor umgelenkt (Bild 16.4). Das Phasenzentrum des Speisehorns ist im reellen Brennpunkt F_1 des Hyperboloids angeordnet, wobei die von ihm ausgehende Strahlung nach der Reflexion am Subreflektor vom virtuellen Brennpunkt F_2 des Hyperboloids, der auch gleichzeitig Brennpunkt des Paraboloids ist, auszugehen scheint. Dieser Effekt beruht auf der bekannten Tatsache, dass die Tangente an einer Hyperbel nämlich gleichzeitig Winkelhalbierende desjenigen Winkels ist, der aus den beiden Brennpunktstrahlen durch F_1 und F_2 gebildet wird.

Man erzielt auf dem – im Vergleich zum Subreflektor – deutlich größeren parabolischen Hauptreflektor eine im Allgemeinen nach außen abfallende Belegung, mit der man hohe Nebenkeulendämpfungen erreichen kann (siehe Abschnitt 16.6). Von der möglichst gleichmäßigen Ausleuchtung des Hauptspiegels und der Aperturabschattung sowie Beugung durch den Subreflektor und dessen Stützen wird die Qualität der gesamten Anordnung wesentlich beeinflusst. Durch die Faltung des Strahlengangs lassen sich mit Mehrspiegelsystemen große effektive Brennweiten $F_{\text{eff}} = M F$ bei trotzdem kompakter Bauweise erzielen. Dabei wird

$$M = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\tan \frac{\theta_m}{4}}{\tan \frac{\theta_s}{4}} > 1 \quad (16.6)$$

als **Vergrößerungsfaktor** bezeichnet [Gei94] und errechnet sich aus dem Verhältnis der jeweiligen Abstände des Subreflektorscheitels S von den beiden Hyperbelbrennpunkten F_1 und F_2 . Aus der Parabeleigenschaft des Hauptreflektors kann man weiter herleiten:

$$\tan \frac{\theta_m}{4} = \frac{D}{4 F}, \quad (16.7)$$

woraus bei gegebenem M eine Beziehung für den zweiseitigen Aspektwinkel θ_s folgt:

$$\tan \frac{\theta_s}{4} = \frac{D}{4 F M}, \quad (16.8)$$

unter dem das Speisehorn den Subreflektor sieht. Für eine gleichmäßige Ausleuchtung des Subreflektors muss die Nullwertsbreite des Primärstrahlers natürlich größer als θ_s sein, was einen Aperturdurchmesser des Primärstrahlers erfahrungsgemäß in der Nähe von

$$\frac{A}{\lambda_0} \approx 2 M \frac{F}{D} \quad (16.9)$$

erforderlich macht. Damit das Speisehorn die Apertur des Hauptreflektors nicht noch stärker abschattet als es der Subreflektor schon alleine tut, darf das Horn nicht in den Strahl hineinragen, der die Kante des Subreflektors trifft (Bild 16.4). Nach [Col69] muss dafür folgende Bedingung eingehalten werden:

$$2c \geq \frac{AF}{d} \left[1 - \frac{d^2}{16F^2} \right]_{d \ll 4F} \approx \frac{AF}{d}. \quad (16.10)$$

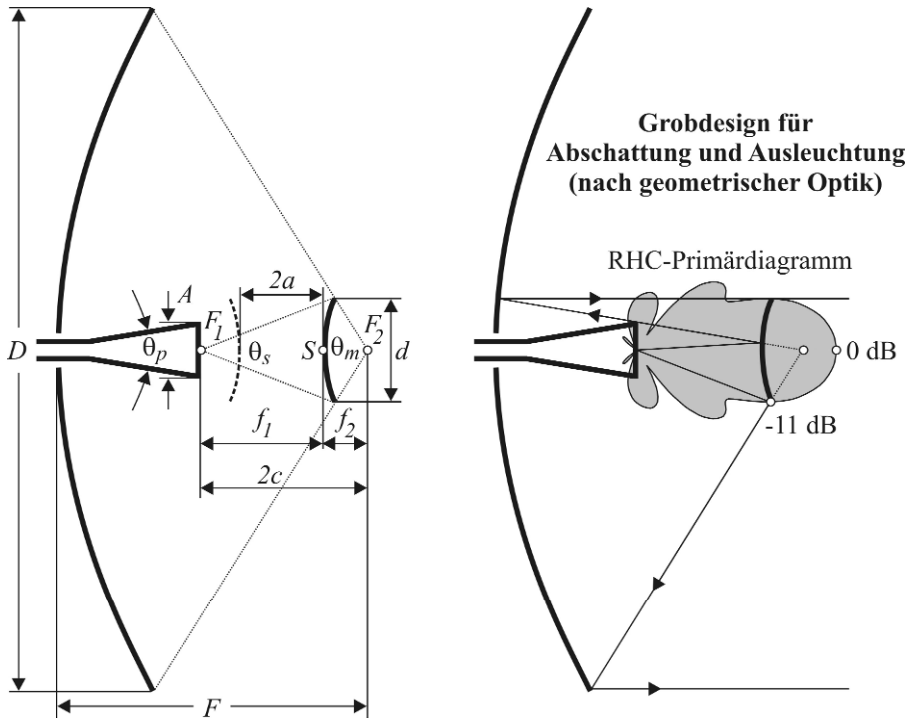


Bild 16.4 Cassegrain-Zweispiegelantenne mit Speisung durch ein quadratisches ($2,5 \lambda_0 \times 2,5 \lambda_0$) Pyramidenhorn mit Öffnungswinkel $\theta_p = 20^\circ$. Die Hauptkeule des zirkular polarisierten Primärstrahlungsdiagramms (RHC) beleuchtet den hyperbolischen Subreflektor mit einem Randabfall von -11 dB. Die am Subreflektor reflektierte Welle ist LHC-polarisiert, wodurch die Rückwirkung auf den Primärstrahler gering bleibt.

Die Hornapertur darf also nicht zu nah vor dem Subreflektor liegen, allerdings auch nicht zu weit entfernt, da die Vorbeistrahlung am Subreflektor sonst zunehmend größer wird. Im Entwurfsprozess muss hier ein Optimum gefunden werden. Die noch verbleibende **Überstrahlung** sowohl des Sub- als auch des Hauptreflektors kann durch Anbringung eines absorbierenden zylindrischen Kragens gemildert werden.

Cassegrain-Antennen werden überwiegend in Satellitenfunkstrecken sowie in der Radioastronomie eingesetzt. Die Auslegung solcher Funksysteme verlangt in einem bestimmten Frequenzbereich einen notwendigen **Gewinn** der beteiligten Antennen, damit am Empfangsort ein minimaler Störabstand nicht unterschritten wird. Zunächst kann aus diesem Gewinnwert G der erforderliche, auf die Wellenlänge normierte Durchmesser

$$\frac{D}{\lambda_0} = \frac{\sqrt{G/q}}{\pi} = \frac{\sqrt{2G}}{\pi} \quad (16.11)$$

des Hauptreflektors ermittelt werden. Der tatsächliche Flächenwirkungsgrad der fertigen Antenne ist zu Beginn der Synthese natürlich noch unbekannt und wird daher zunächst konservativ mit $q = 0,5$ abgeschätzt. Es ist zu erwarten, dass nach Optimierung der Antennenanordnung sich für q ein noch etwas größerer Wert einstellen wird, was zu einem ebenfalls etwas vergrößerten Gewinn führt, den man als willkommene Sicherheitsreserve in der Systemauslegung ansehen kann. Das F/D -Verhältnis wird meist nach konstruktiven Gesichtspunkten gewählt, sodass die **Bautiefe** der Antenne ein vertretbares Maß nicht überschreitet. Der weitere Anten-

nenentwurf erfolgt in mehreren Iterationsschritten, in denen verschiedene geometrische Parameter optimal eingestellt werden müssen. Zur Beurteilung der Qualität der jeweiligen Konfiguration können Flächenwirkungsgrad, Gewinn, Halbwertsbreiten, Nebenkeulendämpfung und Kreuzpolarisation herangezogen werden. Der gesamte Entwicklungsprozess ist in Bild 16.5 schematisch dargestellt.

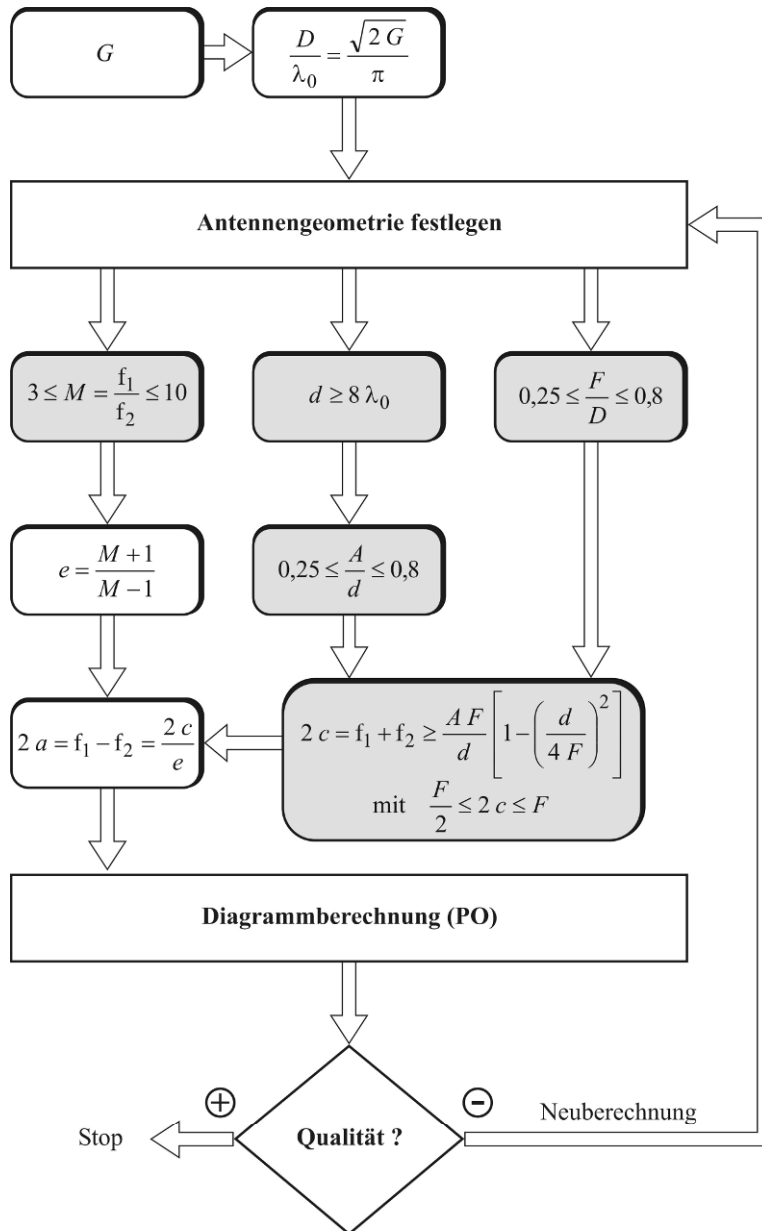


Bild 16.5 Iterativer Entwicklungsprozess einer Cassegrain-Antenne. Die grauen Felder enthalten Optimierungsparameter mit praxisnahen Wertebereichen.

Ein typisches Entwurfsbeispiel, das mit einer modifizierten PO-Software nach [Dia96] berechnet wurde, zeigt Bild 16.6. Beide Diagrammschnitte liegen in der Ebene $\varphi = 90^\circ$.

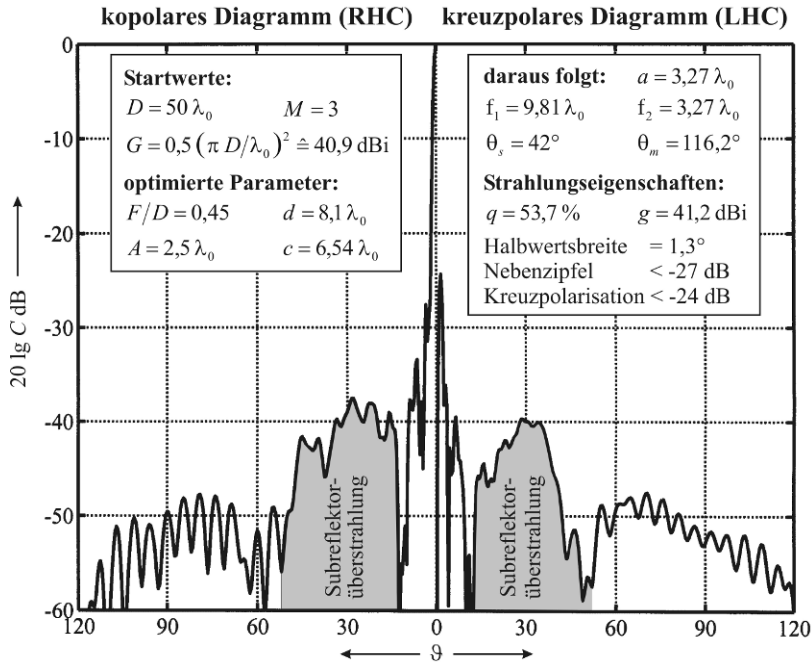


Bild 16.6 Kopolares (links) und kreuzpolares (rechts) Richtdiagramm einer Cassegrain-Antenne, gespeist durch ein zirkular (RHC) polarisiertes, quadratisches Pyramidenhorn mit Öffnungswinkel $\theta_p = 20^\circ$ und Aperturkante $A = 2,5 \lambda_0$.

Durch Abweichung der Reflektorkontur von der Parabolform (Bild 16.7) kann ein gewünschtes Strahlungsverhalten eingestellt werden. Zur Synthese der Reflektorkontur verfolgt man sehr viele Einzelstrahlen (Geometrische Optik – GO) und verschafft man sich dadurch die Aperturbelegung nach Betrag und Phase, um damit mittels PO die Abstrahlung zu ermitteln. Für geänderte Reflektorkontur wiederholt man die Analyse bis zur gewünschten Optimalform.

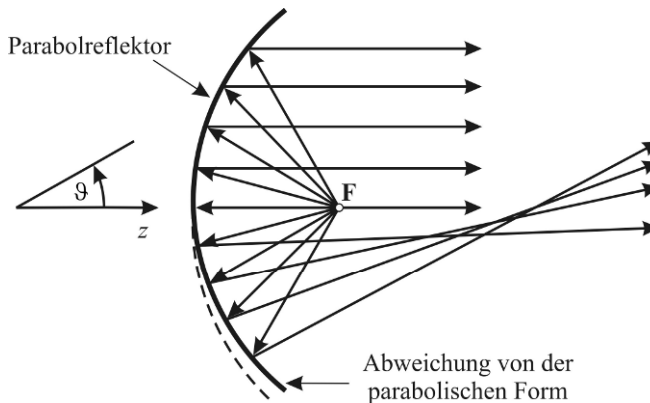
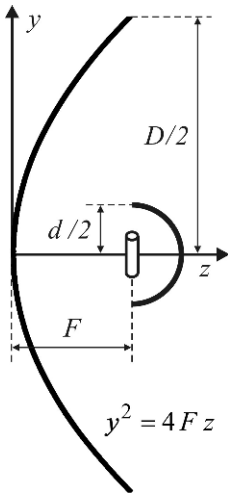


Bild 16.7 Optimierung der Reflektorkontur zur Synthese einer gewünschten Richtcharakteristik

16.4 Gewinnverlust durch Aperturabschattung



Zur Abschätzung des Flächenwirkungsgrads und damit des Gewinns einer rotationssymmetrischen Reflektorantenne mit parabelförmigem Querschnitt wollen wir annehmen, dass sich im Brennpunktsabstand $F \gg \lambda_0$ des Reflektors ein senkrecht zur Rotationsachse orientierter Hertzscher Dipolstrahler befindet, der nach (7.28) selbst einen Gewinn von $3/2$ aufweist. Wegen der großen Weglängen können die Oberflächenströme auf dem Reflektor aus den Fernfeldern des Primärstrahlers berechnet werden. Die Querschnittskontur des Reflektors wird mit $y^2 = 4Fz$ beschrieben.

Mit den Abmessungen aus Bild 16.8 kann der Gesamtgewinn der ganzen Antenne nach [Zuh53] – unter Vernachlässigung der Rückwirkung auf den Dipol – näherungsweise wie folgt angegeben werden:

$$G = \frac{3}{2} \frac{(4\pi F)^2}{\lambda_0^2} \frac{D^4}{(16F^2 + D^2)^2} = \frac{24F^2 D^2}{(16F^2 + D^2)^2} \left(\frac{\pi D}{\lambda_0} \right)^2. \quad (16.12)$$

Bild 16.8 Rotationsparaboloid mit Durchmesser D und Brennweite F (mit Dipol und Subreflektor)

Aus (7.53) folgt allgemein $G = q(\pi D/\lambda_0)^2$ und mit der Abkürzung $x = D/(4F)$ erhalten wir bei Vergleich mit (16.12) den gesuchten Flächenwirkungsgrad bei Dipolpeisung:

$$q_d(x) = \frac{3}{2} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \quad (\text{ohne Hilfsreflektor}). \quad (16.13)$$

Man kann leicht zeigen, dass (16.13) für $x=1$ das Maximum $q_d(1) = 3/8$ einnimmt. Mit dem so gefundenen Optimalwert $F/D = 0,25$ muss der Brennpunkt und damit auch der Hertzsche Dipol wegen $y(z=F) = 2F = D/2$ genau in der Aperturebene liegen³. Da nun der Hertzsche Dipol ein Rundstrahler ist, deckt der Reflektor nur die linke Hemisphäre der Primärstrahlung ab, was bedeutet, dass offenbar auch nur die Hälfte der Quellenleistung ausgenutzt wird. Mit einem sphärischen Hilfsreflektor – in geeignetem, möglichst nahem Abstand rechts des Dipols – können die durch den Brennpunkt zurückreflektierten Strahlen doch noch ausgenutzt werden. So würde sich der Flächenwirkungsgrad theoretisch verdoppeln. Durch die abschattende Wirkung des Hilfsreflektors (mit Durchmesser d) steht die Aperturfläche tatsächlich aber nicht mehr voll zur Verfügung und man findet nach [Zuh53] mit $x = D/(4F)$ einen Gewinn von

$$G = 2 \cdot \frac{3}{2} \frac{(4\pi F)^2}{\lambda_0^2} \left(\frac{16F^2}{16F^2 + d^2} - \frac{16F^2}{16F^2 + D^2} \right)^2 = \frac{3}{x^2} \left(\frac{1}{1+(xd/D)^2} - \frac{1}{1+x^2} \right)^2 \left(\frac{\pi D}{\lambda_0} \right)^2, \quad (16.14)$$

der für $d=0$ doppelt so groß wie (16.12) wird. Aus (16.14) folgt sofort der Flächenwirkungsgrad der Parabolantenne bei Dipolpeisung mit Hilfsreflektor:

³ Diese Aussage gilt nicht mehr bei Verwendung einer stärker bündelnden Primärquelle (Hornstrahler), wo eher flachere Spiegel mit längeren Brennweiten und $x = D/(4F) < 1$ bevorzugt werden.

$$q_r(x, \alpha) = \frac{3}{x^2} \left(\frac{1}{1 + \alpha^2 x^2} - \frac{1}{1 + x^2} \right)^2 \quad (\text{mit Hilfsreflektor}). \quad (16.15)$$

Der Wert von q_r hängt außer von $x = D/(4F)$ auch vom Grad der Abschattung $\alpha = d/D$ ab. Wir suchen daher den optimalen Wert $x(\alpha)$, bei dem (16.15) ein Maximum einnimmt (siehe Bild 16.9). Nach Ableiten und Nullsetzen folgt:

$$\frac{\partial q_r}{\partial x} = -\frac{6(1 - \alpha^2)^2 x (3\alpha^2 x^4 + (\alpha^2 + 1)x^2 - 1)}{(1 + \alpha^2 x^2)^3 (1 + x^2)^3} = 0. \quad (16.16)$$

Für das optimale x ist also die biquadratische Gleichung

$$3\alpha^2 x^4 + (\alpha^2 + 1)x^2 - 1 = 0 \quad (16.17)$$

zu lösen. Nur eine der vier Wurzeln von (16.17) führt zu einer positiv reellen Lösung:

$$x = \sqrt{-1 - \alpha^2 + \sqrt{1 + 14\alpha^2 + \alpha^4}} / (\alpha\sqrt{6}) \approx 1 - 2\alpha^2 + 12\alpha^4, \quad (16.18)$$

die wir für kleine α in eine Taylorreihe entwickeln können, woraus wir erkennen, dass das optimale x jetzt kleiner als eins sein muss. Nach Einsetzen von (16.18) in (16.15) erhalten wir:

$$q_r = \frac{3}{8} \frac{1 - 33\alpha^2 - 33\alpha^4 + \alpha^6 + (1 + 14\alpha^2 + \alpha^4)^{3/2}}{(1 - \alpha^2)^2} \approx \frac{3}{4} - 3\alpha^2 + 9\alpha^4. \quad (16.19)$$

Es wird also nicht der doppelte Wert der Anordnung ohne Hilfsreflektor erreicht. Für $\alpha = d/D \leq 0,32$ bleibt q_r im Bereich $0,51 \leq q_r \leq 0,75$. Für den typischen Wert $\alpha = 0,2$ folgt $x = 0,935$ und $q_r = 0,642$. Tatsächlich kommt es bei der Reflektorlösung zu starker Rückwirkung auf den Erregerdipol, weswegen der optimistische Wert aus (16.19) nicht ganz erreicht werden kann [Küh64]. Trotz der stark idealisierenden Annahmen wird klar, warum in der Praxis kaum höhere Werte als $q_r \approx 2/3$ machbar sind.

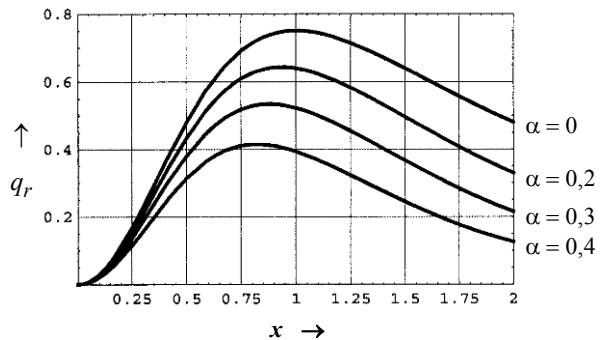


Bild 16.9 Kurvenschar $q_r(x, \alpha)$ nach (16.15) mit nach links wanderndem Maximum ($x = D/(4F)$), $\alpha = d/D$)

16.5 Gewinnverlust durch Fehler der Oberflächenkontur

Abweichungen der Reflektoroberfläche von der Sollkontur machen sich im Allgemeinen durch Reduktion des Antennengewinns und Anstieg der Nebenkeulen bemerkbar (Bild 16.10). Reflektortoleranzen wirken in der Apertur im Wesentlichen als Phasenfehler. Die Größe der Diagrammstörung hängt nicht nur von der Fehleramplitude, sondern auch von der Fehlerform bzw. der Art der Fehlerverteilung über der Reflektorfläche ab [Kar91a]. Falls **statistische** Oberflächenkonturf Fehler mit Normalverteilung einen quadratischen Mittelwert ε (Effektivwert,

rms-Wert) von höchstens $\lambda_0/50$ haben (Rayleigh-Kriterium [Rud86, LoLe88]), bewirken sie eine moderate Nebenkeulenhebung in einem breiten Winkelbereich des Richtdiagramms. Ganz anders wirken sich **systematische** Reflektordeformationen bzw. auch Verkippung oder Verschiebung des Subreflektors aus. Man erhält hier eine starke Nebenkeulenhebung in eng begrenzten Winkelbereichen. Die Amplitude einer periodischen Reflektorstörung (z. B. hervorgerufen durch Paneelbauweise) darf höchstens $\lambda_0/100$ betragen, damit die Diagrammstörungen akzeptabel bleiben. In Bild 16.10 erkennt man, wie statistische Störungen der Reflektorkontur zu einem Auffüllen der Diagrammnullstellen und damit zu einem rauschartigen „Sumpf“ fernab der Hauptkeule führen – ein im Allgemeinen tolerierbarer Effekt. Periodische Konturfehler wirken systematisch und verstärken sich durch konstruktive Interferenz in bestimmten Raumrichtungen, weswegen an sie schärfere Toleranzforderungen zu richten sind.

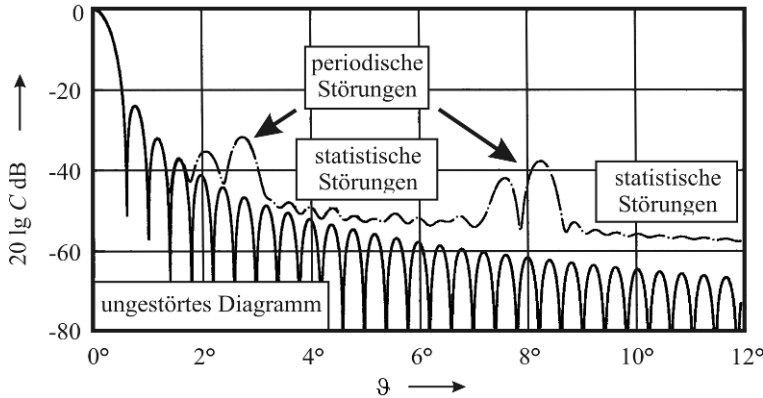


Bild 16.10 Kombination von gaußverteilten ($\varepsilon = \lambda_0/100$) und zwei periodischen Fehlern mit Amplituden $\lambda_0/30$ und $\lambda_0/57$ des Hauptreflektors einer offset-Gregory-Antenne [$D = 142\lambda_0$, $F/D = 0,378$]

Durch Streuung an Oberflächenrauigkeiten geht der Hauptkeule Energie verloren und der Nebenkeulenpegel steigt. Der Einfluss normalverteilter Reflektortoleranzen mit einem Effektivwert ε auf den **Antennengewinn** kann nach [Ruz66] wie folgt beschrieben werden:

$$G(\varepsilon) = G_0 e^{-(4\pi\kappa\varepsilon/\lambda_0)^2} = q \left(\frac{\pi D}{\lambda_0} \right)^2 e^{-(4\pi\kappa\varepsilon/\lambda_0)^2} \quad (16.20)$$

mit dem Korrekturfaktor

$$\kappa = \frac{4F}{D} \sqrt{\ln \left[1 + \left(\frac{D}{4F} \right)^2 \right]}, \quad (16.21)$$

der die Krümmung des Hauptreflektorparaboloids beschreibt und in Bild 16.11 dargestellt ist. Der mögliche Wertebereich von κ ist $0 \leq \kappa \leq 1$. Bei sehr **flachen** Reflektoren mit $(4F/D)^2 \gg 1$, d. h. $F/D \geq 1$, gilt angenähert $\kappa \approx 1$ wegen $\ln(1+x) \approx x$. Typische Werte liegen im Bereich $0,25 \leq F/D \leq 0,8$; dort ist dann $0,83 \leq \kappa \leq 0,98$. Je nach Strahlungscharakteristik des Erregers gibt es ein **optimales Verhältnis** der Brennweite F zum Aperturdurchmesser D . Wird F/D zu klein gewählt – das bedeutet zu große Krümmung des Spiegels – dann wird die Apertur ungleichmäßig belegt und damit der Flächenwirkungsgrad q vermindert. Dagegen wird bei flachem Spiegel (F/D groß) der am Spiegel vorbeigehende Energieanteil zu groß. Man spricht dann von Überstrahlung oder „spillover“.

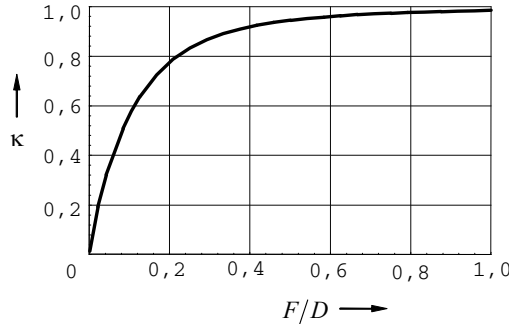


Bild 16.11 Korrekturfaktor κ zur Berechnung des Gewinnverlusts nach (16.20) bei normalverteilten Fehlern der Reflektorkontur in Abhängigkeit von der Reflektorkrümmung

Übung 16.1: Maximalgewinn bei gestörter Reflektorkontur

- Bestimmen Sie diejenige Wellenlänge λ_0 , bei der eine Reflektorantenne mit statistischen Oberflächenkonturfehlern ihren größten Gewinn $G_{\max}$ einnimmt. Geben Sie diesen maximal möglichen Gewinn als Funktion von D/ε an.
- **Lösung:**

Der Gewinn einer Reflektorantenne mit statistischen Konturfehlern beträgt nach (16.20):

$$G = q \left(\frac{\pi D}{\lambda_0} \right)^2 e^{-(4 \pi \kappa \varepsilon / \lambda_0)^2}. \quad (16.22)$$

Dabei sind D der Reflektordurchmesser und ε ist der Effektivwert der statistischen Störung. Der Gewinn G wird maximal, wenn gilt:

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda_0} = 0. \quad (16.23)$$

Nach Ausführen der Differenziation folgt:

$$q(\pi D)^2 \left[-\frac{2}{\lambda_0^3} + \frac{1}{\lambda_0^2} \frac{2(4 \pi \kappa \varepsilon)^2}{\lambda_0^3} \right] e^{-(4 \pi \kappa \varepsilon / \lambda_0)^2} = 0, \quad (16.24)$$

d. h. den maximalen Gewinn erhält man für:

$$\boxed{\lambda_0^{\max} = 4 \pi \kappa \varepsilon}. \quad (16.25)$$

Der Gewinn bei dieser Wellenlänge wird nach (16.22):

$$G_{\max} = q \left(\frac{\pi D}{\lambda_0^{\max}} \right)^2 e^{-1} \approx 0,368 q \left(\frac{\pi D}{\lambda_0^{\max}} \right)^2, \quad (16.26)$$

er ist also um 4,3 dB kleiner als bei einem ungestörten Reflektor. Setzt man noch den Wert für $\lambda_0^{\max}$ ein, so erhält man schließlich

$$\boxed{G_{\max} = q \left(\frac{\pi D}{4 \pi \kappa \varepsilon} \right)^2 e^{-1} = \frac{q}{43,5} \left(\frac{D}{\kappa \varepsilon} \right)^2}. \quad \square \quad (16.27)$$

Der maximal erreichbare Gewinn hängt also nach (16.27) von der **Fertigungspräzision** D/ε ab. Mit steigender Frequenz f nimmt der Gewinn einer Reflektorantenne zunächst quadratisch mit der Frequenz zu, bevor der exponentielle Toleranzeffekt zum Tragen kommt und eine schnelle Gewinnverschlechterung eintritt. Mit der Abkürzung

$$x = \frac{\lambda_0^{\max}}{\lambda_0} = \frac{4\pi\kappa\varepsilon}{\lambda_0} = \frac{4\pi\kappa\varepsilon}{c_0} f \quad (16.28)$$

findet man den auf sein Maximum normierten Gewinn:

$$\frac{G}{G_{\max}} = \left(\frac{\lambda_0^{\max}}{\lambda_0} \right)^2 e^{1 - \left(\lambda_0^{\max}/\lambda_0 \right)^2} = x^2 e^{1-x^2}. \quad (16.29)$$

Diese Funktion ist in Bild 16.12 im halblogarithmischen Maßstab dargestellt. Mit $x = \lambda_0^{\max}/\lambda_0$ gilt ferner:

$$G = G_{\max} x^2 e^{1-x^2} = G_0 e^{-x^2}. \quad (16.30)$$

Wenn es für maximalen Gewinn bei vorhandenen Oberflächentoleranzen auch günstig wäre $\lambda_0 \approx \lambda_0^{\max}$ (also $x=1$) zu wählen, so erhält man nur dann ein schwach gestörtes Richtdiagramm mit mäßiger Erhöhung der Nebenkeulen, wenn die **Forderung** $\varepsilon \leq \lambda_0/50$ eingehalten wird. Es darf also die Betriebswellenlänge λ_0 einen Wert von 50ε nicht unterschreiten:

$$\lambda_0 \geq 50\varepsilon = \frac{50}{4\pi\kappa} \lambda_0^{\max}. \quad (16.31)$$

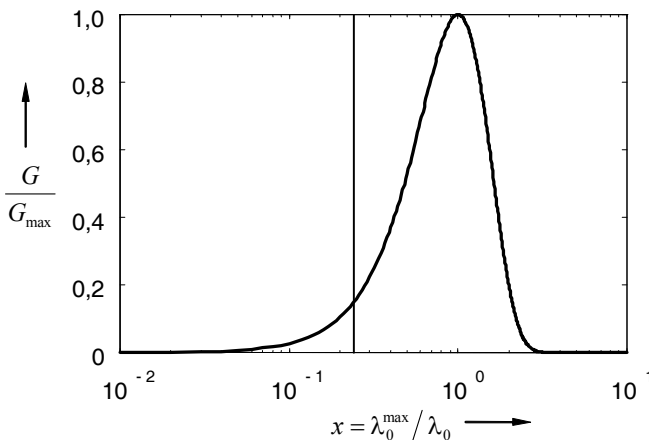


Bild 16.12 Quadratischer Gewinnanstieg über der Frequenz und exponentieller Abfall durch normalverteilte Fehler der Reflektorkontur

Bei typischen Reflektoren gilt $\kappa \approx 0,9$ und es folgt die Nebenbedingung $\lambda_0 \geq 4,42 \lambda_0^{\max}$, d. h.

$$x = \frac{\lambda_0^{\max}}{\lambda_0} \leq 0,226. \quad (16.32)$$

Die Grenze $x = 0,226$ ist in Bild 16.12 mit eingetragen. Der in der Praxis **größtmögliche Gewinn** – ohne übermäßige Diagrammdegradationen – ist daher:

$$G = e^{-x^2} G_0 \approx 0,95 G_0 \quad (16.33)$$

Durch statistische Oberflächenkonturfehler wird bei Einhaltung der Nebenbedingung $\varepsilon \leq \lambda_0/50$ der Gewinn daher um etwa 0,22 dB kleiner. Dieser Verlust muss in der Praxis zur Berechnung der Leistungspegel in Funkübertragungssystemen berücksichtigt werden. Um mit einer realen Reflektorantenne mindestens 95 % des bei der Wellenlänge λ_0 theoretisch erwarteten Gewinns zu erhalten, muss also der quadratische Mittelwert ε ihrer Oberflächenrauigkeiten die Bedingung $\varepsilon \leq \lambda_0/50$ erfüllen. Die **Fertigungspräzision** muss dann

$$\frac{D}{\varepsilon} \geq 50 \frac{D}{\lambda_0} \quad (16.34)$$

sein. In Tabelle 16.1 sind die **Oberflächengüten** der Hauptreflektoren einiger bekannter Teleskope für radioastronomische Anwendungen zusammengestellt. Dabei ist $\lambda_0^{\max} = 4\pi\kappa\varepsilon$ diejenige Wellenlänge, für die der Gewinn des Reflektors maximal wird. Zur Berechnung wurde $\kappa = 0,9$ angenommen. Wegen der Forderung $\varepsilon \leq \lambda_0/50$ nutzt man die Teleskope im Allgemeinen nur bis zu einer Frequenz von $f = 0,226 f^{\max} \approx f^{\max}/4$.

Tabelle 16.1 Oberflächengüten einiger großer Radioteleskope

Standort	D/m	ε/mm	D/ε	$f^{\max} = c_0/\lambda_0^{\max}$	$0,226 f^{\max}$
Caltech	10,4	0,026	400 000	1020 GHz	231 GHz
NRAO Arizona	11,0	0,050	220 000	530 GHz	120 GHz
Westerbork	25,0	0,417	60 000	63 GHz	14 GHz
Raisting	25,0	0,250	100 000	106 GHz	24 GHz
Chilbolton	25,0	0,500	50 000	53 GHz	12 GHz
Haystack	36,0	0,240	150 000	110 GHz	25 GHz
Goldstone	64,0	0,640	100 000	41 GHz	9,4 GHz
Effelsberg	100,0	1,000	100 000	26 GHz	6,0 GHz
Arecibo	305,0	1,386	220 000	19 GHz	4,3 GHz

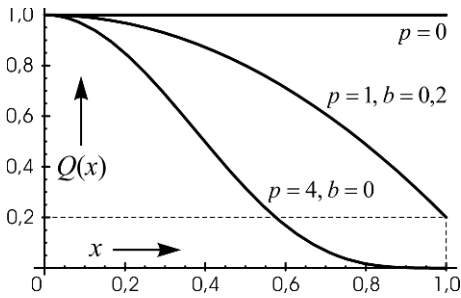
16.6 Gewinnverlust durch inhomogene Amplitudenbelegung

Zur Unterdrückung der Nebenkeulen verwendet man bei Reflektorantennen im Allgemeinen eine zum Rand der Apertur bei $\rho' = a$ **abfallende** Belegung. In Übung 8.7 hatten wir die Richtcharakteristik einer **homogen** belegten Kreisapertur bestimmt, was wir nun durch den Ansatz

$$\underline{\Phi}(r, \vartheta) = \frac{e^{-j k_0 r}}{2r} \int_{\rho'=0}^a Q(\rho') J_0(k_0 \rho' \sin \vartheta) \rho' d\rho' \quad (\text{unabhängig von } \varphi) \quad (16.35)$$

verallgemeinern wollen. Beim Vergleich mit der Fernfelddarstellung in Tabelle 8.9 stellen wir fest, dass in (16.35) – bei uniformer Phase – eine neue **Amplituden-Belegungsfunktion**

$$Q(\rho') = b + c \left[1 - (\rho'/a)^2 \right]^p \quad (\text{mit reellem } p \geq 0) \quad (16.36)$$



hinzugekommen ist, die von den drei Parametern b , c und p abhängt. Für ein Maximum in Aperturmitte $Q(0)=1$ muss $b+c=1$ gelten. Am Rand des Reflektorspiegels bei $\rho'=a$ stellt sich für $p>0$ der Sockelbetrag $Q(a)=b$ ein, während wir für $p=0$ wieder die homogene Belegung erhalten. In Bild 16.13 sind einige ausgewählte Kurven (16.36) dargestellt.

Bild 16.13 Parabolische Belegungen mit Sockel b für eine kreisförmige Apertur ($D=2a$)

Mit Hilfe der Substitution $x = \rho'/a$ und dem Hilfsintegral [Sil49, Gra81]

$$\int_{x=0}^1 x (1-x^2)^p J_0(k_0 a x \sin \vartheta) dx = 2^p \Gamma(p+1) \frac{J_{p+1}(k_0 a \sin \vartheta)}{(k_0 a \sin \vartheta)^{p+1}} \quad (16.37)$$

kann (16.35) berechnet werden. Für ganzzahlige $p=0,1,2,\dots$ gilt $\Gamma(p+1)=p!$. Es wird also

$$\underline{\Phi}(r,u) = \frac{e^{-j k_0 r}}{2r} a^2 \left[b \frac{J_1(u)}{u} + c 2^p \Gamma(p+1) \frac{J_{p+1}(u)}{u^{p+1}} \right] \quad \text{mit } u = k_0 a \sin \vartheta, \quad (16.38)$$

woraus wir wie in Tabelle 8.9 die **Richtcharakteristik** der Kreisapertur berechnen können:

$$C(u) \triangleq \left| b \frac{J_1(u)}{u} + c 2^p \Gamma(p+1) \frac{J_{p+1}(u)}{u^{p+1}} \right|, \quad (16.39)$$

deren Hauptmaximum immer bei $u=0$ liegt. Mit einer Näherung der Besselfunktionen für kleine Argumente aus Bild 6.13 finden wir den Normierungsfaktor $(b+c/(p+1))/2$ und es gilt:

$$C(u) = \frac{2}{b+c/(p+1)} \left| b \frac{J_1(u)}{u} + c 2^p \Gamma(p+1) \frac{J_{p+1}(u)}{u^{p+1}} \right| \quad \text{mit } u = k_0 a \sin \vartheta. \quad (16.40)$$

In den Tabellen 16.2 und 16.3 werten wir (16.40) für verschiedene Parameter (b, c, p) hinsichtlich Halbwertsbreite, Nullwertsbreite, Nebenkeulenpegel und Flächenwirkungsgrad aus. Bild 16.14 zeigt den Verlauf des Flächenwirkungsgrads und die Abhängigkeit des Pegels der höchsten (nicht immer der ersten!) Nebenkeule vom Parameter p für drei Sockelwerte b .

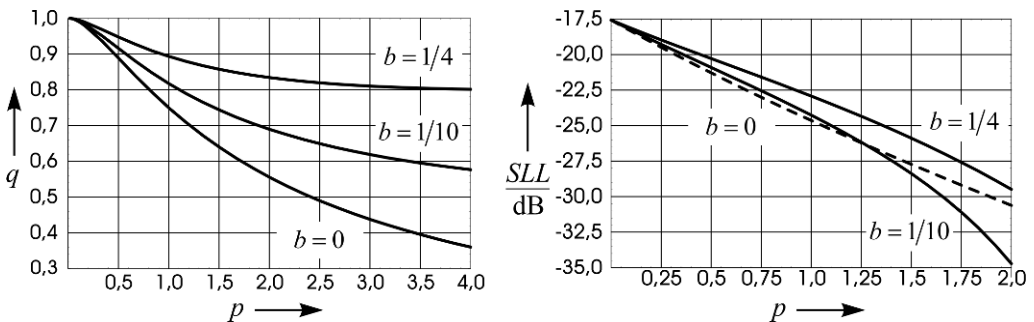


Bild 16.14 Flächenwirkungsgrad q und Pegel der höchsten Nebenkeule SLL (= side lobe level) als Funktion des Polynom-Parameters $p \geq 0$ für verschiedene Sockelbeträge b nach (16.36) mit $c=1-b$

Tabelle 16.2 Richtdiagramme (16.40) einer Kreisapertur ($D = 2a \gg \lambda_0$) ohne Sockel ($b = 0, c = 1$) mit Halbwertsbreite, Nullwertsbreite, Pegel der höchsten Nebenkeule und Flächenwirkungsgrad

p	$C(\vartheta)$	$\Delta\vartheta$	$\Delta\vartheta_0$	SLL/dB	q
0	$\left 2 \frac{J_1(u)}{u} \right $	$1,029 \frac{\lambda_0}{D} \triangleq 59,0^\circ \frac{\lambda_0}{D}$	$2,439 \frac{\lambda_0}{D} \triangleq 139,8^\circ \frac{\lambda_0}{D}$	$-17,57$	1,000
1	$\left 8 \frac{J_2(u)}{u^2} \right $	$1,270 \frac{\lambda_0}{D} \triangleq 72,7^\circ \frac{\lambda_0}{D}$	$3,269 \frac{\lambda_0}{D} \triangleq 187,3^\circ \frac{\lambda_0}{D}$	$-24,64$	0,750
2	$\left 48 \frac{J_3(u)}{u^3} \right $	$1,473 \frac{\lambda_0}{D} \triangleq 84,4^\circ \frac{\lambda_0}{D}$	$4,062 \frac{\lambda_0}{D} \triangleq 232,7^\circ \frac{\lambda_0}{D}$	$-30,61$	0,556
3	$\left 384 \frac{J_4(u)}{u^4} \right $	$1,651 \frac{\lambda_0}{D} \triangleq 94,6^\circ \frac{\lambda_0}{D}$	$4,831 \frac{\lambda_0}{D} \triangleq 276,8^\circ \frac{\lambda_0}{D}$	$-35,96$	0,437
4	$\left 3840 \frac{J_5(u)}{u^5} \right $	$1,813 \frac{\lambda_0}{D} \triangleq 103,9^\circ \frac{\lambda_0}{D}$	$5,584 \frac{\lambda_0}{D} \triangleq 319,9^\circ \frac{\lambda_0}{D}$	$-40,91$	0,360

Tabelle 16.3 Belegung einer Kreisapertur ($D = 2a \gg \lambda_0$) mit Sockel b und $c = 1 - b$ für $p = 1$ und 2 mit Halbwertsbreite, Nullwertsbreite, Pegel der höchsten Nebenkeule und Flächenwirkungsgrad

$ET = 20 \lg b \text{ dB}$		$p = 1$				$p = 2$			
ET/dB	b	$\frac{\Delta\vartheta D}{\lambda_0}$	$\frac{\Delta\vartheta_0 D}{\lambda_0}$	SLL/dB	q	$\frac{\Delta\vartheta D}{\lambda_0}$	$\frac{\Delta\vartheta_0 D}{\lambda_0}$	SLL/dB	q
-6	0,501	1,095	2,684	-20,59	0,965	1,105	2,760	-22,51	0,953
-8	0,398	1,117	2,766	-21,50	0,942	1,135	2,900	-24,68	0,918
-10	0,316	1,137	2,843	-22,28	0,918	1,166	3,053	-27,05	0,877
-12	0,251	1,157	2,913	-22,92	0,893	1,199	3,215	-29,48	0,834
-14	0,200	1,174	2,976	-23,43	0,871	1,231	3,377	-31,74	0,793
-16	0,158	1,190	3,030	-23,80	0,850	1,262	3,529	-33,49	0,754
-18	0,126	1,203	3,075	-24,08	0,833	1,291	3,658	-34,47	0,719
-20	0,100	1,215	3,113	-24,27	0,818	1,319	3,761	-34,72	0,690
-22	0,079	1,225	3,143	-24,39	0,805	1,343	3,838	-34,47	0,665

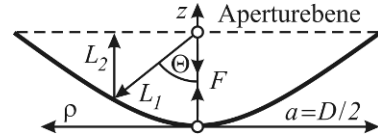
Der Sockelbetrag b bestimmt den Pegel ($ET = \text{edge taper}$), mit dem die Aperturkante angestrahlt wird, während die Rate, mit der die Belegung nach außen abfällt, vom Parameter p abhängt. Bei gleichem Randabfall ET wird mit größeren Werten von p die Hauptkeule breiter, während die Nebenkeulen und der Flächenwirkungsgrad sinken. Bei $p = 2$ wird für $ET = -20 \text{ dB}$ das niedrigste Nebenkeulenniveau ($SLL = \text{side lobe level}$) erreicht. Für noch größeren Randabfall steigen die Nebenkeulen bei $p = 2$ wieder bis zum Wert $-30,61$ der Belegung ohne Sockel an.

16.7 Übungen

- 16.7.1** Die sphärische Phasenfront einer Punktquelle soll durch einen Reflektor in eine ebene Welle – mit uniformer Phasenbelegung – transformiert werden. Zeigen Sie, dass für die Forderung gleicher Weglängen

$$L_1 + L_2 = 2F$$

die Reflektorkontur eine Parabel mit



Brennweite F sein muss. Durch Reflexion entsteht ein Bündel achsenparalleler Strahlen, die in Vorwärtsrichtung konstruktiv interferieren.

- 16.7.2** Bei einer Rotationsparaboloidantenne liege ihr Brennpunkt direkt in der Aperturebene – es gelte also $F/D = 1/4$. Sie werde mit einem isotropen Primärstrahler angeregt. Zeigen Sie, dass in der phasengleich angeregten Apertur sich eine ungleichförmige Amplitudenbelegung $(1 + \cos \Theta)/2$ einstellt. Wegen $0 \leq \Theta \leq \pi/2$ beträgt die Amplitude am Aperturrand nur noch die Hälfte des Zentralwerts. Der edge taper ist daher $ET = -6$ dB.
- 16.7.3** Zeigen Sie, dass die ungleichförmige Amplitudenbelegung der vorherigen Aufgabe (Rotationsparaboloid mit isotropem Primärstrahler) wie folgt geschrieben werden kann:

$$\frac{1 + \cos \Theta}{2} = \frac{1}{1 + \rho^2 / (4F^2)}.$$

Berechnen Sie damit für $F/D = 1/4$ den Flächenwirkungsgrad q der Reflektorantenne.

Lösungen:

- 16.7.1** Aus $L_2 = L_1 \cos \Theta$ folgt sofort $L_1(1 + \cos \Theta) = 2F$ oder $L_1 = 2F / (1 + \cos \Theta)$. Das ist die Gleichung einer Parabel in Polarkoordinaten (L_1, Θ) mit dem Parameter $p = 2F$. Mit $z = \rho^2 / (4F^2)$ kann diese Parabel auch in Scheitelform beschrieben werden.
- 16.7.2** Die Abnahme der Amplitude zum Rand der Apertur hin rührt daher, dass sich auf dem Weg L_1 vom Primärstrahler zum Reflektor eine Kugelwelle ausbreitet, deren Amplitude wie $1/L_1$ kleiner wird. Nach der Reflexion erleidet die ebene Welle bis zur Apertur keine weitere Schwächung mehr. Aus der vorherigen Aufgabe entnehmen wir $1/L_1 = (1 + \cos \Theta) / (2F)$, woraus – nach Normierung auf das Maximum bei $\Theta = 0$ – sofort die Behauptung folgt.
- 16.7.3** Wegen $\rho = L_1 \sin \Theta$ und $2F = L_1(1 + \cos \Theta)$ folgt nach kurzer Umformung die Behauptung. Mit Hilfe von (16.35) und $Q(\rho') = 1 / (1 + \rho'^2 / (4F^2))$ erhalten wir außerdem

$$\underline{\Phi}(r, \vartheta) = \frac{e^{-j k_0 r}}{2r} \int_{\rho'=0}^a \frac{\rho'}{1 + \rho'^2 / (4F^2)} J_0(k_0 \rho' \sin \vartheta) d\rho' \quad \text{mit} \quad a = 2F.$$

Da das Integral nicht geschlossen lösbar ist, bestimmt man durch eine numerische Quadratur zunächst die Richtcharakteristik und daraus den Flächenwirkungsgrad $q = 0,956$ des Reflektors mit isotropem Primärstrahler. Einen recht genauen Schätzwert für q hätten wir auch aus Tabelle 16.3 für den edge taper $ET = -6$ dB ablesen können. Stärker bündelnde Primärstrahler reduzieren zwar die Überstrahlung (spillover), leuchten die Apertur aber weniger gleichmäßig aus und führen dann zu noch kleineren Werten von q .

17 Spezielle Antennenformen

17.1 Streifenleitungsantenne

Antennen in **Streifenleitungstechnik** haben nur eine geringe Bauhöhe und werden dort eingesetzt, wo Größe, Gewicht und Kosten eine wesentliche Rolle spielen – z. B. in Anwendungen der Luft- und Raumfahrttechnik. Einhergehend mit der Miniaturisierung von Mikrowellenschaltungen in Streifenleitungstechnik im **Frequenzbereich** von 100 MHz bis 100 GHz werden Antennen benötigt, die diesen Techniken angepasst sind. Durch die Möglichkeit eines einheitlichen Entwurfs der Mikrowellenschaltung, des Speisernetzwerkes und der Antenne auf einem gemeinsamen Substrat erhält man eine integrierte Einheit, die verschiedene **Vorteile** gegenüber klassischen Aufbauten aufweist:

- hoher Miniaturisierungsgrad,
- Reproduzierbarkeit und automatisierte Massenfertigung,
- mechanische Belastbarkeit durch Vibration und Stoß (dadurch hohe Zuverlässigkeit).

Demgegenüber haben planare Strukturen aber auch einige **Nachteile**:

- geringer Wirkungsgrad durch Verluste im Substrat, wodurch Strahlungsleistung und Gewinn begrenzt werden und
- kleine relative Bandbreite (siehe Tabelle 17.1).

Bereits für die Wellenausbreitung auf Streifenleitungen kann keine geschlossene Lösung angegeben werden. Man benutzt deshalb empirische Näherungsformeln, die aus den statischen Feldern abgeleitet und für höhere Frequenzen verallgemeinert werden. Die Entwicklung einer Streifenleitungsantenne oder einer verkoppelten Gruppe aus Einzelelementen ist recht aufwändig.

17.1.1 Grundlegende Entwurfsrichtlinien

Eine planare Antenne besteht wie in Bild 17.1 aus einzelnen Grundelementen – kleinen Plättchen, die man im Englischen als „patches“ bezeichnet. Über einem dielektrischen Substrat, das von einer metallischen Grundplatte begrenzt wird, ist eine ebenfalls metallische Struktur der Dicke t angeordnet. Wir werden hier stets $t=0$ annehmen. Korrekturen für $t>0$ findet man z. B. in [Hof83, Rog03]. Das **Patch-Element** ist typisch von rechteckiger oder kreisrunder Form; zuweilen werden auch rautenförmige, dreieckige oder ringförmige Elemente eingesetzt.

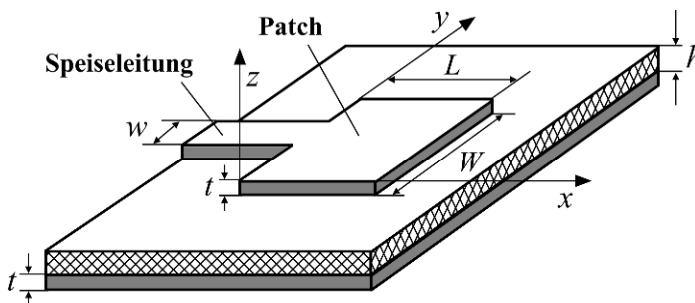


Bild 17.1 Rechteckiges Patch-Element einer Planarantenne mit Speiseleitung nach [Zin95]

Für die **Anregung** eines Patch-Elementes gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- a) mit einer Koaxialleitung von unten durch die Grundplatte,
- b) direkte Einspeisung mit einer Streifenleitung.
- c) elektrodynamische Ankopplung zur Reduktion parasitärer Abstrahlung oder
- d) Aperturkopplung durch Schlitze in einer Zwischenmetallisierung.

Die vier genannten Varianten sind in Bild 17.2 dargestellt. Durch geeignete Wahl des **Speisepunktes** (x_s, y_s) kann oft eine gute Anpassung an die Speiseleitung erzielt werden und ein zusätzliches Anpassungsnetzwerk ist vielfach nicht mehr erforderlich.

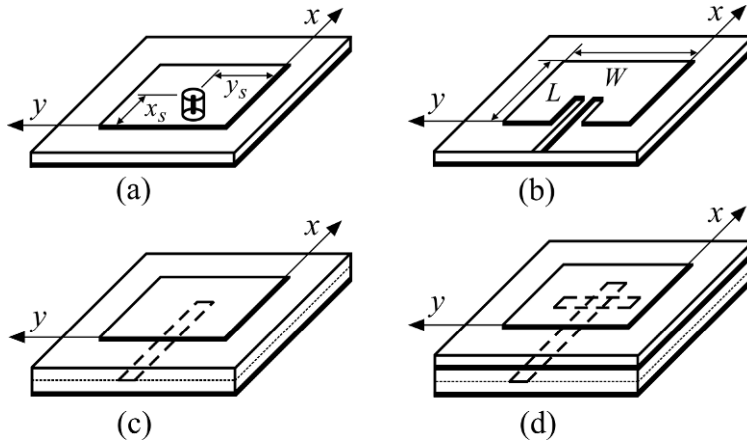


Bild 17.2 Verschiedene Möglichkeiten der Anregung von Streifenleitungsantennen nach [Spl91]

Wir halten uns im Folgenden an die Angaben der einschlägigen Literatur, insbesondere kann zur Vertiefung [Garg01, Zür95, Jan92, Hof83, Bahl80] empfohlen werden. Ein rechteckiges Patch-Element kann als – an allen vier Seiten offene – Streifenleitung der Länge L und der Breite W betrachtet werden. Die Streufelder, die bei $y = 0, W$ entstehen, berücksichtigen wir mit $u = W/h$ näherungsweise durch eine effektive relative Permittivität, die stets kleiner als ϵ_r ist, da die Feldlinien sowohl im Substrat als auch im Außenraum (Luft) verlaufen:

$$\epsilon_{r,\text{eff}}^{(0)} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left(1 + \frac{10}{u} \right)^{-1/2} . \quad (17.1)$$

Die Näherungskurven (17.1) sind in Bild 17.3 in Abhängigkeit vom Parameter ϵ_r dargestellt.

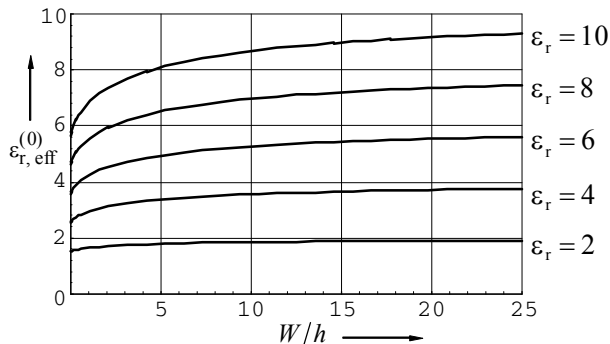


Bild 17.3 Effektive relative Permittivität für ein Patch der Breite W auf einem Substrat der Höhe h

Die Näherung (17.1) resultiert aus einer statischen Feldlösung und unterstellt auf der Streifenleitung eine quasi-TEM-Welle. Mit den Abkürzungen $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ und $u = W/h$ wird der Leitungswellenwiderstand nach diesem statischen Modell:

$$Z_L^{(0)} = \frac{Z_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}^{(0)}}} \ln \left[\frac{F(u)}{u} + \sqrt{1 + \frac{4}{u^2}} \right] \quad \text{mit} \quad (17.2)$$

$$F(u) = 6 + (2\pi - 6) \exp \left[- \left(\frac{30,666}{u} \right)^{0,7528} \right].$$

Bei Erhöhung der Frequenz konzentrieren sich die Felder stärker im Substrat, was zu einem Anstieg der **effektiven relativen Permittivität** führt und mit dem dynamischen Dispersionsmodell von Getsinger [Get73] beschrieben werden kann:

$$\epsilon_{r,\text{eff}} = \epsilon_r - \frac{\epsilon_r - \epsilon_{r,\text{eff}}^{(0)}}{1 + P} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\text{eff}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}}. \quad (17.3)$$

Dabei ist $P = G(f/f_p)^2$ ein Füllfaktor, der die frequenzabhängige Konzentration der Felder im Substrat beschreibt und mit folgenden Hilfsgrößen berechnet werden kann [Ham80]:

$$G = \frac{\pi^2 (\epsilon_r - 1)}{12 \epsilon_{r,\text{eff}}^{(0)}} \sqrt{\frac{2\pi Z_L^{(0)}}{Z_0}} \quad \text{sowie} \quad f_p = \frac{Z_L^{(0)}}{2\mu_0 h}. \quad (17.4)$$

Mit dem frequenzabhängigen $\epsilon_{r,\text{eff}}$ aus (17.3) kann nun auch der dynamische **Leitungswellenwiderstand** bestimmt werden [Rog03]:

$$Z_L = Z_L^{(0)} \sqrt{\frac{\epsilon_{r,\text{eff}}^{(0)} \epsilon_{r,\text{eff}} - 1}{\epsilon_{r,\text{eff}} \epsilon_{r,\text{eff}}^{(0)} - 1}}. \quad (17.5)$$

Die Streufelder bei $x = 0, L$ lassen die Leitung jeweils um ΔL elektrisch länger erscheinen:

$$\Delta L = \frac{h}{2\pi} \left[0,28 + \frac{\epsilon_r + 1}{\epsilon_r} (0,27 + \ln(u + 2,52)) \right]. \quad (17.6)$$

Mit (17.3), (17.6) und $L_{\text{eff}} = L + 2\Delta L = \lambda_{\text{eff}}/2$ findet man die geometrische Patchlänge L , bei der sich elektrische **Halbwellenresonanz** einstellt:

$$L = L_{\text{eff}} - 2\Delta L = \frac{\lambda_{\text{eff}}}{2} - 2\Delta L = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} - 2\Delta L. \quad (17.7)$$

Wie bei Linearantennen, muss daher bei Planarantennen die elektrisch verlängernde Wirkung einer kapazitiven Endbelastung durch geometrische Verkürzung kompensiert werden. Auch die effektive Breite eines Patch-Elementes ist größer als seine geometrische Breite [Hof83]:

$$W_{\text{eff}}^{(0)} = \frac{Z_0 h}{Z_L^{(0)} \sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}^{(0)}}} \quad \text{und} \quad W_{\text{eff}} = W + \frac{W_{\text{eff}}^{(0)} - W}{1 + (f/f_p)^2}. \quad (17.8)$$

Ein resonantes Strahlungsverhalten und einen Eingangswiderstand im Bereich von $R_E = 50 \Omega$ kann man bei Streifenleitungsantennen dann erreichen, wenn die Patchbreite etwa wie

$$W = \sqrt{\frac{h\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}}} \left[\ln \left(\frac{\lambda_0}{h\sqrt{\epsilon_r}} \right) - 1 \right] \quad (17.9)$$

gewählt wird [Kara96, Garg01]. Die Lage eines **koaxialen Einspeisepunktes** (x_s, y_s) wie in Bild 17.4 bestimmt man dann aus folgenden Formeln:

$$x_s = \frac{\lambda_{\text{eff}}}{2\pi} \arccos \sqrt{2 G_r R_E} - \Delta L \quad \text{und} \quad y_s = \frac{W}{2} \quad (17.10)$$

mit dem Strahlungsleitwert G_r eines verkoppelten Endschlitzes nach (17.34). Die gleich großen Strahlungsleitwerte beider Endschlitzte transformieren sich über Leitungen mit dem Leitungswellenwiderstand Z_L der effektiven Länge $x_s + \Delta L$ bzw. $L - x_s + \Delta L$ zum Speisepunkt, wo sie dann als Parallelschaltung anliegen. Mit dem Abstand x_s des Einspeisepunktes von der Patchkante wie in (17.10) wird gerade der gewünschte Eingangswiderstand von R_E realisiert.

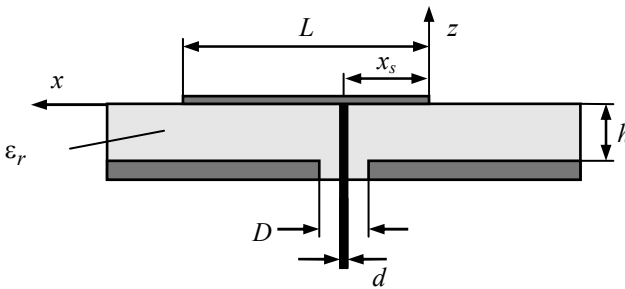


Bild 17.4 Koaxiale Einspeisung durch die Grundplatte hindurch mit Speisepunkt bei x_s nach [Mül02]

Übung 17.1: Rechteckiges Patch-Element

- Es soll ein rechteckiges Patch-Element mit Halbwellenresonanz bei $f_0 = 10$ GHz entwickelt werden. Als Substrat steht ein RT/Duroid 5880 mit $\epsilon_r = 2,2$ und $h = 0,787$ mm zur Verfügung. Bestimmen Sie die Abmessungen L und W sowie die Lage des Speisepunktes (x_s, y_s), damit die Streifenleitungsantenne – wie in Bild 17.4 – an eine koaxiale Speiseleitung mit einem Leitungswellenwiderstand von 50Ω angepasst betrieben werden kann.
- **Lösung:**

Mit $\lambda_0 = 29,98$ mm folgt aus (17.9) eine notwendige Breite von $W = 8,96$ mm. Aus (17.1) erhalten wir zunächst die statische Näherung $\epsilon_{r,\text{eff}}^{(0)} = 2,04$. Wegen $Z_L^{(0)} = 18,3 \Omega$ aus (17.2) werden $G = 0,267$ und $f_p = 9,25$ GHz. Aus (17.3) folgt der dynamische Wert $\epsilon_{r,\text{eff}} = 2,08$ und damit $\lambda_{\text{eff}} = 20,80$ mm. Die mechanisch notwendige Verkürzung durch den Endeffekt ermitteln wir aus (17.6) zu $\Delta L = 0,56$ mm. Die Länge des Patch-Elementes folgt mit $L = 0,5 \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}} - 2 \Delta L = 9,27$ mm aus (17.7). Zur Berechnung der Strahlungsfelder in Abschnitt 17.1.2 sind die elektrisch effektiv wirksamen Abmessungen $L_{\text{eff}} = 10,40$ mm und $W_{\text{eff}} = 10,06$ mm von Bedeutung.

Den Ort der Einspeisung ermitteln wir aus (17.10). Mit $G_r = 1,473 \cdot 10^{-3} / \Omega$ nach (17.37) erhalten wir $x_s = 3,34$ mm und $y_s = 4,48$ mm. □

Bei der **Auswahl des Substrates** muss man sich für ein bestimmtes Material ϵ_r und für eine bestimmte Dicke h entscheiden. Eine hohe Permittivität führt zwar zu kompakteren Abmessungen, reduziert allerdings auch die Bandbreite (Tabelle 17.1) und den Richtfaktor (Bild 17.8). Ein dickes Substrat ermöglicht zwar größere Bandbreiten (Tabelle 17.1), erhöht aber auch das Gewicht. Es muss dabei stets die Nebenbedingung

$$h \leq \frac{0,3 \lambda_0}{2 \pi \sqrt{\epsilon_r}} \quad (17.11)$$

beachtet werden [Garg01]. Bei größeren Dicken steigt nämlich der Energieverlust durch **Oberflächenwellen** entlang des Dielektrikums spürbar an. So werden an den Grenzfrequenzen

$$f_c = \frac{n c_0}{4 h \sqrt{\epsilon_r - 1}} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{mit metallischer Grundplatte}) \quad (17.12)$$

Oberflächenwellen ausbreitungsfähig [Har61]. Durch (17.11) wird erreicht, dass die niedrigste Oberflächenwellenwelle mit $n = 0$ nur eine geringe Energie besitzt und keine höheren Wellen ausbreitungsfähig sind. Bei 10 GHz und $\epsilon_r = 2,2$ sollte die Substrathöhe h also höchstens 0,965 mm betragen. In Übung 17.1 hatten wir $h = 0,787$ mm angenommen, weswegen dort der nächste höhere Wellentyp auch erst bei $f_c(n = 1) = 86,9$ GHz ausbreitungsfähig wird.

Die optimale Substratwahl ist somit stets ein Kompromiss. Aus [Fang10] stammt folgende Tabelle 17.1, die für eine erste Orientierung recht nützlich ist. Eine gewünschte Bandbreite von zum Beispiel 4 % (grau unterlegte Felder) lässt sich daher mit verschiedenen Substraten realisieren.

Tabelle 17.1 Bandbreite¹ eines rechteckigen Patch-Elements mit einem Reflexionsfaktor $|\underline{S}_{11}| \leq 1/3$

$\frac{h}{\lambda_0}$	Relative Bandbreite $B_r = \frac{f_o - f_u}{f_m}$ (in Prozent) nach der Definition (12.2)			
	$\epsilon_r = 1,00$	$\epsilon_r = 2,55$	$\epsilon_r = 4,70$	$\epsilon_r = 10,2$
0,005	1,16	0,85	0,76	0,50
0,020	3,55	1,96	1,38	0,79
0,040	7,14	3,84	2,62	1,47
0,060	10,85	5,86	3,93	2,27
0,080	14,61	7,96	5,45	3,18
0,100	18,42	10,15	7,02	4,17

Der Entwurf aus Übung 17.1 mit $\epsilon_r = 2,2$ und $h/\lambda_0 = 0,026$ hat eine Bandbreite von 2,95 %, wie numerische Simulationen [CST] ergeben haben. Eine zweidimensionale Interpolation der Werte aus Tabelle 17.1 führt praktisch auf den gleichen Wert, nämlich 3,03 %.

¹ Für $|\underline{S}_{11}| \leq 1/3$ folgt $20 \lg |\underline{S}_{11}| \text{ dB} \leq -9,54 \text{ dB}$. Damit entspricht B_r in Tabelle 17.1 ungefähr der 10 dB-Bandbreite.

17.1.2 Cavity-Modell für ein Patch mit abgeschnittenem Substrat (Fall ①)

Die Strahlung einer Patch-Antenne kann entweder über die elektrischen Ströme auf ihrer Oberseite oder über die äquivalenten magnetischen Ströme in ihren seitlichen Schlitten berechnet werden [Carv81]. Beide Modelle liefern für ein resonantes Patch mit $L_{\text{eff}} = 0,5 \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}$ exakt gleiche Ergebnisse [Jac91a]. Für andere Patchlängen stimmen beide Verfahren in der H-Ebene noch exakt überein, während in anderen Schnittebenen Abweichungen auftreten.

Wir werden hier das Modell mit äquivalenten magnetischen Aperturströmen benutzen und führen bei einem rechteckigen Patch-Element (für kreisförmige Patch-Elemente siehe Abschnitt 17.5) ein kartesisches Koordinatensystem ein, dessen Ursprung nicht mehr wie in Bild 17.1 in einer Ecke des Elementes liegt, sondern unter dem Patch im Zentrum des quaderförmigen Volumens $V = W L h$ (siehe Bild 17.5). Für die folgenden Herleitungen verwenden wir Ergebnisse aus Kapitel 6 (Rechteckhohlleiter), Kapitel 8 (Huygenssches Prinzip), Kapitel 11 (Gruppenantennen) und Kapitel 13 (Aperturstrahler).

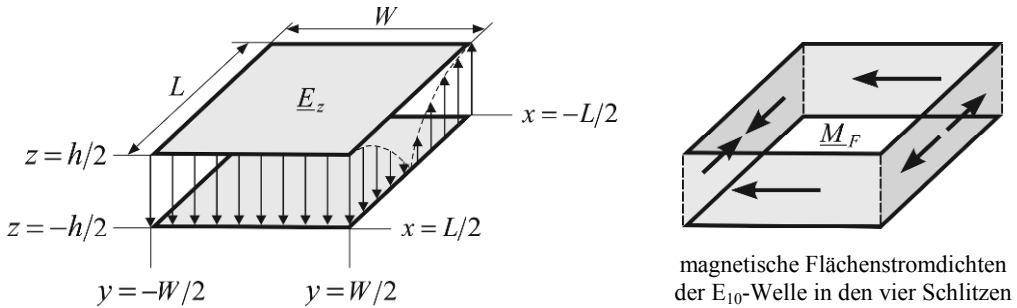


Bild 17.5 Hohlraumresonator (homogen mit ϵ_r gefüllt) mit zwei elektrischen Wänden (oben und unten) und vier magnetischen Wänden (seitliche Schlitten)

Wir setzen zunächst voraus, dass Patch, Substrat und Grundplatte gleiche Ausdehnung WL besitzen. Der unter dem Patch-Element liegende quaderförmige Hohlraum (cavity) strahlt seitlich aus vier flachen Schlitten der Höhe h , die sich bei $x = \pm L/2$ und $y = \pm W/2$ befinden, in den umgebenden freien Raum heraus [Bäc99]. Wegen der geringen Substrathöhe $k_0 h \ll 1$ hängen die Felder des Hohlraums praktisch nicht von der vertikalen Koordinate z ab. Unter Annahme einer magnetischen Wand als Randbedingung in den vier Schlitten Ebenen erhält die vertikale elektrische Feldstärke als Lösung der Helmholtz-Gleichung (3.65) folgende Form²

$$\underline{E}_z = \underline{E}_0 \cos \frac{m \pi (x + L/2)}{L} \cos \frac{n \pi (y + W/2)}{W} \quad \text{mit} \quad (17.13)$$

$$\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} = 0 \quad \text{für } x = \pm L/2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} = 0 \quad \text{für } y = \pm W/2. \quad (17.14)$$

Uns interessiert die einfachste Wellenform, die sich bei Halbwellenresonanz einstellt und als E_{10} -Grundwelle bezeichnet wird, falls $L \geq W$ gilt. Mit $m = 1$ und $n = 0$ folgt aus (17.13)

$$\underline{E}_z = -\underline{E}_0 \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (17.15)$$

² Dabei vernachlässigen wir sämtliche Verluste in den Leitern und im Substrat. In Abschnitt 17.1.2 wird zugunsten einer einfacheren Notation anstelle $L_{\text{eff}} = \lambda_{\text{eff}}/2$ nur L und anstelle W_{eff} nur W geschrieben.

Nach dem Huygensschen Prinzip (8.111) ersetzen wir die elektrischen Aperturfelder durch äquivalente magnetische **Flächenstromdichten** $\underline{\mathbf{M}}_F = \underline{\mathbf{E}} \times \mathbf{n}$, die nun im unbegrenzten homogenen Raum strahlen. Mit $\mathbf{n}$ als jeweils äußerer Flächennormale folgt in allen vier Schlitzen:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{M}}_F(x = -L/2) &= \underline{E}_0 \mathbf{e}_z \times (-\mathbf{e}_x) = -\underline{E}_0 \mathbf{e}_y \\ \underline{\mathbf{M}}_F(x = L/2) &= -\underline{E}_0 \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = -\underline{E}_0 \mathbf{e}_y \\ \underline{\mathbf{M}}_F(y = -W/2) &= -\underline{E}_0 \mathbf{e}_z \times (-\mathbf{e}_y) \sin \frac{\pi x}{L} = -\underline{E}_0 \mathbf{e}_x \sin \frac{\pi x}{L} \\ \underline{\mathbf{M}}_F(y = W/2) &= -\underline{E}_0 \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y \sin \frac{\pi x}{L} = \underline{E}_0 \mathbf{e}_x \sin \frac{\pi x}{L}.\end{aligned}\quad (17.16)$$

Die Schlitze bei $x = \pm L/2$ strahlen gleichphasig, während die Schlitze bei $y = \pm W/2$ gegenphasig strahlen (Bild 17.5). Wir können daher die vier Schlitze zu zwei Gruppen aus je zwei Teilelementen zusammenfassen und berücksichtigen ihre kombinierte Wirkung durch zwei Gruppenfaktoren. Für die Berechnung der Fernfelder orientieren wir uns an Tabelle 8.7. Für den Einzelschlitz bei $x = L/2$ folgt so das **elektrische Vektorpotenzial** aus:

$$\underline{F}_y = -\underline{E}_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \int_{y'=-W/2}^{W/2} e^{jk_0 y' \sin \vartheta \sin \varphi} dy' \int_{z'=-h/2}^{h/2} e^{jk_0 z' \cos \vartheta} dz', \quad (17.17)$$

während für den anderen Schlitz bei $y = W/2$ gilt:

$$\underline{F}_x = \underline{E}_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \int_{x'=-L/2}^{L/2} \sin \frac{\pi x'}{L} e^{jk_0 x' \sin \vartheta \cos \varphi} dx' \int_{z'=-h/2}^{h/2} e^{jk_0 z' \cos \vartheta} dz'. \quad (17.18)$$

Die Auswertung der Integrale (17.17) und (17.18) führt – analog zu Übung 13.2 – auf

$$\begin{aligned}\underline{F}_y &= -\underline{E}_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} Wh \frac{\sin Y}{Y} \frac{\sin Z}{Z} & X &= (k_0 L/2) \sin \vartheta \cos \varphi \\ & & \text{mit } Y &= (k_0 W/2) \sin \vartheta \sin \varphi \\ \underline{F}_x &= \underline{E}_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} 4jLh \frac{X \cos X}{\pi^2 - (2X)^2} \frac{\sin Z}{Z} & Z &= (k_0 h/2) \cos \vartheta.\end{aligned}\quad (17.19)$$

Wir fassen zwei sich gegenüber liegende Schlitze zu einer Zweiergruppe zusammen (Kapitel 11). Für die gleichphasige Gruppe entlang der x-Achse im Abstand L und die gegenphasige Gruppe entlang der y-Achse im Abstand W erhalten wir die **Gruppenfaktoren** [Ram93]

$$\begin{aligned}F_1 &= 2 \cos [(k_0 L/2) \sin \vartheta \cos \varphi] = 2 \cos X \\ F_2 &= 2 \cos \frac{-\pi + k_0 W \sin \vartheta \sin \varphi}{2} = 2 \sin Y.\end{aligned}\quad (17.20)$$

Nun multiplizieren wir (17.19) mit dem jeweiligen Gruppenfaktor (17.20)

$$\begin{aligned}\underline{F}_y F_1 &= -\underline{E}_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{2\pi r} Wh \cos X \frac{\sin Y}{Y} \frac{\sin Z}{Z} \\ \underline{F}_x F_2 &= j\underline{E}_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{2\pi r} Lh \frac{4X \cos X}{\pi^2 - (2X)^2} \sin Y \frac{\sin Z}{Z}\end{aligned}\quad (17.21)$$

und erhalten mit Tabelle 8.7 die **Fernfelder einer rechteckigen Streifenleitungsantenne**:

$$\begin{aligned}\underline{E}_\vartheta &= Z_0 \underline{H}_\varphi = -j k_0 (-\underline{F}_x F_2 \sin \varphi + \underline{F}_y F_1 \cos \varphi) \\ \underline{E}_\varphi &= -Z_0 \underline{H}_\vartheta = -j k_0 \cos \vartheta (\underline{F}_x F_2 \cos \varphi + \underline{F}_y F_1 \sin \varphi)\end{aligned}\quad (17.22)$$

Nach Einsetzen von (17.21) in (17.22) folgt schließlich **bei abgeschnittenem Substrat**:

$$\begin{aligned}\underline{E}_\vartheta &= j k_0 h \underline{E}_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{2 \pi r} \left(\frac{4 j L X}{\pi^2 - (2 X)^2} \sin \varphi + \frac{W}{Y} \cos \varphi \right) \cos X \sin Y \frac{\sin Z}{Z} \\ \underline{E}_\varphi &= j k_0 h \underline{E}_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{2 \pi r} \cos \vartheta \left(-\frac{4 j L X}{\pi^2 - (2 X)^2} \cos \varphi + \frac{W}{Y} \sin \varphi \right) \cos X \sin Y \frac{\sin Z}{Z}.\end{aligned}\quad (17.23)$$

Im Vertikalschnitt in der **E-Ebene** bei $\varphi = 0$ mit $Y = 0$ und $X = k_0(L/2) \sin \vartheta$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\underline{E}_\vartheta &= j W h \underline{E}_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{\lambda_0 r} \cos[k_0(L/2) \sin \vartheta] \frac{\sin[k_0(h/2) \cos \vartheta]}{k_0(h/2) \cos \vartheta} \\ \underline{E}_\varphi &= 0,\end{aligned}\quad (17.24)$$

während in der **H-Ebene** bei $\varphi = \pi/2$ mit $X = 0$ und $Y = k_0(W/2) \sin \vartheta$ gilt:

$$\begin{aligned}\underline{E}_\vartheta &= 0 \\ \underline{E}_\varphi &= j W h \underline{E}_0 \frac{e^{-j k_0 r}}{\lambda_0 r} \cos \vartheta \frac{\sin[k_0(W/2) \sin \vartheta]}{k_0(W/2) \sin \vartheta} \frac{\sin[k_0(h/2) \cos \vartheta]}{k_0(h/2) \cos \vartheta}.\end{aligned}\quad (17.25)$$

Die beiden Hauptstrahlungsrichtungen liegen bei $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$, also senkrecht zur Oberfläche des Patch-Elementes. Es fällt auf, dass die gegenphasigen Schlitzte bei $y = \pm W/2$ in den Hauptschnitten keinen Strahlungsbeitrag liefern. Auch in anderen φ -Ebenen bleibt dieser Beitrag im Bereich um die Hauptkeulen relativ klein, da dort $|X| \ll \pi L/\lambda_0 \approx 1$ gilt. Darum werden sie in der Literatur als **non-radiating slots** bezeichnet und meist vernachlässigt. Den dominanten Strahlungsbeitrag liefern die beiden gleichphasigen Schlitzte bei $x = \pm L/2$. Man nennt sie daher auch **radiating slots**. Da das Strahlungsfeld proportional zu h ist, kann es durch Erhöhung der Substratdicke vergrößert werden. Man beachte dabei aber die maximale Dicke (17.11) und den Einfluss von h auf die Bandbreite nach Tabelle 17.1.

17.1.3 Grundplatte und Substrat mit unendlicher Ausdehnung (Fall ②+③)

In den bisherigen Rechnungen wurde lediglich ein homogen mit einem Dielektrikum der relativen Permittivität ε_r gefüllter (endlich großer) Hohlraumresonator betrachtet (Fall ①). Im Folgenden wollen wir zunächst die Wirkung einer in x- und y-Richtung unendlich ausgedehnten Grundplatte bei $z = -h/2$ beschreiben (Fall ②) und in einem weiteren Schritt auch den Effekt eines unendlich ausgedehnten Substrats berücksichtigen (Fall ③), siehe Tabelle 17.2.

Wir positionieren also das Patch-Element wie bisher auf einem abgeschnittenen Substrat ε_r der Ausdehnung WL , an dessen Unterseite sich nun eine unendlich ausgedehnte metallische Grundplatte anschließt (Fall ②). Die Wirkung dieser Grundplatte kann durch **Spiegelung** der originalen Schlitzströme und Einführung eines weiteren Gruppenfaktors berücksichtigt werden.

Ein horizontales magnetisches Stromelement, dessen Schwerpunkt im Abstand $h/2$ vor der Wand liegt, hat nach Tabelle 11.12 ein gleichphasiges Spiegelbild und nach (11.11) den Gruppenfaktor für ein **abgeschnittenes Substrat mit unendlich ausgedehnter Grundplatte**:

$$\underline{F}_{\text{Gr}} = 2 \cos\left(\frac{k_0 h}{2} \cos \vartheta\right) e^{-j \frac{k_0 h}{2} \cos \vartheta} \quad (17.26)$$

Bei dünnen Substraten mit $k_0 h \ll 1$ ist die Näherung $|\underline{F}_{\text{Gr}}| \approx 2$ zulässig [Bal05]. Der Phasenfaktor in (17.26) rührt daher, dass der Gruppenschwerpunkt sich bei dem in Bild 17.5 gewählten Koordinatensystem nicht bei $z = 0$, sondern bei $z = -h/2$ befindet.

Auch bei unendlich ausgedehntem Substrat (Fall ③) kann das Spiegelungsverfahren angewandt werden. In [Per85, Jac91b] findet man für die Spiegelung **elektrischer** Stromelemente, die sich auf der Oberfläche des Substrats befinden, die Approximation einer strengen Feldlösung (die durch Sommerfeld-Integrale darstellbar ist, die mit Hilfe der Sattelpunktmethode asymptotisch ausgewertet werden). Zuweilen wurden die dort hergeleiteten Gruppenfaktoren irrtümlich auch zur Spiegelung von magnetischen Stromelementen angewendet, was aber unzulässig ist.

Gruppenfaktoren, die zur Spiegelung von **magnetischen** Stromelementen geeignet sind, findet man in [Jac91a, Bha94, Vol07], falls sich die Quellen auf der Oberfläche des Substrats befinden. Man benötigt zwei Gruppenfaktoren, da für $\varepsilon_r > 1$ die Polarisierung eine Rolle spielt:

$$\underline{F} = \frac{2}{1 + j \frac{\sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \vartheta}}{\varepsilon_r \cos \vartheta} \tan\left(k_0 h \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \vartheta}\right)} \quad (17.27)$$

$$\underline{G} = \frac{2}{1 + j \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \vartheta}} \tan\left(k_0 h \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \vartheta}\right)} \quad (17.28)$$

Tatsächlich befindet sich der Schwerpunkt der magnetischen Quellen $\underline{\mathbf{M}}_F$ nach Bild 17.5 nicht auf der Oberfläche des Substrats bei $z = h/2$ sondern genau in dessen Mitte bei $z = 0$. In [Jac85] wird gezeigt, wie man elektrische Quellen $\underline{\mathbf{J}}_F$ von der Oberfläche in die Tiefe des Substrats mit Hilfe eines Korrekturfaktors verlagern kann. Die gleiche Methode kann auch bei magnetischen Quellen $\underline{\mathbf{M}}_F$ benutzt werden [Jac91a, Bha92], womit man die Gruppenfaktoren

$$\underline{F}_\vartheta = \underline{F} \frac{\cos\left(\frac{k_0 h}{2} \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \vartheta}\right)}{\cos\left(k_0 h \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \vartheta}\right)} \quad \text{und} \quad \underline{F}_\varphi = \underline{G} \frac{\cos\left(\frac{k_0 h}{2} \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \vartheta}\right)}{\cos\left(k_0 h \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2 \vartheta}\right)} \quad (17.29)$$

für **Grundplatte und Substrat mit unendlicher Ausdehnung** erhält. Für $\varepsilon_r \rightarrow 1$ gehen die Beträge von $\underline{F}_\vartheta$ und $\underline{F}_\varphi$ wieder in den Spezialfall (17.26) des abgeschnittenen Substrats über:

$$\lim_{\varepsilon_r \rightarrow 1} |\underline{F}_\vartheta| = \lim_{\varepsilon_r \rightarrow 1} |\underline{F}_\varphi| = |\underline{F}_{\text{Gr}}| = 2 \cos\left(\frac{k_0 h}{2} \cos \vartheta\right) \quad (17.30)$$

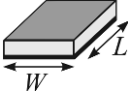
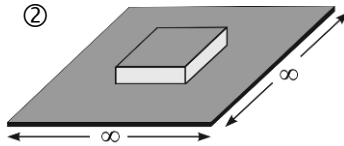
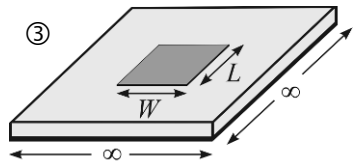
Das gesamte Strahlungsfeld erhält man schließlich aus

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{F}_\vartheta \underline{E}_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + \underline{F}_\varphi \underline{E}_\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (17.31)$$

17.1.4 Numerische Ergebnisse

Wir sind nun in der Lage, **drei** unterschiedliche Anordnungen des Patch-Elements nach Tabelle 17.2 zu berechnen. Dabei müssen die Feldstärken $\underline{E}_g$ und $\underline{E}_\varphi$ aus (17.23) gegebenenfalls mit den Spiegelungsfaktoren $\underline{F}_{Gr}$ aus (17.26) bzw. $\underline{F}_g$ und $\underline{F}_\varphi$ aus (17.29) multipliziert werden. Die zugehörigen Richtcharakteristiken bestimmt man danach aus der Gesamtfeldstärke. Im Fall ① sind Substrat und Grundplatte gemeinsam abgeschnitten, sodass hier die Planarantenne zwei identische Hauptkeulen besitzt (was den Richtfaktor reduziert). Die Halbwertsbreiten – berechnet für die Daten aus Übung 17.1 – sind nur gering von der jeweiligen Anordnung abhängig.

Tabelle 17.2 Verschiedene Anordnungen eines rechteckigen Patch-Elements auf der Trägerstruktur

Substrat <u>und</u> Grundplatte abgeschnitten	Substrat abgeschnitten und Grundplatte unendlich	Substrat <u>und</u> Grundplatte unendlich ausgedehnt
① 	② 	③ 
$C_1 \triangleq \sqrt{ \underline{E}_g ^2 + \underline{E}_\varphi ^2}$	$C_2 \triangleq \sqrt{ \underline{F}_{Gr} \underline{E}_g ^2 + \underline{F}_{Gr} \underline{E}_\varphi ^2}$	$C_3 \triangleq \sqrt{ \underline{F}_g \underline{E}_g ^2 + \underline{F}_\varphi \underline{E}_\varphi ^2}$
$\Theta_E = 92,3^\circ, \Theta_H = 80,3^\circ$ $D = 2,53 \triangleq 4,0 \text{ dBi}$	$\Theta_E = 92,5^\circ, \Theta_H = 80,5^\circ$ $D = 5,04 \triangleq 7,0 \text{ dBi}$	$\Theta_E = 91,1^\circ, \Theta_H = 80,5^\circ$ $D = 5,38 \triangleq 7,3 \text{ dBi}$

Für den Entwurf einer rechteckigen Planarantenne auf einem unendlich ausgedehnten Substrat mit unendlich ausgedehnter Grundplatte (Fall ③) zeigt Bild 17.6 die Hauptschnitte der Charakteristik C_3 mit ihren Halbwertsbreiten in der E- und der H-Ebene (mit Daten aus Übung 17.1).

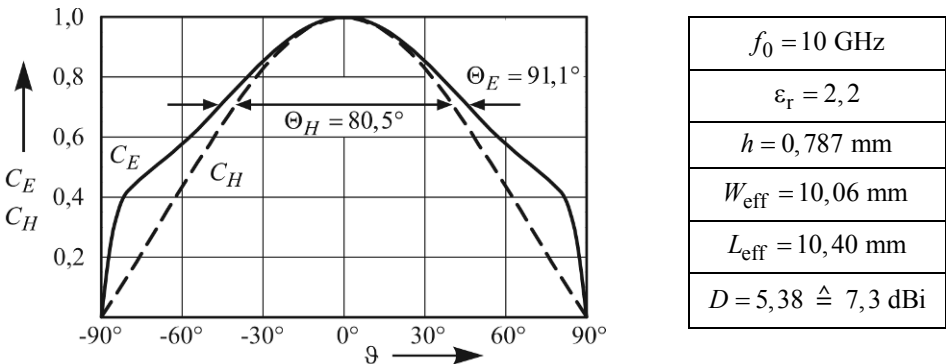


Bild 17.6 Diagrammschnitte (Fall ③) in der E-Ebene ($\varphi = 0$) und in der H-Ebene (gestrichelt, $\varphi = \pi/2$)

Eine **vierte** Möglichkeit der Patchanordnung zeigt Bild 17.7. Grundplatte und Substrat sind nun jeweils um den Faktor p größer als das Patch. Durch Kantenbeugungseffekte, die man z. B. mit Hilfe der Geometrischen Beugungstheorie **GTD** berechnen kann [Hua83, Lie83, Will90], schwankt der Richtfaktor und geht bei $p \rightarrow \infty$ asymptotisch gegen 7,2 dBi. Dieser numerische Grenzwert [CST] stimmt mit den 7,3 dBi unserer analytischen Rechnung (Fall ③) gut überein.

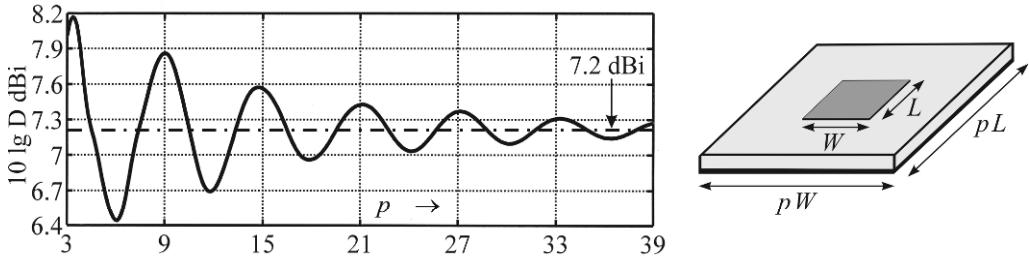


Bild 17.7 Auswirkung der endlichen Ausdehnung von Grundplatte und Substrat auf den Richtfaktor einer rechteckigen Patch-Antenne mit Abmessungen wie in Übung 17.1 (Simulation mit [CST])

17.1.5 Strahlungsleistung, Strahlungsleitwerte und Richtfaktor im Fall ②

Bei Planarantennen werden in der Literatur mit dem Begriff **Strahlungsleitwert** verschiedene Größen bezeichnet. Da sich die Antennenapertur aus vier Schlitzen zusammensetzt, kann man nämlich jedem einzelnen Schlitz einen eigenen Strahlungsleitwert zuordnen. Außerdem macht es einen Unterschied, ob man einen Einzelschlitz isoliert betrachtet oder die Strahlungskoppelung mit den anderen Schlitzen berücksichtigt. Grundsätzlich koppeln hier nur gegenüber liegende Schlitze. Die beiden radiating slots sind also über den Gruppenfaktor $F_1 = 2 \cos X$ miteinander verkoppelt. Ebenso sind auch die beiden non-radiating slots über ihren Gruppenfaktor $F_2 = 2 \sin Y$ miteinander verkoppelt. Wir betrachten nun den Fall ② aus Tabelle 17.2.

Zunächst bestimmen wir die **Strahlungsleistung**, die von der gesamten Streifenleitungsantenne aus allen vier Schlitzen in die obere Hemisphäre abgegeben wird. Mit $\underline{U}_0 = h \underline{E}_0$ erhalten wir:

$$P_S = \frac{4}{2Z_0} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \left(\left| \underline{E}_{\text{Gr}} \underline{E}_\vartheta \right|^2 + \left| \underline{E}_{\text{Gr}} \underline{E}_\varphi \right|^2 \right) r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0,5 \left| \underline{U}_0 \right|^2 G_S. \quad (17.32)$$

Die Integration (17.32) wollen wir numerisch ausführen und finden mit den Daten aus Übung 17.1 den Wert $G_S = 2,956 \cdot 10^{-3} / \Omega$. Dieser **Gesamtstrahlungsleitwert** G_S mit der Einheit A/V sollte bei spannungsgespeisten³ Antennen für eine hohe Leistungsabgabe möglichst groß werden. Er setzt sich bei der rechteckigen Planarantenne aus vier Beiträgen zusammen. Jeder einzelne Beitrag ist dabei einem der vier Schlitze zugeordnet:

$$G_S = 2 (G_r + G_n). \quad (17.33)$$

Dabei berücksichtigt G_r die Wirkung eines der beiden radiating slots bei $x = \pm L/2$. Während $G_n \ll G_r$ für den meist vernachlässigten Beitrag eines der beiden non-radiating slots bei $y = \pm W/2$ steht. Im Folgenden wollen wir uns nur noch mit dem dominanten Beitrag G_r befassen, d. h. wir setzen näherungsweise $G_S \approx 2 G_r$.

Den Strahlungsleitwert G_r eines der beiden miteinander verkoppelten radiating slots kann man in zwei Beiträge aufspalten – nämlich den Selbst- und den Koppelleitwert:

$$G_r = G_r^{(s)} + G_r^{(k)}. \quad (17.34)$$

In [Fang10] findet man mit der Abkürzung $u = k_0 W_{\text{eff}}$ folgende Darstellung

³ Bei stromgespeisten Antennen (wie z. B. dem Halbwellendipol) gilt hingegen $P_S = 0,5 \left| \underline{I}_0 \right|^2 R_S$, weswegen es dort auf einen möglichst hohen Strahlungswiderstand ankommt.

$$G_r^{(s)} = \frac{1}{120 \pi^2} \left[u \operatorname{Si}(u) + \cos(u) - 2 + \frac{\sin(u)}{u} \right] \quad (17.35)$$

für den **Selbstleitwert** eines der beiden gleichphasig strahlenden Schlitzes bei $x = \pm L/2$. Zu seiner Herleitung wird die Verkopplung mit seinem Gegenüber vernachlässigt, d. h. es wird einfach der Gruppenfaktor $F_1 = 1$ gesetzt. Dabei bezeichnet $\operatorname{Si}(u)$ den Integralsinus nach (10.58). Mit den Daten aus Übung 17.1 erhält man aus (17.35) den Wert $G_r^{(s)} = 1,165 \cdot 10^{-3} / \Omega$. Der **Koppelleitwert** wird mit der Abkürzung $v = k_0 L_{\text{eff}} = \pi / \sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}$ in [Lier83] wie

$$G_r^{(k)} = \frac{3}{2} G_r^{(s)} \left[\frac{\cos(v)}{v^2} - \frac{\sin(v)}{v^3} + \frac{\sin(v)}{v} \right] \quad (17.36)$$

angegeben. Die ursprünglich in [Lier83] verwendete Notation mit sphärischen Besselfunktionen wurde in (17.36) durch eine Darstellung mit trigonometrischen Funktionen ersetzt. Mit den Daten aus Übung 17.1 erhält man aus (17.36) den Wert $G_r^{(k)} = 0,308 \cdot 10^{-3} / \Omega$. Aus (17.34) folgt schließlich der Strahlungsleitwert eines verkoppelten radiating slots:

$$G_r = G_r^{(s)} + G_r^{(k)} \approx (1,165 + 0,308) \cdot 10^{-3} / \Omega = 1,473 \cdot 10^{-3} / \Omega \quad (17.37)$$

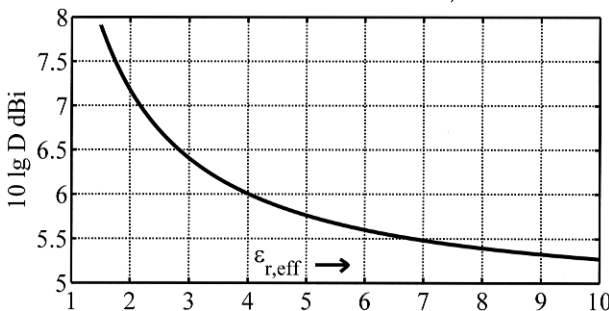
Mit der Näherung $G_S \approx 2 G_r$, wobei die Beiträge der beiden non-radiating slots vernachlässigt werden, kann der Gesamtstrahlungsleitwert zu $G_S \approx 2,947 \cdot 10^{-3} / \Omega$ abgeschätzt werden, was mit dem exakten Ergebnis unserer Quadratur aus (17.32) sehr gut übereinstimmt. Mit Kenntnis von $G_r = G_r^{(s)} + G_r^{(k)}$ kann nach [Rud86] schließlich noch der **Richtfaktor** bestimmt werden:

$$D = \frac{1}{15 G_r} (W_{\text{eff}} / \lambda_0)^2 \quad (17.38)$$

Nach Einsetzen von (17.34) bis (17.36) in (17.38) erhalten wir mit den Abkürzungen $u = k_0 W_{\text{eff}}$ für die Patchbreite und $v = k_0 L_{\text{eff}} = \pi / \sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}$ für die resonante Patchlänge:

$$D = 2 u^2 \left(u \operatorname{Si}(u) + \cos(u) - 2 + \frac{\sin(u)}{u} \right)^{-1} \left(1 + \frac{3}{2} \left[\frac{\cos(v)}{v^2} - \frac{\sin(v)}{v^3} + \frac{\sin(v)}{v} \right] \right)^{-1} \quad (17.39)$$

Im folgenden Bild 17.8 ist der Ausdruck (17.39) für den **Richtfaktor** $10 \lg D$ dB eines quadratischen Patch-Elements (nach Fall ② aus Tabelle 17.2) mit $u = v = \pi / \sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}$ als Funktion seiner effektiven relativen Permittivität $\epsilon_{r,\text{eff}}$ nach (17.3) dargestellt.



Hohe Richtfaktoren erhält man bei kleinen Permittivitäten, weil dort die strahlenden Schlitzes wegen der geringeren dielektrischen Verkürzung noch recht breit ausfallen. Zur Auswirkung der Permittivität des Substrats auf die Bandbreite einer Patch-Antenne findet man Näheres in Tabelle 17.1.

Bild 17.8 Richtfaktor (17.39) einer quadratischen Patch-Antenne mit $k_0 W_{\text{eff}} = k_0 L_{\text{eff}} = \pi / \sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}$

17.1.6 Gruppenantennen in Streifenleitungstechnik

Für höhere Richtwirkung können mehrere planare Einzelstrahler zu **Gruppen** kombiniert werden. Die Speisung der einzelnen Strahlerelemente, deren gegenseitige Abstände meist im Bereich $\lambda_0/4 < a < \lambda_0$ liegen, kann nach Bild 17.9 entweder schmalbandig mit einer durchgehenden Speiseleitung (*Serienspeisung*) oder breitbandig durch ein Speisennetzwerk (*Parallelspeisung*) erfolgen.

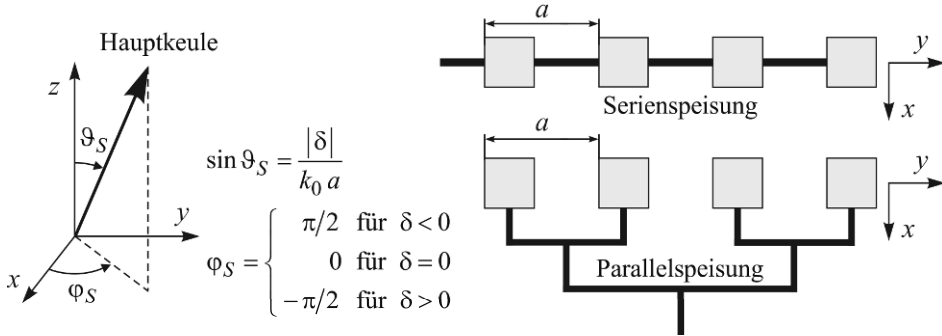


Bild 17.9 Schmalbandige und breitbandige Anregung einer linearen Gruppe aus $N = 4$ Patch-Elementen

Bei der Serienspeisung beeinflusst die Phasendifferenz δ zweier benachbarter Elemente die Richtung der Hauptkeule. Die parallel gespeiste Gruppe, die bei gleichen Leitungslängen eine phasengleiche Anregung aller Elemente realisiert, wirkt wegen $\delta = 0$ zunächst als Querstrahler mit den Schwenkwinkeln $\Theta_S = \varphi_S = 0$. Durch zusätzlich zwischengeschaltete Phasenschieber kann auch hier eine elektronische **Strahlschwenkung** erreicht werden (siehe Abschnitt 11.2.7). Um grating lobes zu vermeiden, darf in einer Antennengruppe aus N Elementen der Elementabstand a – abhängig vom gewünschten maximalen Schwenkwinkel $0 \leq \Theta_S < \pi/2$ – nicht zu groß werden. Mit (11.26) können wir daher folgende Bedingung aufstellen:

$$\frac{a}{\lambda_0} \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{1}{1 + \sin \Theta_S} \quad (17.40)$$

Wir erhalten eine **zweidimensionale Gruppe**, wenn wir jeweils N Elemente bei äquidistantem Abstand a in Zeilen parallel zur y -Achse aufreihen und aus jeweils M Elementen bei äquidistantem Abstand b Spalten parallel zur x -Achse bilden. So entsteht ein rechteckiges Feld aus M Zeilen und N Spalten. Unter Vernachlässigung der wechselseitigen Verkopplung aller Patch-Elemente (für genauere numerische Methoden siehe [Spl91, Garg01]), erhalten wir mit dem multiplikativen Gesetz (11.1) und den Gruppenfaktoren (11.84) die angenäherte Richtcharakteristik einer zweidimensionalen, planaren Antennengruppe aus $M \cdot N$ Elementen (Bild 11.24):

$$C_{\text{ges}} = C_3 C_{\text{Gr}} = C_3 \left| \frac{\sin(Nu/2)}{N \sin(u/2)} \right| \cdot \left| \frac{\sin(Mv/2)}{M \sin(v/2)} \right| \quad (17.41)$$

Wir setzen linearen Phasengang sowohl in x - als auch in y -Richtung und eine mit uniformer Amplitude gespeiste Gruppe voraus. In (17.41) bezeichnet C_3 die Charakteristik des einzelnen Patch-Elementes nach Fall ③ aus Bild 17.6. Für Gruppen in der x - y -Ebene gilt nach (11.9):

$$\begin{aligned} u &= \delta_y + k_0 a \sin \Theta \sin \varphi \\ v &= \delta_x + k_0 b \sin \Theta \cos \varphi \end{aligned} \quad (17.42)$$

Das Maximum der Gruppencharakteristik – und näherungsweise auch das Maximum der Gesamtcharakteristik⁴ – können wir aus der Bedingung $u = v = 0$ finden:

$$\boxed{\tan \varphi_S = \frac{b \delta_y}{a \delta_x}} \quad \text{und} \quad \boxed{\sin \vartheta_S = \frac{-\delta_x}{k_0 b \cos \varphi_S} = \frac{-\delta_y}{k_0 a \sin \varphi_S}} \quad (17.43)$$

Mit den Daten und der zugehörigen Einzelcharakteristik C_3 aus Bild 17.6 sind für $N=10$, $M=5$ und $\delta_x = \delta_y = 0$ die Vertikalschnitte der Gesamtcharakteristik (17.41) in der H-Ebene ($\varphi = \pi/2$) und in der E-Ebene ($\varphi = 0$) in Bild 17.10 dargestellt. Mit $a = b = 0,6\lambda_0$ seien alle Elemente äquidistant angeordnet.

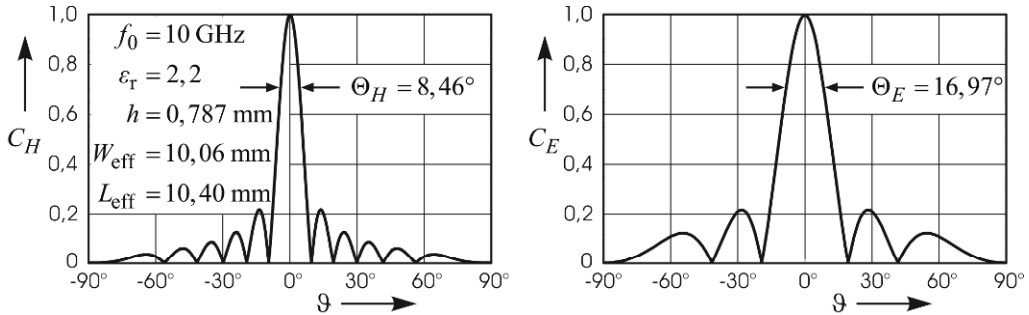


Bild 17.10 Diagrammschnitte und Halbwertsbreiten in der H-Ebene ($\varphi = \pi/2$) und der E-Ebene ($\varphi = 0$) für eine uniform gespeiste, äquidistante, planare Antennengruppe mit Einzelementen nach Bild 17.6

Das Speisenetzwerk von parallel gespeisten Gruppen hat den Nachteil, dass an Leitungsknicke und Verzweigungen Abstrahlung auftritt, die sich dem gewünschten Strahlungsfeld der Patches überlagert. Aufwändigere Realisierungen bauen deshalb das Speisenetzwerk in einer separaten Ebene auf. Die Anregung geschieht dann mittels Aperturkopplung durch Schlitze in einer Zwischenmetallisierung. Für ein einzelnes Patch-Element ist das Prinzip in Bild 17.11 dargestellt.

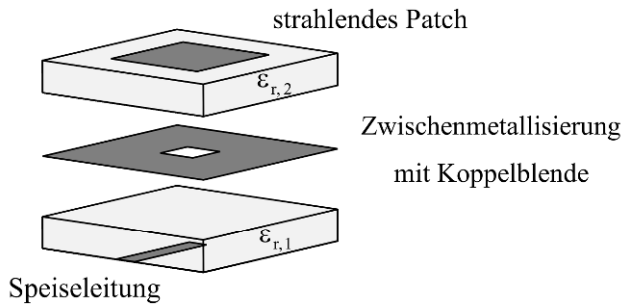


Bild 17.11 Aperturankopplung zur Reduktion des störenden Einflusses der Speiseleitung

Mehrschichtige Strukturen mit aperturgekoppelter Patch-Anregung erfordern zwar einen komplexeren Aufbau, haben aber durch die Entkopplung des Speisenetzwerks von den Strahlerelementen keine parasitäre Abstrahlung mehr und dadurch wesentliche Vorteile gegenüber der direkten Speisung. Insbesondere erhält man eine bessere Nebenkeulenunterdrückung, eine Reduktion der Kreuzpolarisation und eine Vergrößerung der Bandbreite.

⁴ Diese Näherung gilt für schwach bündelnde Einzelemente und $N, M \gg 1$.

17.2 Schlitzantenne

Als Alternative zu metallischen Antennen, deren Strahlungsfeld aus der Stromverteilung auf ihrer Oberfläche bestimmt werden kann, können auch Öffnungen oder Schlitz in einer metallischen Wand als Strahlungsquelle wirken. Wie bei Flächenstrahlern üblich, kann das Strahlungsfeld – aufgrund des **Huygensschen Prinzips** – aus dem Aperturfeld der einfallenden Welle näherungsweise bestimmt werden. Während die Apertur eines am Ende offenen Hohlleiters oder Hornstrahlers in beiden Dimensionen in der Größenordnung der Wellenlänge liegt (Kapitel 13+14), ist das bei einem Schlitzstrahler nur in einer Dimension der Fall (Bild 17.12).

In der Optik betrachtet man mit Hilfe der skalaren Kirchhoffschen Beugungstheorie die Streuung von Licht an absorbierenden Schirmen, vernachlässigt dabei aber die Polarisation des einfallenden Lichtstrahls, wodurch man nur das skalare **Babinetsche Prinzip** formulieren kann (Abschnitt 8.6). Eine Erweiterung auf die Streuung von Vektorfeldern an metallischen Schirmen unter Berücksichtigung ihrer Polarisation stammt aus [Boo46]. Anhand dieses vektoriellen Babinetschen Prinzips wollen wir die Wirkungsweise einer Schlitzantenne erläutern.

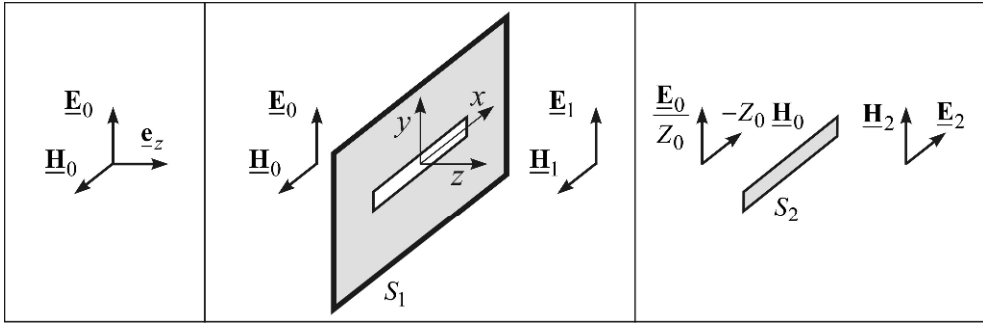


Bild 17.12 Zum vektoriellen Babinetschen Prinzip

Wir betrachten dazu nach Bild 17.12 zunächst eine TEM-Welle mit $Z_0 \underline{H}_0 = \underline{e}_z \times \underline{E}_0$, die sich im freien Raum mit den Feldstärken

$$\underline{E}_1^i = \underline{E}_0 \quad \text{und} \quad \underline{H}_1^i = \underline{H}_0 \quad (17.44)$$

in die positive z -Richtung ausbreiten soll. Dann stellen wir derselben TEM-Welle einen geschlitzten metallischen Schirm S_1 (der unendlich ausgedehnt sei) in den Weg. Das Gesamtfeld $(\underline{E}_1, \underline{H}_1)$ rechts der Platte für $z > 0$ können wir uns aus einer Überlagerung der einfallenden Welle $(\underline{E}_1^i, \underline{H}_1^i)$ und einem vom Schirm angeregten Streufeld $(\underline{E}_1^s, \underline{H}_1^s)$ entstanden denken:

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_1^i + \underline{E}_1^s \quad \text{und} \quad \underline{H}_1 = \underline{H}_1^i + \underline{H}_1^s \quad (\text{für } z > 0). \quad (17.45)$$

Links der Platte für $z < 0$ überlagern sich die einfallende Welle $(\underline{E}_1^i, \underline{H}_1^i)$, ein vom Schirm angeregtes Beugungsfeld $(\underline{E}_1^d, \underline{H}_1^d)$ und ein Reflexionsbeitrag $(\underline{E}_1^r, \underline{H}_1^r)$, der von einem Schirm ohne Schlitz herrühren würde:

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_1^i + \underline{E}_1^d + \underline{E}_1^r \quad \text{und} \quad \underline{H}_1 = \underline{H}_1^i + \underline{H}_1^d + \underline{H}_1^r \quad (\text{für } z < 0). \quad (17.46)$$

Wir betrachten nun eine duale Quelle mit um 90° gekippter Linearpolarisation. Sie geht aus der vorherigen mittels der **Fitzgeraldschen Transformation** $\underline{E}_0 \rightarrow \underline{E}_0/Z_0$ und $\underline{H}_0 \rightarrow -Z_0 \underline{H}_0$ hervor (siehe Abschnitt 8.2.2). Die Felder der jetzt einfallenden Welle sind

$$\underline{\mathbf{E}}_2^i = -Z_0 \underline{\mathbf{H}}_0 \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}_2^i = \underline{\mathbf{E}}_0 / Z_0 . \quad (17.47)$$

Außerdem ersetzen wir den unendlich ausgedehnten Schirm S_1 durch sein komplementäres Gegenstück S_2 , das ihn zu einer geschlossenen Fläche ergänzen würde. Dann entstehen sowohl rechts als auch links von S_2 die Feldstärken $(\underline{\mathbf{E}}_2, \underline{\mathbf{H}}_2)$, für die ebenfalls eine Superposition der Form (17.45) möglich ist:

$$\underline{\mathbf{E}}_2 = \underline{\mathbf{E}}_2^i + \underline{\mathbf{E}}_2^s \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}_2 = \underline{\mathbf{H}}_2^i + \underline{\mathbf{H}}_2^s \quad (\text{für alle } z) . \quad (17.48)$$

Man kann $(\underline{\mathbf{E}}_2, \underline{\mathbf{H}}_2)$ wegen des vektoriellen Babinetschen Prinzips [LoLe88, Zin95] auf die Feldstärken $(\underline{\mathbf{E}}_1, \underline{\mathbf{H}}_1)$ des komplementären Schirms mit dualer Quelle zurückführen:

$$\underline{\mathbf{E}}_1 + Z_0 \underline{\mathbf{H}}_2 = \underline{\mathbf{E}}_0 \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}_1 - \frac{\underline{\mathbf{E}}_2}{Z_0} = \underline{\mathbf{H}}_0 \quad (\text{für } z > 0) \quad (17.49)$$

$$\underline{\mathbf{E}}_1 - Z_0 \underline{\mathbf{H}}_2 = \underline{\mathbf{E}}_1^r \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{H}}_1 + \frac{\underline{\mathbf{E}}_2}{Z_0} = \underline{\mathbf{H}}_1^r \quad (\text{für } z < 0) . \quad (17.50)$$

Nach Einsetzen von (17.44) bis (17.48) in (17.49) und (17.50) erhalten wir für $z > 0$:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_1^i + \underline{\mathbf{E}}_1^s + Z_0 (\underline{\mathbf{H}}_2^i + \underline{\mathbf{H}}_2^s) &= \underline{\mathbf{E}}_0 \\ \underline{\mathbf{H}}_1^i + \underline{\mathbf{H}}_1^s - \frac{\underline{\mathbf{E}}_2^i + \underline{\mathbf{E}}_2^s}{Z_0} &= \underline{\mathbf{H}}_0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_1^s + Z_0 \underline{\mathbf{H}}_2^s &= -\underline{\mathbf{E}}_0 \\ \underline{\mathbf{H}}_1^s - \frac{\underline{\mathbf{E}}_2^s}{Z_0} &= -\underline{\mathbf{H}}_0 \end{aligned}} . \quad (17.51)$$

Für $z < 0$ gilt entsprechend:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_1^i + \underline{\mathbf{E}}_1^d + \underline{\mathbf{E}}_1^r - Z_0 (\underline{\mathbf{H}}_2^i + \underline{\mathbf{H}}_2^s) &= \underline{\mathbf{E}}_1^r \\ \underline{\mathbf{H}}_1^i + \underline{\mathbf{H}}_1^d + \underline{\mathbf{H}}_1^r + \frac{\underline{\mathbf{E}}_2^i + \underline{\mathbf{E}}_2^s}{Z_0} &= \underline{\mathbf{H}}_1^r \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_1^d - Z_0 \underline{\mathbf{H}}_2^s &= 0 \\ \underline{\mathbf{H}}_1^d + \frac{\underline{\mathbf{E}}_2^s}{Z_0} &= 0 \end{aligned}} . \quad (17.52)$$

Werden die passiven Schirme S_1 und S_2 nicht durch äußere TEM-Wellen erregt, sondern sind sie selbst die aktiven Strahler, können wir mit $\underline{\mathbf{E}}_0 = 0$ und $\underline{\mathbf{H}}_0 = 0$ für die Vorwärtstreueung im Bereich $z > 0$ auch schreiben:

$$\boxed{\underline{\mathbf{E}}_1^s = -Z_0 \underline{\mathbf{H}}_2^s} \quad \text{und} \quad \boxed{\underline{\mathbf{H}}_1^s = \frac{\underline{\mathbf{E}}_2^s}{Z_0}} . \quad (17.53)$$

Die Aussparung in einer metallischen Wand erzeugt daher ein elektromagnetisches Feld, das sich dual zu dem Feld eines komplementären Strahlers verhält, der durch Vertauschen von Metall und Loch aus der ursprünglichen Wand entsteht⁵. Das vektorielle Babinetsche Prinzip erlaubt daher die elegante Berechnung der Felder von Schlitzstrahlern mit Hilfe komplementärer Formen. Der offene Schlitzstrahler (Index 1) kann so nach (17.53) auf einen formgleichen massiven Dipolstrahler (Index 2) zurückgeführt werden. Schlitzstrahler werden meist in ihrem Zentrum durch eine Koaxialleitung gespeist. In diesem Fall kann man eine allgemeine Beziehung zwischen der Eingangsimpedanz $\underline{Z}_s$ des Schlitzes und der Eingangsimpedanz $\underline{Z}_d$ des komplementären – ebenfalls zentralgespeisten – Dipols angeben [Hei70, Kra88]:

⁵ In der Optik erzeugt ein photographisches Negativ das gleiche Beugungsmuster wie sein Positiv.

$$\boxed{\underline{Z}_s \underline{Z}_d = \frac{Z_0^2}{4}}. \quad (17.54)$$

Zur Gültigkeit von (17.54) müssen sich der Schlitz in einem unendlich großen Schirm und sein komplementärer Dipol im freien Raum befinden. So kann nach (17.54) aus der Eingangsimpedanz $\underline{Z}_d = (73,1 + j 42,5) \Omega$ eines schlanken Halbwelldipols (siehe Abschnitt 10.2.3) die Eingangsimpedanz eines schmalen Halbwellenschlitzes berechnet werden:

$$\underline{Z}_s = \frac{Z_0^2}{4 \underline{Z}_d} = \frac{Z_0^2}{4 \underline{Z}_d} = \frac{377^2}{4 (73,1 + j 42,5)} \Omega = (363 - j 211) \Omega. \quad (17.55)$$

Die Beziehung (17.54) gilt allgemein für alle komplementären Flächen und ist nicht auf Dipolformen beschränkt. Stimmt eine Fläche in Form und Größe mit ihrer komplementären Fläche überein, dann wird sie selbstkomplementär genannt und wegen $\underline{Z}_s = \underline{Z}_d$ folgt aus (17.54):

$$\boxed{\underline{Z}_s = \underline{Z}_d = \frac{Z_0}{2} \approx 188,4 \Omega}, \quad (17.56)$$

gleichgültig wie die selbstkomplementäre Struktur auch aussieht. Es ist bemerkenswert, dass die reellen Eingangsimpedanzen (17.56) nicht von der Frequenz abhängen. Selbstkomplementäre Strukturen sind daher sehr gut als **Breitbandantennen** geeignet (Abschnitt 12.3). In Bild 17.13 ist z. B. eine schachbrettartige Anordnung aus 36 Feldern dargestellt. Wenn man weiße und schwarze Flächen vertauscht, geht die Struktur – um 90° gedreht – in sich selbst über.

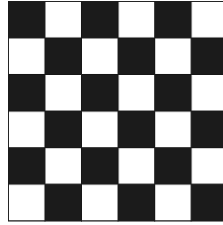


Bild 17.13 Schachbrettmuster als selbstkomplementäre Antennenstruktur

Eine Schlitzantenne ist breitbandig, wenn ihr komplementärer Massivstrahler auch breitbandig ist. In der Praxis baut man konforme Schlitzantennen häufig in gekrümmte Flächen bei Flugzeugen oder Fahrzeugen ein, wo eine hervorstehende Dipolantenne stören würde.

Eine Möglichkeit zum Aufbau robuster **Antennengruppen** für Radaranwendungen besteht darin, schmale Schlitz in der Wand von Hohlleitern anzubringen, die von einer vorbeilaufenden Hohlleiterwelle angeregt werden. Aus dem Dualitätsprinzip (17.53) folgt, dass ein Schlitz in einer metallischen Wand nur dann strahlt, wenn in ihm ein elektrisches Feld *quer* zu seiner Längsrichtung erzeugt wird. Das ist aber nur dann der Fall, wenn der Schlitz ursprünglich vorhandene Wandströme schneidet, die sich in ihm als Verschiebungsströme fortsetzen können [Sil49]. Die Wandstromdichten $\underline{J}_F = \mathbf{n} \times \underline{H}$ erhält man nach Tabelle 3.3 aus dem Magnetfeld der Hohlleiterwelle. Bei einem mit seiner H_{10} -Grundwelle betriebenen Rechteckhohlleiter gilt wegen (6.31) für die obere Breitseite bei $y = b$ und die rechte Schmalseite bei $x = 0$:

$$\begin{aligned} \underline{J}_F^{oben} &= -\mathbf{e}_y \times \underline{H} = \underline{H}_0 \left(\mathbf{e}_z \frac{j k_z}{\pi/a} \sin \frac{\pi x}{a} - \mathbf{e}_x \cos \frac{\pi x}{a} \right) e^{-j k_z z} \\ \underline{J}_F^{rechts} &= \mathbf{e}_x \times \underline{H} = -\mathbf{e}_y \underline{H}_0 e^{-j k_z z}. \end{aligned} \quad (17.57)$$

In der Mitte der breiten Seite bei $x = a/2$ fließen nur Längsströme, während auf der gesamten Schmalseite ausschließlich Querströme in y -Richtung vorhanden sind. Bei Speisung mit der H_{10} -Welle erfolgt bei den Schlitzlagen aus Bild 17.14 daher keine Abstrahlung.

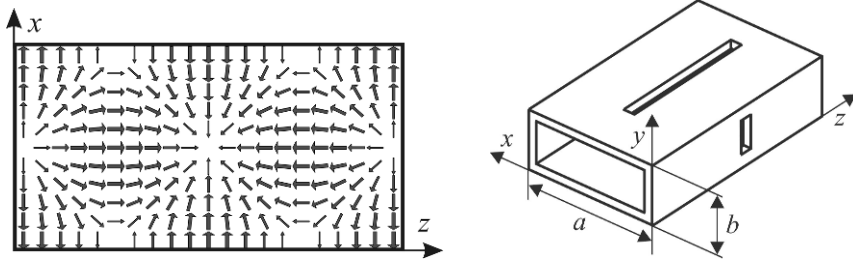


Bild 17.14 Wandströme in der Breitseite eines H_{10} -Rechteckhohlleiters und Schlitz ohne Abstrahlung

In der Breitseite kommen außerhalb der Symmetrieebene liegende Längsschlitzte oder auch Querschlitzte in Betracht (Bild 17.15). Die Stärke der abgestrahlten Leistung P_s kann durch ihre Lage x_1 bzw. x_2 und durch ihre Anzahl N kontrolliert werden. Für Zirkularpolarisation kombiniert man zwei orthogonal gekreuzte Schlitzte an Orten $x = x_1 = x_2$, wo nach (17.57) $\underline{J}_{F,x}$ und $\underline{J}_{F,z}$ betragsgleich werden. Mit $\underline{k}_z = (k_0^2 - \pi^2/a^2)^{1/2}$ folgen diese Orte aus:

$$\cot \frac{\pi x}{a} = \pm \sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda_0}\right)^2 - 1} \quad . \quad (\text{Eine Lösung ist RHC und die andere ist LHC.}) \quad (17.58)$$

In der Schmalseite verwendet man unter einem Winkel α schräg gestellte Schlitzte. Der Richtfaktor uniformer gleichphasiger Schlitzarrays wird $D \propto N$ (siehe (11.57)).

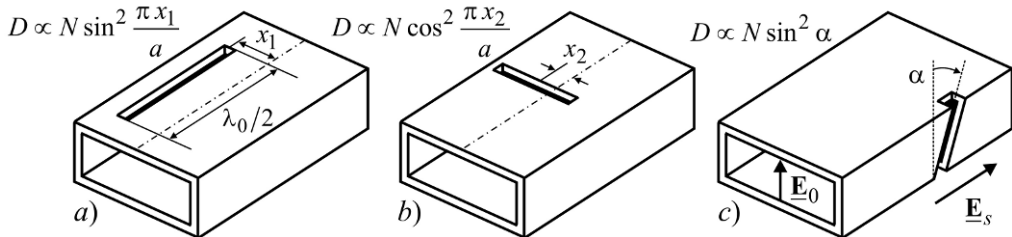


Bild 17.15 Verschobene Längs- und Querschlitzte in der Breitseite sowie Schrägschlitz in der Seitenwand

Eine hintereinander angeordnete Sequenz von Schlitzten in einem Hohlleiter wirkt als querstrahlende **Gruppenantenne**, falls alle Schlitzte gleichphasig erregt werden. Bei Speisung durch die fortlaufende Hohlleiterwelle müssten für gleiche Phase die Schlitzte einen Längsabstand von einer Hohlleiterwellenlänge $\lambda_L > \lambda_0$ aufweisen, was aber nach Tabelle 11.2 zu parasitären Hauptkeulen (grating lobes) führen würde. Darum nimmt man $\lambda_L/2$ als Längsabstand und ordnet die Schlitzte so an, dass beim jeweils nächsten eine zusätzliche Phasendrehung von π auftritt. Bei Schlitzten des Typs a) erreicht man dies durch wechselseitige Lage der Schlitzte zur Mittellinie ($\pm x_1$), während im Fall c) eine wechselseitige Verkippung ($\pm \alpha$) nötig wird. Die Strahlungseigenschaften von Schlitzten des Typs c) werden breitbandiger, wenn man bei gegebener Schlitzanzahl N ihre Neigung wie folgt wählt [Mei68]:

$$\sin^2 \alpha \approx \frac{1,22}{2N+1} \quad . \quad (17.59)$$

17.3 Wendel- oder Helixantenne

Helixantennen bestehen aus einem wendelförmig aufgewickelten langen Draht, der meist koaxial gespeist wird [Sen55]. Zur Verminderung der Rückstrahlung orientiert man die Antennenachse senkrecht auf einem reflektierenden Schirm [Kra02] mit $a \geq 0,8 \lambda_0$ und $b \approx a/2$ (Bild 17.16). Der Anfang der ersten Windung sollte ca. $\lambda_0/8$ vom Reflektor entfernt liegen [Jas61]. Helixantennen erzielen recht hohe Gewinnwerte (bis 20 dBi), sind aber trotzdem breitbandig.

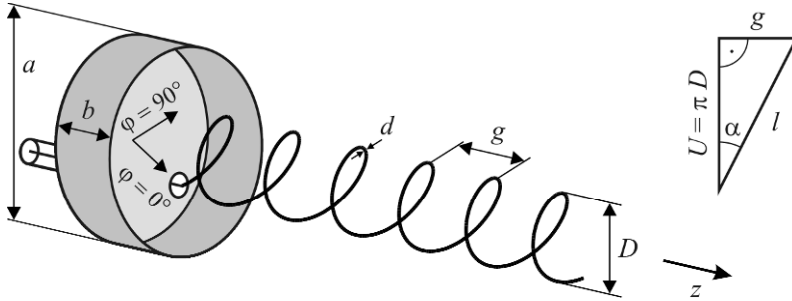


Bild 17.16 Geometrieparameter einer axial gespeisten Wendelantenne mit Längsstrahlung in z-Richtung

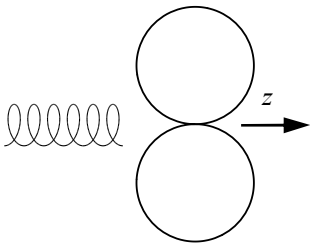
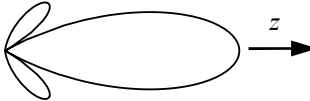
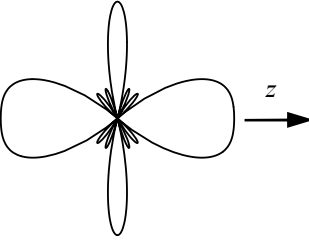
Eine Wendelantenne mit N Windungen wird durch folgende Geometrieparameter beschrieben:

D	Durchmesser der Wendel (von Leitermitte zu Leitermitte),
$U = \pi D$	Umfang der Wendel,
g	Windungsabstand oder Ganghöhe (von Leitermitte zu Leitermitte),
$\alpha = \arctan(g/U)$	Steigungswinkel,
$l^2 = U^2 + g^2$	gestreckte Länge einer Windung: $l = U/\cos \alpha = g/\sin \alpha$,
$L = N g$	Achsenlänge der Wendel und
d	Durchmesser des Leitungsdrahts ($0,006 \lambda_0 \leq d \leq 0,05 \lambda_0$).

Im Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ geht die Wendelantenne in die gewöhnliche Rahmen- oder Schleifenantenne über (Abschnitte 9.2+9.3) und für $\alpha \rightarrow 90^\circ$ erhält man die gestreckte Linearantenne (Kapitel 10). Für andere Winkel $0 < \alpha < 90^\circ$ sind nach Tabelle 17.3 drei verschiedene **Betriebsarten** möglich [Kra88]. Bei kleinem Umfang $U \ll \lambda_0$ strahlt die Wendelantenne *quer* zu ihrer Längsachse (**I**). Sie wirkt dann wie die Kombination eines magnetischen Dipols (9.43) des Umfangs U mit einem elektrischen Dipol (9.22) der Länge g . Für $U^2 = 2 \lambda_0 g$ wird dann $\underline{E}_\varphi = \pm j \underline{E}_g$ und man erhält in alle Richtungen (außer $\vartheta = 0, \pi$) Zirkularpolarisation [Whe47].

Die **Hauptbetriebsart (II)** liegt im Bereich $0,75 \lambda_0 \leq U \leq 1,25 \lambda_0$ mit zirkular polarisierter Längsstrahlung in Achsrichtung [Mac59]. Die Drehrichtung der Polarisation ist identisch zur Wicklungsrichtung der Wendel. Bei einer Ganghöhe in der Größenordnung von $\lambda_0/4$, können sich die Strahlungsbeiträge zweier benachbarter Wendelelemente in Vorwärtsrichtung konstruktiv überlagern bei gleichzeitiger Auslöschung einer Rückwärtskeule. Wenn wir die N verschiedenen Windungen einer Wendelantenne als Einzelstrahler einer längsstrahlenden Gruppe betrachten, können die dortigen Ergebnisse auf die Wendelantenne übertragen werden. Bei Ganghöhen in der Größenordnung von λ_0 wandern parasitäre Hauptkeulen (grating lobes) in das Richtdiagramm ein (Tabelle 11.3) und wir erhalten Betriebsart (**III**) mit vier Hauptkeulen.

Tabelle 17.3 Betriebsarten einer Wendelantenne nach [Kra88] mit Richtdiagrammen (schematisch)

Querstrahlung (I)	Längsstrahlung (II)	Längs- und Querstrahlung (III)
$U \approx 0,1 \lambda_0$ $g \approx 0,005 \lambda_0$ $\alpha \approx 3^\circ$	$U \approx \lambda_0$ $g \approx 0,25 \lambda_0$ $\alpha \approx 14^\circ$	$U \approx 1,75 \lambda_0$ $g \approx \lambda_0$ $\alpha \approx 30^\circ$
		

Die **Richtcharakteristik** der besonders wichtigen axialen Mode (II) erhalten wir für $0 \leq \vartheta \leq \pi$ näherungsweise aus dem Produkt der Gruppencharakteristik einer längsstrahlenden z-Linie (Abschnitt 11.2.1) mit der Einzelcharakteristik (9.69) einer Rahmenantenne vom Umfang einer Wellenlänge, für die man im Bereich der Hauptkeule nach (9.74) einfach $\cos \vartheta$ setzen darf:

$$C(\vartheta) \triangleq \left| \frac{\sin(N u/2)}{N \sin(u/2)} \cos \vartheta \right| \quad \text{mit } u = \delta + k_0 g \cos \vartheta. \quad (17.60)$$

Die Phasennacheilung $\delta = -\omega t_0$ ergibt sich aus der Laufzeit $t_0 = l/v_p$ entlang einer gestreckten Windungslänge l . Nach [Kra02] kann die **Phasengeschwindigkeit** der axialen Mode mit

$$v_p = c_0 \frac{k_0 l}{k_0 g + 2\pi + \pi/N} \quad (17.61)$$

abgeschätzt werden, woraus $\delta = -(k_0 g + 2\pi + \pi/N) \triangleq -(k_0 g + \pi/N)$ folgt. Dieser Phasengang entspricht völlig der **Hansen-Woodward Bedingung** (11.59), die von der Wendelantenne auf natürliche Weise realisiert wird. In der speziellen Art der Frequenzabhängigkeit der Phasengeschwindigkeit sind die guten Breitbandeigenschaften der Wendelantenne begründet, da sich v_p in einem größeren Frequenzbereich automatisch so einstellt, dass die einzelnen Windungen in Achsrichtung konstruktiv interferieren [Hei70]. Aus dem stets negativen

$$u(\vartheta) = -2\pi \left[\frac{g}{\lambda_0} (1 - \cos \vartheta) + \frac{1}{2N} \right] < 0 \quad (17.62)$$

erhalten wir in Hauptstrahlungsrichtung bei $\vartheta = 0$ den Wert $u = -\pi/N$, d.h. aus (17.60) folgt:

$$C(\vartheta) = \left| \frac{\sin(N u/2)}{\sin(u/2)} \cos \vartheta \right| \cdot \sin \frac{\pi}{2N} \quad (\text{siehe auch Übung 17.5.1}). \quad (17.63)$$

Der Gewinn einer Wendelantenne in axialer Mode (II) steigt nach [Kin80] etwa wie $f^{\sqrt{N}}$ an, um bei der Wellenlänge λ_p ein Maximum G_p (**peak gain**) zu erreichen. Danach fällt der Gewinn wie $f^{-3\sqrt{N}}$ steil ab. Für $5 \leq N \leq 35$ finden wir diesen **maximalen Gewinn** bei

$$\boxed{\frac{U}{\lambda_P} = 1,20 - \frac{N}{245}} \quad (\text{Näherung nach einer Kurve aus [Kin80]}). \quad (17.64)$$

Für Windungszahlen $5 \leq N \leq 35$ können im Bereich $0,75 \leq U/\lambda_0 \leq 1,25$ bei Steigungswinkeln $11,5^\circ \leq \alpha \leq 14,5^\circ$ die Näherungen aus Tabelle 17.4 für Maximalgewinn in Achsrichtung, Halbwertsbreite, Eingangswiderstand im Speisepunkt und Achsenverhältnis benutzt werden.

Tabelle 17.4 Eigenschaften der Wendelantenne in axialer Betriebsart (II) nach [Kin80] und [Kra02]

Maximalgewinn und Halbwertsbreite: Bei der Helixantenne ist das Produkt $G_P (\Delta \vartheta_P)^2 \approx \frac{13000 - 145N}{(\tan \alpha)^{0,6}}$ <u>keine</u> Konstante, sondern hängt von Windungszahl und Steigungswinkel ab!	$G_P \approx 8,3 \left(\frac{U}{\lambda_P} \right)^{\sqrt{N+2}-1} \left(\frac{Ng}{\lambda_P} \right)^{0,8} \left(\frac{\tan 12,5^\circ}{\tan \alpha} \right)^{\sqrt{N}/2}$
	$\Delta \vartheta \approx \frac{61,5^\circ (2N/(N+5))^{0,6}}{(U/\lambda_0)^{\sqrt{N}/4} (Ng/\lambda_0)^{0,7}} \left(\frac{\tan \alpha}{\tan 12,5^\circ} \right)^{\sqrt{N}/4}$
Eingangswiderstand im Speisepunkt (bei axialer Speisung)	$R_E \approx \frac{140U}{\lambda_0} \Omega \quad \text{für} \quad \lambda_0 \geq \lambda_P = \frac{U}{1,20 - N/245}$
Achsenverhältnis der Polarisationsellipse bei $\vartheta = 0$	$AR = \left \frac{E_\varphi}{E_\vartheta} \right = 1 + \frac{1}{2N}$

Bei konstanter Achslänge $L = Ng$ wird der Maximalgewinn G_P einer Wendelantenne mit fallendem Steigungswinkel α zwar größer, doch sinkt dann auch die nutzbare Bandbreite. Einen guten Kompromiss erhält man bei $\alpha = 14^\circ$ [Jas61]. Für diesen Steigungswinkel und $U = 29,98$ cm sowie $N = 10$ zeigt Bild 17.17 die Frequenzabhängig des Richtdiagramms in der Schnittebene $\varphi = 90^\circ$, die orthogonal zur Einspeiseebene orientiert ist. Nach (17.64) wird für $N = 10$ Windungen der Gewinn bei $U/\lambda_P = 1,16$ maximal. Nach Tabelle (17.4) gilt dort $G_P = 23$ und $\Delta \vartheta_P = 34^\circ$, was durch die numerische Simulation gut bestätigt wird.

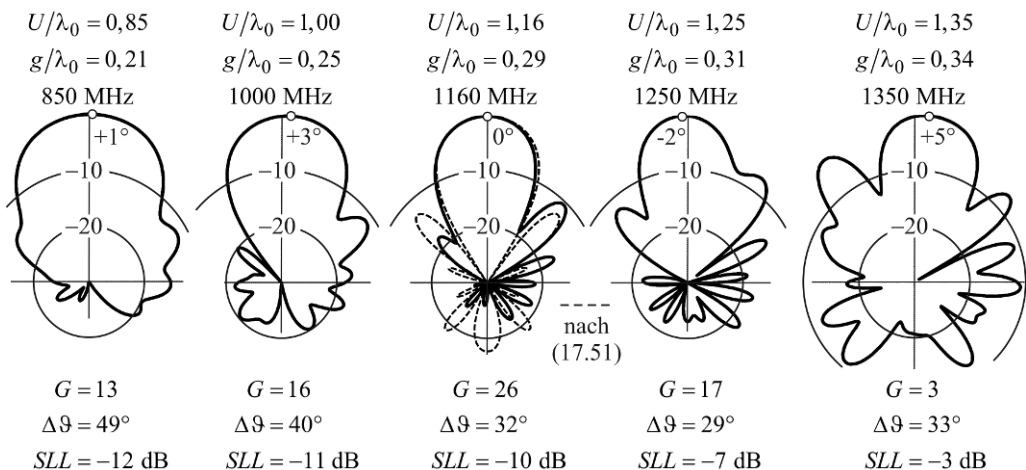


Bild 17.17 Richtdiagramme der RHC-Abstrahlung einer Wendelantenne mit Reflektor (numerische Simulation mit der Momentenmethode) mit $U = 29,98$ cm, $\alpha = 14^\circ$ und $N = 10$. Der Dynamikbereich beträgt 30 dB. Der Maximalgewinn wird bei $f = 1160$ MHz erreicht – dort gilt $G (\Delta \vartheta)^2 \approx 27000$.

Die gestrichelte Kurve in Bild 17.17 (bei $f = 1160$ MHz) zeigt die Näherungslösung (17.63), in der kein Reflektorschirm berücksichtigt wird. Dennoch ist die Übereinstimmung recht gut.

Übung 17.2: Entwurf einer Wendelantenne

- Eine Wendelantenne mit Steigungswinkel $\alpha = 14^\circ$ soll bei $f_P = 1160$ MHz einen Maximalgewinn von 13,7 dBi aufweisen. Bestimmen Sie die notwendige Windungszahl N , die Abmessungen U und L sowie die nutzbare Bandbreite in der Hauptbetriebsart II.

• Lösung:

Mit der Beziehung für den Maximalgewinn (anwendbar für $5 \leq N \leq 35$)

$$G_P \approx 8,3 \left(\frac{U}{\lambda_P} \right)^{\sqrt{N+2}-1} \left(\frac{N g}{\lambda_P} \right)^{0,8} \left(\frac{\tan 12,5^\circ}{\tan \alpha} \right)^{\sqrt{N}/2} \quad (17.65)$$

ist wegen (17.64) und mit $g = U \tan \alpha$ die notwendige Windungszahl N bereits festgelegt. Eine gute **Näherungslösung** von (17.65) für $\alpha = 14^\circ$ im Bereich $13 \leq G_P \leq 46$ ist

$$N \approx 34,3 - 5,1 \sqrt{46,0 - G_P}, \quad (17.66)$$

woraus mit $G_P = 10^{1,37} = 23,4$ sofort $N = 10$ folgt. Mit $\lambda_P = c_0/f_P = 25,9$ cm folgen

$$U = \lambda_P \left(1,20 - \frac{N}{245} \right) = 30,0 \text{ cm} \quad \text{und} \quad L = N g = N U \tan \alpha = 74,8 \text{ cm}. \quad (17.67)$$

Eine axiale Abstrahlung (II) stellt sich erst ab der festen unteren Grenze $U/\lambda_u = 0,75$ ein, während die obere (variable) **Stabilitätsgrenze** durch die empirisch gewonnene Formel

$$\frac{U}{\lambda_0} = \frac{U}{\lambda_P} \left(1 + \frac{0,30}{\sqrt{N}} \right) = \left(1,20 - \frac{N}{245} \right) \left(1 + \frac{0,30}{\sqrt{N}} \right) \quad (\text{für } 5 \leq N \leq 35) \quad (17.68)$$

dargestellt werden kann. Für $N = 10$ gilt dann $U/\lambda_0 = 1,27$. Mit dem Frequenzverhältnis $f_0/f_u = 1,27/0,75 = 1,69$ wird die nutzbare relative Bandbreite nach der Definition (12.2) $B_r = 51\%$, wodurch sich eine moderate Breitbandigkeit ergibt. Beim letzten Diagramm aus Bild 17.17 ist bei $f = 1350$ MHz die axiale Mode bereits zerfallen. $\square$

Die Kombination von M Wendelantennen in einer Gruppe liefert (unter Vernachlässigung der Kopplung) den Gewinn $M G$. Den optimalen **Elementabstand** b/λ_0 erhält man aus der Forderung, dass sich die (kreisförmigen) Wirkflächen der Einzelelemente nicht überlappen sollen:

$$A_W = \frac{\lambda_0^2}{4\pi} G \stackrel{!}{=} \frac{\pi b^2}{4} \Rightarrow \frac{b}{\lambda_0} = \frac{\sqrt{G}}{\pi} \quad \text{gilt nur für **Längsstrahler** (Yagi, Helix, Stielstrahler) mit **kleinen** Querabmessungen [Jas61, Kra02].} \quad (17.69)$$

Sind die Wendeln gegensinnig gewickelt, kann ein solcher Gruppenstrahler Linearpolarisation erzeugen. Falsch drehende Zirkularpolarisation kann von einer Wendelantenne nicht empfangen werden. Die **Eingangsimpedanz** einer Wendelantenne ist unterhalb ihres Maximalgewinns (also für $0,75 \leq U/\lambda_0 \leq U/\lambda_P$) nur schwach veränderlich, für höhere Frequenzen oszilliert sie dann stark. Durch eine konische Aufweitung des Wendelumfangs U kann – bei gleichzeitiger Vergrößerung der Ganghöhe g – die Bandbreite stark erhöht werden (bis 5:1). Bei konstantem $\alpha = \arctan(g/U)$ erhält man dadurch **konische Spiralantennen** [Kra88]. Eine weitere Bauform ist die **quadrifilare Helix** aus 4 Teilwendeln in Phasenquadratur [Kilg69, Bal08].

17.4 Dielektrische Oberflächenwellenantenne

Bei Millimeterwellen treten in metallischen Hohlleitern Ohmsche Verluste von mehr als 0,5 dB/m auf (siehe Tabellen 6.5 und 6.8). Als dämpfungssärmere Alternative kann man auch offene **dielektrische Wellenleiter** einsetzen. Einfach zu fertigen sind homogene, kreiszylindrische, dielektrische Stäbe mit Durchmesser d , auf denen sich entlang der Grenzfläche zur umgebenden Luft eine fortschreitende **Oberflächenwelle** ausbildet. Nach [Rud86] sollte $d > \lambda_0/10$ sein. Bei Anregung mit einem H_{11} -Rundhohlleiter stellt sich als Grundwelle der Stableitung eine hybride HE_{11} -Stabwelle mit $f_c^{HE_{11}} = 0$ und sechs Feldkomponenten ein [Küh64]. Für

$$\frac{d}{\lambda_0} < \frac{j_{01}}{\pi \sqrt{\epsilon_r - 1}} = \frac{0,7655}{\sqrt{\epsilon_r - 1}} \quad (17.70)$$

ist sie der einzige ausbreitungsfähige Wellentyp [Bal89]. Am Stabende wird die geführte Welle sowohl reflektiert als auch abgestrahlt, wodurch eine einfache längsstrahlende Antenne entsteht. Durch eine kontinuierliche Verkleinerung des Stabquerschnittes⁶ $A = \pi d^2/4$ von

$$A_{\max} \approx \frac{\lambda_0^2}{4(\epsilon_r - 1)} \quad \text{auf} \quad A_{\min} \approx \frac{\lambda_0^2}{10(\epsilon_r - 1)} \quad (17.71)$$

erhält man einen **Stielstrahler** (Bild 17.18) mit verbesserter Anpassung an den Freiraum, wodurch auch Nebenkeulen und Rückwärtsstrahlung sinken [Mall43, Mall49, Kie53]. Die gleichmäßige Querschnittsänderung führt zu einer seitlichen Abstrahlung entlang der gesamten Antennenlänge, weshalb man auch von einer **Leckwellenantenne** spricht (engl.: leaky wave).

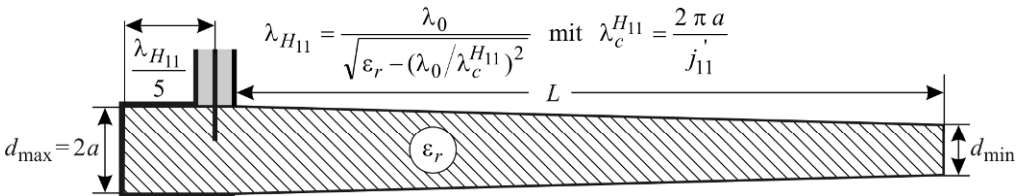


Bild 17.18 Konischer Stielstrahler der Länge L mit Anregung durch einen kurzen Rundhohlleiter

Die Hauptstrahlungsrichtung eines Stielstrahlers fällt mit seiner Längsachse zusammen. Für Stablängen im Bereich $2\lambda_0 \leq L \leq 7\lambda_0$ kann man bei optimaler Dimensionierung nach (17.71) folgende Werte für Gewinn und Halbwertsbreite erwarten [Küh64, Joh93, And05]:

$$\boxed{G \approx \frac{7L}{\lambda_0}} \quad \text{und} \quad \boxed{\Delta \vartheta \approx 65^\circ \sqrt{\frac{\lambda_0}{L}}} \quad \text{mit} \quad G(\Delta \vartheta)^2 \approx 29600, \quad (17.72)$$

was etwa den Eigenschaften eines **Hansen-Woodyard-Längsstrahlers** entspricht (siehe Tabelle C.2). Mit $\epsilon_r = 3$ folgt aus (17.71) $U_{\min} = \pi d_{\min} = 0,79 \lambda_0$ und $U_{\max} = \pi d_{\max} = 1,25 \lambda_0$. Der Stabilitätsbereich (17.68) einer längsstrahlenden **Wendelantenne** ist ähnlich ausgedehnt. Wenn wir in Tabelle 17.4 U/λ_p nach (17.64) einsetzen, erhalten wir mit $L \approx Ng$ ein Verhalten analog zu (17.72). Stielstrahler und Wendelantenne haben – bei entsprechender Dimensionierung – daher vergleichbare Strahlungseigenschaften. Man beachte allerdings, dass der Stielstrahler linear polarisiert abstrahlt, während die Wendelantenne Zirkularpolarisation abgibt.

⁶ Die Beziehungen (17.71) sind für kreisförmige und auch rechteckige Querschnitte anwendbar [LoLe88].

Übung 17.3: Entwurf eines dielektrischen Stielstrahlers

- Bei der Frequenz $f = 30 \text{ GHz}$ (d.h. $\lambda_0 = 9,993 \text{ mm}$) soll ein Stielstrahler aus Quarzglas ($\epsilon_r = 3,78$) mit einem Gewinn von $g = 10 \lg 22,2 \text{ dBi} = 13,5 \text{ dBi}$ aufgebaut werden.

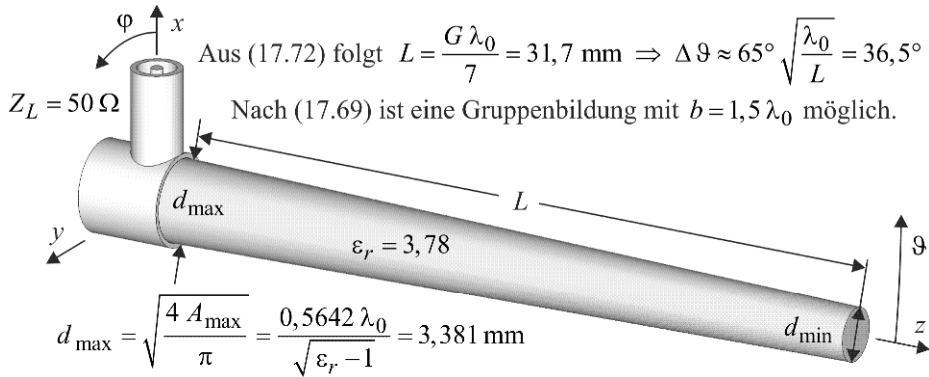


Bild 17.19 Konischer Stielstrahler mit koaxialer Speisung (semi-rigid cable). Der Rundhohlleiter umschließt den Stielstrahler und sollte zur breitbandigen Anpassung möglichst kurz sein.

• Lösung:

Wir starten nach (17.71) mit $d_{\max} = 3,381 \text{ mm}$. Ein Standard-Rundhohlleiter (C 580) hat nach Tabelle 6.8 den Innendurchmesser $3,581 \text{ mm}$, so dass wir $d_{\max}$ auf diesen Wert nachjustieren, woraus $d_{\min}$ nach (17.71) zu $d_{\max} \sqrt{0,4} = 2,265 \text{ mm}$ folgt. Numerische Simulationen mit einem 3D-Gitterverfahren [CST] zeigt Bild 17.20. Position und Länge des koaxialen Einkoppelstiftes konnten so optimiert werden, dass im Frequenzbereich von 26 bis 32 GHz der **Reflexionsfaktor** kleiner als -20 dB bleibt. Die **relative Bandbreite** $B_r = (32 - 26)/29 = 21\%$ ist kleiner als bei einer vergleichbaren Helixantenne ($\approx 50\%$). Die **Nebenkeulen** liegen in der E-Ebene typisch um 2 bis 3 dB höher als in der H-Ebene. An der Entwurfsfrequenz (30 GHz) werden die Zielforderungen (17.72) gut erfüllt.

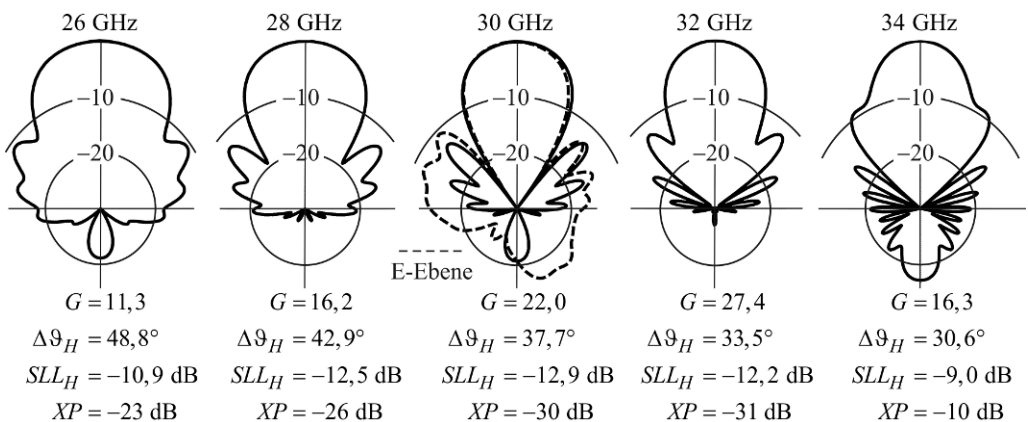


Bild 17.20 Kopolare Richtdiagramme in der H-Ebene ($\varphi = 90^\circ$) des konischen Stielstrahlers aus Bild 17.19 mit 30 dB Dynamikbereich. Bei $f = 30 \text{ GHz}$ ist das kopolare Diagramm in der E-Ebene ($\varphi = 0^\circ$) gestrichelt ergänzt – mit $\Delta \vartheta_E = 35,9^\circ$ gilt dort $G \Delta \vartheta_E \Delta \vartheta_H \approx 29800$. Bei 34 GHz zerfällt das kopolare Diagramm, d.h. der Gewinn bricht ein und das Kreuzpolarisationsmaß XP steigt. □

17.5 Übungen

17.5.1 Die Richtcharakteristik einer Wendelantenne mit N Windungen hat in axialer Betriebsart ihr Hauptmaximum bei $\vartheta = 0$ und lautet angenähert:

$$C(\vartheta) = \frac{1}{A} \left| \frac{\sin(N u/2)}{N \sin(u/2)} \cos \vartheta \right| \quad \text{mit} \quad u(\vartheta) = -2\pi \left[\frac{g}{\lambda_0} (1 - \cos \vartheta) + \frac{1}{2N} \right] < 0.$$

Bestimmen Sie den Normierungsfaktor A und leiten Sie folgende Faustformel für die **Nullwertbreite** einer Wendelantenne in axialer Betriebsart her:

$$\Delta \vartheta_0 = 2 \arccos \left(1 - \frac{\lambda_0}{2 N g} \right) \approx \frac{115^\circ}{\sqrt{N g / \lambda_0}}.$$

Wie groß ist $\Delta \vartheta_0$ bei $N = 10$ und $g/\lambda_0 = 0,29$ (Daten aus Bild 17.17)?

17.5.2 Eine planare Antenne aus einem kreisförmigen Einzelpatch mit Radius a über einem Substrat der Höhe h mit relativer Permittivität ε_r werde mit der E_{11} -Grundwelle in Halbwellenresonanz $2a_{\text{eff}} = \lambda_{\text{eff}}/2$ angeregt. Den Bereich unter dem Patch betrachten wir als offenen kreiszylindrischen Resonator, für den wir im Cavity-Modell eine magnetische zylindrische Außenwand annehmen dürfen. Die Streufelder am Rand des kreisförmigen Patches führen zu einem vergrößerten effektiven Patchradius $a \rightarrow a_{\text{eff}}$, woraus auch die Resonanzfrequenz f_0 der Antenne folgt [Der79, Garg01]:

$$a_{\text{eff}} = a \sqrt{1 + \frac{2h}{\pi a \varepsilon_r} \left(1,7726 + \ln \frac{\pi a}{2h} \right)} \quad \text{mit} \quad f_0 = \frac{c_0 j'_{11}}{2\pi a_{\text{eff}} \sqrt{\varepsilon_r}} = \alpha \frac{c_0}{2\pi a}.$$

Mit den Abkürzungen (siehe auch [Ver02])

$$\gamma = \frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{a}{a_{\text{eff}}} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{2\gamma}{\pi} j'_{11} = \frac{1,84118}{\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{a}{a_{\text{eff}}} \quad \text{mit} \quad 0 < \alpha < j'_{11}$$

findet man in [Mah03] eine exakte Darstellung der Direktivität einer Kreispatchantenne, für die wir eine zur numerischen Auswertung günstigere Darstellung angeben:

$$D = \frac{\alpha^3}{\alpha J_0(2\alpha) + (\alpha^2 - 1) \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(2\alpha)}$$

$$\text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(2\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^{2\alpha} J_0(x) dx.$$

Für $\alpha = 1$ gilt $D = [J_0(2)]^{-1} = 4,46646$ und es folgt $10 \lg D = 6,5 \text{ dBi}$.

Gegen welchen Grenzwert strebt D , falls $\alpha \rightarrow 0$ gilt? Die Besselreihe konvergiert sehr schnell. Welches D erhalten Sie für $\alpha = 1,2$ bei Summation bis einschließlich $n = 2$?

Lösungen:

17.5.1 $A = \frac{1}{N \sin(\pi/(2N))}$ und $\Delta \vartheta_0 = 68^\circ$

17.5.2 $D \approx 3 + 6\alpha^2/5 \rightarrow 3$ und $D_2(\alpha = 1,2) = 5,29724$ mit $D_\infty(\alpha = 1,2) = 5,29292$

Anhang A Mathematische Formeln

A.1 Konstanten

$$\begin{array}{lll} \pi = 3,1415\,92653\,58979 & \gamma = 1,7810\,72417\,99020 & j'_{11} = 1,8411\,83781\,34066 \\ e = 2,7182\,81828\,45905 & C = \ln \gamma = 0,5772\,15664\,90153 & j_{01} = 2,4048\,25557\,69577 \end{array}$$

A.2 Trigonometrische Beziehungen

$$\begin{array}{ll} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 & 2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \\ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y & 2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y & 2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \\ \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x & \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \\ \sin(2x) = 2 \sin x \cos x & \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \\ \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} & e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x \\ a \sin(x + \alpha) + b \sin(x + \beta) = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(\beta - \alpha)} \sin \left(x + \arctan \frac{a \sin \alpha + b \sin \beta}{a \cos \alpha + b \cos \beta} \right) \end{array}$$

A.3 Reihenentwicklungen für kleine Argumente $|x| \ll 1$

$$\begin{array}{ll} (1+x)^p \approx 1 + px + p(p-1) \frac{x^2}{2}, \quad |px| \ll 1 & J_m(x) \approx \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2} \right)^m \left(1 - \frac{x^2}{4(m+1)} \right) \\ \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} & N_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma x}{2} \\ \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} & N_m(x) \approx -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x} \right)^m \\ e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} & \text{Si}(x) \approx x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} \\ \arcsin x \approx x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} & \text{Ci}(x) \approx \ln(\gamma x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{96} - \frac{x^6}{4320} \\ \arccos(1-x) \approx \sqrt{2x} \left(1 + \frac{x}{12} + \frac{3x^2}{160} \right) & \text{S}(x) \approx \frac{\pi}{6} x^3 - \frac{\pi^3}{336} x^7 \\ J_0(x) \approx 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} & \text{C}(x) \approx x - \frac{\pi^2}{40} x^5 \end{array}$$

A.4 Asymptotische Darstellungen für große Argumente $x \gg 1, m$

$$J_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Si}(x) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

$$\text{Ci}(x) \approx \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} - 2 \frac{\sin x}{x^3}$$

$$S(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi x} \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$$

$$C(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$$

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi/x} x^x \exp\left(-x + \frac{1 - 1/(30x^2)}{12x}\right) \approx \sqrt{2\pi/x} x^x e^{-x} \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} - \dots\right)$$

A.5 Beziehungen zwischen Besselfunktionen

$$J_m(-x) = (-1)^m J_m(x)$$

$$J'_m(x) = -\frac{m}{x} J_m(x) + J_{m-1}(x)$$

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

$$= \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x)$$

$$J_{m+1}(x) + J_{m-1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x)$$

$$= \frac{1}{2} (J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x))$$

A.6 Nützliche Integrale

$$\int_0^\pi \sin^n \vartheta d\vartheta = \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \quad (\text{für } n > -1)$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{(1-\beta \cos \vartheta)^5} = 2 \frac{1+\beta^2}{(1-\beta^2)^4}$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{(1-\beta \cos \vartheta)^5} = \frac{2\beta}{3} \frac{5+\beta^2}{(1-\beta^2)^4}$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{(1-\beta \cos \vartheta)^5} = \frac{2}{3} \frac{1+5\beta^2}{(1-\beta^2)^4}$$

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x)$$

$$\int x^3 J_0(x) dx = x^3 J'_2(x)$$

$$\int x^5 J_0(x) dx = x^3 (8-x^2) J_3(x)$$

$$\int x^7 J_0(x) dx = x^5 \left[(12-x^2) J'_4(x) - 2x J_4(x) \right]$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{J_1^2(\alpha \sin \vartheta)}{\sin \vartheta} d\vartheta = \frac{1}{2} - \frac{J_1(2\alpha)}{2\alpha}$$

$$\int x J_m^2(\alpha x) dx = \frac{x^2}{2} \left[J_m'^2(\alpha x) + \left(1 - \frac{m^2}{(\alpha x)^2}\right) J_m^2(\alpha x) \right]$$

$$(\beta^2 - \alpha^2) \int x J_m(\alpha x) J_m(\beta x) dx = x \left[\alpha J_m(\beta x) J'_m(\alpha x) - \beta J_m(\alpha x) J'_m(\beta x) \right] \quad (\text{für } \alpha \neq \beta)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m\varphi + x \cos \varphi)} d\varphi = 2\pi j^m J_m(x)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\pm j\varphi} e^{jm(\varphi - x \sin \varphi)} d\varphi = 2\pi J_{m\pm 1}(mx)$$

A.7 Lommelsche Funktionen mit einem Index und zwei Argumenten

Reihendarstellung:

$$U_n(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{w}{z}\right)^{n+2m} J_{n+2m}(z) \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Rekursionsformeln:

$$U_n(w, z) + U_{n+2}(w, z) = \left(\frac{w}{z}\right)^n J_n(z)$$

$$U_n(w, z) - U_{n+4}(w, z) = \left(\frac{w}{z}\right)^n J_n(z) - \left(\frac{w}{z}\right)^{n+2} J_{n+2}(z)$$

Integraldarstellung:

$$U_n(w, z) + j U_{n+1}(w, z) = \frac{w^n}{z^{n-1}} \int_{u=0}^1 u^n J_{n-1}(zu) e^{j w (1-u^2)/2} du$$

Nützliche Integrale:

$$\underline{M}_{mn} = \int_{u=0}^1 u^m J_n(zu) e^{j w (1-u^2)/2} du \quad \text{mit } m = 1, 3, 5 \text{ und } n = 0, 2$$

Spezialfälle:

$$U_n(0, z) = 0$$

$$U_0(w, 0) = \cos(w/2)$$

$$U_1(w, 0) = \sin(w/2)$$

$$U_2(w, 0) = 1 - \cos(w/2)$$

$$U_0(z, z) = \frac{J_0(z) + \cos z}{2}$$

$$U_1(z, z) = \frac{\sin z}{2}$$

$$U_2(z, z) = \frac{J_0(z) - \cos z}{2}$$

$$\underline{M}_{10} = \frac{U_1(w, z) + j U_2(w, z)}{w}$$

$$\underline{M}_{30} = \frac{2 J_2(z)}{z^2} + \left(2j - \frac{z^2}{w}\right) \frac{U_3(w, z) + j U_4(w, z)}{w^2}$$

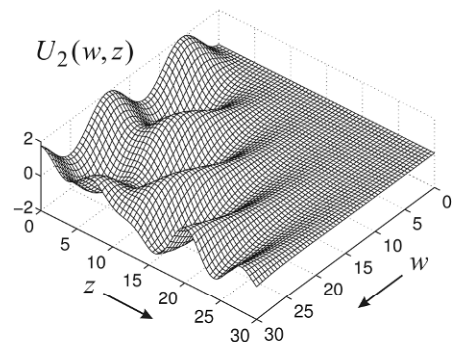
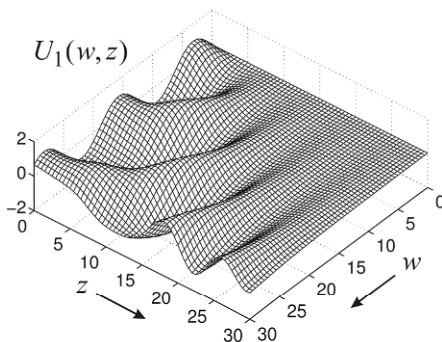
$$\underline{M}_{50} = \frac{8 J_3(z)}{z^3} + \frac{j J_4(z)}{w} - j \left[\left(4j - \frac{z^2}{w}\right)^2 + 8 \right] \frac{U_4(w, z) + j U_5(w, z)}{w^3}$$

$$\underline{M}_{12} = \frac{2}{z^2} \left[e^{j w/2} - J_0(z) - \left(2j + \frac{z^2}{w}\right) \frac{U_1(w, z) + j U_2(w, z)}{2} \right]$$

$$\underline{M}_{32} = z^2 \frac{U_3(w, z) + j U_4(w, z)}{w^3}$$

$$\underline{M}_{52} = -\frac{j J_4(z)}{w} - j z^2 \left(6j - \frac{z^2}{w}\right) \frac{U_4(w, z) + j U_5(w, z)}{w^4}$$

Darstellung der Lommelschen Funktionen $U_1(w, z)$ und $U_2(w, z)$ im Bereich $0 \leq w, z \leq 30$



A.8 Krummlinige orthogonale Koordinatensysteme (x_1, x_2, x_3)

Ortsvektor: $\mathbf{r} = x(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_x + y(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_y + z(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_z$

Vektorfeld: $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$

Metrikoeffizienten: $h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2}$ mit $i = 1, 2, 3$

Einheitsvektoren: $\mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = \frac{1}{h_i} \left(\frac{\partial x}{\partial x_i} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial x_i} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial x_i} \mathbf{e}_z \right)$

Wegelement: $ds = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i h_i dx_i$

Volumenelement: $dV = h_1 h_2 h_3 dx_1 dx_2 dx_3$

Gradient: $\text{grad } \Phi = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{e}_i}{h_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$

Divergenz: $\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} A_i \right)$

Rotation¹: $\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i h_i \left[\frac{\partial (h_k A_k)}{\partial x_j} - \frac{\partial (h_j A_j)}{\partial x_k} \right]$

Laplace-Operator¹: $\Delta \Phi = \text{div grad } \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)$

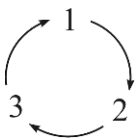
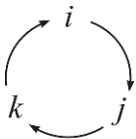


Bild A.1 Zyklische
Vertauschung

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} &= \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A} = \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_j} A_j \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i h_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{h_j^2}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial (h_i A_i)}{\partial x_k} - \frac{\partial (h_k A_k)}{\partial x_i} \right) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i h_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{h_k^2}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial (h_j A_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial (h_i A_i)}{\partial x_j} \right) \right] \end{aligned}$$

¹ Bei der Bildung der Rotationen stellt i, j und k eine zyklische Vertauschung (Bild A.1) der Indizes 1, 2 und 3 dar, d. h. es gilt: $ijk = 123, 231, 312$.

Die Herleitung obiger Formeln findet man z. B. in [Str07, Mo61b, Pie77, Tai97, Ril02].

Anhang B Elektrotechnische Formeln

B.1 Abkürzungen

Lichtgeschwindigkeit	$c = 1/\sqrt{\mu \varepsilon}$
Kreisfrequenz	$\omega = 2\pi/T$
Wellenzahl	$k = \omega/c$
Ausbreitungskonstante	$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$
Phasengeschwindigkeit	$v_p = \omega/\beta = \lambda f$
Gruppengeschwindigkeit	$v_g = d\omega/d\beta$
Feldwellenwiderstand	$Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$
Feldwellenimpedanz	$\underline{Z} = \sqrt{\mu/(\varepsilon - j\kappa/\omega)}$
dielektr. Verlustfaktor	$\tan \delta_\varepsilon = \kappa/(\omega \varepsilon)$
metall. Eindringtiefe	$\delta = 1/\sqrt{\pi f \mu \kappa}$

B.2 Grundgleichungen

Maxwellsche Gln.	$\text{rot } \underline{\mathbf{H}} = \partial \underline{\mathbf{D}}/\partial t + \underline{\mathbf{J}}$
	$\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -\partial \underline{\mathbf{B}}/\partial t$
	$\text{div } \underline{\mathbf{D}} = \rho$
	$\text{div } \underline{\mathbf{B}} = 0$
Materialgln.	$\underline{\mathbf{D}} = \varepsilon \underline{\mathbf{E}}$
	$\underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{B}}/\mu$
Ohmsches Gesetz	$\underline{\mathbf{J}}_L = \kappa \underline{\mathbf{E}}$
Kontinuitätsgl.	$\partial \rho/\partial t + \text{div } \underline{\mathbf{J}} = 0$
Wellengleichung	$\nabla^2 \underline{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0$
Helmholtz-Gl.	$\nabla^2 \underline{\mathbf{E}} + k^2 \underline{\mathbf{E}} = 0$

B.3 Vektorpotenziale

$$\text{magn. } \underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \iiint_{V'} \underline{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

$$\text{elektr. } \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = \iiint_{V'} \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{r}') \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'$$

$$\underline{\mathbf{H}} = \text{rot } \underline{\mathbf{A}} + \frac{1}{j\omega\mu} (\text{grad div } \underline{\mathbf{F}} + k^2 \underline{\mathbf{F}})$$

$$\underline{\mathbf{E}} = -\text{rot } \underline{\mathbf{F}} + \frac{1}{j\omega\varepsilon} (\text{grad div } \underline{\mathbf{A}} + k^2 \underline{\mathbf{A}})$$

B.4 Feldgrößen

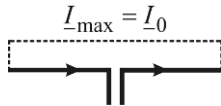
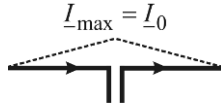
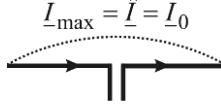
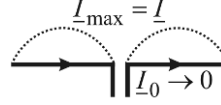
Lorentzkraft	$\underline{\mathbf{F}} = q(\underline{\mathbf{E}} + \mathbf{v} \times \underline{\mathbf{B}})$
Energiedichte	$w = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{D}} + \underline{\mathbf{H}} \cdot \underline{\mathbf{B}})$
Poyntingvektor	$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}$
Impulsdichte	$\underline{\mathbf{p}}_V = \underline{\mathbf{D}} \times \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{S}}/c^2$
Strahlungsdruck	$p_s = -\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{S}}/c$
Wirkleistung	$P = \text{Re} \iint_A \frac{\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*}{2} \cdot d\mathbf{A}$

B.5 Verschiedenes

bewegte Masse	$m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$
relativist. Energie	$E = mc^2$
relativist. Impuls	$\underline{\mathbf{p}} = m \mathbf{v}$
Photonenenergie	$E_p = hf$
Photonenimpuls	$p_p = h/\lambda$

Anhang C Formeln zum Antennendesign

C.1 Schlanke Dipolantennen im Freiraum mit Mittelpunktsspeisung

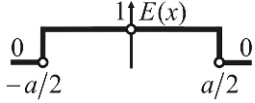
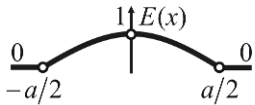
Tabelle C.1		Stromverteilung $I(z)$ mit	Richt- faktor	3 dB- Breite	Strahlungs- widerstand	Eingangs- widerstand
$P_S = R_S \left \underline{I}_{\max} \right ^2 / 2$		$= R_E \left \underline{I}_0 \right ^2 / 2$	D	$\Delta \vartheta$	R_S / Ω	R_E / Ω
Hertzscher Dipol $l \ll \lambda_0 / 4$		1,50	90,0°	$789 \frac{l^2}{\lambda_0^2}$	$789 \frac{l^2}{\lambda_0^2}$	
kurzer Dipol $l \ll \lambda_0 / 4$		1,50	90,0°	$197 \frac{l^2}{\lambda_0^2}$	$197 \frac{l^2}{\lambda_0^2}$	
Halbwellendipol $l = \lambda_0 / 2$		1,64	78,1°	73,1	73,1	
Ganzwellendipol $l = \lambda_0$		2,41	47,8°	199	$\rightarrow \infty$	

C.2 Gruppencharakteristik linearer Antennengruppen

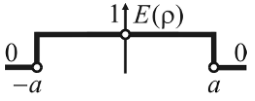
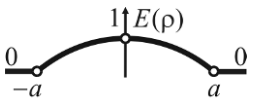
Antennenzeile aus N im gegenseitigen Abstand a äquidistant angeordneten baugleichen Einzelelementen mit uniformer Amplitudenbelegung und linearem Phasengang δ

Tabelle C.2	Phase δ	Richt- faktor D	Halbwertsbreite $\Delta\varphi$	Nullwertsbreite $\Delta\varphi_0$
Querstrahler $a \leq \lambda_0(1-1/(2N))$	0	$2 \frac{N a}{\lambda_0}$	$2 \arcsin\left(\frac{\lambda_0}{N a} \frac{1,392}{\pi}\right)$	$2 \arcsin\left(\frac{\lambda_0}{N a}\right)$
Längsstrahler $a \leq 0,5\lambda_0(1-1/(2N))$	$k_0 a$	$4 \frac{N a}{\lambda_0}$	$2 \arccos\left(1 - \frac{\lambda_0}{N a} \frac{1,392}{\pi}\right)$	$2 \arccos\left(1 - \frac{\lambda_0}{N a}\right)$
Hansen-Woodyard-Längsstrahler $a = 0,25\lambda_0(1-1/N)$	$k_0 a + \frac{\pi}{N}$	$7,3 \frac{N a}{\lambda_0}$	$2 \arccos\left(1 - \frac{\lambda_0}{N a} 0,1398\right)$	$2 \arccos\left(1 - \frac{\lambda_0}{2 N a}\right)$

C.3 Strahlung einer linearen Belegung bzw. einer Rechteckapertur

Tabelle C.3 Phase uniform, $a \gg \lambda_0$	Amplitudenbelegung $E(x)$ mit $ x \leq a/2$	Halbwerts- breite $\Delta \vartheta$	Nullwerts- breite $\Delta \vartheta_0$	Niveau der 1. Nebenkeule <i>SLL</i>
uniforme Belegung		$\frac{50,8^\circ}{a/\lambda_0}$	$\frac{114,6^\circ}{a/\lambda_0}$	-13,3 dB
Kosinus-Belegung $E(x) = \cos(\pi x/a)$		$\frac{68,1^\circ}{a/\lambda_0}$	$\frac{171,9^\circ}{a/\lambda_0}$	-23,1 dB

C.4 Strahlung einer Kreisapertur vom Durchmesser $D = 2a$

Tabelle C.4 Phase uniform, $D \gg \lambda_0$	Amplitudenbelegung $E(\rho)$ mit $\rho \leq a$	Halbwerts- breite $\Delta \vartheta$	Nullwerts- breite $\Delta \vartheta_0$	Niveau der 1. Nebenkeule <i>SLL</i>
uniforme Belegung		$\frac{59,0^\circ}{D/\lambda_0}$	$\frac{139,8^\circ}{D/\lambda_0}$	-17,6 dB
E-Ebene der H_{11}-Welle	$\rho E_\rho(\rho) = J_1(j'_{11} \rho/a)$			
H-Ebene der H_{11}-Welle	$E_\varphi(\rho) = J_1'(j'_{11} \rho/a)$	$\frac{74,3^\circ}{D/\lambda_0}$	$\frac{194,5^\circ}{D/\lambda_0}$	-26,1 dB
quadratische Belegung $E(\rho) = 1 - \rho^2/a^2$		$\frac{72,7^\circ}{D/\lambda_0}$	$\frac{187,3^\circ}{D/\lambda_0}$	-24,6 dB

C.5 Ausbreitungskonstanten von Hohlleiterwellen

H_{10} -Welle im **Rechteckhohlleiter** mit Wandstromverlusten ($\kappa < \infty$) aus [Col91]:

$$\underline{k}_z = \beta - j\alpha = \sqrt{k^2 - k_c^2 + (1-j)\frac{\delta}{a}\left(2k_c^2 + \frac{a}{b}k^2\right)} \quad \text{mit } k_c = \pi/a.$$

H_{11} -Welle im **Rundhohlleiter** mit Wandstromverlusten ($\kappa < \infty$) aus [Scha56]:

$$\underline{k}_z = \beta - j\alpha = \sqrt{k^2 - k_c^2 + (1-j)\frac{\delta}{a}\left(k_c^2 + \frac{k^2}{(j'_{11})^2 - 1}\right)} \quad \text{mit } k_c = j'_{11}/a \approx 1,841/a.$$

Beide Formeln gelten im Frequenzbereich $0 < \omega < \infty$, solange nur $\delta = \sqrt{2/(\omega\mu_0\kappa)} \ll a$ bleibt.

C.6 Hornstrahler mit Maximalgewinn bei fester Baulänge

Tabelle C.5 ($a, b, A, B, D \gg \lambda_0$)		Gangunterschied δ am Hornrand	Halbwerts- breite Θ_H	Halbwerts- breite Θ_E	Flächenwirkungsgrad q
E-Sektorhorn		$0,2624 \lambda_0$	$68,1^\circ \lambda_0 / a$	$54,3^\circ \lambda_0 / B$	0,6339
H-Sektorhorn		$0,3965 \lambda_0$	$79,4^\circ \lambda_0 / A$	$50,8^\circ \lambda_0 / b$	0,6260
Kegelhorn		$0,3908 \lambda_0$	$76,1^\circ \lambda_0 / D$	$64,9^\circ \lambda_0 / D$	0,5176
Kreisrillenhorn		$0,4884 \lambda_0$	$84,6^\circ \lambda_0 / D$	$84,6^\circ \lambda_0 / D$	0,4217

C.7 Beam efficiency und pattern factor elektrisch großer Antennen

Tabelle C.6 ($a, b, A, B, D, N a, N g \gg \lambda_0$)		$G \Theta_H^\circ \Theta_E^\circ$	$\frac{\varepsilon_M}{k_p}$	Winkel ϑ_0 für Ω_M in (7.33)		beam efficiency $\varepsilon_M = \Omega_M / \Omega$	pattern factor k_p
ebene Kreisaperturen	uniform belegt	34200	0,65	$1,22 \lambda_0 / D$		0,84	1,29
	H₁₁-Belegung	36200	0,69	$1,46 \lambda_0 / D$		0,91	1,32
	Rillenhohlleiter	39100	0,74	$1,76 \lambda_0 / D$		0,99	1,34
ebene Recht- eckaperturen	uniform belegt	32400	0,62	für $a = b$	$1,00 \lambda_0 / a$	0,82	1,32
	H₁₀-Belegung	35200	0,67		$1,25 \lambda_0 / a$	0,90	1,34
	Rillenhohlleiter	38300	0,73		$1,50 \lambda_0 / a$	0,99	1,36
Hornstrahler mit Maximalgewinn	H-Sektorhorn	31700	0,60	$1,50 \lambda_0 / A$		0,94	1,56
	E-Sektorhorn	29500	0,56	$1,00 \lambda_0 / B$		0,83	1,47
	Pyramidenhorn	26500	0,50	$1,50 \lambda_0 / A$		0,82	1,63
	Kegelhorn	27600	0,53	$1,54 \lambda_0 / D$		0,84	1,60
	Kreisrillenhorn	29700	0,57	$1,85 \lambda_0 / D$		0,90	1,59
lineare Antennengruppen	Querstrahler	37400	0,71	$\lambda_0 / (N a)$		0,92	1,29
	Längsstrahler	48400	0,92	$\sqrt{2 \lambda_0 / (N a)}$		0,91	0,99
	Hansen-Woodyard- Längsstrahler	27200	0,52	$\sqrt{\lambda_0 / (N a)}$		0,58	1,12
andere	Parabolantenne mit 12 dB Randabfall	38900	0,74	$1,46 \lambda_0 / D$		0,96	1,30
	Helixantenne (peak gain, $N=10, \alpha=14^\circ$)	27000	0,55	$\sqrt{\lambda_0 / (N g)}$		0,67	1,22

Anhang D Eigenschaften ausgewählter Materialien

Tabelle D.1 Relative Permittivität und Verlustfaktor (300 K, 3 GHz)

Material [Hip95]	ϵ_r	$\tan \delta_\epsilon$
Aluminiumoxid (Al ₂ O ₃)	9,80	0,0002
Bakelit	3,70	0,0438
Berylliumoxid (BeO)	4,20	0,0005
Beton (trocken)	4,50	0,0111
Blut	58,00	0,2700
Eiweiß	35,00	0,5000
Epoxidharz	3,60	0,0400
Erdboden (trocken)	2,50	0,0040
Erdboden (feucht)	20,00	0,1250
Fettgewebe	5,50	0,2100
Galliumarsenid	12,90	0,0004
Glaskeramik	6,00	0,0050
Hartpapier (Pertinax)	5,00	0,0500
Holz (Balsaholz)	1,22	0,1000
Holz (Mahagoni)	1,88	0,0250
Kevlar	4,10	0,0200
Muskelgewebe	49,00	0,3300
Neopren	4,00	0,0339

$\kappa = \omega \epsilon_0 \epsilon_r \tan \delta_\epsilon$

Material [Hip95]	ϵ_r	$\tan \delta_\epsilon$
Papier	2,70	0,0560
Paraffin	2,25	0,0002
Plexiglas	2,60	0,0057
Polyester	2,95	0,0070
Polyethylen	2,26	0,0006
Polystyrol	2,55	0,0003
Quarzglas	3,78	0,0001
Rohacell	1,07	0,0008
RT/duroid 5870	für 10 GHz	2,33
RT/duroid 5880		2,20
RT/duroid 6002		2,94
RT/duroid 6006		6,15
RT/duroid 6010		10,20
Silikon	3,80	0,0050
Styrodur, Styropor	1,03	0,0001
Teflon	2,10	0,0002
Wasser (destilliert)	77,00	0,1430
Wasser (Meerwasser)	69,00	0,4930

Tabelle D.2 Elektrische Leitfähigkeit von Metallen (bei 300 K)

Material	$\kappa / (10^6 \text{ S/m})$
Aluminium (Al)	36
Blei (Pb)	5
Calcium (Ca)	26
Chrom (Cr)	8
Cobalt (Co)	17
Eisen (Fe)	10
Gold (Au)	44
Iridium (Ir)	19
Kalium (K)	14
Kupfer (Cu)	58
Lötzinn (Sn/Pb)	7
Magnesium (Mg)	22

Material	$\kappa / (10^6 \text{ S/m})$
Messing (Cu/Zn)	15
Molybdän (Mo)	19
Natrium (Na)	22
Nickel (Ni)	15
Palladium (Pd)	9
Platin (Pt)	10
Quecksilber (Hg)	1
Silber (Ag)	63
Titan (Ti)	2
Vanadium (V)	4
Zink (Zn)	17
Zinn (Sn)	10

Englische Übersetzungen wichtiger Fachbegriffe

A chsenverhältnis.....	axial ratio
Antenne.....	antenna, aerial
Antennenrauschtemperatur.....	antenna noise temperature
Antennentechnik.....	antenna engineering
Antennenwirkungsgrad.....	radiation efficiency
Äquivalente isotrope Strahlungsleistung.....	equivalent isotropically radiated power
Äquivalenter Raumwinkel.....	total beam area
Ausbreitungskonstante.....	propagation constant
B andbreite.....	bandwidth
Beugung.....	diffraction
Blindleistung.....	reactive power
Brechung.....	refraction
D ämpfungskonstante.....	attenuation constant
Direktor.....	director element
Doppelkonusantenne.....	biconical antenna
E infügungsdämpfung.....	insertion loss
Eingangsimpedanz.....	input impedance
Eingangsleistung.....	input power
Empfangsleistung.....	received power
Energieerhaltung.....	conservation of energy
Energiestromdichte.....	energy flux density
F ernfeld.....	far field
Fernfeldabstand.....	far-field distance
Flächenwirkungsgrad.....	aperture efficiency
G ewinn.....	gain
Grenzfrequenz.....	cutoff frequency
Gruppenantenne.....	array antenna
Gruppencharakteristik.....	array factor
H albwertsbreite.....	half-power beamwidth
Hauptkeule.....	main lobe
Höhenlinie.....	contour line
Hohlraumresonator.....	cavity resonator
Horizontaldiagramm.....	horizontal pattern
K egelhorn.....	conical horn
Kopolarisation.....	co-polarization
Koppelimpedanz.....	mutual impedance
Kreuzdipol.....	turnstile antenna
Kreuzpolarisation.....	cross-polarization
Kugelstrahler.....	isotropic radiator
L ängsstrahlende Gruppe.....	end-fire array
Laufzeit.....	transit time, delay time
Leckwellenantenne.....	leaky-wave antenna
Lichtwellenleiter.....	optical waveguide
M ikrowellentechnik.....	microwave engineering
Materialgleichung.....	constitutive equation
Multiplikatives Gesetz.....	principle of pattern multiplication
N ahfeld.....	near field
Nebenkeule.....	side lobe, minor lobe
Nebenkeulendämpfung.....	side lobe suppression
Nullwertbreite.....	beamwidth between first nulls

O berflächenwellenantenne	surface wave antenna
Orthogonalentwicklung	mode matching
P arasitäre Hauptkeule	grating lobe
Peilantenne	direction finder antenna
Phasenfehler	phase error
Phasengesteuerte Gruppenantenne	phased array antenna
Phasenkonstante	phase constant
Pyramidenhorn	pyramidal horn
Q uerstrahlende Gruppe	broadside array
R ahmenantenne	loop antenna
Randabfall	edge taper
Randbedingung	boundary condition
Randwertproblem	boundary-value problem
Raumladungsdichte	space charge density
Raumwinkel der Hauptkeule	main beam area
Rechteckhohlleiter	rectangular waveguide
Reflexionsfaktor	reflection coefficient
Richtantenne	directional antenna
Richtcharakteristik	radiation pattern
Richtfaktor	directivity
Richtfunkstrecke	radio link
Richtfunktechnik	directional radio engineering
Rillenhorn	corrugated horn
Rückflussdämpfung	return loss
Rundfunk	broadcast, radio, wireless
Rundhohlleiter	circular waveguide
S chlitzantenne	slot antenna
Sektorhorn	sectoral horn
Spannungsbauch	voltage loop
Spannungsknoten	voltage node
Speisekabel	feeder, supply line
Speisenetzwerk	beam-forming feed network
Spiralantenne	spiral antenna
Sprungtemperatur	transition temperature
Stetigkeitsbedingung	continuity condition
Stichleitung	stub
Stielstrahler	dielectric rod antenna
Strahlungsdruck	radiation pressure
Strahlungskeule	radiation lobe
Strahlungsleistung	radiated power
Strahlungswiderstand	radiation resistance
Supraleitung	superconductivity
Ü berstrahlung	spillover
V erkürzungsfaktor	length reduction factor
Verlustleistung	dissipated power
Verlustwiderstand	loss resistance
Verschiebungsstrom	displacement current
Vertikaldiagramm	elevation pattern
Vor-Rück-Verhältnis	front-to-back ratio
W anderwellenantenne	beverage antenna
Wellenausbreitung	wave propagation
Wellenwiderstand	characteristic impedance
Wellenzahl	wave number
Welligkeit	voltage standing wave ratio
Wendelantenne	helical antenna
Wirkfläche	effective aperture, effective area
Wirkleistung	effective power
Wirksame Antennenlänge	effective antenna length

Literaturverzeichnis

- [Abr72] Abramowitz, M.; Stegun, I.A.: *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York 1972.
- [And05] Ando, T.; Ohba, I.; Numata, S.; Yamauchi, J.; Nakano, H.: *Linearly and Curvilinearly Tapered Cylindrical-Dielectric-Rod Antennas*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-53 (2005), 2827-2833.
- [Arf85] Arfken, G.: *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, San Diego 1985.
- [Bäc99] Bächtold, W.: *Mikrowellentechnik*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1999.
- [Bahl80] Bahl, I.; Bhartia, P.: *Microstrip Antennas*, Artech House, Norwood 1980.
- [Bal89] Balanis, C.A.: *Advanced Engineer. Electromagnetics*, John Wiley, New York 1989.
- [Bal05] Balanis, C.A.: *Antenna Theory – Analysis and Design*, John Wiley, Hoboken 2005.
- [Bal08] Balanis, C.A.: *Modern Antenna Handbook*, John Wiley, Hoboken 2008.
- [Bar39] Barrow, W.L.; Chu, L.J.: *Theory of the Electromagnetic Horn*, Proceedings of the IRE 27 (1939), 5-18.
- [Ber40] Bergmann, L.; Lassen, H.: *Ausstrahlung, Ausbreitung und Aufnahme elektromagnetischer Wellen*, Springer, Berlin 1940.
- [Bha92] Bhattacharyya, A.K.: *Radiation Efficiency and the Gain of a Source Inside a Two-Layered Grounded Dielectric Structure*, Microwave and Optical Technology Letters 5 (1992), 439-441.
- [Bha94] Bhattacharyya, A.K.: *Electromagnetic Fields in Multilayered Structures*, Artech House, Norwood 1994.
- [Blu82] Blume, S.: *Theorie elektromagnetischer Felder*, Hüthig, Heidelberg 1982.
- [Boo46] Booker, H.G.: *Slot Aerials and their Relation to Complementary Wire Aerials*, J. Inst. Electr. Engrs. 93 (1946), Part III a, 620-626.
- [Borg55] Borgnis, F.E.; Papas, C.H.: *Randwertprobleme der Mikrowellenphysik*, Springer, Berlin 1955.
- [Born69] Born, M.: *Die Relativitätstheorie Einsteins*, Springer, Berlin 1969.
- [Born85] Born, M.: *Optik*, Springer, Berlin 1985.
- [Born93] Born, M.; Wolf, E.: *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford 1993.
- [Bra97] Brandt, S.; Dahmen, H.D.: *Elektrodynamik*, 3. Aufl., Springer, Berlin 1997.
- [Buck90] Buckel, W.: *Supraleitung*, VCH-Verlag, Weinheim 1990.
- [But76] Butson, P.C.; Thompson, G.T.: *A Note on the Calculation of the Gain of Log-Periodic Dipole Antennas*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-24 (1976), 105-106.
- [Camp98] Campo, M.A.; del Rey, F.J.; Besada, J.L.; de Haro L.: *SABOR: Description of the Methods applied for a Fast Analysis of Horn and Reflector Antennas*, IEEE Ant. Prop. Mag. 40 (Aug. 1998), 95-108.
- [Car61] Carrel, R.: *The Design of Log-Periodic Dipole Antennas*, IRE International Convention Record, part 1 (1961), 61-75.
- [Carv81] Carver, K.R.; Mink, J.W.: *Microstrip Antenna Technology*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-29 (1981), 2-24.
- [Cha89] Chang, K.: *Handbook of Microwave and Optical Components (Vol. 1)*, John Wiley, New York 1989.
- [Che90] Cheng, D.K.: *Field and Wave Electromagnetics*, Addison-Wesley, Reading 1990.
- [Cla84] Clarricoats, P.J.B.; Olver, A.D.: *Corrugated Horns for Microwave Antennas*, Peter Peregrinus, London 1984.
- [Col69] Collin, R.E.; Zucker, F.J.: *Antenna Theory*, McGraw-Hill, New York 1969.
- [Col85] Collin, R.E.: *Antennas and Radiowave Propagation*, McGraw-Hill, New York 1985.
- [Col91] Collin, R.E.: *Field theory of guided waves*, IEEE Press, New York 1991.

- [Col92] Collin, R.E.: *Foundations for microw. engineering*, McGraw-Hill, New York 1992.
- [CST] CST MICROWAVE STUDIO® – 3D electromagnetic simulation of high frequency components. CST Computer Simulation Technology, Darmstadt.
- [Den07] Denninger, A.: *Analyse von fraktalen Breitbandantennen*, Diplomarbeit am Institut für Nachrichtentechnik, Hochschule Ravensburg-Weingarten 2007.
- [Der79] Derneryd, A.G.: *Analysis of the Microstrip Disk Antenna Element*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-27 (1979), 660-664.
- [Det03] Detlefsen, J.; Siart, U.: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik*, Oldenbourg, München 2003.
- [Dia96] Diaz, L.; Milligan, T.: *Antenna Engineering Using Physical Optics*, Artech House, Boston 1996.
- [Dil87] Dill, R.: *Systematische Untersuchung der Eigenschaften von Kegelstrukturen als Mikrowellenantennen mit Hilfe der Orthogonalentwicklung*, Dissertation D17, TU Darmstadt, Fakultät für Elektrotechnik 1987.
- [Dil90] Dill, R.; Kark, K.W.: *Ein Beitrag zum Abstrahlungsmechanismus von Doppelkonstantennen*, Frequenz 44 (1990), 36-41.
- [Dra98] Drabowitch, S.; Papiernik, A.; Griffiths, H.; Encinas, J.; Smith, B.L.: *Modern Antennas*, Chapman & Hall, London 1998.
- [Dub77] Dubost, G.; Zisler, S.: *Breitband-Antennen*, Oldenbourg, München 1977.
- [Dys59] Dyson, J.D.: *The Equiangular Spiral Antenna*, IRE Trans. Ant. Prop. AP-7 (1959), 181-187.
- [Edm84] Edminister, J.A.: *Schaum-Elektromagnetismus*, McGraw-Hill, Hamburg 1984.
- [Elli81] Elliott, R.S.: *Antenna Theory and Design*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1981.
- [Erb88] Erb, R.: *Systematische Untersuchung mathematischer Modelle zur Berechnung rotationssymmetrischer Rillenhornstrahler*, Dissertation D17, TU Darmstadt, Fakultät für Elektrotechnik 1988.
- [Esh04] Eshrah, I.A.; Yakovlev, A.B.; Kishk, A.A.; Glisson, A.W.; Hanson, G.W.: *The TE_{00} Waveguide Mode – The Complete Story*, IEEE Ant. Prop. Mag. 46 (Okt. 2004), 33-41.
- [Fang10] Fang, D.G.: *Antenna Theory and Microstrip Antennas*, CRC Press, Boca Raton 2010.
- [Fel94] Felsen, L.B.; Marcuvitz, N.: *Radiation and Scattering of Waves*, IEEE Press, New York 1994.
- [Fey91] Feynman, R.P.; Leighton, R.B.; Sands, M.: *Vorlesungen über Physik (Band II: Elektromagnetismus)*, Oldenbourg, München 1991.
- [Fli94] Fliessbach, T.: *Elektrodynamik*, B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1994.
- [Fra48] Franz, W.: *Zur Formulierung des Huygensschen Prinzips*, Z. Naturforschg. 3a (1948), 500-506.
- [Frü75] Früchting, H.; Brinkmann, K.-D.: *Nahfelduntersuchungen an einer phasengesteuerten Antenne aus mehreren Bandleitungen mit angesetztem ebenen Schirm*, NTZ 28 (1975), 122-127.
- [Garg01] Garg, R.; Bhartia, P.; Bahl, I.; Ittipiboon, A.: *Microstrip Antenna Design Handbook*, Artech House, Boston 2001.
- [Gei92] Geisel, J.; Muth, K.-H.; Heinrich, W.: *The Behavior of the Electromagnetic Field at Edges of Media with Finite Conductivity*, IEEE Trans. Microwave Theory Techn. MTT-40 (1992), 158-161.
- [Gei94] Geißler, R.; Kammerloher, W.; Schneider, H.W.: *Berechnungs- und Entwurfsverfahren der Hochfrequenztechnik 2*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1994.
- [Get73] Getsinger, W.J.: *Microstrip Dispersion Model*, IEEE Trans. Microwave Theory Techn. MTT-21 (1973), 34-39.
- [Gill65] Gill, T.P.: *The Doppler Effect*, Logos Press and Academic Press, London 1965.

- [Gra81] Gradstein, I.S.; Ryzhik, I.M.: *Summen-, Produkt- und Integraltafeln*, Harri Deutsch, Thun 1981.
- [Gran05] Granet, C.; James, G.L.: *Design of Corrugated Horns: A Primer*, IEEE Ant. Prop. Mag. 47 (Jul. 2005), 76-84.
- [Grei91] Greiner, W.: *Klassische Elektrodynamik*, Harri Deutsch, Frankfurt am Main 1991.
- [Grei92] Greiner, W.: *Spezielle Relativitätstheorie*, Harri Deutsch, Frankfurt am Main 1992.
- [Ham80] Hammerstad, E.; Jensen, O.: *Accurate Models for Microstrip Computer-Aided Design*, IEEE MTT-S Internat. Microwave Symp. Digest (1980), 407-409.
- [Han38] Hansen, W.W.; Woodyard, J.R.: *A New Principle in Directional Antenna Design*, Proceedings of the IRE 26 (1938), 333-345.
- [Han90] Hansen, R.C.: *Moment Methods in Antennas and Scattering*, Artech House, Boston, 1990.
- [Har61] Harrington, R.F.: *Time-Harmonic Electrom. Fields*, McGraw-Hill, New York 1961.
- [Hea95] Heald, M.A.; Marion, J.B.: *Classical Electromagnetic Radiation*, Saunders College Publishing, Fort Worth 1995.
- [Hec89] Hecht, E.: *Optik*, Addison-Wesley, Bonn 1989.
- [Hei70] Heilmann, A.: *Antennen*, Bibliographisches Institut, Mannheim 1970.
- [Hen07] Henke, H.: *Elektromagnetische Felder*, Springer, Berlin 2007.
- [Her96] Hertz, H.: *Über sehr schnelle elektrische Schwingungen*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Harri Deutsch, Thun 1996.
- [Heu05] Heuermann, H.: *Hochfrequenztechnik*, Vieweg, Wiesbaden 2005.
- [Hin88] Hinken, J.: *Supraleiter-Elektronik*, Springer, Berlin 1988.
- [Hip95] Hippel von, A.: *Dielectric Materials and Applications*, Artech House, Boston 1995.
- [Hock82] Hock, A.; Pauli, P.: *Antennentechnik*, Expert, Grafenau 1982.
- [Hof83] Hoffmann, R.K.: *Integrierte Mikrowellenschaltungen*, Springer, Berlin 1983.
- [Hua83] Huang, J.: *The Finite Ground Plane Effect on the Microstrip Antenna Radiation Pattern*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-31 (1983), 649-653.
- [Hur76] Hurd, R.A.: *The Edge Condition in Electromagnetics*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-24 (1976), 70-73.
- [Isk92] Iskander, M.F.: *Electromagnetic Fields & Waves*, Prentice Hall, Englewood Cliffs 1992.
- [Jac85] Jackson, D.R.; Alexopoulos, N.G.: *Gain Enhancement Methods for Printed Circuit Antennas*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-33 (1985), 976-987.
- [Jac91a] Jackson, D.R.; Williams, J.T.: *A Comparison of CAD Models for Radiation from Rectangular Microstrip Patches*, Int. J. Microw. Millimet. Wave Comput. Aided Eng. 1 (1991), 236-248.
- [Jac91b] Jackson, D.R.; Alexopoulos, N.G.: *Simple Approximate Formulas for Input Resistance, Bandwidth and Efficiency of a Resonant Rectangular Patch*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-39 (1991), 407-410.
- [Jac02] Jackson, J.D.: *Klassische Elektrodynamik*, De Gruyter, Berlin 2002.
- [Jan92] Janssen, W.: *Streifenleiter und Hohlleiter*, Hüthig, Heidelberg 1992.
- [Jas61] Jasik, H.: *Antenna Engineering Handbook*, McGraw-Hill, New York 1961.
- [JEL66] Jahnke-Emde-Lösch: *Tafeln höherer Funktionen*, Teubner, Stuttgart 1966.
- [Jeli87] Jelitto, R.J.: *Theoretische Physik 3: Elektrodynamik*, Aula, Wiesbaden 1987.
- [Joh93] Johnson, R.C.; Jasik, H.: *Antenna Engineer. Handb.*, McGraw-Hill, New York 1993.
- [Joos89] Joos, G.: *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Aula, Wiesbaden 1989.
- [Kara96] Kara, M.: *Formulas for the Computation of the Physical Properties of Rectangular Microstrip Antenna Elements with Various Substrate Thicknesses*, Microwave and Opt. Technol. Lett. 12 (1996), 234-239.

- [Kar84a] Kark, K.W.: *Theoretische Untersuchung von Kegelhorn- und Doppelkonusantennen mit Hilfe der Orthogonalentwicklung*, Studienarbeit Nr. 1296 am Institut für Hochfrequenztechnik, TU Darmstadt 1984.
- [Kar84b] Kark, K.W.: *Erstellen eines FORTRAN-Programmes zum Zeichnen von Feldbildern*, Diplomarbeit Nr. 1318 am Institut für Hochfrequenztechnik, TU Darmstadt 1984.
- [Kar87a] Kark, K.W.: *Störungstheoretische Berechnung elektromagnetischer Eigenwellen im torusförmigen Hohlleiter*, Kleinheubacher Berichte 30 (1987), 449-464.
- [Kar87b] Kark, K.W.: *Theoretische Untersuchungen zur Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in schwach inhomogenen Hohlleitern*, Dissertation D17, TU Darmstadt, Fakultät für Elektrotechnik 1987.
- [Kar88] Kark, K.W.: *Modenanalyse in toroidalen Taperhohlleit.*, ntz Archiv 10 (1988), 3-11.
- [Kar90] Kark, K.W.; Dill, R.: *A General Theory on the Graphical Representation of Antenna Radiation Fields*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-38 (1990), 160-165.
- [Kar91a] Kark, K.W.: *Oberflächenkonturfehler bei Reflektorantennen*, Kleinheubacher Berichte 34 (1991), 257-266.
- [Kar91b] Kark, K.W.: *Perturbation Analysis of Electromagnetic Eigenmodes in Toroidal Waveguides*, IEEE Trans. Microwave Theory Techn. MTT-39 (1991), 631-637.
- [Kar93] Kark, K.W.: *Strahlungseigenschaften des rechteckigen Rillenhorns*, Frequenz 47 (1993), 90-96.
- [Kar94] Kark, K.W.: *Linsenantennen mit asymmetrisch geformten Diagrammen*, ITG-Fachtagung „Antennen 1994“, Dresden, 12.-15. April 1994, ITG-Fachbericht Nr. 128, 181-186.
- [Kar96] Kark, K.W.: *Ein Trickfilm zur Wellenausbreitung in verzweigten Hohlleitern*, Kleinheubacher Berichte 39 (1996), 217-226.
- [Kar98a] Kark, K.W.: *Konvergenz und Wichtung von Orthogonalreihen bei Beugungsproblemen*, Frequenz 52 (1998), 14-20.
- [Kar98b] Kark, K.W.: *Finite Elemente Lösung von Eigenwellen in Hohlleitern mit geschichteter anisotroper Füllung*, Kleinheubacher Berichte 41 (1998), 535-541.
- [Kar99] Kark, K.W.: *Wie schnell ist schnell? Geschwindigkeitsdefinitionen bei der Übertragung von Signalen*, Frequenz 53 (1999), 226-232.
- [Kar00] Kark, K.W.: *Zum Tunneleffekt in Cutoff-Bereichen von Hohlleitern*, Kleinheubacher Berichte 43 (2000), 411-419.
- [Kar05] Kark, K.W.: *Superluminal Photonic Tunneling in Inhomogeneous Waveguides*, Frequenz 59 (2005), 51-58.
- [Kar06] Kark, K.W.: *Analytisches Näherungsverfahren zur Berechnung der Abstrahlung von Kegelhorn- und Rillenhornantennen mit Hilfe Lommelscher Funktionen*, unveröffentlichte Forschungsarbeit, Hochschule Ravensburg-Weingarten 2006.
- [Käs91] Käs, G.; Pauli, P.: *Mikrowellentechnik*, Franzis, München 1991.
- [Kie53] Kiely, D.G.: *Dielectric Aerials*, Methuen, London 1953.
- [Kilg69] Kilgus, C.C.: *Resonant Quadrifilar Helix*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-17 (1969), 349-351.
- [Kin56] King, R.W.P.: *Theory of Linear Antennas*, Harvard Univ. Press, Cambridge 1956.
- [Kin80] King, H.E.; Wong, J.L.: *Characteristics of 1 to 8 Wavelength Uniform Helical Antennas*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-28 (1980), 291-296.
- [Kli03] Klingbeil, H.: *Elektromagnetische Feldtheorie*, Teubner, Stuttgart 2003.
- [Koch60] Koch, G.F.: *Die verschiedenen Ansätze des Kirchhoffschen Prinzips und ihre Anwendungen auf die Beugungsdiagramme bei elektromagnetischen Wellen*. Int. J. Electron. Commun. (AEÜ) 14 (1960), 77-98 und 132-153.
- [Kor02] Korenev, B.G.: *Bessel Functions and their Applications*, Taylor & Francis, London 2002.
- [Kra50] Kraus, J.D.: *Antennas*, McGraw-Hill, New York 1950.

- [Kra88] Kraus, J.D.: *Antennas*, McGraw-Hill, New York 1988.
- [Kra91] Kraus, J.D.: *Electromagnetics*, McGraw-Hill, New York 1991.
- [Kra02] Kraus, J.D.; Marhefka, R.J.: *Antennas*, McGraw-Hill, New York 2002.
- [Krö90] Kröger, R.; Unbehauen, R.: *Elektrodynamik*, Teubner, Stuttgart 1990.
- [Küh64] Kühn, R.: *Mikrowellenantennen*, VEB Verlag Technik, Berlin 1964.
- [Küp05] Küpfmüller, K.; Mathis, W.; Reibiger, A.: *Theoretische Elektrotechnik*, Springer, Berlin 2005.
- [LaLi90] Landau, L.D.; Lifschitz, E.M.: *Elektrodynamik der Kontinua*. Harri Deutsch, Thun 1990.
- [LaLi97] Landau, L.D.; Lifschitz, E.M.: *Klassische Feldtheorie*, Harri Deutsch, Thun 1997.
- [Lan72] Landstorfer, F.; Liska, H.; Meinke, H.; Müller, B.: *Energieströmung in elektromagnetischen Wellenfeldern*, NTZ 5 (1972), 225-231.
- [Lang96] Langkau, R.; Lindström, G.; Scobel, W.: *Elektromagnetische Wellen*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1996.
- [Lar03] Larmor, J.: *On the Mathematical Expression of the Principle of Huygens*, Proc. London Math. Soc. 1 (1903), 1-13.
- [Lau21] Laue v., M.: *Die Relativitätstheorie*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1921.
- [Leh06] Lehner, G.: *Elektromagnetische Feldtheorie*, Springer, Berlin 2006.
- [Leu05] Leuchtmann, P.: *Einführung in die elektromagnetische Feldtheorie*, Pearson, München 2005.
- [Lew75] Lewin, L.: *Theory of waveguides*, Butterworth, London 1975.
- [Lier83] Lier, E.; Jakobsen, K.R.: *Rectangular Microstrip Patch Antennas with Infinite and Finite Ground Plane Dimensions*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-31 (1983), 978-984.
- [LoLe88] Lo, Y.T.; Lee, S.W.: *Antenna Handbook*, Van Nostrand Reinhold, New York 1988.
- [Lom86] Lommel, E.: *Beugungserscheinungen einer kreisrunden Öffnung und geradlinig begrenzter Schirme*, Abh. d. k. bayer. Akad. Wiss. 15 (1886), 229-328 und 529-664.
- [Lor95] Lorrain, P.; Corson, D.R.; Lorrain, F.: *Elektromagnetische Felder und Wellen*, De Gruyter, Berlin 1995.
- [Lösch51] Lösch, F.; Schoblik, F.: *Die Fakultät (Gammafunktion) und verwandte Funktionen*, Teubner, Leipzig 1951.
- [Love76] Love, A.W.: *Electromagnetic Horn Antennas*, IEEE Press, New York 1976.
- [Lud73] Ludwig, A.C.: *The Definition of Cross Polarization*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-21 (1973), 116-119.
- [Lun64] Luneburg, R.K.: *Mathematical Theory of Optics*, Univ. of California Press, Berkeley 1964.
- [Mac59] Maclean, T.S.M.; Kouyoumjian, R.G.: *The Bandwidth of Helical Antennas*, IRE Trans. Ant. Prop. AP-7 (1959), 379-386.
- [Mag48] Magnus, W.; Oberhettinger, F.: *Formeln und Sätze für die Speziellen Funktionen der Mathematischen Physik*, Springer, Berlin 1948.
- [Mah03] Mahony, J.D.: *Circular Microstrip-Patch Directivity Revisited: An Easily Computable Exact Expression*, IEEE Ant. Prop. Mag. 45 (Mrz. 2003), 120-122.
- [Mah05] Mahony, J.D.: *A Note on the Directivity of a Uniformly Excited Circular Aperture in an Infinite Ground Plane*, IEEE Ant. Prop. Mag. 47 (Nov. 2005), 87-89.
- [Mall43] Mallach, P.: *Dielektrische Richtstrahler für dm- und cm-Wellen*. In: Ausgewählte Fragen über Theorie und Technik von Antennen. Arbeitsbesprechung „Antennen“ der ZWB Berlin-Adlershof (1943), Heft 2, 132-169.
- [Mall49] Mallach, P.: *Dielektrische Richtstrahler*, NTZ 2 (1949), 33-39; NTZ 3 (1950), 325-328.
- [Mar93] Marcuvitz, N.: *Waveguide handbook*, Peter Peregrinus, London 1993.
- [Mat80] Matthaei, G.L.; Young, L.; Jones, E.M.T.: *Microwave Filters, Impedance-Matching Networks and Coupling Structures*, Artech House, Norwood 1980.

- [Mei66] Meinke, H.H.: *Einführung in die Elektrotechnik höherer Frequenzen (Zweiter Band: Elektromagnetische Felder und Wellen)*, Springer, Berlin 1966.
- [Mei68] Meinke, H.; Gundlach, F.W.: *Taschenbuch der Hochfrequenztechnik*, Springer, Berlin 1968.
- [Meix72] Meixner, J.: *The Behavior of Electromagnetic Fields at Edges*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-20 (1972), 442-446.
- [Miel98] Mielenz, K.D.: *Algorithms for Fresnel Diffraction at Rectangular and Circular Apertures*, J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. 103 (1998), 497-509.
- [Mit71] Mittra, R.; Lee, S.W.: *Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves*, MacMillan, New York 1971.
- [Möl58] Möll, G.: *Feldbilder des Hertzschen Dipols*, Diplomarbeit am Institut für fernmelde-technische Geräte und Anlagen, TU Darmstadt 1958.
- [Mo61a] Moon, P.; Spencer, D.E.: *Field Theory Handbook*, Springer, Berlin 1961.
- [Mo61b] Moon, P.; Spencer, D.E.: *Field Theory for Engineers*, van Nostrand, New York 1961.
- [Mor53] Morse, P.M.; Feshbach, H.: *Methods of Theoretical Physics*, McGraw Hill, New York 1953.
- [Mot86] Mott, H.: *Polarization in Antennas and Radar*, John Wiley, New York 1986.
- [Mül02] Müller, C.: *Numerische Berechnung phasengesteuerter Gruppenantennen*, Diplomarbeit am Institut für Nachrichtentechnik, Hochschule Ravensburg-Weingarten 2002.
- [Nar70] Narasimhan, M.S.; Rao, B.V.: *Diffraction by Wide-Flare-Angle Corrugated Conical Horns*, Electron. Lett. 6 (1970), 469-471.
- [Nar71] Narasimhan, M.S.; Rao, B.V.: *Modes in a Conical Horn: New Approach*, Proceedings of the IEE 118 (1971), 287-292.
- [Nol93] Nolting, W.: *Grundkurs Theoretische Physik 3: Elektrodynamik*, Zimmermann-Neufang, Ulmen 1993.
- [Pan69] Panofsky, W.K.; Phillips, M.: *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Reading 1969.
- [Pau81] Pauli, W.: *Theory of Relativity*, Dover Publications, New York 1981.
- [Peh88] Pehl, E.: *Mikrowellentechnik*, Hüthig, Heidelberg 1988.
- [Pen04] Pendry, J.B.; Smith, D.R.: *Reversing Light with Negative Refraction*, Physics Today 57 (Juni 2004), 37-43.
- [Per85] Perlmutter, P.; Shtrikman, S.; Treves, D.: *Electric Surface Current Model for the Analysis of Microstrip Antennas with Application to Rectangular Elements*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-33 (1985), 301-311.
- [Peu98] Peuse, T.: *Das Strahlungsfeld des Hertzsschen Dipols als Videoanimation*, Diplomarbeit am Institut für Nachrichtentechnik, Hochschule Ravensburg-Weingarten 1998.
- [Phi89] Philippow, E.: *Grundlagen der Elektrotechnik*, Hüthig, Heidelberg 1989.
- [Pie77] Piefke, G.: *Feldtheorie*, B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1977.
- [Pol49] Polder, D.: *On the Theory of Ferromagn. Resonance*, Phil. Mag. 40 (1949), 99-115.
- [Pös56] Pöschl, K.: *Mathem. Methoden in der Hochfrequenztechnik*, Springer, Berlin 1956.
- [Poz02] Pozar, D.M.: *PCAAD Software Package*, Antenna Design Associates, Leverett 2002.
- [Poz05] Pozar, D.M.: *Microwave Engineering*, John Wiley, Hoboken 2005.
- [Pue98] Puente Baliarda, C.; Romeu, J.; Pous, R.; Cardama, A.: *On the Behavior of the Sierpinski Multiband Fractal Antenna*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-46 (1998), 517-524.
- [Pue00] Puente Baliarda, C.; Borja Borau, C.; Navarro Rodero, M.; Romeu Robert, J.: *An Iterative Model for Fractal Antennas: Application to the Sierpinski Gasket Antenna*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-48 (2000), 713-719.
- [Pur89] Purcell, E.M.: *Elektrizität und Magnetismus*, Berkeley Physik Kurs Bd. 2, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1989.

- [Ram93] Ramo, S.; Whinnery, J.R.; Van Duzer, T.: *Fields and Waves in Communication Electronics*, John Wiley, New York 1993.
- [Reb99] Rebhan, E.: *Theoretische Physik, Band 1*, Spektrum, Heidelberg 1999.
- [Ren00] Rengarajan, S.R.; Rahmat-Samii, Y.: *The Field Equivalence Principle – Illustration of the Establishment of the Non-Intuitive Null Fields*, IEEE Ant. Prop. Mag. 42 (Aug. 2000), 122-128.
- [Ril02] Riley, K.F.; Hobson, M.P.; Bence, S.J.: *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge Univ. Press, 2002.
- [Rog03] *Width and Effective Dielectric Constant Equations for Design of Microstrip Transmission Lines*. <http://www.rogerscorp.com/documents/780/acm/Design-Data-for-Microstrip-Transmission-Lines-on-RT-duroid-Laminates.aspx>. Rogers Corporation.
- [Rot01] Rothammel, K.; Krischke, A.: *Antennenbuch*, DARC Verlag, Baunatal 2001.
- [Rud86] Rudge, A.W.; Milne, K.; Olver, A.D.; Knight, P.: *The Handbook of Antenna Design Vol. 1 and 2*, Peter Peregrinus, London 1986.
- [Rum57] Rumsey, V.H.: *Frequency Independent Antennas*, IRE National Convention Record (1957), 114-118.
- [Rus70] Rusch, W.V.T.; Potter, P.D.: *Analysis of Reflector Antennas*, Academic Press, New York 1970.
- [Ruz66] Ruze, J.: *Antenna Tolerance Theory – A Review*, Proc. IEEE 54 (1966), 633-640.
- [Sal07] Saleh, B.E.A.; Teich, M.C.: *Fundamentals of Photonics*, Wiley, Hoboken 2007.
- [Sau73] Sauter, F.: *Becker/Sauter – Theorie der Elektrizität Bd. I*, Teubner, Stuttgart, 1973.
- [Saw95] Sawaritzki, N.W.: *Supraleitung*, Harri Deutsch, Thun, 1995.
- [Scha56] Schaffeld, W.; Bayer, H.: *Über das Verhalten elektromagnetischer Wellen in kreiszylindrischen Hohlleitern im Bereich der Grenzfrequenz unter Berücksichtigung der endlichen Wandleitfähigkeit*. Int. J. Electron. Commun. (AEÜ) 10 (1956), 89-97.
- [Sche43] Schelkunoff, S.A.: *Electromagnetic Waves*, Van Nostrand, New York 1943.
- [Sche52a] Schelkunoff, S.A.: *Advanced Antenna Theory*, John Wiley, New York 1952.
- [Sche52b] Schelkunoff, S.A.; Friis, H.T.: *Antennas – Theory and Practice*, John Wiley, New York 1952.
- [Schi75] Schilling, H.: *Elektromagnetische Felder und Wellen*, Harri Deutsch, Zürich 1975.
- [Schr85] Schroth, A.; Stein, V.: *Moderne numerische Verfahren zur Lösung von Antennen- und Streuproblemen*, Oldenbourg, München 1985.
- [Schw90] Schwab, A.J.: *Begriffswelt der Feldtheorie*, Springer, Berlin 1990.
- [Schw98] Schwinger, J.; DeRaad, L.L.; Milton, K.A.; Tsai, W.: *Classical Electrodynamics*, Westview Press, Boulder 1998.
- [Sen55] Sensiper, S.: *Electromagnetic Wave Propagation on Helical Structures (A Review and Survey of Recent Progress)*, Proceedings of the IRE 43 (1955), 149-161.
- [Sieg34] Siegel, E.; Labus, J.: *Scheinwiderstand von Antennen*, Z. Hochfrequenztechnik und Elektroakustik 43 (1934), 166-172.
- [Sie92] Siemens AG: *Digitale Nachrichtenübertragung, Teil 4*, Siemens AG, Berlin 1992.
- [Sil49] Silver, S.: *Microwave Antenna Theory and Design*, McGraw-Hill, New York 1949.
- [Sim93] Simonyi, K.: *Theoretische Elektrotechnik*, Barth, Leipzig 1993.
- [Siw95] Siwiak, K.: *Radiowave Propagation and Antennas for Personal Communications*, Artech House, Boston 1995.
- [Some98] Someda, C.G.: *Electromagnetic Waves*, Chapman & Hall, London 1998.
- [Som77] Sommerfeld, A.: *Elektrodynamik*, Harri Deutsch, Thun 1977.
- [Som78] Sommerfeld, A.: *Optik*, Harri Deutsch, Thun 1978.
- [Som92] Sommerfeld, A.: *Mechanik der deformierbaren Medien*, Harri Deutsch, Thun 1992.
- [Son03] Song, C.T.P.; Hall, P.S.; Ghafouri-Shiraz, H.: *Perturbed Sierpinski Multiband Fractal Antenna with Improved Feeding Technique*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-51 (2003), 1011-1017.

- [Spa87] Spanier, J.; Oldham, K.B.: *An Atlas of Functions*, Hemisphere, Washington 1987.
- [Spi77] Spiegel, M.R.: *Schaum-Vektoranalysis*, McGraw-Hill, Düsseldorf 1977.
- [Spl91] Splitt, G.: *Effiziente Rechenverfahren zur Analyse von komplexen Einzel- und Gruppenantennen in Streifenleitungstechnik*, Dissertation, Universität GH Wuppertal, Fachbereich Elektrotechnik 1991.
- [Sröd05] Schröder, U.E.: *Spezielle Relativitätstheorie*, Harri Deutsch, Frankfurt 2005.
- [Sta94] Staelin, D.H.; Morgenthaler, A.W.; Kong, J.A.: *Electromagnetic Waves*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1994.
- [Ste64] Stegen, R.J.: *The Gain-Beamwidth Product of an Antenna*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-12 (1964), 505-506.
- [Sti84] Stirner, E.: *Antennen*, Hüthig, Heidelberg 1984.
- [Stra93] Strassacker, G.; Strassacker, P.: *Analytische und numerische Methoden der Feldberechnung*, Teubner, Stuttgart 1993.
- [Stra03] Strassacker, G.; Süsse, R.: *Rotation, Divergenz und Gradient*, Teubner, Stuttgart 2003.
- [Str07] Stratton, J.A.: *Electromagnetic Theory*, IEEE Press, New York 2007.
- [Stu98a] Stutzman, W.L.; Thiele, G.A.: *Antenna Theory and Design*, John Wiley, Hoboken 1998.
- [Stu98b] Stutzman, W.L.: *Estimating Directivity and Gain of Antennas*, IEEE Ant. Prop. Mag. 40 (Aug. 1998), 7-11.
- [Tai72] Tai, C.-T.: *Kirchhoff Theory: Scalar, Vector or Dyadic?*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-20 (1972), 114-115.
- [Tai97] Tai, C.-T.: *Generalized Vector and Dyadic Analysis*, IEEE Press, New York 1997.
- [Thi10] Thiel, D.V.: *Reciprocity*, IEEE Ant. Prop. Mag. 52 (Dez. 2010), 144.
- [Thu98] Thumm, M.; Wiesbeck, W.; Kern, S.: *Hochfrequenzmesstechnik*, Teubner, Stuttgart 1998.
- [Ung80] Unger, H.-G.: *Elektromagnetische Wellen auf Leitungen*, Hüthig, Heidelberg 1980.
- [Ung81] Unger, H.-G.: *Elektromagnetische Theorie für die Hochfrequenztechnik*, Hüthig, Heidelberg 1981.
- [Ung94] Unger, H.-G.: *Hochfrequenztechnik in Funk und Radar*, Teubner, Stuttgart 1994.
- [Van91] Van Bladel, J.: *Singular Electromagnetic Fields and Sources*, Clarendon Press, Oxford 1991.
- [Ver02] Verma, K.; Nasimuddin: *Simple Expressions for the Directivity of a Circular Microstrip Antenna*, IEEE Ant. Prop. Mag. 44 (Okt. 2002), 91-95.
- [Vit73] De Vito, G.; Stracca, G.B.: *Comments on the Design of Log-Periodic Dipole Antennas*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-21 (1973), 303-308.
- [Vog91] Voges, E.: *Hochfrequenztechnik*, Hüthig, Heidelberg 1991.
- [Vol07] Volakis, J.L.; Johnson, R.C.; Jasik, H.: *Antenna Engineering Handbook*, 4. Aufl., McGraw-Hill, New York 2007.
- [Walk04] Walker, J.: *The Analytical Theory of Light*, Cambridge Univ. Press, 1904.
- [Wat06] Watson, G.N *Theory of Bessel Functions*, Cambridge Univ. Press, 2006.
- [Wein03] Weiner, M.M.: *Monopole Antennas*, Dekker, New York 2003.
- [Weis83] v. Weiss, A.: *Die elektromagnet. Felder*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1983.
- [Weit03] Weisstein, E.W.: *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Chapman & Hall, London 2003.
- [Wer96] Werner, D.H.: *An Exact Integration Procedure for Vector Potentials of Thin Circular Loop Antennas*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-44 (1996), 157-165.
- [Wer99] Werner, D.H.; Haupt, R.L.; Werner, P.J.: *Fractal Antenna Engineering: The Theory and Design of Fractal Antenna Arrays*, IEEE Ant. Prop. Mag. 41 (Okt. 1999), 37-59.

- [Wer03] Werner, D.H.; Ganguly, S.: *An Overview of Fractal Antenna Engineering Research*, IEEE Ant. Prop. Mag. 45 (Feb. 2003), 38-57.
- [Whe47] Wheeler, H.A.: *A Helical Antenna for Circular Polarization*, Proc. I.R.E. 35 (1947), 1484-1488.
- [Will90] Williams, J.T.; Delgado, H.J.; Long, S.A.: *An Antenna Pattern Measurement Technique for Eliminating the Fields Scattered from the Edges of a Finite Ground Plane*, IEEE Trans. Ant. Prop. AP-38 (1990), 1815-1822.
- [Woh73] Wohlleben, R.; Mattes, H.: *Interferometrie in Radioastronomie und Radartechnik*, Vogel, Würzburg 1973.
- [Wol68] Wolff, I.: *Grundlagen und Anwendungen der Maxwellschen Theorie*, B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1968.
- [Woo80] Wood, P.J.: *Reflector Antenna Analysis and Design*, Peter Peregrinus, London 1980.
- [Wun89] Wunsch, G.; Schulz, H.-G.: *Elektromagnetische Felder*, VEB Verlag Technik, Berlin 1989.
- [Zim00] Zimmer, G.: *Hochfrequenztechnik - Lineare Modelle*, Springer, Berlin 2000.
- [Zim10] Zimmermann, M.: *Numerische Untersuchungen zur Optimierung von Hornantennen mit Hilfe dielektrischer Linsen*, Projektarbeit am Institut für Nachrichtentechnik, Hochschule Ravensburg-Weingarten 2010.
- [Zin95] Zinke, O.; Brunswig, H.: *Lehrbuch der Hochfrequenztechnik*, Springer, Berlin 1995.
- [Zuh53] Zuhrt, H.: *Elektromagnetische Strahlungsfelder*, Springer, Berlin 1953.
- [Zür95] Zürcher, J.F.; Gardiol, F.: *Broadband Patch Antennas*, Artech House, Boston 1995.

Sachwortverzeichnis

- A**beration..... 99
 Abschattung..... 173, 377ff., 386
 Aktive Strahlungszone..... 310, 325ff.
 Amplitudenmodulation..... 65
 Anisotrope Medien..... 33, 42
 Anregung von Hohlleiterwellen..... 128, 151
 Antennen
 – äquivalenter Raumwinkel..... 167f.
 – Bauformen..... 4f.
 – Eingangsimpedanz..... 261f., 323, 327f., 410
 – isotroper Strahler..... 158
 – Richtcharakteristik..... 56f., 161f.
 – Richtdiagramm im Freiraum..... 163f.
 – Richtdiagramm über Erde..... 300ff.
 – Verkopplung..... 273, 307f.
 – Wirkfläche..... 169ff., 347
 – Wirkungsgrad..... 166, 259
 Aperturantennen
 – Hohlleiterantenne..... 342
 – Kegelhorn..... 206, 359ff.
 – Koaxialstrahler..... 333
 – Kreisapertur..... 207, 347, 390
 – Linsenantennen..... 366ff.
 – Pyramidenhorn..... 353ff.
 – Rechteckapertur..... 336
 – Reflektorantennen..... 377
 – Rillenhorn..... 347, 359ff.
 – Sektorhorn..... 349ff.
 Aperturfeldmethode
 – Aperturfeldintegral..... 207, 334, 341
 – Chu-Modell..... 334ff., 346, 354, 358
 – E-Feld-Modell..... 340ff., 344, 346, 360, 364
 Aperturschirm..... 210, 340ff., 408
 Apex..... 350, 366ff.
 Äquipotenzialfläche..... 13
 Äquipotenziallinien → Höhenlinien
 Äquivalenztheorem → Huygenssches Prinzip
 Arbeit..... 30
 Aufpunkt..... 180, 189, 192f., 197
 Ausbreitungskonstante..... 60, 423
 – Dämpfungskonstante..... 60, 62, 68, 224
 – Phasenkonstante..... 60ff., 68, 129f., 224
 Ausstrahlungsbedingung..... 200
 Avanciertes Potenzial..... 181
 Azimutwinkel..... 17, 163, 217
Babinetsches Prinzip..... 210, 408ff.
 Balanced Hybrid Mode..... 347, 360
 Beam Efficiency..... 168, 426
 Belegungsfunktionen
 – binomial..... 294, 297
 – Kreisapertur..... 390ff.
 – Tschebyscheff..... 295, 297
 – uniform..... 294, 297
 Berechnungsverfahren..... 176
 Beschleunigungsfelder..... 54
 Beschleunigungslinsen..... 374
 Besselfunktionen..... 144f., 208, 232, 391
 – Neumannfunktionen..... 154f.
 – Riccati-Besselfunktionen..... 314
 – Riccati-Hankelfunktionen..... 314
 Beugung
 – an Aperturkante..... 381
 – geometrischer Schattenbereich..... 121
 – Kantenbeugung..... 120f.
 Beverage-Antenne → Langdrahtantenne
 Bewegte elektrische Punktladung
 – gleichförmige Bewegung..... 45, 51
 – kreisförmig beschleunigt..... 57
 – linear beschleunigt..... 56
 Binomialkoeffizienten..... 294f.
 Biot-Savartsches Gesetz..... 183f.
 Blinder Winkel..... 273, 290
 Borgnis-Beziehung..... 66, 132
 Brechungsgesetz..... 103
 Brechungsindex..... 50, 98, 103, 118, 366ff.
 Breitbandantennen..... 310ff.
 – Bandbreite..... 310
 – Doppelkonusantenne..... 310ff.
 – Fraktalantenne..... 329
 – konische Spiralantenne..... 414
 – logarithmisch-periodische Antenne..... 325ff.
 – selbstkomplementäre Antennen..... 329, 410
 – Spiralantenne..... 329
 Bremsstrahlung..... 56
 Brennweite
 – Linsenantennen..... 366
 – Reflektorantennen..... 378
 – Vergrößerungsfaktor..... 381
 Brewster-Winkel..... 111, 113
Cassegrain-Antenne → Reflektorantennen
 Cavity-Modell → Streifenleitungsantenne
 Chu-Modell → Aperturfeldmethode
 Cornuspirale..... 354
 Corrugated Horn → Rillenhorn
 Coulombsches Gesetz..... 3, 15, 35ff., 45, 51
 Cutoff-Frequenz → Grenzfrequenz
Dachkapazität..... 263ff.
 Dämpfung..... 60, 62, 68, 129, 131, 137, 147
 Diagrammschwenkung..... 277, 290ff., 375, 406f.
 Dielektrische Wellenleiter..... 416
 Dielektrizitätskonstante → Permittivität
 Diffusionsgleichung..... 40, 68
 Dipol..... 158ff., 215ff., 242ff.
 Dipollinie..... 274
 Dipolmoment..... 215
 Dipolstrahlung..... 112, 158f., 215ff.
 Dipolzeile..... 273
 Diracsche Deltafunktion..... 216
 Direktivität → Gewinn
 Direktordipol..... 284, 288f.
 Dirichletsches Randwertproblem..... 44
 Dispersion..... 66, 132
 Doppelbrechung..... 42
 Doppelkonusantenne..... 310ff.
 – Eigenfunktionen..... 313f.
 – Eigenwerte..... 315

- Gewinn 324f.
- Richtdiagramme 317, 322, 325
- Doppelkonusleitung 311f.
- Doppler-Effekt
 - Akustik 97
 - Elektrodynamik 98
 - Materie 98
 - Radartechnik 99
 - Vakuum 98f.
- Drehimpuls 83
- Drehkreuzantenne → Kreuzdipol
- Dreischichtenproblem 72, 112, 117ff.
- Dualität der Felder 185, 227, 408
- Durchbruchfeldstärke 123, 136, 153
- Durchlassfaktor 87f., 106
- Ebene Welle**
 - im Dielektrikum 59ff.
 - im Koaxialkabel 152ff.
 - im Leiter 68ff.
 - im Supraleiter 73ff.
 - im Zweileitersystem 124
 - Leistungstransport 80, 93, 153
 - Wellenlänge 62
- Edge Taper 391ff.
- E-Feld-Modell → Aperturfeldmethode
- Eichnormal 359
- Eigenwertproblem 128, 155, 314f.
- Eindeutigkeitssatz 176
- Eindringtiefe → Skineffekt
- Einfallsebene 100
- Einfügungsdämpfung 371
- Eingangsimpedanz 242, 261f., 323, 410
- Eingeprägte Quellströme 34, 177
- Einheitsvektoren 7ff., 27
- Einzelcharakteristik 271, 407, 413
- EIRP 166
- Elektrische Länge 264f.
- Elektrostatik
 - Coulombsches Gesetz 3, 15, 35ff., 45, 51
 - elektrische Punktladung 15, 45
 - Grundgleichungen 35
- Elementarladung 3
- Elementarstrahler
 - elektrischer → Hertzscher Dipol
 - magnetischer → Fitzgeraldscher Dipol
- Elevationswinkel 163, 217
- Empfangsantenne 4, 169ff.
- Empfangsleistung 169
- Endeffekt → Dachkapazität
- Energiedichte 30
- Energieerhaltungssatz 30
- Energiestromlinien 171, 332
- Energiestromdichte 31, 159
- Energiewirbel 273, 290
- Entartung 131, 146
- Evaneszente Felder 115, 131
- E-Wellen → Hohlleiter
- Faltdipol** 288f.
- Faltungsintegral 58, 180
- Faraday-Rotation 42
- Feldkonstanten des Vakuums 33
- Feldlinien .. 124ff., 139ff., 147ff., 156, 221ff., 318
- Feldliniendivergenz 38
- Feldstärke, elektrische bzw. magnetische ... 3, 43f.
- Feldverdrängung → Skineffekt
- Feldwellenwiderstand → Wellenwiderstand
- FEM: Finite-Elemente-Methode 156
- Fernfeld 54, 189ff., 319
 - Abstand 193ff., 220, 352
 - Berechnungsformeln 198
 - Fraunhofer-Gebiet 192ff., 208f.
 - Fresnel-Gebiet 191, 208f.
 - Nahfeld 54, 194, 220, 319
 - Rayleigh-Abstand 193f.
- Ferrit 42, 85, 149, 161
- Ferritantenne 229
- Finite-Elemente-Methode 155
- Fitzgeraldscher Dipol 227ff.
- Fitzgeraldsche Transformation 185, 227, 408
- Flächenelement 159
- Flächenladungsdichte 44
- Flächennormale 24, 44
- Flächenstromdichte 44, 204, 334, 400
- Flächenwirkungsgrad
 - Definition 172
 - Kegelhorn 363, 426
 - Kreisapertur 347, 391
 - Pyramidenhorn 357
 - Rechteckapertur 347
 - Reflektorantenne 378f., 384ff.
 - Rillenhorn 363, 426
 - Sektorhorn 357, 426
- Fluss, elektrischer bzw. magnetischer 34
- Flussdichte, elektrische bzw. magnetische ... 3, 43f.
- Formelsammlung 419ff.
- Fourier-Integral 41, 58, 197
- Fourier-Reihe 41, 137
- Fraktalantenne 329f.
- Franzsche Formeln 187, 204
- Fraunhofer-Gebiet → Fernfeld
- Freiraumwellenlänge 1, 60
- Frequenzbereiche 1
- Fresnel-Gebiet → Fernfeld
- Fresnelsche Formeln 104ff.
- Fresnelsche Integrale 120, 354
- Fresnelscher Mitführungskoeffizient 98
- Fußpunkt → Speisepunkt
- Galilei-Transformation** 47
- Gammafunktion 314, 391
- Ganghöhe 412
- Ganzwellendipol 248, 260, 262, 264f., 267f.
- Geometrische Beugungstheorie - GTD 403
- Geometrische Optik - GO 382, 384
- Gesamtcharakteristik 271, 275, 294, 302
- Geschwindigkeiten
 - Energiegeschwindigkeit 67, 224
 - Frontgeschwindigkeit 64
 - Gruppengeschwindigkeit 65, 131f., 146, 224
 - Phasengeschwindigkeit 63, 131, 146, 224, 374
 - Signalgeschwindigkeit 67
- Geschwindigkeitsfelder 54
- Gewinn 165ff.
 - Aperturantennen 172, 210, 347, 369, 378f.
 - Doppelkonusantenne 324f.

- Doppelkonusleitung 312
- Gruppenantennen 284ff., 300, 424
- Hertzscher Dipol 166, 168
- Kegelhorn 361f., 369
- Langdrahtantenne 254
- Linearantenne 266ff.
- Linsenantenne 369ff.
- Oberflächenwellenantenne 416
- Pyramidenhorn 355ff.
- Rahmenantenne 235, 240
- Reflektorantenne 172, 378f., 384ff.
- Rillenhorn 361f.
- Sektorhorn 355ff.
- Stielstrahler 416
- Streifenleitungsantenne 403ff., 418
- Wendelantenne 414
- Gibbssches Phänomen 142, 258, 286, 316
- Gleichwinkelantenne 329
- Graßmannscher Entwicklungssatz 12
- Grating Lobes 277, 286, 297f.
- Greensche Funktion 181
- Gregory-Antenne → Reflektorantennen
- Grenzfrequenz → Hohlleiter
- Grenzradius 220, 318
- Grenzschicht → Trennfläche
- Grenzstromlinien 171f.
- Grenzwinkel → Totalreflexion
- Grundwelle → Hohlleiter
- Gruppenantennen 270ff.
- Amplitudenbelegung 292ff.
- ebene Gruppen 299f., 406
- Gewinn 284ff.
- Gruppenfaktor 273, 400, 402
- Hansen-Woodyard-arrays 286f.
- in Streifenleitungstechnik 406f.
- Kopplung 273, 307f.
- Kreisgruppen 270
- Längsstrahler 280ff., 286f., 325f., 417
- lineare Gruppen 273ff.
- multiplikatives Gesetz 271, 273, 294, 299, 302
- Phasensteuerung 290, 406
- Querstrahler 278ff.
- räumliche Gruppen 272f.
- Richtcharakteristik 275f.
- Speisung 282ff.
- verdünnte Gruppen 296ff.
- Gruppenlaufzeit 132
- Gruppenpolynom 293
- Gütezahl 151
- Gyrotrope Medien 42
- Halbebenenproblem** 120f.
- Halbwellendipol 247, 252, 260ff., 267f.
- Halbwellen-Transformator 118
- Halbwertsbreite 163
- Gruppenantennen 280, 424
- Halbwertswinkel 194
- Hertzscher Dipol 163
- Kegelhorn 363, 426
- Kreisapertur 392, 425
- Oberflächenwellenantenne 416
- Pyramidenhorn 357
- Rechteckapertur 339, 425
- Rechteckhohlleiter 346
- Reflektorantenne 379, 384
- Rillenhorn 363, 426
- Sektorhorn 357, 426
- Stielstrahler 416
- Streifenleitungsantenne 403, 407
- Wendelantenne 414
- Yagi-Uda-Antenne 289
- Hankelfunktionen → Besselfunktionen
- Hansen-Woodyard Belegung 286f., 413
- Hauptkeule 163f., 168
- Helixantenne → Wendelantenne
- quadrifilare Helixantenne 415
- Helmholtz-Gleichung 40, 59, 76, 129, 143, 178
- Helmholtzsches Theorem 26, 180
- Hertzscher Dipol 158ff., 199, 215ff., 385
- Hilbert-Transformation 262
- Hilfsreflektor → Subreflektor
- Historischer Überblick 5
- Hochfrequenz 1
- Höhenlinien 14, 140, 147, 222f.
- Hohlleiter 123ff.
- Anregung von Hohlleiterwellen 128, 151
- Ausbreitungskonstante 130, 146, 336
- Bandbreite 134f., 137, 146f., 148
- dreieckiger Querschnitt 149
- elliptischer Querschnitt 148f.
- entartete Eigenwellen 131, 146
- E-Wellen (TM-Wellen) 124, 143
- Feldbilder 124ff., 141, 147ff.
- Feldwellenwiderstand 132f., 145
- Grenzfrequenz 123, 131, 135, 146, 155
- Grenzwellenzahl 130
- Grundwelle 124, 134, 146
- Gruppengeschwindigkeit 131f., 146
- H-Wellen (TE-Wellen) 124, 144
- inhomogene Hohlleiter 150
- Leistungstransport 135f.
- Modenkonversion 136, 148
- Phasengeschwindigkeit 131, 146
- quadratischer Querschnitt 148
- Rechteckhohlleiter 128ff.
- Rundhohlleiter 142ff.
- Separationsgleichung 129, 144, 151
- Verluste in Hohlleitern 137, 147, 425
- Hohlraumresonator 151
- Horizontaldiagramm 163
- Hornstrahler → Aperturantennen
- Huygens-Quelle 336ff., 347
- Huygenssches Prinzip
- Äquivalenztheorem 203ff., 340
- Physikalische Optik 207, 333
- skalare Formulierung 206ff.
- vektorielle Formulierung 203ff.
- H-Wellen → Hohlleiter
- H₁₀-Welle 124f., 134ff.
- Impedanztransformation** 321
- Impuls 94
- Impulsdichte 30, 94
- Induktion 33, 44, 49
- Inertialsystem 46
- Influenz 44

- Informationstheorie 63
 Inhomogene Welle 115f.
 Innenleiter 152ff.
 Integralkosinus-Funktion 257
 Integralsätze
 – Linienintegrale 23
 – Satz von Gauß 25, 31, 36f.
 – Satz von Stokes 24, 34
 Integralsinus-Funktion 257
 Interferenz 121, 248, 270, 273, 280, 290
 Intersymbolstörungen 132
 Ionosphäre 42
Kantenbedingung 201f.
 – und Orthogonalreihen 139, 142
 Kantenbeugung → Beugung
 Kausalität 67, 181
 Kegelhorn → Aperturantennen
 Kirchhoffsche Gleichungen 2
 Knoten einer stehenden Welle 90f.
 Koaxialleitung 123, 152ff.
 – Abstrahlung 333
 – Grundwelle 152
 – Leistungstransport 153
 – höhere Wellentypen 154
 Komplexe Amplitude 32, 40f.
 Konservatives Vektorfeld 23
 Kontinuitätsgleichung 36
 Konturfehler von Reflektorantennen
 – Gewinnverlust 387ff.
 – Oberflächengüten 390
 – Rayleigh-Kriterium 387
 – statistische Konturfehler 387ff.
 – systematische Konturfehler 387
 Konvektionsstrom 34, 50, 74
 Konzentrierte Bauelemente 2
 Koordinatensysteme
 – kartesisch 8, 27
 – sphärisch 15, 27
 – toroidal 150
 – zylindrisch 17, 27
 Koordinatentransformationen 27
 Kopolarisation → Polarisation
 Koppelkoeffizienten 307
 Kraftgesetz 3, 30, 33, 75
 Kreisapertur
 – abfallende Belegung 390ff.
 – homogene Belegung 207ff.
 Kreuzdipol 173, 213, 287
 Kreuzpolarisation → Polarisation
 Kristall 42
 Kronecker-Symbol 144f., 320
 Kugelfunktionen 313
 Kugelstrahler 158
 Kugelwellen 158, 191, 201, 219, 316ff.
 – Grenzradius 220, 318
 kurzer Dipol 247, 258
Ladungserhaltungssatz 35f.
 Lagrange-Identitäten 12
 Langdrahtantenne 253ff.
 Längsstrahler 280ff., 286f., 325f., 412ff.
 Laplace-Gleichung 38
 Larmorsche Formel 55
 Lecher-Wellen 124
 Leckwellenantenne 416
 Legendre-Polynome 313
 – Orthogonalität 320
 Leistung 31f., 165ff.
 – bei Aperturstrahlern 333, 337
 – in Hohlleitern 123, 135f., 153
 – Leistungsanpassung 169, 262
 – Leistungstransport 79f., 93
 – Strahlungsleistung 55, 159, 239, 256, 312
 – Verlustleistung 259
 Leitfähigkeit
 – elektrische 72, 427
 – Supraleitung 78
 Leitungen 123
 Leitungstheorie 321
 Leitungswellenwiderstand → Wellenwiderstand
 Lichtgeschwindigkeit 1, 46, 63
 Lichtwellenleiter → Totalreflexion
 Linearantennen 242ff.
 – Dipol 242
 – Monopol 242, 332
 – Richtcharakteristik 247
 – Richtdiagramme 249ff.
 – Schlankheitsgrad 244
 – Stromverteilung 242, 245, 252
 – Verkürzungsfaktor 263ff.
 Linienelement 24, 28
 Linsen 118
 Linsenantennen
 – Aperturlinse 369
 – Beschleunigungslinse 374
 – Einfügungsdämpfung 371, 373
 – Gewinn 369ff.
 – Linsenrandwinkel 370ff., 376
 – Luneburg-Linse 375
 – optimale Permittivität 370
 – Richtdiagramme 373
 – Verzögerungslinse 366ff., 375
 Litzendraht 71
 Logarithmisch-periodische Antenne 325ff.
 – Abstandsfaktor 326
 – Eingangswiderstand 328
 – Gewinn 327
 – Skalierungsfaktor 326
 – Strukturbandbreite 327
 Logarithmisch-periodisches Verhalten 330
 Lommelsche Funktionen 208, 361, 421
 Lorentz-Eichung → Lorenz-Eichung
 Londonsche Gleichungen → Supraleitung
 Lorentz-Kontraktion 53
 Lorentzsches Kraftgesetz 3, 30, 33, 75
 Lorentz-Transformation
 – der Felder 48ff.
 – der Raumzeit 47
 Lorenz-Eichung 180
 Luftspalt 38
 Luneburg-Linse 375
Magnetischer Kreis 38
 Magnetischer Monopol 4, 177
 Magnetostatik 35
 Materialeigenschaften (Tabelle) 427

- Materialgleichungen 3f., 33, 39, 42, 50
 Maxwellsche Gleichungen 32ff., 176ff.
 – Divergenzgleichungen 37
 – Durchflutungsgesetz 33
 – Induktionsgesetz 33
 – Integralform 34
 Meerwasser 81
 Mehrspiegelantennen 378, 380
 Metallplattenlinsen 374
 Metamaterial 89, 103
 Metrikkoeffizienten 14, 422
 Microstrip → Streifenleitungsantenne
 Mikrowellen 1, 394
 Mode Matching → Orthogonalentwicklung
 Modenkonversion 136, 148
 Momentenmethode 176, 290, 328, 414
 Monochromatische Welle 63f.
 Monopol 242, 259, 268
 Multiband-Antennen 330
 Multiplikatives Gesetz 271, 273, 294, 299, 302
 Multipol 317
N
 Nabla-Operator 14, 28
 Nahfeld 54, 194, 220, 319
 Naturkonstanten XII
 Nebenkeulen 164, 210, 339, 358, 384, 391f.
 Nebenzipfeldämpfung 164
 Neumannfunktionen → Besselfunktionen
 Neumannsches Randwertproblem 44
 Normalkomponenten 43f.
 Nullstellen der
 – Besselfunktionen 145
 – Neumannfunktionen 154
 Nullwertbreite 164
 – Gruppenantennen 279, 282, 424
 – Hertzscher Dipol 164
 – Kreisapertur 392, 425
 – Langdrahtantenne 269
 – Rechteckapertur 339, 425
 – Rechteckhohlleiter 346
 – Nullwertswinkel 167, 194
 – Wendelantenne 418
O
 Oberflächenwellen 398, 416
 Obergruppen 271
 Offset-Speisung 378, 380
 Ohmscher Widerstand 71, 73, 259
 Ohmsches Gesetz 34, 50
 Optimalhorn 355ff., 359ff., 369ff.
 Orthogonalentwicklung 137ff., 313ff.
 – Anregungskoeffizienten 322
 – Anzahl der Eigenwellen 139, 315
 – Feldansatz 138, 313
 Ortskurven 323
P
 Paraboloid 377, 380f., 385, 387
 Parasitäre Hauptkeulen → Grating Lobes
 Parasitäre Strahler 289
 Pascalsches Dreieck 295
 Patch-Antenne → Streifenleitungsantenne
 Pattern Factor 168, 426
 Peak Gain → Wendelantenne
 Permeabilität
 – des Vakuums 1, 33
 – relative 33, 89
 Permittivität
 – des Vakuums 1, 33
 – effektive 395f.
 – komplexe 41
 – relative 33, 89, 427
 Phasenfehler 193, 351f., 354ff., 359ff., 386ff.
 Phasenfront 62, 97, 115, 191, 200, 350, 366, 377
 Phasengesteuerte Gruppenantennen 290ff.
 – Elementabstand 277, 406
 – Schwenkwinkel 277, 290ff., 406f.
 Phasenkonstante 60ff., 68, 129f., 224
 Phasenzentrum 350, 381
 Phasor → Komplexe Amplitude
 Photon 94, 423
 Photonische Kristalle 103
 Physikalische Optik 207, 333, 379, 384
 Planarantenne → Streifenleitungsantenne
 Plasma 42, 85
 Plasmaschweif 94
 Poisson-Gleichung 38
 Polardiagramm 164
 Polarisation 173
 – Achsenverhältnis 84, 86, 414
 – elliptische 83, 85, 212
 – Kopolarisation 211ff., 338, 345
 – Kreuzpolarisation 211ff., 338, 346, 384
 – Kreuzpolarisationsmaß 213, 346, 363
 – lineare 82
 – Poincaré-Kugel 85
 – Polarisationsellipse 84
 – Polarisationsmultiplex 148
 – Polarisationswirkungsgrad 174
 – zirkulare 82, 213, 411
 Potenzialfunktion 23, 179 ff., 207, 222f.
 Poyntingscher Satz 31, 32
 Poyntingscher Vektor
 – komplexer 32, 158f., 312
 – reeller 30
 Primärstrahler 377ff., 385
 Produktansatz → Separationsansatz
 Pyramidenhorn → Aperturantennen
Q
 Quasistationär 35
 Quellenfeld 16, 19, 22, 26
 Quellpunkt 180f., 189
 Querstrahler 278ff., 286, 292, 294, 406
R
 Radar 95ff.
 – Radarsichtbarkeit 89
 – Reflexionsfaktor 96
 Radom 118, 378
 Rahmenantenne 229ff.
 Randabfall → Edge Taper
 Randbedingungen
 – auf metallischer Wand 43, 91
 – Dirichlet 44, 130
 – Neumann 44, 130
 Randwertproblem 128
 Raumladungsdichte 35f., 50
 Raumwinkel → Antennen
 Rechteckhohlleiter → Hohlleiter
 Rechte-Hand-Regel 105
 Rechtsschraube 24, 82

- Reflektorantennen 377ff.
 – Cassegrain-Antenne 377f., 380f.
 – Gregory-Antenne 380
 – Hornparabolantenne 377f.
 – Konturfehler 386ff.
 – Muschelantenne 377f.
 – Offset-Speisung 380
 – Parabolantenne 172, 377
 – Spillover 377, 387, 393
 Reflektordipol 284, 288f.
 Reflexionsfaktor 87f., 96, 106, 321f., 330, 333
 Reflexionsgesetz 99, 103
 Relativitätsprinzip 45
 – Addition von Geschwindigkeiten 48
 – Induktionsgesetz bewegter Körper 49
 – Invarianz der Feldgleichungen 48
 Relaxation 64
 Retardierte Potenzial 181, 216f.
 Retardierte Zeit 54
 Return Loss 330
 Reziprozität 161, 205, 170, 260
 Rhombus-Antenne 254
 Riccati → Besselfunktionen
 Richtantennen 270f.
 Richtdiagramm → Antennen
 Richtfaktor → Gewinn
 Ridge Waveguide → Steghohlleiter
 Rillenhorn → Aperturantennen
 Röntgenstrahlung 56
 Rückstrahlung 288
 Ruhssystem 47, 50f.
 Rundhohlleiter → Hohlleiter
 Rundstrahler 161
S
 Schattenbereich 120f.
 Schirmblech 72, 119
 Schlankheitsgrad 244, 264
 Schlitantennen 408ff.
 – Eingangsimpedanz 410
 – Hohlleiterschlitantennen 410f.
 – Selbstkomplementarität 410
 Schwenkwinkel 277, 290ff., 406f.
 Schwebung 64
 Schwingung → stehende Welle
 Sekundärwellen 203
 Separationsansatz 129f., 143f.
 Sektorhorn → Aperturantennen
 Sichtbarer Bereich 276f., 286, 297
 si-Funktion 254
 Signale 63ff.
 Skalar 8, 13
 Skineffekt
 – äquivalente Leitschichtdicke 68
 – Eindringtiefe 68, 131, 259
 – Stromverdrängung 69
 – Supraleitung 77
 Snelliussches Brechungsgesetz 103, 109, 111
 Solarkonstante 81, 94
 Spannung 2, 34, 49
 Speisernetzwerk 394, 406f.
 Speisepunkt 242, 245, 261f.
 Speisespalt 264f.
 Speisespannung 262
 Speisestrom 245, 262
 Spiegelantennen → Reflektorantennen
 Spiegelungsverfahren 206, 300f., 340f.
 Spillover → Überstrahlung
 Spiralantenne 329
 – konische Spiralantenne 415
 Spulenantenne → Wendelantenne
 Steghohlleiter 148
 Stehende Welle 90
 Stetigkeitsbedingungen 43, 101
 Stielstrahler 416
 – Bandbreite 417
 – Kreuzpolarisation 417
 – Nebenkeulen 417
 Stirlingsche Formel 314
 Strahlenoptik → Geometrische Optik
 Strahlungsämpfung 248, 261
 Strahlungsdichte → Poyntingscher Vektor
 Strahlungsdruck 94
 Strahlungskopplung 273, 307f.
 Strahlungsleistung → Leistung
 Strahlungsleitwert 404f.
 Strahlungswiderstand 160, 257ff., 424
 Streifenleitungsantenne 394ff.
 – Anregung 395, 407
 – Bandbreite 398
 – Cavity-Modell 399ff., 418
 – effektive Patchbreite 396
 – effektive Patchlänge 396
 – Einfluss der Grundplatte 403f.
 – Gruppenbauweise 406f.
 – Halbwellenresonanz 396f., 399, 418
 – Kantenbeugung 403f.
 – Kreis-Patch 418
 – Leitungswellenwiderstand 396
 – non-radiating slots 401, 404f.
 – Oberflächenwellen 398
 – Patch-Element 394
 – radiating slots 401, 404f.
 – Rechteck-Patch 397, 399ff.
 – Resonatormodell 399ff.
 – Richtfaktor 403ff., 418
 – Richtdiagramme 403, 407
 – Speisepunkt 397
 – Spiegelungsverfahren 402
 – Strahlungsleistung 404
 – Strahlungsleitwert 404f.
 – Substratwahl 398
 Streufaktor 229
 Strom 2f., 32, 36
 Stromdichte
 – eingeprägte 34, 177
 – konvektive 34
 – ohmsche 34
 Stromfaden 182
 Strömungsfeld 35
 Stromverdrängung → Skineffekt
 Stromverteilung 242ff., 252f.
 Subreflektor 378, 380ff., 385, 387
 Superluminal 67
 Superposition 40
 Supraleitung
 – BCS-Theorie 73

- Cooper-Paar 73
- kritische Feldstärke 79
- Londonsche Eindringtiefe 77
- Londonsche Gleichungen 74ff.
- Londonsche Konstante 75ff.
- Meißner-Ochsenfeld-Effekt 77
- Sprungtemperatur 73f., 77
- Wechselstromverluste 78
- Zwei-Flüssigkeiten-Modell 74
- Synchrotronstrahlung 55, 57
- T**angentialkomponenten 43f.
- Telegrafengleichung 39, 76
- TE-Welle → Hohlleiter
- TEM-Welle → ebene Welle
- Tensorgleichungen 42
- Terahertz-Anwendungen 1
- TM-Welle → Hohlleiter
- Torus 150
- Totales Differenzial 13
- Totalreflexion 114ff.
 - evaneszente Felder 115
 - Grenzwinkel, kritischer Winkel 114
 - Lichtwellenleiter 116
- Totaltransmission 108ff.
 - Brewster-Winkel 110ff.
- Trennfläche
 - Einfallsebene 100
 - senkrechter Einfall 86ff.
 - schiefer Einfall 100ff.
- Tschebyscheff-Belegung 295, 297
- Turnstile-Antenne → Kreuzdipol
- Ü**berlagerungsprinzip → Superposition
- Überstrahlung 377f., 382, 387, 393
- Übertragungssymmetrie → Reziprozität
- Umlaufintegral 24
- Untergruppen 271, 299, 330
- V**akuum
 - Feldkonstanten 33
 - Lichtgeschwindigkeit 1, 63, 67
- V-Antenne 254
- Vektor 8
- Vektoralgebra
 - Einheitsvektor 8
 - Entwicklungssatz 12
 - Koordinatensysteme 27
 - Lagrange-Identitäten 12
 - Skalarprodukt 9
 - Spatprodukt 11
 - Vektorprodukt 10
- Vektoranalysis
 - d'Alembert-Operator 40
 - Divergenz 16
 - Gradient 13
 - Koordinatensysteme 28
 - Laplace-Operator 18, 20
 - Nabla-Operator 14, 20
 - Rechenregeln 22
 - Rotation 19
- Vektorpotenzial
 - elektrisches 185, 334, 400
 - magnetisches 35, 179ff., 334
- Verkürzungsfaktor 263ff., 396
- Verluste in Hohlleitern 137, 147, 425
- Verlustfaktor 41, 427
- Verschiebungsstromdichte 40
- Vertikaldiagramm 163
- Verzögerungslinsen 366ff., 375
- Verzweigungsschnitt 120
- Vierschichtenproblem 119
- Viertelwellen-Transformator 118, 373
- Volumenelement 25, 28
- Vorschwinger 132
- W**anderwelle 90
- Wanderwellenantenne → Langdrahtantenne
- Wandimpedanz 70
- Wärmeleitungsgleichung 40, 68
- Wellenfront 64, 67
- Wellengleichung 39
- Wellenlänge 1, 41, 60, 62, 103, 115, 124, 130
- Wellenpaket 64ff.
- Wellentyp 124ff.
- Wellentypwandler 4
- Wellenwiderstand
 - Feldwellenimpedanz 60, 117, 318
 - Feldwellenwiderstand 132f., 145, 159
 - Leitungswellenwiderstand 152, 311, 396
- Wellenzahl 41
- Wellenzahlvektor 79
- Wendelantenne 412ff.
 - Betriebsarten 413
 - Eingangswiderstand 414
 - Halbwertsbreite 414
 - konische Spiralantenne 415
 - Nullwertsbreite 418
 - Peak Gain 413f.
 - Richtcharakteristik 413f.
 - Stabilitätsbereich 415
- Wirbelfeld 16, 22, 26
- Wirkfläche → Antennen
- Wirksame Antennenlänge 263
- Wirkungsgrad 259
- Y**agi-Uda-Antenne 288f.
- Z**eitdilatation 99
- Zeittafel 5
- Zirkulation 24, 34
- zyklische Vertauschung 10, 12, 19, 21, 422
- Zylinderantenne 243ff.
- Zylinderfunktionen → Besselfunktionen

Personenverzeichnis

A lembert, J.....	40	Müller, K.A.....	74
Ampère, A.M.	33	N eumann, C.G.	143
B abinet, J.	210	Neumann, F.E.	44
Bardeen, J.	73	Newton, I.	380
Bednorz, J.G.	74	O chsenfeld, R.	77
Bernoulli, J.	40	P ascal, B.	294
Bessel, F.W.	143	Poincaré, J.H.	85
Biot, J.-B.	183	Poisson, S.D.	38
Brewster, D.	111	Poynting, J.H.	30
C ascegrain, N.	378	R iccati, I.F.	314
Cauchy, A.L.	262	S avart, F.	183
Cooper, L.N.	73	Schrieffer, J.R.	73
Cornu, A.	354	Snellius, W.	103
Coulomb, C.A.	3	Sommerfeld, A.J.W.	200
Curie, P.	177	Stirling, J.	314
D escartes, R.	27	Stokes, G.G.	24
Dirac, P.A.M.	216		
Dirichlet, J.P.G.	44		
Doppler, C.J.	97		
E instein, A.	46		
F araday, M.	33		
Feynman, R.P.	21		
Fitzgerald, G.F.	185		
Fourier, J.-B.J.	40		
Fraunhofer, J.	189		
Fresnel, A.J.	98		
G alilei, G.	47		
Gauß, C.F.	25		
Gibbs, J.W.	142		
Ginsburg, W.L.	73		
Graßmann, H.G.	12		
Gregory, J.	380		
H amilton, W.R.	14		
Hankel, H.	314		
Helmholtz, H.L.F.	26		
Hertz, H.R.	49		
Hilbert, D.	262		
Huygens, C.	203		
K amerlingh Onnes, H.	73		
Kirchhoff, G.R.	2		
L agrange, J.L.	12		
Landau, L.D.	73		
Laplace, P.S.	18		
Larmor, J.	55		
Lecher, E.	124		
Legendre, A.-M.	313		
Liénard, A.M.	55		
London, F.W.	73		
London, H.	73		
Lorentz, H.A.	3		
Lorenz, L.	180		
M axwell, J.C.	32		
Meißner, F.W.	77		
Mie, G.A.F.W.L.	68		